Salvator delmonde
1735

jeanne

isabelle

EXAMINATIO
&
EMENDATIO
Mathematicæ Hodiernæ.

Qualis explicatur in libris Johannis *Wallisii* Geometriæ Professoris *Saviliani* in Academia *Oxoniensi*.

Distributa in sex Dialogos.

Authore
THOMA HOBBES Malmesburiensi.

LONDINI,
Excusum sumptibus *Andreæ Crooke*, sub signo Draconis viridis in Cœmiterio *B. Pauli*. 1660.

pa: 49

pa: 64

pa: 79

Clarissimo Viro Domino Verdusio nobili Aquitano Χαίρειν.

Charissime Verdusi,

Mitto ad te libellum recens editum, tibi do, & dedico. Primo, Quia placiturum credo. Mihine, tuus, inquies, hominis Haeretici? Ne tumultuare. Nihil hic invenies quod non possis sine scandalo Ecclesiæ tuæ approbare. Geometria, si hæretica est, tanto forte probabilior est. In doctrinis enim purè humanis, nihil tam Catholicum est quam Errare. Condonemus ergo mutuò (ut Homericè loquar σὸι μὲν ἔγω, σύδε μὸι *) ea quæ diversè didicimus in Sacris. Secundò, Quia, ingenium tuum novi liberum, candidum, acutum.*

acutum. Postremò, Quia amicitiam nostram aliquo modo signatam esse volui, nec alio potui. Quod tam paucis te alloquar, si id quoque amicitiæ tribueris, facies quod æquum est. Vale.

Servorum tuorum obsequentissimus

Jul. 1660. THO. HOBBES

Dialogus

Figuræ (præter eas quæ sunt impressæ in marginem) ad finem cujusq; Dialogi reperientur.

Dialogus

Errata sic Corrigenda.

PAge 4. li. 27. *pro notâ se* lege *notasse*. p. 5. l. 27. pro A-- $\frac{1}{2}$ lege A-- $\frac{3}{2}$ p.6. l.16. pro *ipsa* lege *ipsi*. p.7. l.9 pro *A te* lege *Arte*. p.9. l. 40. pro *apponere* lege *opponere*. p. 19. l. 2. pro *entes* lege *orientes*. p.20. l. 10. pro *Geometria Arithmetica* lege *Geometria & Arithmetica*, & pro *scientia* lege *scientias*. p.24. l.17. pro *quod* lege *quid*, & l. 14. pro *effectione* lege *Affectione*. p.37. l.10. pro *è* lege *a*, & l. 15. pro *divisibili* lege *indivisibili*,. p.40. l.20. pro *ita quæ* lege *Itaq;*. p.43. l. 21. dele *&*. p. 53. l. 3. pro *Rationem* lege *Rationum*. p.61. l. 26. lege bipedalis bipedali addita. p. 119. l. penult. pro $\frac{1}{4}-\dagger\frac{1}{2}$ lege $\frac{1}{4}\dagger\frac{1}{3}$. p.123. l.19. dele *quod*. p.170. l.16. adde ad finem lineæ *ut* 2 ad 1.

Dialogus Primus.

B. SAlve mi *A*.

A. & tu mi B. Quid adfers novi ?

B. Novum librum.

A. De qua re ?

B. Mathematica.

A. Legistin' ?

B. Legi.

A. Accuraténe scriptum ?

B. Accuratissimè ; quantum saltem ego judico.

A. Videam quæso. [*Johan. Wallisii Oratio inauguralis. Mathesis univer-*
salis sive Arithmeticum opus integrum, & adversus Meibomii de proportioni-
bus dialogum, tractatus Elenchticus.] Quid illud sibi vult, *Mathesis univer-*
salis, sive Arithmeticum opus integrum ? Num Mathesin nihilo latius pa-
tere arbitratur quam Arithmetica ?

B. Sic dixit fortasse, quod Doctrinam Rationum (quæ totam comprehendit Mathesin) Arithmeticæ potius considerationis esse judicaverit quam Geometricæ.

A. Quamobrem autem ?

B. Causam quidem non ostendit, sed in Epistola dedicatoria illud affirmat, & ad Geometriam fuisse relegatam ab Arithmeticis, propterea quod sine Geometria, magnam in calculandis fractionibus invenerunt difficultatem,.

A. Eandemne rem esse censet Rationem & Fractionem ?

B. Ita plane, & id pluribus tum hujus, tum aliorum suorum Librorum locis, disertis verbis asserit.

A. Asserenti tantum, non etiam demonstranti, non est necesse ut assen-

 tiamus.

riamur. Sed legamus [*Quantumvis non sim ego prorsus nescius quanto*
subsidat intervallo] Quantumvis *Wallisius* doctus sit Mathematicus, non
est certè Latinæ linguæ peritissimus.

B. Rogo, quidni?

A. Quia qui dicit *Quantumvis* rem determinandam relinquit arbi-
trio tuo; qui dicit *Prorsus*, ipse determinat. Itaq; *Quantumvis* &
Prorsus non cohærent. *Qantumvis doctus* Latinè dicitur, sed *Quantumvis*
doctissimus non item. Similiter *Quantumvis magnus* dicitur, sed non
Quantumvis infinitus. *Quantumvis* & *Etsi*, non idem sonant semper.

B. Negligentiæ huic, si hoc loco non Oratorem egisset, sed Mathema-
ticum, facile ignosci potuisset.

A. Pergamus. [*Norunt melius quam ut mihi sit opus sigillatim illa*
repetendo singula immorari.] Videturne tibi verba hæc Latina esse?

B. Minime sane. Nam dictum oportuit *singulis*, ut & ipse alias lo-
quitur.

A. Erratum ergo est Typographi. [*Unde hic solus selectus fuit qui*
serenissimam Angliæ Reginam Elizabetham in Græcis litteris instituat.]
Latinéne hoc?

B. Minime. Erat enim scribendum *instituerit*.

A. Usus est ergo *tempore præsente* pro *præterito imperfecto*.

B. Ita.

A. An & sæpe?

B. Sæpissime.

A. Absolvamus ergo Typographum.

B. Recte. Verùm ego illum non laudavi a Grammatica, quanquam ipse
alias non intelligere & loqui Latinè, dedecus esse censet Academico.

A. [*Numeros etiam reperimus ab ipsis mundi primordiis (prout in æta-*
tum Patriarcharum Catalogo liquet) per Monadas, Decadas, Centuriasq;
aptè dispositos, gradibus scilicet, ne inordinata numerorum multitudine
& ἀταξία laboret calculus, vel quidem nullus omnino sit] Quod iterum
tempore præsente utatur pro imperfecto, quoniam tu ita vis, prætereo.
Hoc tantùm a te quæro, utrum ab eo quod *Gen.* cap. 5. ætates Patriar-
charum usque ad diluvium per centurias, decadas, monadas numerentur
inferri possit, Numerorum nomina eo tempore ita ordinata fuisse.

B. Siquidem caput illud quintum ante diluvium scriptum fuisset, illa-
tio illa esset bona. Sed quoniam vel a *Mose*, vel longo post *Mosem*
tempore ab *Esdra* scriptum esse omnes consentiunt, fatendum est bonam
non esse.

A. Desideramus ergo in *Wallisio* ἀκρίβειαν illam logices quam exigi-
mus a Mathematicis [*Mathesis apud Chaldæos post Diluvium primò*
floruisse creditur, deinde apud Ægyptios---cum hoc tamen discrimine;
Chaldæorum Astronomia, Ægyptiorum Geometria celebrata est.] Un-
de

de scit? Quare creditur? Cui Historico? oportuit nominâsse authorem
suum. Nam contra, Astronomiam Chaldæos ab Ægyptiis didicisse
author est Historiæ veteris transcriptor *Diodorus Siculus* in secundâ
parte Libri primi, sic scribens. *Chaldæos etiam dicunt, qui in Babylone*
sunt colonos Ægyptiorum, propter Astrologiam celebrari, quam a sacerdo-
tibus Ægyptiis didicerunt. Quis hæc conciliabit?

B. Etiam *Wallisium* credibile est, ejus quod hic dicit, authorem habuisse
Historiographum aliquem; nam dissentire inter se Historicos mirandum
non est.

A. [*Et præter varia Theoremata de novo inventa, ipsa inveniendi metho-*
dus multum facilitatur. Algebræ nempe, sive Analyticæ usus ultra quam
qui veteribus innotuit, jam innotescit.]

B. Quænam sunt illa Theoremata nova per Algebram inventa?

A. Intelligit fortasse ea quæ sunt in *Ougthredi* clave Mathemati-
ca. Sed tamen multa illis pulchriora in libro septimo *Pappi*, extant
inventa per Algebram, etsi sine Symbolis demonstrata sint; sed neu-
trius Theoremata alia sunt quam quæ continentur in doctrina rectan-
gulorum & triangulorum rectilineorum. Falsum etiam est (quod ille in-
nuit) Algebram & Analyticam eandem esse rem. Falsum item Algebram
methodum esse inveniendi. Sed hæc posterius magisque suo loco exami-
nabimus. [*Astronomia eximiis inventis instauratur.*] Numerat hoc loco
observationem stellarum circa Jovem. Solis maculas. Saturni ansulas. Jo-
vis fascias. Lunæ asperitatem. Sed quid hæc ad Algebram? ne a Geo-
metra quidem aut Astronomo ullo inventa hæc sunt, sed ab illiterato quo-
dam Batavo. Nam illi cui inventio debetur Telescopii, debetur quoque
detectio stellarum Jovialium, macularum solarium &c. nonne & tibi sic
videtur?

B. Omnino.

A. [*Mathematum studia non modo pro ea quam in se habent veritate*
colenda esse (quæ tamen ipsa per se conspicua & ultra Scepticorum liti-
gia posita animum reficiet valde & oblectabit) sed & quod rerum aliarum
cognitioni non uno quidem nomine conducant multùm.] Id quod de stu-
dio Mathematicæ hic dicit, nonne tibi videtur dici etiam posse de studio
Physicæ vel Ethicæ, vel Politicæ, vel denique scientiæ cujuscunque?

B. Non. Nam Theoremata Physicæ, quia actiones naturales ple-
ræque sensum fugiunt; Ethica propter voluntatis humanæ inconstanti-
am; Politica propter Ethicæ ignorationem pauca possunt demonstrari.
Præterea, habet Mathematica certa quædam & indubitata demonstrandi
Principia; qualia sunt *Definitiones*, *Axiomata*, *Petitiones* quæ non habet neq;
Politica, neq; Ethica, neq; etiam Physica. Quare Mathematicam extra
litigia Scepticorum solam eminere rectè dicit.

A. Nonne etiam rationis lineæ ad lineam, vel cujuslibet magnitu-
dini

dinis ad aliam magnitudinem ἀκριβεία ſenſum fugit ? Poteſt tamen demonſtrari. An non & veræ Phyſicæ ſua ineſt veritas , quæ vel affirmativè vel negativè enunciari poteſt ? Nonne litigat cum Mathematicis non minùs quam cum Dogmaticis Sextus Empericus *Scepticus*? Præterea non minus oblectat animum in Phyſicis, vel Ethicis, vel Politicis inventa veritas, quàm in Geometricis.

B. Imo magis , quanto ſcilicet in illis ſæpius erratur , quam in Geometria.

A. Etiam vocabula quibus in Phyſica, Ethica , Politica Philoſopho utendum eſt , an definiri non poſſunt ?

B. Poſſunt.

A. Cur ergo in his magis quam in illis deſideras principia ? An ſi aſſumerentur in Phyſicis, Ethicis , & Politicis Poſtulata , Petitioneſq; , ſicut in Euclidis Elementis Geometriæ, eone firmiores fore demonſtrationes eſſe judicas ? Si ita judicas, toto cœlo erras. Sunt enim eo infirmiores. Quicquid enim aſſumitur precariò naturam tollit demonſtrationis.

B. Intelligo jam quid dicendum erat *Walliſio*, ſi ſententiam ſuam ἀκριβῶς voluiſſet explicare, nempe, ſcientiam unam altera neq; veriorem , neq; evidentiorem eſſe , ſed Doctores alium alio peritiorem eſſe, id eſt ; veritatem magis intelligere, melius demonſtrare, a tricis verborum meliùs cavere, & in illas, ſi forte incidat, faciliùs ſe inde extricare poſſe.

A. [*Vix item maturo magis judicio quiſpiam* eſt *quam qui rebus hiſce exercitati, vel Sophiſmatum fallacias felicius deteget, vel Syllogiſmorum vires juſtamq; ſequelam aſſequetur.*] Hoc quidem de exercitatis in rebus ipſis verum , ſed de exercitatis in libris falſum.

B. Exemplo eſſe poteſt ipſe Walliſius. Atq; hæc ſufficiat notâ ſe in Oratione Inaugurali, niſi quod præterire non poſſum verba illius hæc. [*Quod ego interim non pro forma tantum opto.*] Nam *pro forma* vox eſt Scholaſtica, non Latina. Reliqua quæ ſummiſſe legi, vulgaria, vilia eſſe facile cum legebas ipſe animadvertiſti. Tranſeamus jam ad Epiſtolam Dedicatoriam.

A. [*Cum quæ in publicum prodeant, pro more ſcilicet (eoq; ſatis inveterato) nonnullis inſcripta ſoleant prodire.*] Non intelligo hæc. An ille ipſe quoties in publicum prodit, inſcriptus (ἐστιγμένος) prodit ?

B. Ad vocem illam Relativum *quæ* , ſubaudiendum eſt, pro Antecedente, non *Omnia*, ſed *Scripta*.

A. Bene eſt. Hoc ergo vult, Edicta regum quando publica fiunt , inſcripta eſſe, nimirum ipſorum nomina regum. Et verum eſt.

B. Ah, neq; ſic intelligendum eſt, ſed ſolummodo de libris.

A. Si ſe ita intelligi voluit, quam facilè ſcripſiſſe potuit ; *Cum libri qui in publicum prodeunt* &c. (non *prodeant* , ut hic ſcriptum eſt.) Verùm non ſatis intelligo quid ſibi hic vult vox ea *nonnullis*, quæ ſolitarie poſita,

ſine

ſine ſubſtantivo ſemper ſubauditam habet vocem *rebus*. Quibus ergo rebus inſcribi ſolere dicit libros ?
B. Quibus ? niſi nominibus, ut (poſt *quinq;* aut *ſex* verſus) ex his verbis
veſtra libuit nomina ſeligere, quibus qui ſequitur tractatum duxerim inſcribendum , cuilibet manifeſtum eſſe poteſt.
A. At melius fuiſſet ſi præcedentia ſequentibus prætuliſſent potius lucem quam debuiſſent, ſed pergo. [*Id mihi maxime viſum eſt incumbere, ut*
juſtiſſimis votis ſuis, quantum in me eſt, ſatisfaciam.] *Suis* hic pro *illius* (nempe *D. H. Savilii*) non rectè utitur. Sed nolle te Grammaticam hoc loco
examinari oblitus eram. [*Ex quo, inquam hæc (id eſt Symbolica) introducta*
eſt Vietæ, Ougthredi, Harriotti, Carteſii ope, quam ingentes fecerit profectus Matheſis univerſa, nemo hiſce rebus vel leviter exercitatus ignorare
poſſit.] Audin ?
B. Audio. *A*. Ne ipſi quidem Analyticæ per poteſtates aſcribi poſſunt, quæ ille hic aſcribit Symbolis ; nam quæcunq; inveniri poſſunt
per Symbola iſta nova, inveniri etiam potuiſſent per antiquiſſima Symbola, nimirum verba. Deinde quinam ſunt ingentes illi profectus quos
feciſſe dicit Matheſin univerſam ope authorum illorum quos hic
nominat. Si mihi unam ſolummodo propoſitionem indicaveris Symbolicæ hujus ope inventam, præter aliquot Rectangulorum & Triangulorum
rectilineorum metamorphoſes, quæ & ipſæ ſine Algebra inveniri potuerunt , concedam tibi omnia quæ dixeris , & quanquam per Algebram (ut nonnulli exiſtimaverunt) nullum non Problema ſolvi poſſet , nihil tamen hoc ad laudem faceret Symbolorum ; idem enim fieri
per verba poſſet. *Quæritur* quis numerus ſit , qui , ſive aſſumens ternarium, ſive multiplicans producit idem. Diceret *Walliſius*. Sit quæſitum *A*.
Quare $3 + A = 3A$. Et (dempto utrinq; *A*) $3 = 2A$. & $A = \frac{1}{2}$ Nonne idem eſſet ſi diceremus 3 una cum *Quæſito* æquari triplo *Quæſito*, & duo Quæſita æquari ternario , & proinde Quæſitum æquari $\frac{3}{2}$
Vides ergo Symbolicam iſtam, quam jactant nil omnino propter Symbola ſed propter ſolam a ſuppoſito ad conſequentia ratiocinationem
valere ; quæ ſecuriùs aliquanto , & multo magis perſpicue perficitur
Oratione.
B. At mihi quidem utilis videtur propter Symbolorum brevitatem.
A. Quî quæſo ? Nonne vim demonſtrationum Symbolicè ſcriptarum quam Latinè memoria tenere difficilius eſt ? Et quanquam Analytica per Symbola brevius ſcribatur quam Oratione plena , non tamen clarius, neq; ut a tam multis poſſit intelligi, partim quod eadem Symbola
paucis ſint communia , partim etiam quod verba ipſa (non ſola
Symbola) animo ſimul percurrenda ſunt. Cur autem Arithmeticam
ſpecioſam ope *Vietæ*, *Ougthredi* , &c. introductam eſſe dicit ? Quaſi
veteris Algebræ notæ , quibus Radix, Quadratum , Cubus, cæteræq;
Poteſtates

Poteſtates ſignificabantur a *Diophanto* non eſſent Symbola.

B. *Quid?* Nihilne addidit Algebræ *Vieta*, ſed veterum notas cum li-
teris Alphabeti tantum commutavit?

A. Nihil omnino.

B. Sed ipſam Artem ſive Methodum, quâ a ſuppoſito ad Quæſitum
via breviſſima pervenitur, quis excogitavit primus?

A. Neſcio, niſi verum ſit (quod memini me alicubi legiſſe) fuiſſe
Arabem quendam *Ghebrum*, a quo etiam artem ipſam (ſi modo Ars ſit
potiùs quam caſus) denominatam eſſe *Algebram*. Symbola quidem ad-
dere, ſubtrahere, multiplicare, dividere Binomia, Trinomia, *&c.* Artis
eſſe fateor, non magnæ. Sed ut ex ſuppoſito inveniatur id quod quæritur
(niſi in facillimis quæſtionibus) id verò pernego. Quid enim Magiſtri
Symbolycæ hodiernæ maximi *Outghredus* & *Carteſius* Aliud præcipiunt,
quàm ut pro Quantitate quæſita ſupponamus aliquam ex Alphabeto lite-
ram, & inde *apta* ratiocinatione procedamus ad Conſequentia? At ſi
Ars eſſet, deberent quænam ſit illa *apta* ratiocinatio ipſa oſtendere. Quod
cum non faciant, Algebriſtæ modò ab uno ſuppoſito, modò ab alio inci-
pere, & modò unam, modò aliam viam ingredi coguntur. Adeo ut non
minùs fortuito Quæſitum inveniunt quam ſi quis in cubiculo juſſus ini-
tio facto a limine diligenter totum cubiculum intentis oculis & animo
percurrere inveniret latentem aciculam. Præterea, Logarithmos inve-
nitne *Neperus* ope Algebræ? Aut qui Canonem condidit ſinuum, Tan-
gentium & Secantium, per Arithmeticam ſpecioſam id fecit? Deniq;
quæ Propoſitio inventa per Algebram non dependet a 16^{a} 6^{i} Ele-
mentorum *Euclidis*, & a 47^{a} 1^{i} ejuſdem, aliiſq; notiſſimis Propoſitioni-
bus, quas oportet prius ſcire quam quis poſſit uti regula Algebræ. Adeo Geo-
metriæ Algebra debetur, non illi Geometria. Nam abſq; hac, Quæſitum,
etſi in Æquatione contineatur ſæpiſſimè ignoratur. Imò verò ipſa *Analytica*
per Poteſtates ſive cum Symbolis, ſive abſq; Symbolis exerceatur, adeò eſt
exigua pars Analyticæ univerſalis, ut nullus ejus, neq; in Angulis, neq;
in Circulis, neq; in Solidis uſus ſit, ſed ſolummodo in Parallelogram-
mis Rectangulis, & Triangulis Rectilineis. Etiam in his, hoc tantum
præſtat, ut id quod in (illarum quas modo dixi Propoſitionum) verborum
involucris continetur eruere valeamus. *Analyſis* enim *per poteſtates*,
non procedit ab effectu ad cauſam, ſed ab una proprietate ad aliam, non
(ut eſt natura cauſæ) priorem, ſed ab eadem cauſa genitam. Analytica
ergo hæc res admodum anguſta eſt, quanquam ad Trigonometriam in
rectis lineis exercendam non omnino inutilis; verùm ob magnam mul-
titudinem Symbolorum, quibus hodie oneratur, unà cum falſa opinione
quod plus valeat ipſa Methodus quam revera valet, pro peſte Geome-
triæ habenda eſt. Inde enim eſt quod inveſtigatio cauſarum (a qua ſola
ſperari poteſt ſcientia) negligitur, nimirum, propter ſpem factam a
parum

parum acutè videntibus Magiſtris, poſſe per Arithmeticam ſpecioſam
nullum non Problema ſolvi; cum tamen Problemata, quæ veteres ſol-
vere non potuerunt, ad hunc uſq; diem maneant inſoluta. Jam ſi quid
contra hæc dicendum habeas audiamus.

B. Nihil contrà dico. Etſi enim multi hac methodo in Ploblematis
ſolidis uſi ſint, in eo tamen proceſſus eorum ſemper deſinit, ut pronun-
tient Problema, cujus conſtructionem quærunt per eam Geometriam quæ
nunc extat, eſſe inſolubile, atq; adeo opus eſſe ad conſtructionem ejus
quibuſdam aliis lineis quæ nulla A te accuratè duci poſſunt.

A. Legamus ergo ulteriùs, [*partim etiam quod Arithmetices pomæria tam ſtricta fecerint, ut veris numeris (rationalibus* ſcil. *& quidem inte-
gris) coerceantur.*]

B. Prævideo hic quid reprehenſurus es.

A. Quid?

B. Quod Arithmeticam verſari putet circa aliud præter numeros.
Nam qui numerus verus non eſt, omnino non eſt numerus.

A. Rectè. Sed & illud quoq; reprehenſurus eram, quod explicet qui
ſint verè numeri per *Rationales & quidem integros*, nam numerus ad nu-
merum irrationalis eſſe non poteſt, quoniam omnes metitur *unitas.*
Quem ergo ille numerum non verum, & alii *ſurdum* dicunt, quantitas
continua eſt, & pertinet, non ad Arithmeticam, ſed ad Geometriam. Præ-
terea non rectè a veris numeris diſtinguit Fractiones: quanquam enim ſole-
ant appellari Numeri Fracti, non tamen numerus frangitur, ſed res in-
terum numerum. Itaq; duæ unciæ non minùs numerus verus eſt, quam
duo Aſſes. Deſideratur ergo hic ἀκρίβεια illa quæ tam neceſſaria eſt Geo-
metræ, quam intelligere & loqui Latinè Academico. Sed pergo [*Ut
reapſe oſtendam etiam Geometrica Problemata (quatenus ſaltem a poſitione
ſive locali ſitu abſtrahunt) a Principiis Arithmeticis vel maximè depen-
dere. Et quidem eo uſq; abeſſe, ut ad Problemata ſive Theoremata purè
Arithmetica ſtatuminanda (quod tamen non raro factum video) Geome-
tricæ plane demonſtrationes ſint huc forinſecus advocandæ; ut contra quæ
Geometrica habebantur ſimplicius quidem & univerſalius ex purè Arith-
meticis, adeoq; univerſalibus demonſtranda videantur.*] Prætereo in
gratiam tuam quod vox *abſtrahunt* hoc in loco Scholaſticum ſit, Latinum
non ſit. Sed rogo te ubi probat id quod hic dicit?

B. Probabunt ipſius per totum hoc opus a Principiis Arithmeticis de-
monſtratæ concluſiones Geometricæ.

A. Id ergo videbimus inferius. Intereà verò mirari mihi liceat viſum
eſſe neceſſarium *Euclidi* numeros alios planos, alios ſolidos appellare,
& tam multa de illis demonſtrare. Numerus enim, neq; ſuperficies eſt,
ut poſſit propriè dici planus, neq; corpus, ut poſſit vocari, ſolidus. Sed
forte *Euclides* numerum à diviſione continui, & demonſtrationes Arith-
meticas

meticas, a Geometricis, non contra (ut *Wallisius*) derivavit. Distulit ergo Theoremata Arithmetica ad Elementum septimum ut in illis demonstrandis imitaretur demonstrationes quasdam quæ sunt in Elementis Geometricis Antecedentibus. Itaq; noni Elem. propositiones 18^{a} & 19^{a} fundantur in 16^{a} & 17^{a} Elem. 6^{i} Item decem primæ propositiones Elem. 2^{i} in numeris demonstrari possunt, Sex posteriores non possunt propterea quod non omnes Lineæ sunt commensurabiles. Ostendat tibi *Wallisius*, si potest, duos numeros, quorum major ad minorem eandem habeat rationem quam majus segmentum Lineæ divisæ extrema & media ratione, ad segmentum minus; vel quam habet quadrati Diagonalis ad latus. Ipsum latus appellabit fortasse *numerum*, sed ut te fallat, non scribet *latus* sed *l.* vel *p*, vel aliud aliquod Symbolum. Coge igitur illum numeros suos eloqui. Dicit credo numerum alterum saltem esse surdum. *Surdum* autem est quod effabile non est. Jam si series proponatur numerorum ab unitate incipientium, & unitate crescentium infinita, nonne in illa serie numeros omnes contineri putares?

B. Certè.

A. Aut ullum eorum esse ineffabilem?

B. Nullum.

A. Nullus ergo numerus, surdus est. Sed pergamus. [*Quod autem vel Philologica vel etiam alia Philosophica Mathematicis immiscuerim; partim illud ad subjecti explicationem commodum videbatur, partim etiam condimenti loco*, &c.] Quid illud est quod apparat Condimenti Scientiæ per se jucundissimæ; An γελωτοποιὸν an γελοῖον acturus est?

B. Nihil minùs. Nam per Philologica ea intelligit quæ continentur in *Cap.6.* & quibusdam sequentibus de Etymologiis nominum numeralium Latinorum plena ingenii, qualia sunt, Latinorum vocem *unum* derivari a Græco ὃ ἓν; *duo* a δύο; *tres* a τρεῖς; *quatuor* a πέτορα, πέτορα a πίτορα, & hoc a τέσσαρα; *quinque* a πέντε, posito *quin* pro πεν & *quo* pro τε.

A. Unde hæc conjicit?

B. Nescio nisi a congruitate literarum.

A. Non est inter ὃ ἓν & *unum*, neq; inter *quatuor*, & τέσσαρα, neq; inter *quinq;* & πέντε magna affinitas literarum, & quilibet etiam puer tantundem conjicere potuit.

B. Deinde *Bellum* (inquit) *a* πόλεμος *fortasse dictum est*. An tantundem conjiceret etiam puer?

A. Minimè. Non est enim derivatio illa neq; vera, neq; verisimilis, sed ridicula condimenti causa.

B. *Exemplum* a *simili* derivari dicit, ideoq; non *exemplum* sed *exsemplum* debere scribi.

A. Quidni & *exsero* pro *exero*, & *exsisto* pro *existo*, & *exsuo* pro *exuo*, &

& *exsequiæ* pro *exequiæ*, & similia multa scribi jubet, qualia nemo Latinorum unquam scripsit? Eadem enim est ratio in his, quæ in *Exemplum.* Credo sperasse illum novitate hac fore olim ut distingueretur ab indoctis hominibus hujus seculi. Sed errat: sicut enim nullius *exemplum* secutus est ille, ita nemo illius *exsemplum* est sequuturus. Sed quænam sunt ea quæ appellat *condimenta Philosophica?*

B. Nescio, nisi ea intelligat quæ disseruit de natura Mathematicæ, & de natura Demonstrationis.

A. Pergamus ergo ad reliqua Epistolæ Dedicatoriæ. Excusans se quod tardius prodierit liber ejus quam speraverat, [*Interea* (inquit) *temporis bis occurrebat castigandus Hobbius; Latinè primum, Elencho meo in ipsum edito, quo ipsius in Libro de Corpore* ἀγεωμετρησία *castigatur, & fastus reprimitur; deinde & Anglicè, ob scriptum ipsius Anglicanum conviciis fartum, quo scurram agit*, &c.]

B. Hoc habet mercedis ob Politicam suam (Leviathan.)

A. Fortasse *Wallisius* contra illum iratus scripsit, & tantò asperiùs, quantò liber ille Hominibus honestis magis placuit. Sed videamus an in hoc libro *Wallisii* nihil sit quod mereatur castigari.

A. Accedentibus jam ad ipsum opus Mathematicum, ubi orationi scientificæ debitam ἀκρίβειαν exigere non modo iniquum non est, sed etiam necessarium, quicquid non accuratissimè dictum, id liberum erit reprehendere. De rebus enim quarum scientia certa esse potest, idem est non accurate, & falsè dicere. Itaque qui propter inscitiam scribere vel disserere accurate nesciunt, quoties reprehenduntur, hac defensione uti solent, non esse litigandum de verbis, ubi res constat; cum tamen de veritate rei, nisi accuratissimis verbis constare non possit. Non moror ergo homines illos ambitiose graves, qui propriæ imperitiæ aliorum prætendunt λογομαχίαν. Quasi aut esset disputatio aliqua, quæ λογομαχία non esset, aut veritas aliqua, quæ non esset verborum veritas. In quocunq; igitur libro, de quacunq; scientia, hujusmodi verba inveneris, *mera est hæc* λογομαχία: *non placet, dum de re constet, de verbis litigare*, pro certo habeas scriptorem illum scientiæ quam tractat imperitum esse, ignorantiamq; suam gravitate (ut videtur ipsi) sententiolæ velle tegere. Nec molestum tibi sit, si quicquid, sive in dictionibus hujus authoris, sive ratiocinatione, ἀκρίβεια debita carere videro, notavero, eâ saltem lege, si quomodo eadem ἀκριβῶς enuntianda sunt, simul docuero.

B. Non iniquum postulas.

A. Præterea in Philologicis illis (ut vocat) condimentis, postulo ut liceat mihi conjecturis illius apponere conjecturas meas.

B. Neque hoc iniquum est.

A. Inscribitur Caput primum de *Mathesi* in genere, & de Objecto & Distri-

Distributione ejus. Videamus ergo quàm sit accuratum. [*Disciplinæ Mathematicæ dicuntur omnes illæ sive Artes, sive scientiæ, quæ circa Quantitatem peculiari modo versantur, sive Continuam, sive Discretam.*] Tune Definitionem hanc censes esse accuratam?

B. Ego verò satis. Etsi vox illa *peculiari modo*, nisi ex sequentibus non facile intelligitur.

A. Expone ergo verba illa ex sequentibus.

B. Intelligit Quantitatem *peculiari modo*, id est, strictiore sensu, prout ad numerum & magnitudinem restringi solet.

A. At intelligi ita non possunt. Nam *versari circa Quantitatem, sive Continuam sive Discretam* (quæ eadem sunt cum Magnitudine & Numero) posita sunt in ipsa Definitione?

B. Minime. Nam in definitione per *Quantitatem continuam* intelligit solam quantitatem Corporum, nempe Lineam, Superficiem, & Solidum, exclusa quantitate Temporis, Loci, Motus, & Ponderis. Per *Quantitatem* autem *discretam* (exclusa Oratione) solum Numerum, propterea quod Tempus, Locus, Motus, Pondus, *vix ullam* (inquit) *subeunt speculationem Mathematicam, nisi ad modum vel Magni, vel Multi considerantur.*

A. Videtur sane non bene intelligere *Wallisius*, quid sit ipsa quantitas. Neque id mirum est, cum nemo Geometrarum illorum, qui ante ipsum fuerunt, tradiderit quantitatis Definitionem; ipse autem examinatione nulla, sed tantum lectione, suam fecerit Geometriam alienam.

B. Quomodo autem quantitatem definis tu?

A. Quantitas est per quam quærenti de qualibet re quanta sit, apte respondetur; sive (quod idem est) *per quam cujuslibet rei magnitudo determinatur.* Verbi causâ, longitudine propositâ, quæro quanta ea sit. An responderi aptè putas *longitudinem esse*, An potius quod sit tanta, quanta est *Ulna*, vel quanta est aliqua alia mensura vel mensuræ; vel quod sit ad longitudinem expositam in hac vel illa ratione? Similiter si quæstio fiat de superficie, vel solido, non apte respondebitur, nisi per mensuram aliquam vel comparationem cum aliquo mensurato. Alioqui quærentis animus nihil habet (in quo acquiescat) determinatum. Non sunt ergo longitudo, superficies, solidum, *Quantitates* ipsæ, sed *Quanta*, vel potius sine scholarum etiam antiquarum barbarismo, *Tanta*.

B. Nihil video propter quod hæc non sint accurate dicta. Sed quid inde infers?

A. Illuc infero, Tempus, Locum, Motum, Pondus, non minus proprie quantitates dici quam Linea, Superficies, & Solidum. Cum enim neq; hæc neq; illa quantitates sint, sed quanta, æque sunt utraq; quantitates. Cumq; tam illa quam hæc quantitatem habeant, sunt æque utraq; quanta. Quare in Definitione hac Matheseos universalis, nihil est

est neq; ἀκριβὲς neq; ὑγιές. Multa habet *Archimedes* in Libris suis per Motum, & Tempus demonstrata, quæ tamen ne *Wallisius* quidem ipse credo negabit esse & bene demonstrata & pure Mathematica.

B. Quid *Wallisius* negaturus sit nescio. Sed Tempus, Locus, *&c.* mihi quidem videntur Quantitates non minus proprie dictæ, quam Magnitudo, & Numerus; nec quantitas a Magnitudine aliter distingui, nisi quod per quantitatem intelligimus determinate Tantum; Magnitudo autem vox sit indefinita. Video item alteram post adhibitam mensuram, comparationemq; cum alio actu semper dici; alteram non semper. Sed desidero adhuc Definitionem *Mensuræ*. Mirandum enim esset, si qui Geometriæ (quam sine mensuratione assequi nemo potest) prima Principia posuit *Mensuram* nusquam definisset.

A. Definitio *Partis* (*subaudi aliquotæ*) tradita ab *Euclide* initio Elementi quinti paucis mutatis erit Definitio *Mensuræ*. Est enim *Mensura Magnitudo una alterius, quando ipsa vel ipsius multipla alteri applicata cum ea coincidit.*

B. Definitio hæc fere eadem est cum Axiom. 8. El. 1[1]. *Euclidis*. Nam videmus quotidie omne genus rerum per ἐφάρμοσιν mensurari. Sed plerumq; repetitam.

A. Definitio ergo hæc, cum sit mensurationis quotidianæ descriptio accurata, ipsa quoq;. Definitio accurata est. Quænam autem sunt quantitates illæ quas *discretas* vocat?

B. Numerum & Orationem.

A. Scio. Sed quid significat vox ea *discreta*?

B. Ponitur hoc loco pro *interrupta*, sive *intercisa*. Exempli causa, *Euclidis* in prioribus quidem sex Elementis Diagrammata ex lineis constant perpetuis, sive continue ductis, quibus exponitur lectori quantitas continua; deinde in tribus Elementis sequentibus lineis usus est punctim designatis, sive lineis intercisis, ut exponeret quantitatem *numeri*.

B. Videtur ergo *Euclidi* origo Numeri consistere in divisione Integri continui.

A. Certissimè.

B. Sed *Wallisio*, contra, ex compositione *Unorum*.

A. Quanquam is qui primus numeravit, utrum corpus corpori apposuit, an in corpora divisit, nihil referat; posterius tamen verisimilius est, nisi putem illum, hominem unum vocasse, *unum*, deinde unum hominem & unam arborem *duo*, item unum hominem, & unam arborem, & unum montem, *tres*, & sic deinceps. Numerus enim absolute dictus supponit in Mathematicis unitates ex quibus constituitur inter se æquales, æqualitatem autem unitatum in quantitate oriri, nisi a divisione integri continui in partes æquales, vix potest cogitari. Utut tamen hoc

hoc ſit, niſi numerus conſideretur ut ſic ortus, Scientia Arithmetica fere periit. Nam ex additione unitatum Theoremata Arithmetica valde pauca, ex diviſione continui omnia poſſunt demonſtrari. Deinde *Oratio*, cur ponitur (primò) inter quantitates ? An quia Oratio una quam alia longior eſſe poteſt ? *Q*uare ergo non potius ponitur inter quantitates Genus ejus, nempe Sonus ; Nam & ſonorum alius eſt longior, alius brevior. Cur non ſunt etiam latratus, ruditus, mugitus quantitates, & quidem diſcretæ ? Deinde cur eſt *Oratio diſcreta quantitas.* An quia dividitur in verba ? Si ita ſit, quidni ſonus tubæ dicetur quantitas continua ?

B. Orationem eſſe *Quantitatem*, & quidem *diſcretam* dicit *Ariſtoteles.*

A. Credo. At non nunc quærimus quid ſit *Ariſtotelicum*, ſed quid ſit τὸ ἀκριβές. [*Tempus tractat Aſtronomia.*] Tractat quidem, ſed an ut Tempus ? Proprietatemne *Temporis* ullam demonſtrant Aſtronomi ? Ut loquerentur de *Tempore* neceſſarium erat propter *Motum.* Annum, Menſem, Diem, Horas, & Horarum minuta prima, ſecunda, *&c.* Definiunt Aſtronomi, non ad *Temporis* Proprietates, ſed Partes cognoſcendas, quæ motu corporum Cœleſtium diſtinguuntur. [*Item Chronologia.*] Chronologia Hiſtoriæ quidem, ſed non ſcientiæ pars eſt. [*Locus autem in Stereometria quantum ad ejus capacitatem.*] Quid quæſo intereſt inter *loci capacitatem*, & *loci magnitudinem ?*

B. Planè neſcio.

A. Sed verebatur, puto, ne ſi dixiſſet Magnitudinem, etiam *Locum* ad quantitatem proprie dictam, quem antè inde expulerat, videretur reduxiſſe. [*Orationem tractat Muſica.*] An ut *Orationem*, an ut Sonum ? Ut ſonum certe (qualis eſt Muſica hodierna,) quanquam hoc fortaſſe rectius dixit quam ſenſit. Nam antiquitùs tum verba tum Modos componere ejuſdem erat Artis Muſicæ. [*Motus autem & Pondus in Mechanicis præſertim conſiderantur.*] *Q*uid ? An Mechanici opus eſſe putat demonſtrare ? vel Motus & Ponderis nullas eſſe proprias paſſiones quæ demonſtrari poſſunt. Quis neſcit omnia quæ rectè facit Mechanicus fieri ex præſcripto & ſecundùm regulas Mathematicorum ? Mathematici ergo eſt ut aliarum quantitatum, ita etiam Motuum & Ponderum rationes demonſtrare. Vides igitur quam craſſa hæc ſunt *Wallisii* Profeſſoris, & ab ἀκριβείᾳ ἐπιστημονικῇ aliena. Sed Doctrinam Rationum omnem fatetur conſiderationis eſſe vel Arithmeticæ, vel Geometricæ ; neque neſcit credo ipſis Rationibus ſuas eſſe certas quantitates ; nam una Ratio major alia vel minor eſſe poteſt. Eſt ergo Ratio quantitas propriè dicta, etiam ex Doctrina illius. Reſpondeat mihi jam, utrum numerus ſit Ratio. Negabit puto. Qui ſit ergo ut tractetur in Arithmeticâ, & ſo-

lâ quidem, ut ille vult ? Rurſus utrum Ratio ſit Linea, vel ſuperficies vel ſolidum ? nihil horum ; vel quantitas continua, vel diſcreta ? neutram dicet. Qui ſit ergo ut tractetur in purè Mathematicis ?

B. Si Ratio, neq; continua quantitas, neq; diſcreta ſit, non videtur ſaltem mihi, omnino eſſe quantitas.

A. Quid ita ? Si quis quantitatem omnem *continuam* vel *non continuam* eſſe diceret, neceſſarium faceret ut omnis quantitas alterutra earum eſſet. Sed non idem ſequitur ex diviſione in *continuam*, & *diſcretam.* Itaque ut Rationem ad aliquod quantitatum genus referam, quantitas dividenda eſt in abſolutam & Relativam. Abſoluta eſt Longitudinis ; Superficiei, Solidi, Temporis, Motus, per ſe conſiderata quantitas. Relativa eſt, qua determinatur quanta ſit quælibet dictarum Magnitudinum ut comparata cum alia ejuſdem generis. Deinde abſoluta quantitas alia eſt corporum, ut Longitudo corporis. Alia Temporis, ut Longitudo Temporis. Alia Motus, ut Velocitas & Pondus. Item Rationum alia eſt Geometrica, alia Arithmetica.

B. In quò ergo genere, ponis Rationem Numeri ad Numerum ?

A. Rationem tam Geometricam quam Arithmeticam divido in Rationem rei ad rem, & Rationem rerum ad res ? Putaſne in ullo alio quantitatum genere collocari oportere Rationem duarum ulnarum ad duos palmos, quam in qua collocatur ratio unius ulnæ ad palmum unum ? Aut Rationem plurium ad plura aliam eſſe ſpeciem Rationis quam unius ad unum ? Aut aliam quidem eſſe ſpeciem quantitatis tres ulnas, aliam autem unam ulnam ? Aut denique Rationem unius ulnæ ad tres ulnas, non eandem eſſe quam habet unum ad tria ;

B. Sunt quidem hæc ita manifeſta, ut mirandum ſit *Ariſtotelem* Quantitatem diſcretam nominâſſe. Eſt enim Ratio numeri ad numerum nihil aliud quàm Ratio partium aliquotarum quantitatis continuæ ad quantitatis continuæ partes aliquotas, (& inter ſe & illis) æquales. Itaque (ut more meo cum Ariſtotelicis loquar) ſicut calor a calido abſtrahit, ita numerus abſtrahit ab inæqualitate partium, dum conſiderantur partes non aliter quam quatenus plures.

A. Rectè. Sed diſcedis jam a libris.

B. Quidni ?

A. Procedamus ad alia [*Quamquam autem hæc omnia in diſciplinis Mathematicis tractentur, non tamen per ſe & primario, ſed quatenus vel Menſurantur vel Numerantur.*

B. Ne mihi quidem hoc placet, propterea quòd Geometriam ipſe definit inferiùs ſcientiam eſſe magnitudinis quatenus eſt menſurabilis, & Arithmeticam ſcientiam eſſe Numeri, quatenus numerabilis. Itaque Magnitudo & Numerus non meliore jure, ex illius ſententia quantitates ſunt propriè dictæ, quàm illæ alteræ Locus, Tempus, Motus, *&c.*

A. Vides ergo neceſſitatem circa ſcientias loquendi ubique ἀκριβῶς. Nam qui ita non fecerint, obliti eorum quæ ſcripſerant, neque habentes ipſi Ideas rerum cogentur ſibimetipſis turpiter contradicere.

B. Da quæſo ſcientiæ, quam appellant Mathematicam, Definitionem aliquam accuratam.

A. Mox faciam. Legamus interea rationem ipſius nominis *Mathematicæ* apud *Walliſium*; & quare videtur illi, impoſitum eſſe ſolis Geometriæ & Arithmeticæ. [*Si de Mathematum ſive Matheſeos nomine quæratur, cur hac appellatione inſigniantur illæ Diſciplinæ, ideo fortaſſe fuit, quoniam Mathemata apud multos quidem ſola, apud alios Antiquorum primo ante alias diſciplinas loco ediſcebantur; adeoque* κατ' ἐξοχὴν μαθήματα *dicta, quia* πρωτομάθητα. Quoniam hæc ait *fortaſſe ita eſſe*, nos quoque *fortaſſe* aliter eſſe non minùs probabiliter affirmare poſſumus. Fortaſſe ergo fuit quod veritas Theorematum circa Magnitudines tantum et Numeros antiquitùs docebatur, & propterea a Magiſtris diſcipuli eam ἔμαθον, id eſt didicerunt, intellexerunt, perceperunt, id quod ſine ſumma evidentia facere non potuerunt. De aliis rebus ſine Principiis manifeſtis, & ſine accurata ratiocinatione, in porticibus & ambulacris a ſedentibus ambulantibuſve Scholaſticè, id eſt, ςοχαςικῶς diſſerebatur, quemadmodum nos nunc diſſerimus per *fortaſſe*. Et quidem ſi propter hoc dicebantur Mathematica, non eſt difficile univerſaliter definire quid ſit Matheſis. Eſt enim Matheſis *cognitio veritatis per demonſtrationem.*

B. Scientiæ ergo juxta tuam definitionem ſunt omnes Mathematicæ. Cur ergo Græci non omnes ſcientias ſic vocabant?

A. Annon omnes ſic vocabant, quæ traditæ erant demonſtrativè? Nam quæ Theoremata demonſtrata habuerunt Græci veteres præterquam circa quantitatem?

B. Puto nulla.

A. Vides ergo cauſam cur illæ ſcientiæ, quarum ſubjectum eſt quantitas ſolæ habitæ ſunt ab Antiquis Mathematicæ, & ſic appellantur etiam hodiè. Itaque ſi illo tempore doctrinæ, Moralis & Civilis, fuiſſent demonſtratæ, cur non credam & illas pro Mathematicis haberi potuiſſe? Non enim ſubjectum, ſed demonſtrationes faciunt Mathematicam.

thematicam. Tranſit jam ad ſcientiarum Mathematicarum ſpecies. [*Sunt autem diſciplinæ Mathematicæ aliæ Puræ, aliæ Mixtæ. Puras dicimus illas quæ Quantitatem abſolutè conſideratam tractant, prout a materia abſtrahitur. Mixtas autem illas appellamus in quibus præter conſiderationem Quantitatis (ſive multitudo illa fuerit, ſive magnitudo) etiam ſubjectum cui inſt connotatur.* Hæccine tibi videntur dicta eſſe accuratè?

B. Ita.

A. An non qui quantitatem conſiderat, conſiderat eam prout abſtrahitur a materia? An vox *Quantitas* abſtracta non eſt a concreta voce *Quantum*? Quænam autem eſt ea ſcientia quæ non modo quantitatem conſiderat, ſed etiam ſubjectam ejus? Quaſi ſubjectum non conſideraretur tunc, quando conſiderantur ejus accidentia. Cujus quæſo ſcientiæ ſubjectum eſt, ſine Accidentibus conſideratum corpus?

B. Nullius. Neque dicit ille ſubjectum cum quantitate ſua *conſiderari*, *ſed connotari.*

A. Si connotari non ſit conſiderari, qui fit ut ſolâ quantitate conſideratâ ſcientia appelletur Mixta? Video eum nihil hic videre. Scribit quæ didicit puer. Scientia enim quemadmodum ſubjectum ejus (nempe mundus) non dividitur (per *puram* & *mixtam*) in Species, ſed in partes, eo modo qui dicetur infrà, poſtquàm legerim hujus Capitis reliqua. [*Verbi gratia, ubi in Arithmetica traditur* bis duo quatuor efficere, *numeri hic ſeorſim conſiderantur, & abſtractim ab omni materia ſubjecta.*] Vide quæſo hominis negligentiam doceri dicentis in Arithmetica *bis duo efficere quatuor.* Si doceatur hoc in Arithmetica, etiam in Arithmetica demonſtratur. Quis hoc unquam demonſtravit aut demonſtrare conatus eſt, aut ex Principiis Arithmeticorum nunc poſitis demonſtrare poteſt? Ne aſſumitur quidem ut *Communis notio*, neque ut *Petitio*, ſed a pueris domo affertur. [*In aliis ſecus eſt. verbi gratia, cum docet Aſtronomia Æquatorem & Zodiacum ſe mutuò in binis punctis ſecare,*] Aſtronomia illud non docet, neque opus proprium Aſtronomi eſt illud demonſtrare, ſed Geometræ. Obſervat Aſtronomus duos ſolis motus, Diurnum & Annuum, in duobus fieri circulis maximis, deinde, ut Geometra, inveſtigat quem faciunt Angulum. Itaque omnia fere Theoremata Aſtronomorum demonſtrata ſunt a *Theodoſio*, *Menelao*, aliiſque Geometris, qui ſcripſerunt de ſphæra. [*Eſt enim Arithmetices ſubjectum purius quiddam & magis abſtractum quam ſubjectum Geometriæ.*] Neque verum eſt hoc, neque rationem propter quam verum ſit, aut is aut alius quiſquam unquam attulit. Deinde Longimetriam, Planimetriam, am, & Stereometriam numerat inter Mathematicas Mixtas; cum tamen Longitudo, Superficies, & Solidum ſint per ſuam ipſius diſtributionem Geometriæ puræ ſubjectum adæquatum. [*Neque interim Mechanices & Architectonices obliviſcendum eſt. Quarum utraque (præſertim Mechanica) Geometricas Menſuras ita ad molem corpoream applicat, ut & interim Ponderum & Virium Motricium rationem habeat.*] Rurſus Mechanicam annumerat ſcientiis, quaſi Mechanici eſſet demonſtrare. Mirum ni & Calceamentaria Mathematicis Mixtis annumeranda ſit, quia metitur pedem.

B. Antequam tranſeas ad Cap. 2.m præſta quod promiſiſti ſcientiarum diſtributionem & ſingularum Definitiones accuratas.

A. Cum ſcientiæ nec ſine ratiocinatione acquirantur, neque in ratiocinatione locum habeant voces ambiguæ, quales ſunt Metaphoræ, & totum Troporum genus, antequam accingamur ad ratiocinationis opus, nempe ſcientias, diſcamus oportet accurate loqui, id eſt, præfinitò loqui.

B. Quid illud eſt præfinitò loqui?

A. Præfinitò loqui, eſt vocabulis uti *prædefinitis*, præſertim illis ex quibus conſtare debent concluſiones demonſtrandæ. Sunt enim Definitiones Principia ſcientiarum ſive propoſitiones in demonſtratione omnium primæ, quæ niſi accuratæ ſint, quæ ſequuturæ ſunt omnes incertæ erunt. Accuratè autem definire, dependet ab intellectu Vocum, ab obſervatione quomodo ſignificationes earum pro diverſitate circumſtantiarum variantur, & quid ſit quod in omni illa ſignificationum varietate eſt commune; nam id quod per vocabulum aliquod ubique intelligitur, illud eſt ſignificatio ejus accurata. Quod ſi neceſſarium aliquando fuerit, ut vocabulo utamur novo, facile eſt illud definire, id eſt, quid nos verbo noſtro intelligi volumus explicare. Itaque hoc recte facere ante omnes ſcientias diſcendum eſt. Et hæc quidem ſive Peritia, ſive Prudentia recte definiendi, quæ acquiritur experientia circa verborum uſum, vocatur *Philoſophia Prima.*

B. Supponamus autem hominem ratiocinari accurate jam poſſe. Quæro quot ſunt ſcientiæ, & quomodo per Definitiones proprias aliæ ab aliis diſtinguuntur?

A. Una eſt omnium rerum ſcientia univerſalis, quæ appellatur Philoſophia, quam ſic definio. Philoſophia *eſt Accidentium quæ apparent, ex cognitis eorum Generationibus; & rurſus ex cognitis Accidentibus, Generationum (quæ eſſe poſſunt) per rectam ratiocinationem cognitio acquiſita.* Quærunt enim Philoſophi omnes circa rem cognitam, vel quid ab ea produci poteſt, vel unde ipſa produci potuit. Quot ſunt ergo rerum ſpecies tot ſunt Philoſophiæ totius partes ſive ſcientiæ particulares.

B. Sed

A. Quid illud eſt?

B. [*Oriri Lineam ex fluxu Puncti traditum eſt non inepte.*]

A. Recte id dicit.

B. An Punctum fluit.

A. Quidni?

B. Movetur ergo.

A. Verum dicis.

B. *Ariſtotelis* eſt, nihil moveri præter corpus.

A. Verum hoc quoque. Non enim Puncti nulla eſt quantitas, ſed nulla computatur. Nec ipſum Punctum Nihil, aut Indiviſibile eſt, ſed Indiviſum. Itaque qui dicunt Tellurem eſſe Punctum non improprie loquuntur, quoties de ea agitur (ut in Aſtronomia) deſcribente Lineam Motus Annui. Neque Lineæ Latitudo nulla eſt, ſed nulla conſideratur in demonſtratione. Alioqui impoſſibile eſſet (quod poſtulat *Euclides*) Lineam ducere; & per conſequens tota periret *Euclidis* Geometria.

B. Recte. Negato enim quod poſſit duci Linea, neque in illius Elementis, neque in quocunque alio Libro Geometrico quicquam extat Demonſtrati. Eſto ergo verum quod hic dicit. Certus tamen ſum aliter ſenſiſſe ipſum, cum *Elenchum* ſcriberet contra *Hobbium* eadem dicentem, quæ nunc dicis tu, quem ob idipſum convitiis onerat.

A. Tanto eſt nequior. Sed pergamus. [*Non minus recte tamen, me judice, diceretur, ſi Magnitudinis Principium diceremus (prout hic loci Principii vox videtur intelligenda) ipſam extenſionem, ſeu partium extra partes poſitionem.*] Quot rurſus ſunt hîc imperitè dicta! Primo, per vocem illam *videtur*, neſcire ſe innuit quomodo vox Principium ſit hoc loco intelligenda, quam ipſe hoc loco poſuit; nimirum fatetur ſe non intelligere quæ ipſe ſcribit. Secundo, cum ex Profeſſo loquatur de Principiis Geometriæ & Arithmeticæ, id eſt, de Principiis Scientiarum, id eſt, de Principiis cognoſcendi, Principia tamen quærit Magnitudinis & Numeri. Tertiò. Principium Magnitudinis *Extenſionem* eſſe dicit, id eſt, *Magnitudinis Principium* eſſe *Magnitudinem*. Quid enim aliud eſt Extenſio (prout is ea voce hic barbarè utitur præter Magnitudinem? Extenſio proprie loquendo, actio eſt illius qui aliquid ex curvo rectum facit. Ille autem *poſitionem* eſſe dicit *partium extra partes*. Quamobrem? Nimirum ut ſalva ſibi ſit opinio ſua *Apopatetica*, quod idem Magnitudine corpus, locum modo majorem, modo minorem occupare poſſit.

B. Fortaſſe; nam in *Elencho* ſuo *Hobbium*, qui aliter ſentit ſtrenuè vituperat.

A. Quartò, cum dixiſſet ante, opinionem eorum qui Magnitudinis

nis Principium dicunt eſſe Punctum, non ineptam eſſe, addit *non minus rectè diceretur*, &c. quaſi utraq; poſſet eſſe vera, ſed pergamus. [*Numeri Principium duceremus ab ea modificatione qua quid unum multa dicimus.*] Primò, quid eſt illud quod *appellat rerum modificationem?* Aut quid aliud hic dicit quam quod res ita modificantur, ut *res una* ſit *unum*, & Multæ Multa. Accurate. Deinde *prout ab indentitate oritur Unitas, ita & a rerum diverſitate oritur Numerus.* Docte. Scilicet *idem* eſt *unum*, *diverſa multa*. Sed nonne & diverſum eſt unum? Quid ergo id quod recte, cum vulgo ante dixerat, Numeri Principium eſſe unitatem, nunc mutat? [*Sed & ipſa unitas non incommode Numerorum Catalogo accenſeri poſſit.*] Quomodo non incommodè, niſi & verè? Sed quare non incommode? Quia [*numerus de omni illo dicitur quo quæstioni* Quot ſunt *affirmativè reſpondetur.*] & quia [*Arithmetica eodem modo & unitatem & cæteros numeros tractat.*] Multa habet Theoremata *Euclides* de Numeris poſt Unitatem certa ratione procedentibus, de unitate nullum. Neq; quidem Numeris primis accenſet Unitatem. [*Et quidem apud Grammaticos* Numerus ſingularis *ſine ſolæſcimo dicitur.*] Quamquam in hac quæſtione, Grammaticorum authoritas non multùm valere debeat, non tamen ideò dicunt Numerum ſingularem, quod credant Unitatem eſſe Numerum, ſed quod in Numero quidem ſingulari Flexionem ponant Nominis quod ſignificat rem unam, in Plurali autem, Nominis quod ſignificat res plures.

B. ἀκριβῶς. ſequitur Cap. 3^{m} de Demonſtratione.

A. [*Demonſtratio eſt Syllogiſmus qui affectiones proprias de ſubjecto per proprias cauſas demonſtrat.*] Intelligiſne per Definitionem hanc quid ſit Demonſtratio?

B. Quidni?

A. Intellexti ergo quid ſignificat vox *demonſtrat.* Unde autem, ſi neſciebas quid eſſet Demonſtratio?

B. Recte dicis. Nam ſciebam antè, ex Definitione *Ariſtotelica*, quam & ipſe appoſuit, nempe hanc, Ἀπόδειξίς ἐστι συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς ἐξ ἀληθῶν, καὶ πρώτων, καὶ ἀμέσων, καὶ γνωριμοτέρων, καὶ προτέρων, καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος, quam ille redidit breviorem.

A. An Definitionem *Hominis Ariſtotelicam* breviorem facere dicendus erit, qui in ejus locum hanc ſubſtituerit (Definitum ponens in Definitione) *Homo eſt Homo;* quemadmodum *Walliſius* ponit *Demonſtrare* in Definitione *Demonſtrationis.*

B. Video nunc Definitionem *Wallianam* vitioſam eſſe. Sed illa *Ariſtotelica* nonne bona eſt?

A. Melior quidem, ſed non accurata. Nam etſi fieri poſſit, ut Demonſtratio ex unico conſtet Syllogiſmo id tamen rariſſimum eſt. Debuit

Debuit ergo dicere συλλογισμὸς, ἢ συλλογισμοὶ, Deinde illud καὶ προτέρων, abundat; nam ante dixerat καὶ πρώτων, Tertio illud καὶ αἰτίων. τοῦ συμπεράσματος proprium non eſt Syllogiſmi demonſtrativi, ſed omnium Syllogiſmorum commune, etiam eorum in quibus tam major quam minor propoſitio eſt falſa. Exempli cauſa, Syllogiſmus legitimus eſt, *Omnis homo eſt lapis, Omnis lapis eſt animal, ergo Omnis Homo eſt animal.* Vides hic concluſionem, neceſſariò ſequi ex Præmiſſis, & propterea Præmiſſas falſas cauſas eſſe poſſe Concluſionis, ut tamen Syllogiſmi tales non ſint Demonſtrationes. Poſtremò Demonſtratio omnis procedit ab ipſius affectionis demonſtrandæ cauſa; ut ſi ab eo quod Terra interpoſita ſit inter Solem & Lunam (exemplo utor Ariſtotelico) Eclipſin fieri Lunæ Demonſtraretur, Interpoſitio Terræ non eſt concluſionis cauſa, ſed Eclipſεως. Fallit interdum *Vox* pro *Re ſe ingerens.*

B. Quænam autem eſt Demonſtrationis Definitio accurata?

A. *Demonſtratio eſt Syllogiſmus, vel Syllogiſmorum ſeries a Nominum Definitionibus uſq; ad Concluſionem ultimam derivata.*

B. Quid, Si Syllogiſmorum aliquis, vel Definitio aliqua vitioſa ſit?

A. Neque Syllogiſmus eſt qui vitioſus eſt, neq; Definitio quæ vitioſa.

B. Quid ſi Concluſio ſequatur (ſine Definitione) Axiomata. An non erit Demonſtratio?

A. Erit, modo Axiomata illa tum manifeſta ſint, tum etiam demonſtrari (ſi imperetur) poſſint; qualia ſunt Axiomata ſumpta ab *Euclide.*

B. Sed ipſa *Definitio* quomòdo definitur.

A. Definitio nonne Propoſitio eſt?

B. Eſt.

A. Nonne etiam eſt explicativa Nominis Definiti?

B. Etiam.

A. Quomodo explicatur nomen quodvis, verbi gratia, Nomen *Homo?*

B. Si ponatur vox *Homo* pro ſubjecto Propoſitionis, deinde pro Prædicato, Nomen quod ſit aggregatum omnium Nominum quibus Homo diſtinguitur a rebus cæteris omnibus. Exempli cauſa, diſtinguitur ab omnibus Accidentibus per nomen *Corpus*; a cæteris Corporibus per nomen *Sentiens*; a cæteris Sentientibus (ſive Animalibus per nomen *Rationale.* Itaq; ſi dicamus Homo eſt Corpus ſentiens Rationale, erit illa propoſitio *Definitio* Hominis. Nomina enim quæ ad faciendum Prædicatum aggregantur complicata ſunt in una appellatione illa *Homo*, ipſumq; Hominem ab omni alia re diſtinguunt, id eſt, quid ſit definiunt.

A. Recte

A. Recte dicis, neq; quicquam aliud fecisti præterquam quod resolvisti vocem Homo in partes suas. Fuisset autem satis illi qui prædefinitum haberet *Animal* posuisse, *Homo est Animal Rationale*. Definitio ergo *Definitionis* accurata erit hæc. *Definitio est Propositio cujus Prædicatum est subjecti Resolutivum.*

B. Quid autem fiet si subjectum resolvi non potest, ut plerumq; fit in Generibus summis?

A. Cum finis Definiendi sit ambiguum tollere, si per Nomina id fieri non potest, faciendum est per Exempla. Addamus ergo Definitioni nostræ pauca etiam verba, ut tota hæc sit, *Definitio est Propositio cujus Prædicatum est subjecti resolutivum, ubi fieri potest; ubi fieri non potest, exemplificativum.*

B. Perge legere.

A. [*Quæ tamen Definitio non omni Demonstrationi convenire putanda est, sed illi quæ est τῦ διότι quæ etiam κυρίως Demonstratio dicitur. Ad Demonstrationem τῦ ὅτι sufficit Argumentum ab effectu.*] Vellem definisset quod sit illa Demonstratio τῦ ὅτι. Nam Demonstratio τῦ διότι est, quando quis ostendit propter quam Causam subjectum talem habet effectionem. Itaq; quoniam Demonstratio omnis est scientifica, & scire talem esse in subjecto affectionem, est a cognitione causæ quæ illam necessario producit, nulla potest esse Demonstratio præterquam τῦ διότι. Rectè ergo dicit, illam quæ dicitur τῦ ὅτι non esse κυρίως Demonstrationem, id est, non omnino Demonstrationem. Nam in Sermone Mathematicorum *non esse* & *non proprie esse*, idem sunt.

B. Ratiocinatio quæ incipiens a veris Principiis Conclusionem recte infert, proprie dicitur *Demonstratio*. Neq; credo *Aristotelem* Demonstrationem vocasse, ne quidem τῦ ὅτι ratiocinationem ullam in qua esset Paralogismus. Necessarium ergo est ut intellexerit ratiocinationem quæ incipit, non a Definitionibus, sed a suppositis (qualibus utuntur Physici) plerumq; incertis. Non ergo debuerunt interpretes ejus Demonstrationem τῦ διότι interpretari Potissimam, sed simpliciter Demonstrationem.

A. Videtur id voluisse *Aristoteles*, neq; dissentiente *Wallisio*, qui eam appellat Argumentum ab effectu. Dicendum ergo est duplici Philosophorum inquisitioni, nimirum effectuum ex causis, & causarum ex effectibus. duplex respondere ratiocinationis genus, nempe Priori Demonstrationem, id est, ratiocinationem ex Definitionibus, quæ est scientifica; posteriori ratiocinationem ex Hypothesibus, possibilibus, quæ etsi scientifica non sit, si tamen nullus appareat effectus, ne in longissimo quidem tempore, quæ Hypothesin redarguat, facit ut animus in ea tandem acquiescat, non minùs quam in scientia. Frustra autem Demonstrationis τῦ ὅτι quærimus definitionem, quæ Demonstratio non est.

Sequitur

B. Sed qua Methodo distinguendæ sunt?

A. Eadem qua distinguuntur ipsa Phænomena sive accidentia quæ apparent, nimirum, incipiendo a maxime communibus.

B. Quæ sunt illa?

A. *Magnitudo* & *Motus*. Et quoniam hæc in omni corporum actione effectum partim producunt, ut Motus, partim augent vel minuunt ut Magnitudo, prout major est vel minor, scientia in qua determinantur magnitudines, tum Corporum, tum Motuum primo loco ponenda est. Nam primo loco discenda est, quippe quod sine illa cæteræ acquiri non possunt.

B. Scientia hæc quomodo appellatur?

A. *Geometria.*

B. Defini Geometriam.

A. *Geometria est scientia determinandi Magnitudines.*

B. Breviter quidem satis, sed parum perspicuè. Non enim intelligo quid sit *Magnitudinem determinare.*

A. Magnitudinem determinare idem est quod ostendere quanta sit.

B. Quomodo autem ostenditur vel cognoscitur Magnitudo exposita quanta sit?

A. Comparando eam cum Magnitudine alia mensurata, vel quæ habeat ad mensuratam rationem cognitam. Itaque Geometria definiri potest sic, *Geometria est scientia per quam cognoscimus Magnitudinum inter se rationes.* Sed quoniam eæ cognosci non possunt, nisi exposita sit quantitas aliqua per mensuram cognita, juxta quam cæteræ possunt æstimari, Definitio Geometriæ clarior erit, si sic dicamus, *Geometria est scientia determinandi Magnitudinem, sive Corporis, sive Temporis, sive rei cujuslibet non mensuratæ, per comparationem ejus cum alia vel aliis Magnitudinibus mensuratis.*

B. Exquisitè hoc. Et quoniam Magnitudo continua quælibet data dividi potest in partes quotlibet aliquotas (ratione ejus ad quamlibet aliam non mutata) manifestum est Arithmeticam in Geometria contineri. Sed cupio etiam definitionem audire Arithmeticæ seorsim a Geometria.

A. *Arithmetica est scientia determinandi multitudinem rerum non numeratarum, per comparationem cum numerata vel numeratis.* Itaque qui de quantitate loquens continua, Geometra est, idem de eadem loquens quantitate, ut divisa in partes aliquotas, est Arithmeticus.

B. Assentior.

B. Assentior. Progredere ad alia.

A. Proximo loco poni oporteret *Physica Universi* (siquidem ab homine acquiri posset) qua determinaretur Magnitudo & Motus universi tanquam corporis unius, & quæcunque inde consequuntur. Tertio loco succedit scientia qua determinantur corporum Cœlestium visibilium (id est stellarum tum fixarum, tum Planetarum, comprehenso etiam Globo Telluris) & Motuum, quibus eorum unumquodque fertur Magnitudines; appellaturque Astronomia. Quarto scientia qua Motus corporum invisibilium determinantur, a quibus Calor, Frigus, Lumen, cæteræque qualitates generantur, & operationes non visæ, gradusque earum fiunt. Vocatur autem *Physica.* Deinde ad Astrorum partes venientes (id est ad partes Globi Terrestris (nam Astrorum sublimium partes non satis percipimus) infinitæ statim apparent rerum sublunarium species, quarum Magnitudines, Motus, actionesque considerandæ sunt; harum autem scientiarum nomina vel ab ipsis subjectis, vel ab eminentibus subjectorum qualitatibus derivari solent; ut quæ de Plantis tractat, *Phytologia*; de Corporibus Animalium, *Anatomica*; de visione *Optica*; de Ratiocinatione, *Logica*; de Moribus humanis, *Ethica*, de Civitate, *Politica*, &c.

B. Si tantam speculandi materiam præstet unica species Homo, quando putas otium nobis fore contemplandi cæteras? Transeamus jam, si volueris, ad Cap. 2m.

A. [*De Geometria, & Arithmetica speciatim; Earum Definitiones, Objecta, Principia, & Affectiones; easque verè scientias esse.*]

B. Accuratior forte erit hic quam in præcedentibus.

A. Non puto. Geometriæ & Arithmeticæ duplices affert Definitiones, alteras ab objecto, alteras a Fine. [*Priori modo definitur Geometria, Scientia Magnitudinis quatenus Mensurabilis.*]

B. Non accurate hoc? In Definitionibus enim Aristotelicis signum esse solet summæ ἀκριβείας vox illa *quatenus.* Nam accuratam Definitionem juxta *Aristotelem* dictum esse oportet non modo *De omni* & *Per se*, sed etiam *quatenus* ipsum.

A. Recte id quidem *Aristoteles*, non tamen in omni Definitione ea voce utitur. Subjectum *Physicæ* dicit *Aristoteles* esse *Corpus mobile, quatenus mobile.* Vides *Corpus mobile*, significare subjectum ipsum. In eo autem considerari possunt multa quæ Physicus non considerat. Itaque ut opus Physici in sola mobilitate determinaret *Aristoteles*, adjecit illud *quatenus mobile.* Sin dixisset,

Physicam

Physicam scientiam esse in qua demonstrantur affectiones Corporis [illegible]*entes ex ejus mobilitate*, non puto adjecisset *quatenus mobile.* Sic *Wallisius* potuit dixisse, *Geometria est scientia Magni, quatenus mensurabilis*, sed non *Magnitudinis quatenus mensurabilis*; propterea quod in corpore quidem sive magno sive parvo sunt alia multa, quæ considerari possunt præterquam quod sit *mensurabile*; in magnitudine autem nihil. Deinde illud, scientia *magnitudinis*, sive etiam *magni*, tantum abest ab ἀκριβείᾳ, ut sit absurdum. Quid quæso est *scire magnitudinem*, vel *scire magnum?* Præter alicujus dicti veritatem nihil sciri dicitur, itaq; nisi *Magnum*, sit *Propositio*, sciri non potest.

B. Quomodo definit Arithmeticam?

A. [*Arithmeticam vero esse scientiam numeri quatenus numerabilis.*]

B. Eadem sunt & hic vitia.

A. [*Posteriori vero modo, Geometriam dico scientiam bene mensurandi, Arithmeticam autem scientiam bene numerandi.*] Quid est mensurare?

B. Mensuram definiisti supra, describens id quod faciunt qui aliquid mensurant, nimirum *mensuram esse applicationem*, &c. Itaque mensurare est applicare mensuram ad magnitudinem mensurandam, quoties fieri potest, ut mensuræ ad mensuratum ratio ad sensum exponatur. Itaq; corpora consistentia quidem per *lineas*, Liquida autem & quæ fluida sunt per *vasa* mensurari solent.

A. Nonne ergo bene mensurare, sciunt quæ mensuras mensurandis bene προσαρμόζειν, id est applicare sciunt? Omnes ergo homines, per definitionem hanc *Wallisii*, sunt (non minus quam ipse) Geometræ; ut etiam omnes, qui multitudinem quam vident numerare possunt sunt (ut ille) Arithmetici.

B. Sed per *mensurabilitatem* & *numerabilitatem* intelligere se dicit *quicquid ad eorum singulas affectiones & habitudines investigandas & intelligendas attinet.*

A. Itaque per *mensurare* & *numerare* intelligit *demonstrare.* Voluit certe idem quod est in definitione mea, *quicquid magnitudinem determinat, sive facit cognitam*; Sed quia illud non intellexerat, eloqui non potuit. [*Quod illas autem scientias dixerim, non est cur quisquam miretur*, &c. *Habent enim Subjecta, Principia, & Affectiones, easque de Subjectis, demonstrationibus maximè scientificis demonstratas.*] Vera quidem, nesciente illo, est consequentia; at si vox *Principia* id significat quod vult ipse, vera non est. Habet certe Geometria Principia sua, nempe Puncti, Lineæ, Superficiei, Solidi, Anguli, Figuræ, *&c.* definitiones; & præterea Axiomata per se manifesta,

nifesta,

nifesta, & Petitiones quasdam non iniquas. Hæc sunt Principia Geometriæ. Per hæc demonstrantur subjecti quanti affectiones. Ille autem hæc non intelligit, neque Principia ipsa, aut quomodo conducant ad demonstrationem. Audi quid dicit de Principiis [*Principia quod attinet, Punctum quidem est Principium magnitudinis, Unitas autem Numeri, ut vulgò perhibetur. Nam ex fluxu Puncti Linea, ex fluxu Lineæ, Superficies, Superficiei verò corpus oriri traditur. Item ex Unitatibus numeros fieri satis liquet.* Vide n' quam paucis verbis quantam suam indicavit ignorantiam? Probandum susceperat Geometriam Arithmeticam vere scientiam esse. Medium probandi assumit *quod subjecta habeant & Principia & Affectiones de subjecto demonstratas.* Assumpti partem unam nempe quod habeant Principia sic probat, *Punctum quidem magnitudinis, unitas autem numeri Principium vulgo perhibetur.* Censen' tu Geometram esse, qui quod probare debuit, ab authoritate probat vulgi?

B. Peccatum fateor est, nec parvum.

A. Demus autem ei satis hoc demonstratum esse. An Geometram esse dices, qui cum Geometriam & Arithmeticam Principia habere ostendere deberet, ex eo probat quod Punctum est Principium Magnitudinis, & Unitas Numeri? Intelligisne quomodo Punctum Principium esse potest Geometriæ?

B. Nullo modo.

A. Aut unitas Arithmeticæ?

B. Tantundem.

A. Aut eandem rem esse Magnitudinem & Geometriam? Aut Numerum & Atithmeticam?

B. Æquè.

A. Aut Puncti definitionem & Punctum ipsum esse idem?

B. Quid tu hæc tam absurda a me quæris?

A. Quid? nisi ut mihi dicas sicubi Argumenti hujus vim latere sentias.

B. Dicam quod sentio; nempe fraudi illi fuisse, quod cum vox *Punctum* Principium sit libri Elementorum Geometriæ *Euclidis*, habuit ipsum pro Principio Geometriæ, pariterque, quia vox *Unitas* prima est in Libris ejusdem Arithmeticis, putavit Unitatem Principium esse scientiæ Arithmeticæ. Miror sane hominem Peripateticum adeo oblitum fuisse *Aristotelis* sui, ut non meminerit Principia alia esse (ut nos loquimur) *essendi*, alia *cognoscendi*.

A. Pronum est oblivisci quæ non intelligas.

B. Est in his illius verbis quod non minùs reprehenderem quam ea quæ tu (quanquam in Geometriæ Professore turpissima) modo reprehendisti.

A. Quid

Sequitur disputatio ejus contra *Smiglecium*; primò de *Ente Mathematico.* Quid sit Ens Mathematicum non ita bene intelligo, ut ipsum, si opus esset, possem definire, aut satis distinguere ab Ente Metaphysico, Ente Physico, Ente Logico, Ente Rationali, Ente Intentionali, & similibus, quæ nunc passim occurrunt, neque (quod puto brevi introducetur a Symbolicis) ab Ente Symbolico. Deinde defendit *Euclidis* Demonstrationem omnium primam contra *Smiglecium*, non male, nisi quod addendum esse dicat [*in nulla quidem scientia expectandum esse ut omnes ibidem Demonstrationes æquali perfectionis gradu procedant.*] Nam Demonstrationes vocat, quæ non sunt scientificæ; cum tamen initio hujus Capitis Demonstrationem appellâsset συλλογισμὸν ἐπιστημονικόν. Itaq; juxta illum, eorum quæ scimus, alia magis alia minùs scimus; quod est absurdum. [*Abunde sufficit, quanquam passim immisceantur aliæ τοῦ ὅτι.*] Abundè ergo sufficit si in Elementis *Euclidis* non omnia Theoremata demonstrentur Demonstrationibus τοῦ διότι; id est, sufficit si alia ejus Theoremata sciamus esse vera, alia an vera sint necne nesciamus. An Geometriæ Professor idoneus est, qui neq; (ut ante ostendimus) scit quæ sint illius scientiæ Principia, neq; (ut apparet hoc loco) quid sit *demonstrare*, id est, quid sit *docere*? Miror quî factum sit, ut Cathedram nactus sit *Savilianam.*

B. Fortasse, quod in Professoribus illis eligendis plurimùm potuerint suffragia hominum non Mathematicorum sed Theologorum.

A. Quid? Theologiæ Doctores nonne didicerant Logicam? Nam errores hi non oriuntur a defectu Geometriæ, sed Logicæ. Unde autem commendatus est Theologis?

B. Nosti quo tempore eligebatur, multùm in Civitate nostra potuisse, eos qui Ecclesiæ Regimen, in sacris, Presbyterio adjudicabant, cujus Sectæ est *Wallisius.* Præterea Commendatior fortasse erat propter Artem Symbolicam.

A. [*Igitur ut rem totam dilucidiùs expediam, tres præsertim Demonstrationum Mathematicarum sive modos, sive gradus, sive species statuo. Prima quidem est illa Demonstratio quæ per deductionem ad absurdum, seu impossibile procedit.*] Scis Demonstrandi genus hoc loco dici Ducere ad absurdum, quia ducit ad contradictoriam propositionis alicujus ante Demonstratæ Ostensive; & quidem per demonstrationem τοῦ διότι.

B. Scio; & proinde Theorema nullum, quod ex Principiis immediate demonstratur, Demonstratum dici, potest per *deductionem ad absurdum.*

A. Qui demonstraverit propositionem quamcunque esse veram, nonne

nonne simul demonstrat tum contrariam tum contradictoriam ejus esse falsam?

B. Absq; dubio.

A. Si igitur propositio ipsa demonstrata sit per Demonstrationem τοῦ διότι, etiam contradictoria ejus, eo ipso quòd contradictio detegitur, demonstratur per Demonstrationem τοῦ διότι.

B. Ita censeo.

A. [*Secunda Demonstrandi ratio est Ostensiva* τοῦ ὅτι; *ut si recta* AC *demonstraretur æqualis esse rectæ* BC, *quoniam utraque Demonstrata fuerat æqualis ipsi* AB; *quæ autem sunt eidem æqualia, sunt & æqualia inter se. Estque hæc Demonstratio quidem Ostensiva* τοῦ ὅτι, *non autem* τοῦ διότι.] Dic mihi, si AC demonstraretur æqualis esse BC, an ideo esset Demonstratio?

B. Videris mihi quærere an Demonstratio sit Demonstratio.

A. Si Demonstratio est, scientifica est.

B. Recte.

A. An AC, BC. sciri possunt æquales esse inter se, nisi sciamus priùs utramq; æqualem esse AB?

B. Minime, neq; id dicit *Wallisius*.

A. Si sciri non potest AC, & BC, esse inter se æquales, antequam sciamus utramque earum æqualem esse AB; neq; potest demonstrari illud sine Demonstratione hujus.

B. Verum est.

A. Est ergo Demonstratio hujus, pars Demonstrationis illius.

B. Video quo tendis, nimirum, ad id quod dixisti paulò ante, in Demonstrationis Definitione, nempe esse eam Syllogismorum seriem cujus Principium est in Definitione, & finis in Conclusione ultima;; quod & verum est, & manifestum facit Demonstrationem totam cujus Conclusio est AC, BC *esse inter se æquales*, esse Demonstrationem directam τοῦ διότι. Nam utramq; AC, BC æqualem esse AB Demonstratum est per Causam efficientem, nempe per constructionem duorum Circulorum (permutatis centris) super eandem rectam AB. Imò verò eadem illa constructio causa est quod duæ vel quot vis Lineæ rectæ inter se æquales sint. Nam Radius quo Circulus describitur, mensurat per ἐφάρμοσιν distantiam a centro ad circumferentiam in locis infinitis eandem. Non ergo est illa demonstrandi ratio ostensiva τοῦ ὅτι.

A. Neq; placet mihi illa ipsa distinctio Demonstrationis in *Ostensivam* & *Deductivam ad impossibile*. Non enim loquutio est Doctori scientiarum præsertim Mathematicarum satis accurata. Nam *Demonstratio Ostensiva* idem est quod *Demonstratio Demonstrativa*. Est enim altera, ea quæ tendit rectâ viâ ad ipsam Propositionem; altera, ea quæ tendit

tendit ad contradictoriam ejus, viâ (primò) rectâ, deinde (per conversionem) ad propositionem ipsam.

B. Quoties audio quemquam dicere *Demonstrationem* τοῦ ὅτι, vix me contineo ne interrogem τοῦ ὅτι τί, sed me contineo tamen, ne quod omnes se scire dicant, solus videar ignorare. Dic ergo, cum in omni Demonstratione dicant *Quod* verum est, vel *Quod* falsum, quomodo una Demonstratio est *Quod*, alia *Propter quid?* Nescimus enim *Quod* res ita est, nisi sciamus *Propter quia* ita est, juxta id quod solemus dicere Aristotelici, *scire est per causam scire.*

A. Videtur *Aristoteles*, cum in *Physica* animadvertisset non effectum per causam cognitam, sed contrà causam quæri per cognitos effectus, atq; id non posse accurate fieri, propterea quod similes effectus non semper & necessariò similes habeant causas, ob eam rem *potiorem* Demonstrationem eam duxisse, qua effectus per causam demonstratur (quæ est τοῦ διότι) quam ea quæ causam concludit ex effectu, quamq; propterea appellavit τοῦ ὅτι. Quæ tamen scientifica non est, & proinde nec vera Demonstratio. Non enim incipit a Definitionibus, sed ab Hypothesibus, quæ falsæ esse possunt; quanquam, si nulla experimenta, etiam post longissima tempora eas redarguant, satis erunt probabiles; sed Theoremata inde deducta non possunt dici demonstrata. Frustrà ergo quærit *Wallisius* Demonstrationem τοῦ ὅτι inter Demonstrationes *Euclidis*. Sed pergo. [*Si quis denique objiciat, me tres demonstrationis species fecisse, cum vulgo duæ tantum statuantur, poterit ille, si placet, duarum priorum utramque Demonstrationem* τοῦ ὅτι *dicere. Non enim libet de verbis contendere, modo de rebus constet.*] Benigne sane, qui quid verum sit (quia de re non constat) potestatem nobis concedit eligendi.

B. Eligo igitur hoc; unum esse Demonstrationis genus, nempe τοῦ διότι; sive Conclusio directe demonstretur, sive per Deductionem ad absurdum.

A. In Capite quarto agit de Unitate, Numero, & Numeri Principio [*Unitas est secundum quam unumquodq; Unum dicitur. Numerus autem est ex Unitatibus composita multitudo.*] Scilicet ita definit *Unitatem & Numerum* Euclides.

B. An non recte?

A. Numerum quidem accurate, Unitatem autem imperite. Nam propter cognationem vocum *Unum* & *Unitas*, altera in alterius Definitione poni non debuit; non magis quam *Album* in Definitione *Albedinis*, aut *Albedo* in Definitione *Albi*. Nihil enim confert ad intellectionem vocis *concretæ* sua ipsius *abstracta*, neq; contra, *abstractæ* sua *concreta*. Cavit autem *Euclides* ne Definitione hac in Demonstrationibus uteretur; atq; ita factum est, ut nullum inde vitium emanaverit ad Theoremata. [*Ex his autem Unitatis & Numeri Definitionibus*

tionibus plerique arbitrantur Unitatem Numerorum Catalogo non eſſe accenſendam, adeoq; numerum minimum Binarium eſſe; quanquam illud quidem Euclidem uſpiam dixiſſe non memini.]

B. Si meminiſſet Definitionis *Euclidis*, quam proxime ſuprà ipſe retulit, neceſſe eſt ut meminerit ſentire *Euclidem* Numerorum minimum eſſe Binarium, niſi idem ſit μονὰς & μονάδων πλῆθος. [*Operæ tamen pretium fortaſſis erit paucis oſtendere cur Unitatem putem vere Numerum eſſe, aliiſque Numeris annumerandam. Nec huic forſan adverſabitur Euclidis aliorumque ſententia probe intellecta.*] Quid an poſſibile eſt ut probe intelligatur μονάδα eſſe ex μονάδων συγκείμενον πλῆθος? [*Cum enim nonnulli Unitatem, proprie loquendo, non modo Numerum eſſe negent; ſed & Numeri partem, adeoque* Numeri Principium impars eſſe *dicant, ut eſt Magnitudinis Punctum & Temporis Momentum, intelligendi fortaſſe ſunt de Monade, ſeu Unitate, non ut Numerum ſingularem deſignat, ſed ut eſt communis quaſi Numerorum omnium denominator.* Sic enim *Numerus Quaternarius eſt qui quatuor Unitates, numerat.* Tune hæc intelligis?

B. Puto.

A. Expone ea quæſo.

B. Conſidera fractionem hanc $\frac{4}{1}$. Quid ſignificat.

A. Quatuor unitates.

B. Quare?

A. Quia quotcunq; partes integri, Fractionis denominator Unitas denominat, earum partium numerator, numerat 4. Sed Unum denominat ipſum integrum indiviſum; ſunt ergo $\frac{4}{1}$ quatuor Unitates.

B. Itaq; hoc dicit, Illos qui Unitatem numerum eſſe negant, tunc ſolummodo id negare, quando Unitas ſit Denominator fractionis ut in $\frac{4}{1}$ vel $\frac{3}{1}$.

A. Dicit ergo *Walliſius*, [*dum quatuor tantundem valent ac quatuor Unitates, vox illa* Unitates *nec Numerus eſt, nec pars numeri, ſed vel numeri denominatio ſeu denominator, vel ipſum numeratum.*]

B. His ergo verbis vides ut ipſe, quæ obſcura ante erant, clare eloquutus eſt.

A. Ita clare, ut ſcias quid illis contingere neceſſe ſit, quibus ante naſcuntur opiniones, pòſt quæruntur argumenta quibus poſſunt defendi; nimirum, quemadmodum iis accidit qui in tenebris oberrant, ut quacunq; moveantur impingant in aliqua offendicula. Nam ut *Unitatem* ſuſtineat eſſe Numerum, *Unitates*, id eſt plures, numerum eſſe negat; nec quatuor, aut tres, aut quot vis Unitates Numerum eſſe patitur.

B. Non negat quatuor *Unitates* eſſe Numerum, ſed *vocem illam Unitates* numerum eſſe negat.

A. Quis

A. Quis neſcit vocem illam *Unitates*, aut ſi vis, vocem illam *numerum* non eſſe Numerum? Nam numerus eſt unitatum multitudo, vox autem non eſt. Quæritur hic an in fractione hac $\frac{4}{1}$ ſignificante quatuor Unitates, quatuor ſit numerus, ut ille dicit, Unitates numerus non ſint. Imò vero Unitates eſſe Numerum verum fuit etiam ante quam ulla extiterunt nomina, aut *Numerorum*, aut *Unius*. *Quatuor* ergo, niſi ſubauditis Unitatibus, vel *Unis* numeratis, nihil eſt. Unitates autem nunquam non erant Unitatum numerus. Rurſus, [*Vox illa Unitas eſt numeri denominatio ſeu numerator. Vox autem Una eſt numerus ſeu Unitatum multitudo (multitudinis voce laxius accepta, ut poſt dicitur;) dicit enim quot vel quam multæ Unitates adeſſe dicantur, nimirum Unicam. Aliud autem eſt negare Unitatem, aliud vero negare Unum Numerum eſſe. Eodem enim ſenſu ἡ δέκας Numerus eſſe negari poſſit, quamvis δέκα Numerus eſſe non negetur.*] Primò, obſcurum eſt quod dicit *Denominatio ſeu Numerator*, quaſi ſignificarent eandem rem, præſertim cum ſuperius (quinq verſibus) dixerat *Denominatio* ſeu *Denominator*. An in Fractione $\frac{4}{1}$ Denominatio eſt 4, Denominator 1? Deinde ſi vox *una* ſit Numerus, erit quoq; Numerus (id eſt multitudo Unitatum) *vox*; id quod nemo intelligit. Sin *Uni* ſit Numerus, erit illa Numerus rerum Numeratarum, puta, *Unitatum.* Itaq; *Una Unitas* eſt Unitates. Tertio non eſt verum quod dicit, aliud eſſe negare *Unitatem*, aliud *Unum* eſſe Numerum. Nam illi quibuſcum diſputat, cum negant Unitatem eſſe Numerum, intelligunt per *Unitatem* ipſum (in concreto) *Unum*. Quarto, ἡ δέκας a quo negatur eſſe Numerus? An non ἡ δέκας ſignificat propriiſſime idem quod *numerus denarius*, ſicut δυάς, τριάς, τετράς, idem quod *numerus binarius, ternarius, quaternarius*? Sed de his negari non poteſt, quin ſint numeri. Itaq; ἡ δέκας non poteſt negari eſſe numerus. Poſtremò, cum probandum illi eſſet *Unum* eſſe Numerum, hoc tantum probare conatus eſt, quoſdam qui contra ſentiunt, ſententiam ſuam non ſatis demonſtraſſe.

B. Quod unum ſit Numerus demonſtrabit forte inferiùs.

A. Bene eſt. Pergamus. [*Sed revera, ſi accurate loqui velimus, non tam Unitas quam nullitas (ſi ita loqui liceat) ſeu Nullum idem reſpectu Numerorum obtinet, quod Punctum reſpectu magnitudinis.*]

B. Nollem hoc dixiſſet. Nam cum ab *Hobbio* culparetur quod Punctum dixerat eſſe nihil, negavit ſe ita ſenſiſſe. Nunc tamen idem dicit apertiſſime, cum enim ſit ut *Nullum* ad *Numerum*, ita Punctum ad *Magnitudinem* certiſſimum eſt Punctum eſſe nihil.

A. Illud quoq; ineptum eſt quod cum in proxime præcedentibus diſtinxiſſet *Unitatem* ab *Uno*, ut *Non Numerum* a *Numero*, nunc

 cum

cum *Nullo*, confundat *Nullitatem*. Hoccine eſt loqui accurate? Præterea, cum dixiſſet, *ſi accurate loqui velimus*, cur ſtatim addit *ſi ita* (id eſt, non accurate) *loqui liceat?* An ſcribit dormiens. Sed progredior. [*At interrogabitur forſan, Num velim ego, a veterum pariter & Recentiorum omnium ſententia diſcedere, qui uno Ore Unitatem vocant Principium Numeri. Reſpondeo nihil abſurdi eſſe majorum inventis addere.*] Vide captum hominis Mathematici. Mathematicorum eſſe putat docere an unum ſit vocandus Numerus; quaſi non vulgi eſſet impoſitio nominum, aut quilibet è vulgo non æquè ſciret atq; centies mille peritiſſimi Arithmetici utrum Unum ſit Numerus necne, id eſt, (juxta Definitionem *Euclidis*) utrum homo ſit homines necne. Mirarer certe cum non ſolum ab *Euclide*, ſed etiam ab omnibus tum Veteribus tum Recentioribus ſciret ſe diſſentire, errorem in ſeipſo eſſe non ſit ſaltem ſuſpicatus, ſed eorum inventis hoc addidiſſe ſe exiſtimaverit, niſi ſcirem cujus eſſet Sectæ. Qui proximè ſequuntur, circiter viginti verſus, ſunt gravis & acerba reprehenſio temeritatis eorum, qui ſi vel tantillum ſciunt, aliorum omnium peritiam vel flocci faciunt vel ſuperciliose contemnunt. Cujus reprehenſionis juſtitia ita manifeſta eſt, ut nihil circa eam examinandum ſit, niſi ad quem potiſſimùm collimaverit.

B. Videtur hoc loco eos ſcriptores omnes perſtringere, qui non eadem in Mathematicis ſentiunt quæ ipſe.

A. Deinde ad inſtitutum rediens ſic ſcribit, [*quod ad rem præſentem attinet, aſſero, & veterum ſententiam probe intellectam, & quæ nos aſſerimus ſatis conſtare poſſe. Ipſa enim Principii vox duplici ſaltem acceptatione occurrit, prout nempe ſignificat* Primum quod ſic, *vel* ultimum quod non. *Sic ſi hæredis jus in rem Hæreditariam ab ipſo patris interitu incipere dicatur, erit hoc Principium* Ultimum quod non, *Si verò dicamus hæredis jus inchoari a primo momento ſucceſſionis, etiam ita vere dicitur, ſed hoc Principium eſt* Primum quod ſic.]

B. Subtiliter hæc.

A. Ita; ac ſi dixiſſet finem Capitis præcedentis eſſe Principium Capitis hujus.

B. Subtiliter dico, id eſt Scholaſtice, vel Metaphyſice; Scholaſtici enim olim ſubtiliſſimi habebantur.

A. Subtiliter pro *Barbare*. Quis putabit inchoatum eſſe Jus, vel aliam rem quamcunq; tunc quando neq; ipſa, neq; ulla ejus pars exiſtit. Sed quare homo Mathematicus de Mathematicis ſcribens exemplo utitur Juris? An etiam Juris Romani peritus eſt? An potius per hoc exemplum fieri poſſe ſperabat ut eſſe crederetur?

B. Neſcio

B. Neſcio ſane, ſed illum nunc incipere puto a Principio (ut ille vocat) *Ultimo quod non.*

A. [*Unum igitur numerum eſſe affirmo — minimum enim eſt quod affirmative reſpondet quæſtioni* quam multa.] Si dicam reſponderi etiam poſſe per *nullum*, ſcio quod exiget ut reſpondeatur affirmative. Dico ergo quæſtioni *Quot* ſive *quam multa*, non omnino reſponderi aptè & plenè poſſe ſine negatione. Nam qui *Unicum* habens *filium*, quærenti quot haberet filios, reſpondet per *Unum*, non ſatis plene reſpondet, quia & qui plures habet Unum habet. Reſpondendum ergo eſt non per *Unum* ſed per *Unicum*, id eſt Unum nec plures, id eſt non ſine negatione. Ita etiam ſi reſpondeat plures habens) *Duos*, non plene reſpondet, propterea quod, qui tres habet Duos habet. Reſpondendum ergo eſt per *Duos nec plures*, id eſt, non ſine negatione. Illud ergo quod pro cauſa adfert quare crediderit *Unum eſſe numerum*, cauſa eſſe non potuit. Vin' cauſam quare id contra tum veterum tum recentium omnium ſententiam verum eſſe crediderit, dicam ego, qui eam ſcio meliùs quam ille?

B. Volo.

A. Cum legebat numerorum cifras 1. 2. 3. 4, *&c.* vel cum audiebat nomina Unum, Duo, Tria, Quatuor, *&c.* Cifras illas & nomina illa pro numeris ipſis nominatis intelligebat; ut & paulò ante cum diceret *Vox Unitas eſt Numerus.*

B. Credo ſane. Sed quomodo *Unitatem* & *Numerum* definis tu?

A. Unum quidem (cum *Ariſtotele*) id quod conſideratur ut *individuum*; Numerum autem (cum *Euclide*) ex *Unis collecta plura.* Nam vox πλῆθος non ſignificat *Multitudinem* eo ſenſu quo opponitur *Paucis*, ut cenſet *Walliſius*, ſed eo quo opponitur *Uni*; adeo ut proprie loquendo πλῆθος Græcum, & Latinum (non *multa* ſed) *plura* idem ſint. Deinde lego in margine [*numeri fracti non ſunt numeri proprie dicti.*] Verene hoc?

B. Anne fractus Integer eſt, aut Numerus ullus eſt qui non ſit Integer?

A. Minime. Et tamen id quod per Numerum Fractum intelligitur, eſt Numerus proprie dictus.

B. Qui fieri id poteſt?

A. Quid ſignificatur per Numerum Fractum hunc $\frac{3}{4}$?

B. Significantur tres partes quarum *Unitas* habet quatuor.

A. Satis quidem intelligo quomodo *Unum*, quodcunq; illud ſit, poſſet dividi in 4 partes, quomodo autem *Unitas* ita dividi poſſit non intelligo.

B. Cum

B. Cum dico *Unitatem*, intelligo ipſum *Unum* Integrum quod diviſibile eſt in partes quot quis voluerit.

A. *Unum* ergo Integrum ſit aſſis. Dic mihi an tres aſſes ſit numerus aſſium.

B. Sunt.

A. Et Numerus aſſium numerus proprie dictus?

B. Eſt.

A. Et numerus unciarum nonne eſt Numerus proprie dictus?

B. Æquè.

A. Et numerus Quadrantum nonne Numerus proprie dictus?

B. Etiam.

A. Et $\frac{3}{4}$ ſive dodrans nonne eſt Numerus Quadrantum?

B. Eſt.

A. Idemq; Numerus fractus.

B. Viciſti. Nam qua ratione diceret aliquis Numerum integrorum magis proprie Numerum dici, quam partium, eadem ratione poterit dicere Numerum boum magis proprie dici quam ovium. Hactenus ergo non modo, non ἀκριβῆ, ſed etiam inepta ſunt quæ legimus, authoremq; tantæ ſubtilitati imparem eſſe indicant. Capite quinto ubi oſtendere pollicetur *procreationem*, quam appellat etiam *originationem* Numerorum, expectaveram aliquid novi, ut quis primus Numeros vel ſaltem nomina numeralia primus invenit. Sed de hoc ne verbum quidem habet.

A. [*Si igitur ubi prius nulla erat, apponatur Unitas, fit numerus ſingularis; ſi adhuc addatur Unitas alia, emergit Numerus Binarius; accedat alia, & exſurgit ternarius — Eſtque hæc vera Numerorum Originatio ſeu Procreatio.*] Eleganter illud, *ubi prius nihil erat, apponatur.* Et ex additione Unitatum fieri Numerum, ſed nec minùs fieri per ablationem partium æqualium, ab Uno dato (id eſt per diviſionem) pueri ſciunt; quare autem per additionem potiùs quam per ablationem, pueri & *Walliſius* juxta neſciunt. Poterat ergo ſubtilitas hæc ſine ulla exiſtimationis ſuæ, aut eruditionis noſtræ jactura prætermitti, quemadmodum & id quod proxime ſequitur, nimirum hoc, *Eſt igitur impoſſibile ut Numerus maximus aſſignetur.* Nam & hoc pueri ſciunt.

B. Quomodo ſciunt pueri cum ipſos Geometras loqui audiant de recta diviſa in partes Numero infinitas, & librum legent *Walliſii de Arithmetica infinitorum* a magni nominis Geometris *Schotenio* & *Hugenio* (editis Epiſtolis,) approbatum?

A. Neſciant ergo hoc pueri. Deinde oſtendit diſpoſitionem *Numerorum* in Decades, Centurias, *&c.* in perpetua ratione 1 ad 10.

B. Potuit

B. Potuit quoq; hoc præteriri.

A. Sed exempla affert numerationis Græcæ & Hebraicæ, quæ forſan præterire ſe potuiſſe non putavit, quin eruditio ejus minùs multiplex eſſe videretur.

B. Non modo hic, ſed etiam in proxime ſequentibus peritiam ſuam in hoc genere literarum aliquanto magis ambitioſe oſtentat quam eſt opus. Quis neſcit potuiſſe numerationem ab initio per quamlibet aliam proportionem fieri, ſi ita libuiſſet primis inventoribus? Credibile enim eſt, ſi nati fuiſſent homines dodecadactyli, quod Numerorum progreſſio fuiſſet facta per rationes perpetuò duodecuplas. Tranſi, ergo ad Caput ſextum.

A. Caput ſextum differramus, ſi vis, in diem craſtinum. Nam ſentio me laceſſere.

B. Placet.

A. Se[d] Unicum hoc prius legamus. [*Tamen quod mirum dicta eſt, in eadem proportione decupla omnes ubique terrarum gentes mire conſpirant.*] Quid ſi falſum hoc ſit?

B. Minus id mirum erit.

A. *Walli* noſtri & *Armorici* Galliæ uſq; ad decem quidem ab Unitate progrediuntur ut nos; deinde reſumpta Unitate (non ad viginti, ſed) ad quindecem; & rurſus repetita Unitate ad 20; inde ad 25, & a 25 ad 30, *&c.* tanquam poſt Decadem per unius tantùm manus digitos computarent. Sed more ſuo nimis temere, nec ſatis Logicè propoſitionem ex Inductione intulit Univerſalem. Memineris cras redire, circa eandem horam.

B. Faciam. Vale.

 Dialogus

Dialogus Secundus.

A. BEne advenis.

B. Gaudeo.

A. Capita tria proximè ſequentia perlegi dum abeſſes. Sunt autem tota Philologica.

B. Nonne erudite ſcripta ſunt?

A. An quæ nec utilia, nec falſa, nec miranda ſunt, placere poſſe arbitraris? Capite ſexto, ubi pollicetur nominum numeralium Latinorum omnium derivationem a nominibus numeralibus Græcis, nihil præſtat præterquam quod conjecturam faciat a ſimilitudine literarum. Ut taceam autem quod promiſſi oblitus deducit *Secundum* a (non Græco) *Sequor*, quid tritius eſſe poteſt quam *Duo* a δυό, Tres a τρεῖς. Sex ab ἕξ, Septem ab ἕπτα, Octo ab ὄκτο derivare? Quid ineptius quam *Bellum* a πόλεμος deducere, & *Unum* dicere quaſi ὃ ἓν (mallem quaſi οὖνος) & inde per *Hoenum*, *Fohenum*, *Boenum*, venire ad *bonum*, quia Scholares dicunt Unum & Bonum eſſe convertibilia? Præterea quinq; à πέντε ridicule deducit, atq; etiam impudenter, mutanda πέν in *quin* & τε in *que*.

B. Fateor curiuſculum eſſe hoc.

A. Nec minus *Centum* ab ἕκατον; & *Mille* a μύρια vel potius a μύρια & χίλια, & *quatuor* a τέσσαρες.

B. Memini eum a τέσσαρες proceſſiſſe ad τέτταρες Atticum, inde ad Poeticum πίσυρες, inde ad πίτορες poſtremò ad Cambricum *pedwar* & Armoricum *pevar*. At a πίτυρα vel πέτλορα vel πέτορα facilis eſt tranſitus, ad *quatuor*, propter affinitatem literarum *p* & *qu* in *quiſpiam, & quiſquam, nuſpiam & nuſquam.*

 A. Credin

A. Credin ita esse?

B. Scio Massiliam fuisse Phocensium coloniam Æolorum; itaq; nomen πέτορα (si Æolicum sit) potuisse à Massiliensibus venire ad Gallos, Gallorum colonia erant Cambri, seu Wali. Cur ergo non potuit ex πέτορα (si vox, inquam, ea sit Æolica) fieri *pevar*.

A. Potuit. Sed unde didicit ille *quatuor* Æolice dici πέτορα, aut omnino vocem illam esse Græcam?

B. Forte qui pro certo habebat vocem *quatuor*, a voce πέτορα derivatum esse, nec videbat quo modo id aliter fieri potuit, dubitare noluit quin ibi esset vox πέτορα ubicunq; esset πίσυρες, & debere πίσυρα verti Atticè in πίττυρα, & postea in πέτορα, ut facilis esset transitus ad *quatuor*.

A. *Julius Scaliger* deducit quoq; *quatuor* & *quinque* a Græca origine, sed aliter. Nimirum, cum antiquissimis temporibus tria tantum numerorum nomina haberent ἕν, δύο, τρία, dicebant digitis numerantes post τρία, χἄτερον, & post quatuor κὶ ἕν κὲ quæ Latini pronunciabant *quatuor* & *quinque*.

B. Subtilius *Scaliger*, sed uterq; nugatorie.

A. Idem censeo. Transeamus ergo ad Caput septimum,

B. Imò vero ad Decimum; nihil enim continent Septimum, Octavum & Nonum, præter numerorum variam scriptionem, nimirum, in Cap. 7. modum scribendi numeros per literas Alphabeti communem Græcis & Hebræis; in octavo item, modum scribendi per literas Alphabeti communem Græcis & Latinis; in nono de Cyphris maxima ex parte satis cognitis, cætera partim frivola partim aliena; sed a voce *cyphra* ortum habuisse docet voces *cyphrandi* & *decyphrandi* pro scriptura occulta, & ejusdem explicatione. [*Qua scribendi ratione tempore belli civilis, cum omnes fere uterentur, non pauca hujusmodi scripta in itinere suo* (nota quod in Anglia itinera faciunt Epistolæ) *intercepta ipsi* (ut ait) *explicanda tradebantur. Et quidem eorum nonnulla tam insuperabili difficultate involuta videbantur, ut fere de illorum explicatione desperaverit, nec nisi post diuturnam inquisitionem incredibili labore superaverit. Quorum non pauca specimina in publica Bibliotheca Bodleyana Oxoniæ conservanda tradidit.*

A. Ad scientiarum *Wallissianarum* cumulum una defuit gloria bene deciphrandi; meritò ergo peritiam istam suam ignorari noluit. Præsertim cum *Thuanus* vitam scribens *Francisci Vietæ* Geometræ & Algebristæ (ante *Wallisium*) maximi, ingenium ejus ab eadem facultate laudavisset. Nam cyphræ Symbola sunt, & earum cognitio est pars Symbolicæ. Itaq; æquum erat ut ab ea Arte, ipse (ut cui deerat laudator similis *Thuano*) laudaret sese.

B. Incipit

B. Incipit hinc jam opus Arithmeticum, sed antequam ad examinationem ejus veniamus, non abs re fore arbitror si Geometriæ & Arithmeticæ Principia, quantum fieri potest, accuratissime statuamus, præsertim ea quibus utuntur (ab *Euclide*) Mathematici omnes; ut quæ in illis accurata sunt etiam nos utamur, quæ accurata non sunt corrigamus, & quæ desunt suppleamus. Sunt enim vera & accurata Principia legitimarum demonstrationum κριτήριον unicum. Definitio ergo puncti accuratene tradita est ab *Euclide*, nempe hæc, *Punctum est cujus nulla est pars?*

A. Accurata est, sed è Geometris plerisq; male intellecta. Nam verba hæc *cujus nulla est pars*, ita intelligunt, quasi scriptum esset *cujus nulla potest esse pars*. Nonne videtur tibi aliud esse *Actum* negare, aliud *negare* Potentiam?

B. Negatur *Actus* tum cum dicitur *esse Indivisum*; negatur potentia cum dicitur esse divisibile. *Euclidis* ergo Definitio tollit Puncti divisionem, at quantitatem non tollit. Nihil enim impedit quo minus *Quantum* sit id quod est *Indivisum*. Illi vero, qui dicunt Punctum esse *Indivisibile*, omnino tollunt quantitatem ejus, & faciunt ut sit *Nihil*; quod aliquoties facit *Wallisius* in omnibus ejus libris Mathematicis.

A. Divisio est opus intellectus, intellectu facimus partes; itaque Astronomi non in Cœlum ascendunt ut sphæras dividant, sed quasi divisas considerant. Idem ergo est *partes facere*, quod *partes considerare*: Ego *vero Punctum* eodem sensu, sed ut voce ea uti possimus, aliis verbis ita definiendum accuratius esse censeo. *Punctum est Corpus cujus non consideratur* (*id est*, non intrat in Demonstrationem Geometricam) *ulla Quantitas*.

B. Secundùm Definitionem hanc, impossibile est (ni fallor) ut longitudo arcûs Circuli comparari possit, cum recta linea (quod faciunt Cyclometræ) per doctrinam Tangentium & Secantium.

A. Quid ita?

B. Nonne potest Sector Circuli quilibet in partes quotlibet dividi, quæ partes omnes erunt totidem Sectores minores?

A. Potest. Quid tum?

B. Nonne Sector quilibet desinit in Punctum?

A. Ita.

B. Si ergo quadrans Circuli (exempli causa) in Millies Mille Sectores minores divisus sit; nonne iidem Sectores compositi sunt Quadrans?

A. Etiam.

B. Et cum arcus illi arcum constituunt quadranis, nonne

 &

& Centra eorum conſtituent quadrantis Centrum ?

A. Rectè ; & quia Centrum quadrantis pro Puncto haberi poteſt, habebimus Punctum Punctis Millies Millibus æquale. Jam qui Tangentium & Secantium magnitudines calculant, pro puncto ſumunt totius Arcus dividendi Centrum ; & proinde Latitudines Linearum majores juſto, nempe unam lineam alia latiorem faciunt, & pro exiliſſimis Sectoribus exiliſſima computant rectangula.

B. Secunda Definitio eſt, *Linea eſt longitudo quæ nullam habet latitudinem.* Videturne bona ?

A. Minimè. Nam quid opus eſt Latitudinem negare de Longitudine, quaſi longitudo aliqua poſſet eſſe lata ? Quamvis enim filum unum alio, vel ſemita una alia latior eſſe poteſt, tamen Miliare unum latius eſſe non poteſt quam aliud Miliare. Eſt autem, non filum nec ſemita Viæ longitudo ſed Miliare. *Euclides* ergo in definienda Linea hoc voluit, Lineam eſſe Corpus in quo longitudo quidem & ſola computatur, latitudo vero non computatur, nempe *viam Corporis moti, cujus Corporis, nulla conſideratur quantitas* ; Quemadmodum Lineam definivit *Hobbius*.

B. Nihil eſt in his duabus definitionibus tuis quod non valde comprobem, niſi quod non mihi videatur vox *Corpus* ſatis bene ſonare in definitionibus Puncti & Lineæ.

A. Cur in Definitione Lineæ vel deſcriptione hac, *Linea fit ex fluxu Puncti*, non male ſonat auribus tuis vox *fluxus*, cum fluxus non poſſit eſſe niſi Corporis ? Præterea qui dicunt Lineam eſſe longitudinem, non loquuntur accurate, nam longa eſt potius quam longitudo. Et quoniam longitudo lata intelligi non poteſt, definitio hæc *Euclidea* idem valet ac ſi dixiſſet *Linea eſt longitudo*, quæ definitio non eſt.

B. Tertia eſt *Lineæ autem termini ſunt Puncta.* Quid huic objicies ?

A. Objicio authoritatem *Walliſii*, qui terminum Lineæ primum, id eſt, Principium quod vocatur *Ultimum quod non*, non eſſe ipſius Lineæ terminum, ſed Lineæ antecedentis. Videtur autem ſtatuere terminum etiam alterum, nempe, Finem lineæ, eſſe in linea ſequenti, & vocari debere *Primum quod ſic.* Itaq; aut falſus eſt *Walliſius*, aut *Euclides* falſus erat, qui terminos lineæ in ipſa ſtatuit linea. Sed non videtur hoc loco voluiſſe *Euclides* quicquam definire ; nec aliud explicare quam hoc ipſum, terminos lineæ non eſſe conſiderandos extra ipſam Lineam.

B. Quarta eſt, *Recta Linea eſt quæ ex æquo ſua interjacet Puncta.* Qualis videtur ?

A. Mala

A. Mala, Nec intelligibilis, nedum accurata. Inter quænam ſua ipſius Puncta poteſt *interjacere* Linea recta, præterquam inter extrema ? Et quomodo inter ea *ex æquo* interjacet magis quam curva, niſi forte quod non declinet ab aliqua alia Linea, eadem habente extrema, magis in unam partem quam in aliam ? Quod ſi ita ſit, quare non poſſunt eſſe inter eadem Puncta extrema plures rectæ lineæ. Præterea intelligi non poteſt quomodo linea recta *ex æquo* (id eſt æqualiter) interjacere inter ſua extrema dicatur, niſi intelligamus prius quid ſit *æquale*.

B. Definitio æqualium ab *Euclide*, neſcio qua de cauſa, prætermiſſa eſt, quanquam circa Æqualitatem & Inæqualitatem omnis verſetur Geometria.

A. Axioma octavum ad Elementum primum *Euclidis*, inſtar definitionis eſt *æqualium Linearum*, vel etiam *æqualium Superficierum*, nempe hoc *Quæ ſibi mutuò congruunt ea inter ſe ſunt æqualia.*

B. Non eſt ea Æqualium definitio ; quanquam vera propoſitio, & quæ multis Theorematis demonſtrandis ſatis bene inſervierit, ſed videtur potius deſcriptio quædam ejus quod faciunt illi qui magnitudines rerum metiuntur. Nam qui menſurant, menſuram congruere faciunt cum menſurato. Defini ergo Æqualia.

A. *Æqualia ſunt inter ſe corpora, quæ eidem loco congruere poſſunt.* Et *Æquales magnitudines ſunt magnitudines æqualium Corporum.*

B. Hæ quidem definitiones ſunt Corporum & Magnitudinum *Æqualium*, non autem ſimpliciter *æqualium*. Nam *temporum, motuum, ponderum* aliarumq; rerum multarum æqualitati, neutra earum applicari poteſt.

A. *Tempora, Motus, Pondera æqualia* ſeorſim definienda ſunt *ea eſſe quorum menſuræ (ſive Corpora quibus menſurantur) æquales ſunt.*

B. Nondum definiiſti quid ſit ἀκριβῶς linea recta.

A. *Recta Linea ea eſt quæ per totam viam ab uno termino ad alterum æqualiter diſtat a quibuſlibet Lineis ſimilibus & æqualibus inter ſe & eoſdem habentibus terminos.*

B. Intelligo. Sic Axis Terræ Linea eſt recta, propterea quod æqualiter diſtat per totam viam a circumferentiis duorum pluriumve circulorum Meridianorum.

A. Sed neq; definitio hæc intelligi poteſt, niſi ab iis qui intelligunt quænam Lineæ ſimiles vel diſſimiles dicendæ ſunt. Itaq; rectiſſime feciſſet *Euclides* ſi Lineam Curvam prius definiſſet.

B. Quid eſt Linea Curva ?

A. *Linea Curva eſt cujus termini, ſalva quantitate, diduci poſſunt.*

B. Nam qui aliquid Curvum facit, vel ex Curvo magis Curvum, terminos ejus adducit. Jam *Lineam rectam* egomet definiam *eam eſſe cujus*

termini

termini diduci non possunt. Definitio quinta est, *Superficies est quæ longitudinem latitudinemq; tantum habet.*

A. Bona est. Sexta. *Superficiei termini sunt Lineæ*, similis est tertiæ, nec definitio, sed propositio, qua significatur *Lineas* non esse considerandas ut extra superficiem terminatas, sed in ipsa, ut Puncta in Linea quam terminant.

B. Quid est Superficies plana? Nam definitio quæ traditur ab *Euclide* eodem laborat vitio quo quarta. Illud enim *ex æquo suas interjacet Lineas* non est intelligibile. Defini ergo superficiem planam.

A. Faciam. Sed definienda est prius Linea. Est ergo *Linea, via qua fertur motum Punctum.* Et *Superficies plana via Lineæ ita motæ, ut singula ejus puncta singulas describant Lineas Rectas.* Definitio octava est Anguli plani hæc, *Planus Angulus est duarum in plano se mutuò Tangentium, & non in directum jacentium alterius ad alterum inclinatio.* Hujus Definitionis vitium primum est obscuritatis; nempe in voce *inclinatio.* Nam secundùm *Euclidem* inclinatio esse non potest nisi in Angulis acutis, itaq; Angulus rectus nullus est. Secundum vitium est falsitatis; Nam Recta & Curva ita constitui possunt, ut nec jaceant in directum, nec constituant Angulum, ut in Angulo Contactus, nisi putaret Angulum Contactus, esse Angulum quod negat post *Pelitarium Wallisius*. Ita quæ illis non *Euclidi* falsitas hæc imputanda sit. Et præterea quia duo Anguli Recti compositi faciunt Angulum, nimirum recti duplum, & tamen in directum jacent contra hanc Definitionem. Postremò Angulus quem faciunt duæ circumferentiæ vel circumferentia, & recta mutuo sese Tangentes, comparari posset quoad quantitatem cum quolibet Angulo alio Plano, quippe cui convenit Definitio hæc Anguli plani universalis. Sed non Anguli plani omnes comparari possunt. Est ergo vitiosa definitio.

B. Quomodò definis tu Angulum planum accuratius?

A. Sciendum est vocem hanc *Angulus planus* æquivocam esse. Nam cum in omni Angulo intelligantur duæ rectæ sibi mutuò occurrentes, vel saltem ad occursum tendentes, fieri potest ut duplici modo id fiat; quorũ alter est per Motum Lineæ integræ Circularem, alter per continuam Lineæ Rectæ flexionem. *Quæ* duæ Angulorum generationes adeo sunt diversæ, ut ipsi Anguli sint Heterogene; nec una definitione comprehendi possint. Habet quidem uterq; nomen Anguli, sed alter simpliciter ita vocari solet, alter per Adjunctum *Angulus contactus*. Hæc cum non recte intellecta fuerint controversiam excitarunt de Angulo Contactus inter *Clavium* & *Pellitarium* quæ excitari non poterat, si definitio *Euclidis* satis fuisset perspicua.

B. Audiamus utriusq; generis Anguli definitionem tuam.

A. Angulus (simpliciter dictus) est duarum Linearum sibi mutuo in plano congruentium, facta per motum Circularem super altero termino, ut Centro

centro unius ab altera digressio.

B. Anguli quantitas quomodo definitur?

A. Quantitas *Anguli* simpliciter dicti est quantitas *Arcus Circuli cujuslibet descripti Centro illo in quo Lineæ quæ Arcum intercipiunt se mutuo tangunt ab iisdem lineis interceptus. Angulus autem contactus est duarum linearum in plano se mutuo Tangentium digressio facta per continuam flexionem.*

B. Quare duo hæc genera Angulorum non possunt sub uno magis amplo genere contineri?

A. Quia non mensurantur per unius Mensuræ applicationem; nam Angulus simpliciter dictus tantus est quantus est Arcus Circuli interceptus, ideoq; per Arcum Circuli mensuratur. At Angulus contactus mensuratur per Lineam rectam ductam a Puncto Contactus ad Circumferentiam. Itaque magnitudines duorum Angulorum Contactus mensurantur à Linea recta quæ ducitur a Puncto contactus per utriusq; circumferentiam.

B. Intelligendum est hoc de Angulo contactus Circuli tantùm.

A. Imo vero de Angulis contactus quarumcunq; Curvarum, modo similes sint; sed quando sunt dissimiles, erunt Anguli contactus eorum iterum diversi generis.

B. Definitio nona est, *Rectilineus Angulus est quem continent duæ rectæ.* Probamne esse putas?

A. Ita.

B. Si duo Arcus Circuli se mutuò secent, vel arcus & recta, Angulus quem faciunt Rectilineus non est, neq; Angulus contactus, qualis igitur est Angulus?

A. Est Angulus simpliciter dictus, non enim a natura Linearum dependet natura Anguli. Potest enim a curva Linea in plano jacente Circulus describi, & Arcus interceptus idem erit ac si à recta describeretur, & proinde etiam Anguli quantitas eadem erit. Definitio decima est Anguli recti, & rectæ Perpendicularis, nempe hæc, *Cum recta super rectam consistens Angulos, qui sunt deinceps æquales fecerit; Rectus est uterq æqualium Angulorum. Et recta insistens, Perpendicularis dicitur Lineæ cui insistit.* Sequuntur definitiones undecima & duodecima Angulorum obtusi & Acuti brevissimæ simul & rectissimæ nimirum *Recto hunc quidem minorem, illum autem majorem esse.* Verum divisio hæc in *Obtusum*, *Rectum* & *Acutum* Angulo simpliciter dicto soli convenit. Definitio 13, *Terminus est, quod alicujus extremum est.*

B. Neq; Definitio est hæc, quia vox una per vocem unicam definiri non potest. Neq; omnino necessaria; nisi enim intellexissemus quid sit *Terminus* frustra esset definitio tertia, ubi dicit Lineæ *Terminos* esse *Puncta.*

A. Definitio 14, hæc est, *Figura est quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur*, Quæ quidem vera est. Poterat tamen idem brevius dici, *Magnitudo corporis ab omni parte finita.*

B. Neq; verò intelligi poteſt ad quid refertur Relativum *Quæ*, niſi ad Magnitudinem. Abſurdum enin eſſet dicere *figuram eſſe, figuram quæ ſub aliquo*, &c.

A. Decima quinta eſt, *Circulus eſt figura plana ſub una* Linea *comprehenſa, quæ Peripheria appellatur; ad quam ab uno puncto eorum quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ Lineæ inter ſe ſunt æquales.* Definitio hæc & ſi vera ſit, & modus deſcribendi Circulum ſine Geometrarum ope ſatis cognitus, pro accurata tamen haberi non debet. Debuit enim oſtendiſſe priùs hujuſmodi figuræ conſtructionem ſive generationem quænam eſſet, ut ſciremus aliquam in rerum natura figuram eſſe, in qua ab unico Puncto ad figuræ extremum omnes undequaq; Lineæ eſſent inter ſe æquales. Quod quidem, illis qui nunquam Circulum deſcribi viderant, videri poſſt incredibile.

B. Quomodo autem definiendus eſt Circulus per generationem?

A. Circulus eſt figura deſcripta per Lineæ in plano exiſtentis, & cujus unus terminus quieſcit, circumductionem. Qua Methodo definiendi utitur etiam *Euclides* in Definitione *Sphæræ, Coni*, & *Cylindri*. Decima ſexta eſt, *hoc verò Punctum Centrum Circuli appellatur*, id eſt, Punctum quod in generatione Circuli quieſcebat. Decima ſeptima hæc eſt, *Diameter autem Circuli eſt recta quædam per Centrum ducta, & ex utraq; parte in Circuli Peripheria terminata, quæ Circulum bifariam ſecat.* In qua nihil eſt non accuratum, niſi quod poſtrema verba, *quæ Circulum bifariam ſecat*, abundent. Definitio enim Diametri abſoluta erat ſine illis verbis, quæ inter Axiomata vel potius inter demonſtrata Theoremata ponenda erant. Definitiones cæteræ uſq; ad triceſimam quintam, (quæ Elementi primi poſtrema eſt) ut facillimæ, ita etiam accuratiſſimæ ſunt. Ipſa autem poſtrema hæc eſt, *Parallelæ ſunt Lineæ rectæ, quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraq; parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuò incidunt.*

B. Quid in hac Definitione reprehendis?

A. Definitionem hanc Parallelarum rectarum (quod attinet ad uſum) ſatis bonam eſſe non nego. Sed quoniam Paralleliſmus omnis tam rectarum, quam curvarum, tam linearum, quam ſuperficierum, ejuſdem eſt naturæ & una definitione univerſali comprehenſibilis, rectius fortaſſe feciſſet ſi Parallellas ſimpliciter definiſſet. Præterea niſi cauſa aliqua in definitione Parallelarum rectarum appareat, quare duæ rectæ nunquam concurrant, abſurdum non erit ſi hujuſmodi Lineas poſſibiles eſſe negaverimus.

B. Defini ergo ſimpliciter Parallelas.

A. Duæ Lineæ quæcunque (ſive rectæ ſive curvæ) item duæ Superficies, planæ vel non planæ, Parallelæ ſunt, in quas incidentes Lineæ rectæ facienteſq; cum utraq; Angulos æquales ad eaſdem partes ſunt ſemper ipſæ inter ſe æquales.

B. Video jam quare Parallelæ concurrere inter ſe non poſſunt; diſtinentur enim ubiq; ab æqualibus rectis iiſdemq; æqualiter & ad eaſdem par-

tes inclinatis. Rectè autem apponuntur verba illa *ad eaſdem partes*; nam alioqui definitio non eſſet Parallelarum ſimpliciter, ſed ſolummodo rectarum. Sequuntur poſtulata tria. De quibus poſtulatis quæro quo ſenſu dici poſſint demonſtrationis Principia. Poſtulatur enim ut aliquid poſſit fieri; Principiorum autem demonſtrationis natura eſt poſtulare ut aliquid ſit habendum pro vero ſine demonſtratione, quærimus enim in ſcientiis non quid facere nos poſſumus, ſed quid verum eſt.

A. Neq; vero ſunt Poſtulata hæc Principia *Demonſtrationis*, ſed *Conſtructionis*. Neceſſaria tamen ſunt, propterea quod ne prima quidem Theoremata demonſtrari poſſunt, ſine Figuræ Conſtructione. Nam ex Conſtructione, id eſt, ex generatione ſola cognoſcuntur Conſtructi affectiones. Poſtulat ergo *Euclides* ab initio *duci & produci poſſe lineam rectam*; & *quovis centro & intervallo deſcribi Circulum.*

B. Erravit igitur *Walliſius*, qui Punctum nihil & Lineam ſine omni Latitudine eſſe opinatus eſt. *Ductio* enim & *Productio* & *Deſcriptio* Motus ſunt, & propterea Motus corporum (aliud enim nihil mobile eſt) & ſignant ſemper aliquid, & ſemper diviſibile, & ſi quantum ſignant non ſemper inter demonſtrandum conſideratur.

A. Sequuntur Principia alia quæ appellantur *communes notiones*.

B. Quomodo differunt inter ſe *Poſtulata* & *communes notiones*? Nam eaiam *communes* & *notiones* Axiomata dicuntur. *Axioma* autem eſt Latinè *Poſtulatum*.

A. Sunt revera utraq; *Poſtulata*. Differunt autem in eo, quod in alteris Poſtulatur *poſſe facere*, in alteris Poſtulatur concedi *verum eſſe* aliquid, ut evidens, ſine demonſtratione. Sed pergamus. Definitiones, ſecundi & tertii Elementi, quæ ſunt nominum tantùm impoſitiones, accuratæ ſunt, niſi quod Definitio quarta Elementi Tertii non ſit Definitio, ſed *Axioma*, ſive ſuppoſitio qua notum ſupponitur, nimirum a Puncto ad Lineam rectam breviſſimam, eſſe perpendicularem. Similiter definitiones Elementi quarti ſunt nominum ad placitum impoſitiones, ideoq; reprehendi non poſſunt. Ad Elementum quintum Definitio prima eſt, *Pars eſt, magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.*

B. Sed ſi minor non metiatur majorem, num ideo non erit illius pars?

A. Erit. Sed loquitur *Euclides* hoc loco de *parte aliquota*, id eſt, cum major dividitur in partes æquales, illarum una hæc intelligitur. Sed cum eſſet in Geometria loquendum ſæpe de *Menſura* & *Menſuratione*, deerat tamen hactenus Definitio *Menſuræ*. Definivit partem per Definitionem menſuræ. Nam *Menſura* eſt *magnitudo magnitudinis, minor majoris, vel non minoris, cum minor ipſi applicata ſemel vel pluries ipſam æquat.*

B. Omnes quidem omnia per applicationem metiuntur; in Corporibus conſiſtentibus menſurandis Ulna, *Bracchio*, Pede utuntur; in fluidis vaſibus. Illo nempe ſpectant, quod dixiſti ſupra, locum Menſuræ in Mensurati loco quoties, continetur invenire. Illa enim æqualia sunt quæ salva quantitate, idem capiat locus. Sed & quæ æqualia non sunt idem capit locus. Sic enim existimant non modo *Wallisius*, sed etiam Metaphysicorum & Scholasticorum fere tota natio,

A. Quo fundamento autem id putant?

B. Corpora dicunt eadem existentia modo rarefieri, modo condensari. Minus autem esse (quanquam idem) condensatum corpus, quam rarefactum. Fieri itaq; potest ut duo Corpora inæqualia quorum unum sit magis, alterum minùs condensatum in eodem loco sint successive.

A. Nonne locus locato congruere accuratissime dicitur? Nonne *Euclides* æqualia esse dicit quæcunq; sibi congruunt?

B. Est Axioma 8 Elem. primi.

A. Quoniam igitur corpus utrumq; successive loco eidem congruit, id est, loco eidem est æquale, erunt quoq; duo illa corpora (per Communem notionem primam) inter se æqualia.

B. Ita videtur. Quid autem est quod tot non modo Philosophos sed etiam Mathematicos, ipsosq; Professores potuit in errorem hunc turpissimum inducere?

A. Accidit plerisq hominibus circa ea quæ ignorant, idem quod pecoribus; ut enim pecora ductorem gregis primum erumpentem quacunq;, ignara periculi, sequi solent, ita & homines in quodlibet absurdum a Principe opinionis ducti facile incidunt.

B. Sed quid fefellit ipsos primos?

A. Fallere primos solet quod cum sustinuerint dogma aliquod verisimile quidem sed tamen falsum, & a dissentientibus, difficultatibus urgentur, quas superare nesciunt, ne errasse videantur, fingunt possibilia esse quæ non sunt possibilia, vel dicunt, aliquid quod non possit intelligi; recipitur tamen ab iis qui malunt sine molestia habere quod dicant, quam cum molestia quod sentiant.

B. Videntur autem intelligere aliquid per rarefactionem & condensationem, alioqui non insultarent in eos qui sentiunt contrarium.

A. Puto hoc sentiunt, intumescente aliquo corpore, nihil illi admisceri corporis adventitii, ut verbi causa, bulliente aqua nihil admisceri putant aeris, sed ipsam aquam eandem existentem, in majus extendi spatium loci. Sed ipsos qui doctrinam hanc de rarefactione & condensatione docere solent, unico tantum argumento cessuros credo, nimirum si qui stipendium *Wallisio*, dispensatores beneficii *Saviliani* soluturi sunt, pro solidis numerarent illi totidem semisolidos, dicerentq; solidos esse (frigore cui fortuito expositi fuissent) condensatos, non puto crederet *Wallisius* id fieri (quicquid aliâs scribere soleat) potuisse. Secunda definitio est, *Multiplicis*, proba, nec difficilis, Tetia est, *Rationis*, satis inepta. *Ratio* (inquit) *est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam habitudo.*

B. Intelligo

B. Intelligo eos qui loquuntur de Ratione, sed de habitudine loquentes non intelligo. *Habitudo* ab *Habendo* dicitur. Quæro igitur quid est quod hoc loco *Habet*; quid quod *Habetur*; & an Ratio dicatur *Habitudo* ab eo quod ipsa *Habet* aliquid, vel ab eo quod *Habetur*, & siquidem *habeat*, quid sit quod *habet*; sin *habeatur*, a quo *habetur*. Quæ omnia sunt inepta.

A. Vox illa *habitudinis* a formulis loquendi orta est. Solebant enim Geometræ, cum vellent Rationum similitudinem explicare, Græci quidem hac voce uti ὅτως ἔχει. Latini vero hac, *ita se habet*; quam loquutionem admisit *Euclides* in Definitionem suam Rationis, quam ideo appellavit ποιὰν σχέσιν, & Latini *certam Habitudinem*. Et credibile est, si Græci vulgo pro ὅτως ἔχει dixissent ὅτως ἔστιν, *Euclidem* definituram fuisse Rationem per ποιὰν οὐσίαν, & Latini per *certam Essentiam*.

B. Quænam autem est *Rationis* definitio vera & accurata?

A. *Ratio est Relatio Antecedentis ad Consequens secundum magnitudinem.*

B. Quid sit Antecedens & quid Consequens intelligendum est ex Definitione *Relatorum*; sed tamen non cognoscitur ex hac definitione *Rationis* quantitas.

A. Neq; ex Definitione Trianguli ipsius trianguli quantitas.

B. Dic ergo quomodo computandæ sint Rationum quantitates.

A. Primo, Non omnis Ratio est quanta.

B. Mirum hoc dicis, *Rationem* aliam esse *Quantam*, aliam *non quantam*.

A. Ita est; nam Ratio Inæqualis ad Inæquale quantitatem habet. Sed Ratio Æqualis ad Æqualem quantitatem non habet.

B. Quare autem non habet quantitatem?

A. Quia nempe Ratio non est simpliciter magnitudo, sed cum relatione ad aliam magnitudinem, juxta quam relationem, una Inæqualitas, id est, una Ratio Inæqualium, aliâ major, aliâ minor esse potest; una autem æqualitas non potest. At ea quorum alia majora, alia minora esse possunt quanta sunt, cætera non sunt. Absurdum enim esset rogare quanta est æqualitas, contra vero rogare quanta sit Inæqualitas, absurdum non est.

B. Sed *Wallisius* in eodem esse dicet Prædicamento tum Æqualitatem tum Inæqualitatem; & proinde, si altera earum sit quantitas, alteram etiam esse quantitatem.

A. Quidnam est illud *Prædicamentum*? An domus aut Apotheca aliqua unde omnes æqualitates inæqualitatesq; (quando usus erit) depromendæ reconduntur?

B. *Prædicamentum* est vocabulorum series, secundum amplitudinem significationum ab *Aristotele* ordinata.

A. Scio, scio has nugas. Nimirum ex nominum (arbitrio *Aristotelis*) ordinatione naturam rerum æstimare solere eos, qui ingenio sapiunt alieno; cum e contra ex cognitione naturæ disponi debeant ipsa nomina.

B. Sed instat *Wallisius* contra vim argumenti hoc modo, *si Ratio æqua-*

litatis.

litatis ob eam cauſam quantitas non ſit, quod una æqualitas non eſt magis æqualitas quam alia, etiam Angulus Rectus quantitas non erit, quia unus Angulus rectus nec magis eſt Angulus, nec major quam alius Rectus.

A. Poterat etiam arguere ſic, quia Numerus *6*, nec major nec minor eſſe poteſt quam alius Numerus 6, Numerus ſenarius non erit quantitas. Sed Ratiocinatio utraq; vitioſa eſt. Nam in genere quantitatis, tam quæ inter ſe æqualia, quam quæ Inæqualia ſunt, quantitatem habent; ut Angulus rectus, quia Angulus in genere, & Numerus ſenarius, quia Numerus in genere eſt quantitas. Ratio autem in genere quantitas non eſt, ſed Relatio, ſive Comparatio. Poteſt ergo una ratio quanta eſſe, ut tamen alia quanta non ſit.

B. Verum dicis. Sed Ratio æqualitatis ideo videtur eſſe quantitas, quia & ipſa major vel minor, quam alia Ratio eſſe poteſt. Eſt enim Ratio 5 ad 5 Ratio æqualitatis; eademq; major quam Ratio 5 ad 6, & minor quam Ratio 5 ad 3.

A. Aliud eſt *Tantum eſſe abſolute*, & *ſolitarie* ſumptum, aliud *comparative*. Ratio quidem æqualitatis major eſſe poteſt quam Ratio quantitatis minoris ad majorem, ut tamen ipſa quantitas non ſit. Exempli cauſa, etiamſi 0 nihil ſit, Ratio tamen 0 ad 0 major eſt quam Ratio 0 ad 0 — 1, id eſt, quam 0 ad minus quam 0.

B. Hoc quidem verum eſt in Numeris vel quantitatibus fictis; ſed putaſne tu Rationes cenſendas eſſe eodem modo quo Numeri ficti.

A. Puto.

B. Attamen quomodo fieri poteſt, ut Ratio minoris ad majus quantitas ſit, cum Ratio quæ ſit illa major, nempe Ratio æqualitatis quantitas non ſit?

A. Cum Ratio ſit quantitatum comparatio, expoſitis duabus quantitatibus inæqualibus dupla o itur comparatio, altera minoris ad majorem, in qua quæritur quantum minor a majore ſuperatur; altera majoris ad minorem, qua quæritur quantum major minorem ſuperat. Itaq; Ratio Inæqualitatis *eſt duplex, altera Defectus, altera Exceſſus*. Sicut autem numeri finguntur ab 0 ſeu nihilo ſuperari iiſdem intervallis quibus ipſum 0 ſeu nihil ſuperatur a numeris non fictis: ita ratio *Defectus* ſuperatur a Ratione *Æqualitatis* iiſdem intervallis quibus ipſa ſuperatura Rationibus *Exceſſus*. Et per conſequens ratio æqualitatis ſuperans Rationem *Defectus*, non tam Rationem *Defectus* ſuperat quam *Defectum* Rationis, id eſt, *Defectum* magnitudinis qua æquari poſſit cum eo quicum comparatur.

B. Videris hoc velle, in comparatione Rationum promiſcue computari *Exceſſus* & *Defectus*, ſimiliter ac ſi quis habens ſui æris 20 Libras, & alieni totidem, numeraret indiſtincte ſummam 40 Librarum, cum deberet numerare nihil.

A. Ita eſt.

B. Sed illud *Rationem Defectus eſſe Defectum Rationis*, ad Mathematicorum aures accedet inſuetum.

A. Credo

A. Credo tibi hoc. Attamen verum eſſe facile agnoſces, ſi animadvertas, quando duæ Rationes, utraq; minoris ad majorem componuntur, Rationem fieri minorem.

B. Verum eſt, & propterea neceſſe, *ut Ratio Defectus ſit Defectus Rationis*. Quantitates enim omnes ejuſdem generis compoſitæ quantitatem faciunt majorem. Etiam Defectus, ſi defectui addatur, fiet Defectus major, & tamen Ratio facta eſt minor; ex quo manifeſtum eſt quod dixiſti *Rationem Defectus* eſſe *Defectum Rationis*; ut qui æs alienum æri addit alieno, tanto ſit pauperior quanto plus habet æris alieni.

A. Rectè capis. Sciendum præterea eſt magnitudines Rationum tam *Defectus* quam *Exceſſus* determinari per magnitudinem *Differentiæ*, idq; dupliciter. Poteſt enim Differentia conſiderari vel *abſolute*, ut cum dicimus comparando *6* & 3, majorem eſſe *6* quam 3 tribus unitatibus, quæ Differentia eſt numerus abſolutus. Vel comparative, ut cum dicimus majorem eſſe *6* quam 3 ſui ipſius dimidio. Unde etiam dividi ſolet in Geometricam (quæ a Geometris ſimpliciter Ratio appellatur) & Arithmeticam. Itaq; *6* ad 3, & 7 ad 4, ſunt eadem Ratio Arithmetica propter differentiam eandem 3 abſolute ſumptam. Sed in Ratione Geometrica 6 ad 3 & 8 ad 4 eadem eſt Ratio, propterea quod utrobiq; differentia eſt Antecedentis dimidium. Cæterum Ratio Arithmetica non eſt habita ab omnibus pro Specie Rationis; fortaſſe quia ad illam (quæ eſt in definitione Rationis apud *Euclidem*) *habitudinem quandam*, non potuit accommodari. *Pappus* autem Rationis tredecem facit Species, quarum Ratio Arithmetica eſt una.

B. Perge legere.

A. Definitio Quarta. Proportio (Græcis *ἀναλογία*) *eſt Rationum ſimilitudo.*

B. Quænam eſt Differentia inter Rationem *ſimilem*, *æqualem*, & *eandem*?

A. Nulla omnino. Nam Rationes 2 ad 4 & 3 ad 6 *eædem* ſunt, & *Similes*, & *Æquales*.

B. Quomodo differunt inter ſe *Proportio* & *Ratio*, ſive *ἀναλογία* & *λόγος*?

A. *λόγος* quidem ſive Ratio eſt comparatio quantitatum, Proportio verò ſive *ἀναλογία* eſt comparatio Rationum, ſive potius repetitio Rationis ejuſdem in aliis quantitatibus: Exempli cauſa, 4 ad 3 eſt Ratio, & 8 ad 6 eadem Ratio in aliis quantitatibus. Sed ambæ Rationes 4 ad 3, & 8 ad 6 ſunt *ἀναλογία*. Quinta. *Rationem habere inter ſe Magnitudines dicuntur quæ poſſunt multiplicatæ ſe mutuo ſuperare.* Proba eſt ſi recte intelligatur. Quæ enim multiplicata ſe mutuo poſſunt ſuperare, Homogenea ſunt, eodemq; genere menſuræ menſurabilia; ut longitudines longitudinibus, Superficies ſuperficiebus. Solida ſolidis. Quæ vero Heterogenea ſunt diverſo genere Menſuræ menſurantur. Sin Lineæ pro minutiſſimis Parallelogrammis conſiderentur, ut ab iis conſiderantur, qui Methodo demonſtrandi utuntur

ea

ea, qua *Bonaventura Cavalerius* in Doctrina *Indivisibilium* usus est, habebunt inter se Rationem etiam *Lineæ rectæ & Superficies planæ*; poterunt enim tales Lineæ multiplicatæ quamlibet finitam superficiem planam, superare.

B. Mihi tamen Definitio hæc *Rationem inter se habentium*, ne sic quidem videtur accurata; habent enim Rationem inter se Mensuræ Longitudinis, Temporis & Motus; & possunt multiplicatæ se mutuo superare. Attamen inter Lineam & Tempus, vel inter Lineam & Motum Rationem esse dici non potest.

A. Potest quidem non minus dici quam *Lineam esse Tempus*. Sed *Archimedes* aliiq; Geometræ non pauci cum Tempus exponere volunt, *Esto* (inquiunt) AB *Tempus*, quos ego culpare, cum omnes loqutionem illam bene intelligant, non auderem.

B. *Wallisius* auderet.

A. Definitio sexta est *Ejusdem Rationis* quæ sic se habet.

B. Siste gradum paulisper. Nonne Analogiam modo definivit *Euclides* esse similitudinem Rationum? *Similitudo* autem *Rationum* & *eadem Ratio* eadem est res. Videtur ergo mihi *Analogiam* sive *Proportionem* hoc loco iterum definire.

A. Minime. Nihil hic peccatur. Quid enim, si quis *hominem* definiret esse *animal Rationale*, apud nescios quid *animal Rationale esset?* Itaq; in definitione hac sexta illud agit ut *Proportionem*, sive *eandem Rationem* per generationem ejus definiat. Quod ni fecisset nihil inde (ut a Principio) demonstrasset.

B. Quid ita? Definitio circuli apud *Euclidem*, non est descriptio *generationis* circuli, sed *generati*, at nihilo minùs constructio trianguli æquilateri inde ab *Euclide* Demonstratur.

A. Demonstratio illa dependet quidem ab ea definitione, sed ipsa definitio dependet a Postulato tertio, nempe, quo gratis sumitur *posse circulum quovis describi intervallo.* Jubet ergo, ad constructionem trianguli æquilateri, describi circulum; quod quo modo faciendum sit, definitio *Euclidea* non docet. Quomodo enim inveniri medium illud punctum potest, nisi prius descriptus sit ipse circulus? Vidit ergo *Euclides* definitionem *Analogiæ*, nisi ostenderet quomodo *eædem Rationes* fierent, inutilem fore ad sequentia. Itaq; definitionem per generationem addidit hanc, *In eadem Ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam: cum primæ & tertiæ æquè multiplicia, a secundæ & quartæ æquè multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque, vel una deficiunt, vel una æqualia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur quæ inter se respondent.* Sed invenire, per hanc definitionem, hujusmodi quatuor quantitates impossibile est, quia multiplicatio per omnes numeros, cum infiniti sint, est impossibilis. Non est ergo definitio hæc, sed Hypothesis.

B. Rectè

B. Recte quidem dicis; est autem Hypothesis illa vera. Vera inquam est, sed non Principium, quia demonstrabilis est, & ab *Hobbio* Capite 13°. Libri de Corpore, Art. 12°. demonstrata, sed a definitione *Ejusdem Rationis* per generationem diversa est hæc *Euclidis*. Manifestum enim est duas quaslibet *velocitates* duorum corporum motorum, habere inter se certam aliquam Rationem, & quidem (dum velocitates illæ eædem sunt) eandem: *Velocitatem* autem definit *Hobbius potentiam esse mobilis in tempore determinato determinatam Longitudinem permeandi.* Ex his manifestis generationem colligit *Ejusdem Rationis.* Dicit enim, *si duo mobilia, utrumq; velocitate invariata, percurrant duas Longitudines tempore eodem, eas Longitudines Rationem habere inter se eandem quam habent velocitates ipsæ*; & rursus, *si duo mobilia utrumq; eadem invariata velocitate percurrant duas Longitudines, habere eas eandem inter se Rationem, quam habent inter se tempora quibus percurruntur.* Quibus positis, sint duo mobilia ad punctum A, moveanturq; æquabili velocitate per AB, AC. Et velocitatem quidem unius repræsentet AB, velocitatem autem alterius repræsentet AC. Venient ergo alterum ad B, alterum ad C, in eodem tempore AC, propterea quod velocitates amborum determinantur per spacia quæ eodem tempore percurrunt. Similiter si in parte temporis AC (iisdem servatis velocitatibus) alterum veniat ad D, alterum ad E, rursus erunt spatia percursa AD & AE ut velocitates eædem, id est, ut AB ad AC. Eodem modo, si mobile idem veniat ad B in tempore AC, veniet ad D in parte illius temporis, puta in AE, quæ sit spatio AD homologa. Nec tantùm verum hoc est in motu, sed etiam in omni genere causationis, ubi causa æqualibus temporibus æqualia semper efficit. Itaq; *Eandem Rationem* (Capite 13°. Libri de Corpore, Art. 6°.) sic Definivit, *Ratio Geometrica Rationi Geometricæ eadem est, quando causa aliqua eadem æqualibus temporibus æqualia faciens, Rationem utramq; determinat.*

A. Definitio sane hæc accuratissima est, generationemq; proportionis quasi ante occulos ponit. Sed *Euclides* per suam Hypothesin Rationum Doctrinam in Elemento quinto solidissime demonstravit. Anne tantundem fecit *Hobbius* per definitionem suam?

B. Demonstravit non modo easdem propositiones quas *Euclides*, sed etiam nonnullas alias non minus difficiles, ne quidem *Wallisio* ipso contradicente. Nam hoc solum de illis pronunciat, *non videri ipsius esse.*

A. Id est simul & laudat & invidet. Quid scribis in pugillaribus?

B. Noto quod in Græco pro Multiplicibus ab *Euclide* dicitur πολλαπλάσια, & pro Multiplicatione πολλαπλασιασμὸς. Nam (ἀναλόγως) διπλασιασμὸς deberet verti *duplicatio*, & διπλασιὸς sicut & διπλασίων & διπλασιαϑεὶς duplus vel duplicatus.

A. Quid ergo?

B. Magnam facit *Wallisius* differentiam inter Rationem, duplam & duplicatam

plicatam, triplam & triplicatam, *&c.* tum in Elencho contra ***Hobbium***, tum in Tractatu Elenchtico contra *Meybomium.*

A. Tanto est indoctior. Sed ego tibi negotium illud facile expedibo: *Euclides* enim vocibus illis διπλασιὸς & διπλασίων pro eadem re promiscue utitur, sicut Latini vulgò *duplum* & *duplicatum.* Voce διπλασίων, etiam in Proportionibus utitur *Euclides* pro dupla. Lege Prop. ult. Elem. 9^{i}. Textum Græcum.

B. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ ἕως οὗ ὁ σύμπας πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

A. Quid significat hoc loco ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίονι? Nonne significat proportionem sive similitudinem Rationum quæ cernitur in numeris ab *Euclide* expositis, nimirum his, 1. 2. 4. 8. 16, *&c.* in quibus numerus posterior prioris semper est duplus? Nam si de Ratione ipsa duplicata intelligeretur, numeri 1. 2. 4. 8. 16, *&c.* non magis dicendi essent esse ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίονι quam 1. 3. 9. 27. 81, *&c.* Itaq; propositio hæc *Euclidis* de numero Perfecto, in omni Progressione Geometrica non minus vera esset quam in Progressione hac per duplicationem. Necesse ergo est ut voce hac διπλασίων usus sit *Euclides* pro duplicato numero, id est, pro duplo, non pro duplicata Ratione. Igitur Ratio 1 ad 2 non est subdupla Ratio, sed Ratio Simpli ad duplum sive semissis ad Integrum; neq; inversè, Ratio 2. ad 1 est Ratio dupla: sed Ratio dupli ad simplum, sive Integri ad Semissem.

B. Accurate hæc. Διπλασίων ergo idem est quod duplus. Voces autem *subduplus*, *subtriplus*, &c. barbaræ sunt, & ab iis inventæ, qui cum in tenebris versarentur cupiebant quoquo possent modo sese promovere. Ostendisti jam διπλασίων apud *Euclidem* significare in numeris duplum. Ostende etiam quod significat apud eundem, in Rationibus, Duplicatum.

A. Ecce in definitione Elementi quinti decima, sic dicit *Euclides* Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, ubi Rationem Rationi sibi æquali additam, id est, Rationem multiplicatam per 2, id est, Rationem duplicatam vocari vides διπλασίονα.

B. Video vocem illam utrumq; significare apud *Euclidem*, tum duplum tum duplicatum, quemadmodum apud authores Græcos cæteros omnes. Video etiam vocabula Latina duplum & duplicatum idem significare, ut & Græca, διπλοῦς, διπλάσιος, διπλασίων, διπλασιασθεὶς. Sed cur noluit *Euclides* uti voce διπλάσιος cum potuit, & ad evitandum ambiguitatem videtur debuisse, nondum perspicio.

A. Quænam esse potest ambiguitas in vocibus quæ idem significant ubiq;. Sunt qui διπλοῦν distinguunt à διπλασίῳ, hoc numerum, illud quantitatem continuam respicere dicentes. Sed inter διπλάσιον & διπλασίονα

σίων differentiam nullam observant, neq; Grammatici neq; Mathematici Græci. Credo equidem διπλασίων Nomen Rectum factum esse à nomine Plurali Genitivo διπλασίων, cujus Rectus singularis est διπλάσιος. Itaq; in propositione ultima Elementi noni ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίονι idem esse quod ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίων, & in hac definitione 10^{a}, λόγον διπλασίονα idem esse quod λόγος διπλάσιος. Nihil ergo est difficultatis in eloquutione Mathematicorum veterum. At recentiores difficultatem sibimet ipsis creaverunt ex vocibus barbaris *subduplum*, *subtriplum*, &c. quippe qui non meminerant ex duplicatione vel etiam multiplicatione aliquid fieri posse aliquando minus. Nam quantitates fictæ quales sunt 0−1, 3−5 & aliæ, id est, minores quam nihil; quanto plus multiplicantur a numero vero, tanto minores fiunt. Definitio 7^{a} est Proportionalium accurata, sed & facillima. Est enim (definita jam *Eadem Ratione*) tantummodo nominatio eorum quæ Rationem inter se habent. Octava sicut 6^{a} demonstrabilis est.

B. Quomodo Rationem majorem definis tu?

A. *Rationem* quidem *majorem*, *Rationem esse* dico *majoris Antecedentis ad idem Consequens, vel ejusdem Antecedentis ad Consequens minus. Rationem* autem *minorem esse Rationem minoris Antecedentis ad idem Consequens*, vel ejusdem Antecedentis ad Consequens majus.

B. Accuratè.

A. Nona, Definitio non est, sed Propositio gratis assumpta, nempe, *Proportionem in tribus terminis paucissimis consistere*, cum tamen accurate loquendo, consistat in quatuor paucissimis. Omnis enim Ratio consistit in duobus terminis paucissimis, & omnis Proportio in duabus paucissimis Rationibus. Quando vero duæ quantitates mediæ æquales inter se sunt, id non numerum minuit terminorum. Elementi hujus quinti definitiones decem reliquæ accuratæ sunt.

B. Transeamus ergo ad definitiones Elementi sexti.

A. Sunt illæ, excepta quinta, quæ & ultima est, omnes accuratæ. Nam illa quinta, cum & demonstrari possit & demonstratione indigeat, neque pro definitione, neque pro Principio demonstrationis haberi debet. Est autem hæc, *Ratio ex Rationibus componi dicitur, cum Rationum quantitates inter se aliquam effecerint Rationem.*

B. Demonstra (quoniam demonstrabile esse dixisti) ex multiplicatione inter se Antecedentium duarum Rationum, & ex multiplicatione inter se Consequentium, existere ipsarum Rationum unius ad alteram Additionem.

A. Rationes addendas propone quas vis.

B. Rationi 2 ad 3 adde Rationem 4 ad 5 per multiplicationem.

A. Multiplico Antecedentes 2 & 4 in se, qui faciunt 8; deinde

multiplico

multiplico in se consequentes 3 & 5; producitur 15. Probandum est Rationem 8 ad 15 æqualem esse ambabus Rationibus 2 ad 3 & 4 ad 5. Nam 4 multiplicans 2 & 3 facit 8 & 12. Est ergo Ratio 8 ad 12 eadem quæ 2 ad 3. Rursus 3 multiplicans 4 & 5 facit 12 & 15. Est ergo 12 ad 15 eadem Ratio quæ 4 ad 5. Sed in his numeris 8. 12. 15. Ratio primæ ad ultimam æqualis est ambabus Rationibus simul 8 ad 12, & 12 ad 15, hoc est, ambabus Rationibus 2 ad 3 & 4 ad 5. Itaq; demonstravi Rationem Rationi (per multiplicationem in se Antecedentium amborum & amborum Consequentium) additam esse, ut imperasti.

B. *Quomodo* autem Rationes altera alteri aliter addi possunt?

A. Si, nempe, ut Antecedens est ad Consequentem unius Rationis, ita fiat Consequens alterius Rationis ad quartam. Nam si Rationi 2 ad 3 addenda sit Ratio 4 ad 5, fiat ut 4 ad 5, ita 3 ad aliam. Prodibit $3\frac{3}{4}$. Ponantur ordine 2. 3. $3\frac{3}{4}$. Ratio ergo 2 ad $3\frac{3}{4}$ est summa Rationem 2 ad 3 & 3 ad $3\frac{3}{4}$. Est enim Ratio 3 ad $3\frac{3}{4}$ eadem quæ Ratio 4 ad 5. Et siquidem tres quantitates 2. 3. $3\frac{3}{4}$. multiplicentur omnes per 4, prodibunt 8. 12. 15. iidem numeri qui facti erant per multiplicationem.

B. Recte demonstratum est. Sed nonne sicut Ratio Rationi additur per multiplicationem, ita subductio unius Rationis ex alia fieri potest per divisionem?

A. Etiam. Nam (exempli gratia) à Ratione 8 ad 15 sit subducenda Ratio 4 ad 5. Divido ambos numeros 8 & 15 per 4, unde fiunt *Quotientes* 2 & $3\frac{3}{4}$ qui sunt in Ratione 8 ad 15. Rursus divido 15 per ambos numeros 4 & 5, & fiunt *Quotientes* $3\frac{3}{4}$ & 3, qui sunt in Ratione 12 ad 15. Positis ergo ordine numeris 8. 12. 15. si à Ratione 8 ad 15. substrahatur Ratio 12 ad 15, id est, Ratio 4 ad 5, relinquetur Ratio 8 ad 12, sive Ratio 2 ad 3.

B. An non Ratio a Ratione subduci potest etiam sine his divisionibus?

A. Potest. Nam si fiat ut Consequens Rationis subducendæ ad Antecedens suum, ita Consequens Rationis integræ ad quartam, Ratio quæ post subductionem relinquitur erit Ratio Antecedentis ad illam quartam. Verbi gratia, si a Ratione 8 ad 15 auferenda sit Ratio 4 ad 5, fiat ut 5 ad 4 ita 15 ad quartam quæ erit 12. Positis ergo ordine 8. 12. 15 si a Ratione 8 ad 15 auferatur Ratio 12 ad 15, id est, Ratio 4 ad 5 relinquetur Ratio 8 ad 12, id est, Ratio 2 ad 3.

B. Clarissimè.

A. Animadverte quam sit ab improprietate verborum, pronum hominibus prolabi in errores circa ipsas res. Sicut enim tu pro composita Ratione sumpsisti Rationem quantitatum compositarum, ita *Wallisius*, aliique plurimi Rationem duplorum sumunt pro Ratione

du- la

dupla, decepti ab improprietate eloquutionis.

B. Miror autem quod tam clamosè contendat in Elencho *Wallisius* Compositionem Rationem non Additionem sed Multiplicationem dicendam esse.

A. Tam diu autem mirari non desines quam diu ab homine qui ea scripsit quæ hactenus legimus, quicquam expectabis accuratum.

B. Ex hac Rationum compositione manifestum est, expositis quotcunque quantitatibus, Rationem primæ ad ultimam æqualem esse Rationibus omnibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, & sic deinceps usq; ad ultimam, simul sumptis.

A. Est ita ut dicis; & ejus rei causam ostendit ipsa operatio. In quantitatibus enim tribus quibusvis A. B. C. dubitari non potest quin exposita A ad expositam B, Rationem habeat A ad B, & similiter exposita B ad expositam C Rationem habet B ad C, quare Ratio A ad C composita est ex duabus partibus nimirum, ex Ratione A ad B & Ratione B ad C; & siquidem essent quatuor quantitates A. B. C. D. Ratio B ad D (propter eandem causam) componeretur ex Rationibus A ad B & B ad C, & C ad D.

B. Video ita esse. Sed hoc melius aliquanto videtur mihi demonstrasse *Hobbius* in Libro de Corpore Cap. 13. Art. 13. definitionem deducens a doctrina de motu?

A. Sed Doctrina de motu paucissimis cognita est; cum tamen Natura omnia, non modo quæ Physicæ, sed etiam quæ Mathematicæ contemplationis sunt per Motum transigit. Primus qui scripsit de Motu quod dignum lectu erat fuit *Galilæus*. Progrediamur jam ad Elementum septimum; ubi primò definitur *Unitas*, sed (ut modo vidisti) male; deinde *Numerus* (contra sententiam *Wallisii*) optimè. Tertia Definitio est Partis) (subaudi aliquotæ) quod sit *majoris quantitatis mensura*; & rectè, si per *Partem aliquotam* intelligatur *Pars aliquota Numeri*. Alioqui *Pars* in Definitione *Mensuræ*, non *Mensura* in Definitione *Partis* ponenda est. *Quinta* hæc est πολλαπλάσιος ἐστὶν ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος. Latini qui sic vertunt *Multiplex est major minoris, cum majorem metitur minor*, anne distinguunt inter *Multiplex* (quod est *Multiplicatum*) & *Multiplum*?

B. Non certe hoc loco; neq; Græci inter διπλάσιον & διπλασίονα. Nam si fecissent, non πολλαπλάσιον dixisset *Euclides*, sed πολλαπλασίονα.

A. Cætera bene se habent.

B. Transeamus ergo ad Definitiones Elementi decimi.

A. Sunt & illæ accuratæ omnes.

B. Antequam progrediare, velim dicas mihi quo fine, sive cui bono *Euclides* Theoremata illa Elementi decimi difficillima nobis Demonstra-

vit.

vit. Cæteras enim Geometriæ partes omnes usui esse video in communi vita, aut ad ædificandum, aut ad navigandum, aut ad machinas, aut ad Calculum Temporis, aut ad Picturam, aut ad Philosophiam naturalem, aut deniq; ad aliquid, cui vero rei Linearum hæc irrationalium cognitio inserviat nondum cerno. Scio quæ pulchra sunt difficilia esse, sed ut vicissim quæ difficilia sunt etiam pulchra sint, necesse non est.

A. Quo fine hæc demonstravit certè nescio, sed quin in omni re ingenii splendor ipse per se pulcherrimus sit dubitandum non est. Attamen si ab ipso opere de consilio opificis conjicere liceat, voluisse puto *Euclidem*, quantum potuit Linearum omnium in Figuris certa & cognita lege descriptarum rationes convertere in rationes numerorum. Quod si Natura fieri passa esset computatio quælibet facillima facta esset, nimirum in tabulas digestis omnium rerum rationibus. Restant Definitiones Elementi undecimi, illæ quoq; ad scientiarum severitatem exactissimæ.

B. Quid? Tune Sphæram, Conum, & Cylindrum bene Definiri existimas per Motum Semicirculi, Parallelogrammi, & Trianguli super quiescentes Axes?

A. Quidni?

B. An Stellarum fixarum vel cujuslibet Planetæ sphæram descriptam fuisse putas a conversione Semicirculi? Similiter Axes (horum corporum) qui definiuntur ab *Euclide* per *rectam Lineam quiescentem*; nonne Axes sunt, etiamsi non quiescerent, sed quocunq; ferrentur corpora ipsa (quorum Axes sunt) ferrentur una?

A. Tu firmum hoc Argumentum esse credis!

B. Ita. Et eodem usus est *Wallisius*.

A. Professorne *Savilianus* reprehendere *Euclidem* ausus est?

B. Non *Euclidem* reprehendit sed *Hobbium*.

A. Etiam *Euclidem* si modo eodem Argumento contra utrumq; uti potuit.

B. Esto. Sed cum Lineam definisset *Hobbius* esse *corporis (cujus nulla consideratur quantitas) Moti via*. *Quid opus est* (inquit *Wallisius*) *notione* Motus *ut quid sit Linea intelligatur? Annon Lineæ corpori quiescenti insunt*, &c.? Pariter ego dico tibi, quid opus est nominare Motum ut intelligatur quid sit sphæra? Annon potest concipi quiescens Semicirculus in sphæra?

A. Si ille *Hobbium*, etiam tu *Euclidem* recte reprehendisti. Sed erratis ambo nescientes naturam Definitionis. Nonne sunt definitiones scientiarum Principia?

B. Sunt.

A. Et omnis scientia a cognitione causarum derivanda?

B. Verum.

B. Verum.

A. Ergo Principium scientiæ est cognitio causæ.

B. Etiam.

A. Sequitur ergo cognitionem causæ contineri debere in Definitione.

B. Fateor.

A. Itaq; optime definiunt illi qui generationem rei in Definitione explicant.

B. Etiam hoc concedo, & in *Euclidis* Sphæræ, Coni, & Cylindri Definitionibus generationes illorum corporum video, quanquam non similiter definierat Circulum.

A. At Circulum describi posse (qui describi nisi per motum non potest) inter Postulata ut rem notam, gratis sumsit.

B. Saltem dicere debuit *Euclides* Sphæram esse Solidum *quale sit* potius quam *quod fit* ex circumductione Semicirculi. Nulla enim est sphæra quæ per Circumductionem facta est a natura.

A. Qui Figuras definiunt, Ideas, quæ in animo sunt, non ipsa corpora respiciunt; & ex iis quæ imaginantur *fieri* deducunt proprietates factorum similium, a quocunq; & quomodocunq; facta sunt. Vidimus jam Principia Geometriæ tradita ab *Euclide*, quorum aliqua quidem, sed pauca minus accurata mutavimus, reliqua ut irreprehensibilia partim præterivimus, partim confirmavimus.

B. Revertamur ergo ad *Wallisium*, & unde digressi sumus, nempe ad Caput decimum. Nam si bene memini eramus ad Philologicorum & Capitis noni finem, tunc cum digredi incepimus.

A. Sed differamus hæc in triduum, quo tempore lectis Arithmeticæ ejus quæ restant, ea tantum quæ materiam colloquia nostro subministrare possunt, discutienda deligam, ne ea quæ utilitatem nullam, molestiam nimiam nobis allatura sunt sæpiùs repetamus.

Dialogus

Dialogus Tertius.

B. LEgiſtin' reliqua Arithmeticæ Walliſſianæ?

A. Ita.

B. Plenane videntur tibi, ſicut antecedentia, erroribus?

A. Minime. Sunt enim pleraque ex iis Arithmeticæ libris deſumpta, qui pueris ediſcendi ſcripti ſunt; cætera aut *Ougthredi* ſunt, aut maxima ex parte falſa.

B. Sed quæ ab aliis habuit, ipſe ſolus demonſtravit.

A. Neque hoc quidem. Verum hæc inter legendum conſiderabimus accuratiùs. In Capite decimo, Numerationem in Notis Numeralibus vulgaribus explicat, & cujuſque Notæ, tum proprium, tum Loci valorem, tam in Fractionibus Decimalibus, quam in Integris exponit; Oſtenditque, ſicut a loco *Unitatum* ad loca præcedentia proceditur per decuplationem, ita a loco eodem ad Loca ſequentia proceditur per ſubdecuplationem. Quarum quidem rerum demonſtratio non eſt, ſed Conſtitutio fuit arbitraria. Explicatio autem & brevis & perſpicua & accurata a Magiſtro expectanda erat. Et primò quod ad Numerationem periodos adhibeat, periodumque per loca tria potius quam per quatuor aut alium numerum finiat, non videtur ad Artem Arithmeticam pertinere.

B. Sumamus numerum quemlibet; eundem (verbi gratia) quem ille ſumpſit 2,468,013,579. Quomodo numerus hîc verbis proferendus eſt.

(*A.* Recte *proferendus*, non ut *Walliſius* loqui ſolet *efferendus.*)

B. Quomodo (inquam) proferendus eſt ſine periodis?

A. Periodos utiles eſſe non negavi, ſed quæro cur locis ternis definiantur?

B. Si Notarum valorem verbis enuntiaveris, videbis ipse.

A. Significant Notæ illæ *duo millia millium millium, quadringenta sexaginta octo millia millium, tredecem millia & quingenta septuaginta sex.*

B. Nonne vides verba tua distinguere te, quemadmodum ipsæ Notæ per loca terna distinguuntur.

A. Ita, sed Latinè. Distingue jam tu easdem notas per nomina numeralia (si potes) Græcè.

B. Possum , ἔικοσι κὴ τέσαρες μυριάδες μυριάδων, ἑξακισχίλια ὀκτακόσιαι, καὶ μία μυριάδες, τρισχίλια, πεντακόσιαι, ἑβδομηκοντὰ ἔννεα ;

A. Sed hæ voces distinguunt Notas numerales non per loca terna, sed per quaterna, hoc modo, 24, 6801, 3579. Nihil igitur ad scientiam Arithmeticam, quæ universaliter omnibus gentibus eadem est, sed ad diversas gentium Dialectos pertinet. Deinde cum dixisset, *cyphræ quæ locis supremis ponuntur nulli prorsus sunt usui, nullius saltem necessitatis, sed redundant potius ; tantundem enim significant* 0001 , 001. 01 , & 1 subjungit ridiculè, [*Fieri quidem nonnunquam potest ut Elegantiæ gratia, vel quo numerorum supputandorum collatio commodior fiat (ut in apposito exemplo) ejusmodi redundantes cyphræ scribantur*]

Libræ	Solidi	Denarij
13	12	10
24	08	06
05	04	01

Næ ille Elegantiæ æstimator imperitus est qui inutiles istas ciphras ad supplendas lacunas præfigere Elegantiæ esse judicat. Deinde paginas duas insumit ad declarandam naturam Fractionum decimalium ; quod etiam imperitiæ est. Cum enim locorum valores in Integris procedant a loco *Unitatum* semper, per 10 multiplicando , & Fractiones decimales procedant a loco eodem *Unitatum*, semper per 10 dividendo, supervacaneum erat distinguere loca dextra & sinistra. Nam posita Fractione hac decimali $\frac{111}{1000}$ erunt facti (dividendo per 10) $\frac{1}{10}$ † $\frac{1}{100}$ † $\frac{1}{1000}$ sicut integri 10. 100. 1000. facti (multiplicando per 10,) proportionales. Itaq; tota fractio valebit $\frac{1}{10}$ † $\frac{1}{100}$ † $\frac{1}{10000}$. Similiter Fractio hæc $\frac{354}{1000}$ valebit $\frac{3}{01}$ † $\frac{5}{100}$ † $\frac{4}{1000}$. Miror ergo quomodo verba hîc reperire potuit quibus fere duas paginas impleret.

B. Scis eum non modo Professorem Geometriæ , sed etiam Concionatorem esse, & propterea in quærendis verbis necessario & multum exerceri.

A. Sed cur numeros *integros*, & *partes decimales* conjungendas esse censuit, sicut in hoc numero fecit, quem exempli causa proponit ipse, 3579753 ? Cur etiam *partes* delegit 753 quæ inversæ sunt integrorum 357 ?

357 ? Nam lectorem imperitum a veritate abducent , tamquam regula illa divisionis per 10, non esset aliter vera.

B. Cur ita fecit nescio ; nisi quia *Ougthredus* Fractiones decimales post *Unitatis* locum posuit, ut quæ fiunt a numeris post divisionem per 10. 100. 1000, &c residuis, & separatrice Linea qua Quotiens a numero Dividendo separatur, distinxit ; eo fine ut Additionem, Substractionem, Multiplicationem, & Divisionem tam integrorum quam Fractionis iisdem operationibus complecteretur , ideo *Wallisius* qui forte quid ab *Ougthredo* fieret, non cur fieret animadvertisset, numeros ambos (integrum & fractum) conjunxit etiam ubi non esset opus per imitationem.

A. Verisimile est. Cur autem tot verbis ad rem tam facilem explicatu usus est manifesta causa est , quod ea quæ scripturiebat cruda adhuc & indigesta illi erant. Quæ autem nondum perfecte didiceris nunquam breviter & perspicue explicare poteris. Sequitur Caput undecimum de Notatione Algebrica.

B. Est in eo Capite quod non intelligo.

A. Ostende locum.

B. En. *Si vero*, &c.

A. [*Si vero eadem unitatum multitudo* (nempe 27) *in continua proportione quadrupla disponatur, emerget quaternionum quaternio unus, & duo insuper simplices quaterniones, cum tribus residuis Unitatibus.*]

B. Hoc, inquam, non intelligo. Nam si jubear disponere 27 in proportione quadrupla, continua, id est, in proportione numerorum 1. 4. 16, pro primo numero ponerem A, pro secundo 4A. pro tertio 16A ; quorum summa est 21 A. Diviso ergo 27 per 21 prodibit $\frac{27}{21}$ sive $1\frac{2}{7}$, pro A. Et 4A erunt $5\frac{1}{7}$ & 16 A $20\frac{4}{7}$, qui numeri faciunt aggregatum 27: Quod verum esse scio, sed non intelligo quomodo consistit cum uno quaternario quternariorum, duobus quaternariis & tribus unitatibus.

A. Nec mirum. Nam non id voluit *Wallisius*, sed ut numerus 27 disponeretur secundum loca ab Unitate valoris continue quadrupli. Quod est verissimum. Nam si ultimus locus sit Unitatum, penultimus erit quaternariorum & tertius sedenariorum. Est autem 27 uno sedenario duobus quaternariis & tribus Unitatibus æqualis.

B. Video eum ita intelligendum esse ; sed debuit sic dixisse.

A. Male quidem se explicuit. Ostendere enim voluit hoc loco quomodo scribendus esset numerus, si locorum valores non in Ratione continua decupla (ut vulgo fit) augerentur, sed in proportione qualibet alia ut quadrupla vel tripla ; vel quod idem est si numerus Notarum esset minor quam (ut nunc sunt) novem, quomodo scriberetur 27. Et verum est numerum 27 qui in proportione decupla scribitur sic, 27, in proportione quadrupla debere scribi sic 123, & in proportione tripla sic 1000.

B. Sed nullam habet ejus rei demonſtrationem. Oſtende igitur quare ita eſſe neceſſarium eſt. Et ſit data proportio tripla.

A. Quoniam ſicut in proportione decupla novem tantum ſunt notæ quibus utimur, & decima cyphra, ita in proportione tripla, duo tantum erunt Numeri digiti & tertia ciphra. Erit autem 1 in loco ultimo Unitas; Et in loco tertio ubi recurrendum eſt ad 1 & ciphram ſignificabit 10 ternarium. Et in loco nono, 100 ſignificabit 9 (ut enim 3 in 3 facit 9, ita 10 in 10 facit 100) Et in loco viceſſimo ſeptimo 1000 valebit 27 propterea quod ſicut 3 ad 27 ſunt in proportione 3 ad 9 duplicata, ita numerus valens 27 debet eſſe in proportione 10 ad 100 duplicata. Scribendus eſt ergo 27 per has notas ut 1 ante tres ciphras ſignificet id quod ſit ex ternario in ſe ter multiplicato, id eſt, 27.

B. Si eſſet tantum una nota numeralis præter ciphram, quomodo ſcriberetur idem numerus 27?

A. Si ita eſſet, valor locorum procederet per Rationem duplam, & recurrendum eſſet alternis locis ad 1 & ciphram vel ciphras. Nam 1 in ultimo loco ſignificaret Unitatem, in ſecundo ab Unitate, 10 ſignificaret 2, & 11 in tertio loco 3, & 100 in loco quarto 4, & 10000 in loco decimo ſexto 16. (Nam ut 4 in 4 facit 16 ita 100 in 100 facit 10000) deinde 11000 in loco 24° valebit 20. & conſequenter 11001 valebit 25. 11010 valebit 26, & denique 11011 valebit 27, id eſt, 1 Unitas, 1 binarius, 1 octonarius, & 1 ſedenarius, qui ſimul faciunt 27.

B. Verum eſt. Sed nonne poteſt ubi valores locorum ſunt in ratione dupla Numerus ſcribi 27 per alias notas quam 11011?

A. Poteſt, ſed aſſumenda eſt nota binarii. Nam ſub his notis proportionis duplæ 8, 4, 2, 1, ſubſcribe 2, 2, 1, 1, hoc modo $^{8421}_{2211}$ valebit 2211 duos octonarios, duos quaternarios, & præterea binarium, & Unitatem; qui Numeri faciunt ſimul additi 27.

B. Sed quando opus erit ut paucioribus notis utamur quam novem quibus utimur; Perge legere.

A. His ita explicatis monendum duco, Univerſam Artem Algebræ ſive Analyticæ ex hoc uno quaſi fundamento dependere. Nam revera quod nobis gradus (*ſive aſcendens, ſive deſcendens*) primus, ſecundus, tertius, *&c. illud eſt Algebriſtis*, Latus, Quadratum, Cubus, *&c.* Concedo Latus, Quadratus, Cubum, fundamentum eſſe (*cui inſiſtit* dicam, an contra cum *Walliſio*) *ex quo dependet* regula Algebræ. Sed non inde dependet Ars Analyticæ. At ille illam quam modo tractavit numerationem, (nempe per locorum valores in proportionibus decuplis, quadruplis, triplis, *&c.*) Algebræ fundamentum eſſe ſtatuit; id quod difficile eſt credere, cum ante illum multi fuerint Algebriſtæ, ſed qui

Numerationes has novas edidit ipſe primus eſt.

B. Nuſquam tamen quod memini, Numerationibus iſtis in ſequentibus utitur. Sed per fundamentum intelligit non illud, ſed proportionum ab Unitate incipientium varietatem omnem. Itaq; verum eſt quod dicit.

A. Eſto. Cur autem paulò poſt de veteribus loquitur Algebriſtis acſi id aut ignoraſſent aut diſſimulaſſent, & cauſam ignorantiæ eorum eam eſſe dicit *Quod Arithmeticorum* Unum (*non vero, ut oportuit*, Nullum) *cum* Puncto *Geometrico compararent.*

B. Certe in Elencho ſuo contra *Hobbium*, multis in locis affirmat *Punctum* eſſe *Nihil*. Poſtea verò in alio libello defendens librum ſuum de *Angulo Contactus* & de *Arithmetica Infinitorum*, contra eundem *Hobbium*, negat ſe ita dixiſſe. Nunc autem illum ſaltem ſic ſentire ſatis intelligo.

A. Video Phantaſiam ejus, aliis Ideis omnibus deletis, ſolis occupatam eſſe Symbolis. Quî enim aliter fieri potuit ut Symbola Radicum Numerorum etiam non quadratorum numeros appellaret, ſanus & Mathematicus? Quî fieri potuit ut Geometriam ab Arithmetica dependere diceret qui ſciret Radices numerorum quadratorum rite extractas eſſe demonſtrari non poſſe, niſi per quartam propoſitionem Elementi 2[i] *Euclidis* pure Geometricam? Deniq; quî potuit, Veterum Geometrarum omnium capitibus ita inſultare, ut diceret eos Algebram ignoraſſe, idque quia neſciebant *Punctum* Geometris idem eſſe quod *Nihil* Arithmeticis qui ſciret ſi *Punctum* nihil ſit, neq; *Lineam*, neq; *Superficiem*, neq; *Solidum* quicquam eſſe? Præterea, conſidera proxima ejus verba hæc, *Non quia Linea bipedalis addita facit quadrupedalem, ideo duo & duo faciunt quatuor, ſed potius quia hoc, ergo illud.* Subintelligitur *ergo Geometria ab Arithmetica dependere non hæc ab illa.* Belle admodum. Dic mihi propoſitio illa *duo & duo faciunt quatuor* eſtne Definitio?

B. Non.

A. At Axioma?

B. Ita.

A. Eſt ergo lumine naturali cognitum non a Magiſtro Arithmeticæ repertum; ſed cum ipſa verborum intellectione a pueris receptum. Non ergo habet ab Arithmetico Geometra *Lineam bipedalem Lineæ bipedali additam facere Lineam quadrupedalem.*

B. Non ſit ergo Axioma, ſed ab Arithmetico demonſtrandum.

A. Quis autem illud Arithmeticus aut demonſtravit, aut demonſtrare ſe debuiſſe judicavit? Satis enim a nutricibus dum nomina numerorum pueros docent demonſtratur. Quid, quod infinitæ ſunt quantitates continuæ quarum unius ad aliam ratio numeris explicari non poteſt? *Q*uomodo ergo contemplationis ſunt Arithmeticæ quæ verſatur tantum in rationibus numerorum? Contra vero inter numeros ratio nulla eſt quæ non exponi poſſit Lineis. Quid quod radices numerorum, quæ Algebram fere totam ſuſtentant, pleræq; (ut ante monuimus) numeri non ſunt? Quare & calculus earum non Arithmeticus ſed Geometricus eſt. Quid, denique quod cum ad Æquationem ventum eſt, problema plerumque demonſtrari non poteſt ſine aliqua Effectione Geometrica? Hæc cum ita ſint, quid cenſes, Geometriam Arithmeticæ, an hanc illi ſubordinatam eſſe?

B. Ego verò nunquam dubitavi quin Arithmetica Geometriæ pars, nec ea magna, eſſet. Nam ex *Euclidis* libris pure Geometricis, educi facile poteſt Arithmetica; cum Libri Arithmetici ne omnes quidem ſimul, qui unquam ſcripti ſunt, aut quos ſcripturus eſt *Walliſius*, ſufficiant ad producendam centeſimam partem Theorematum Geometricorum quæ nunc habemus.

A. Adde & hoc, quod ſicut Regula Alligationis, & Regula Falſi, ita Regulam Algebræ unam eſſe ex Regulis Arithmeticæ.

B. Sed multo illis ampliorem.

A. Aſſentior. Sequitur uſus Symbolorum, nempe *Neceſſitas*, *Brevitas*, *Perſpicuitas*. [*Primo* (inquit) *Neceſſitatis cauſa; cum pro numero adhuc ignoto ſubſtituitur Symbolum, ſeu Character, eo uſque dum ipſe innoteſcit.*] Quaſi problema quod ſubſtituto Symbolo ſeu Charactere inveſtigatur, inveſtigari non poſſet ſine Symbolo?

B. An poteſt?

A. Quid? An vox hæc *Ignotum* vel *Quæſitum* minùs denotat numerum quem quærimus quam litera A, vel R. vel Character *p*? Aut minùs recte dicemus *quæſiti quadratum*, quam AA, vel Aq, vel A_2?

B. Sed brevior eſt ſcriptio per Literam unam quam per integrum vocabulum.

A. Hoc quidem concedo tibi de brevitate ſcriptionis, non autem de brevitate cogitatorum; quia non Characteres ſoli, nec ſola verba, ſed res ipſæ cogitandæ ſunt, quæ abbreviari non poſſunt.

B. Neſcio quid reſpondeam.

A. Deinde ſi Neceſſitas illa abſoluta non ſit, ſed ex ſuppoſita brevitate, quid dices de ſecundo uſu Symbolorum, nempe, de brevitate, quare primus uſus non ſit ſupervacaneus?

B. Neſcio hoc quoque.

A. Deinde quod addit [*Brevitatis & Facilitatis cauſa, cum illud non raro citius peragatur per Symbola ſeu Species, quam per ipſos numeros*] niſi intelligatur de ſcriptione, falſum eſt. Nam & res, & verba & Symbola

bola cogitanda erunt, quorum ultimum erit inutile. Jam verò quod ad Perſpicuitatem attinet, ego ſane in legendis demonſtrationibus per Symbola ſcriptis, quam per verba, majorem ſemper reperi Difficultatem. Tu qui Conica ejus Symbolicè ſcripta legiſti, magis ea perſpicua eſſe exiſtimas, quam Conica *Apollonii* vel *Midorgii*?

B. Ego in legendis Conicis *Walliſii* cum inciderem in propoſitionem aliquam longiuſculam, partim laboris impatientia, partim quod eam jam ante aliunde veram eſſe ſcirem, nec de Methodo ejus dubitarem, demonſtrationis viam nimium leviter examinavi.

A. [*In demonſtrationibus per Symbola, operationum ſuperſunt* (inquit) *veſtigia.*] Nonne videntur tibi operationum veſtigia expreſſiora eſſe, verba & ciphras ſcriptas, ſine quibus operatio fieri non poteſt, quàm Symbola quibus carere poteſt, & ſemper caruit operatio Arithmetica? Niſi forte putes A+B dicendam eſſe Additionem, aut AB vel A × B Multiplicationem, & $\frac{A}{B}$ Diviſionem eſſe A per B. Sed *Res* (inquit) *tota exemplo melius patebit.* Itaque Problema adducit quod & per Algebram & ſine Algebra ſolvi poteſt; & utroq; modo recte ſolvit; ita tamen ut ſolutionibus illis nihil poſſit eſſe magis appoſitum ad oſtendendum quod Algebra non eſt Analytica. Problema autem ſic ſe habet carmine redditum.

Acceſſit virgo tres ſupplex ordine Divos,
Et tulit accedens aſſes, quot neſcio, ſecum.
Oratus ductos *geminavit Jupiter aſſes;*
Protinus illa Jovi tres aſſes grata pependit.
Quotq; ſuper fuerant duplavit Phœbus Apollo;
Grata itidem Phœbo *tres virgo reddidit aſſes.*
Pallas tunc reliquos geminavit virginis aſſes;
Aſſibus & tandem tribus eſt donata Minerva.
Unicus & ſupereſt quem ſecum rettulit aſſis.
Dic mihi quot fuerant quos primò virgo ferebat.

Solvit autem per Algebram ſic.
Pro ignoto numero Aſſium allatorum ponit —— 1 √
Qui duplatus a Jove fit —————— 2 √
Inde Jovi ſolutis 3 aſſibus reſtant —— 2 √ -- 3 Aſſes
Quid uplati ab Apolline fiunt —— 4 √ -- 6 Aſſes
Inde Apollini ſolutis 3 aſſibus reſtant —— 4 √ -- 9 Aſſes.
Quid duplati a Pallade fiunt —— 8 √ -- 18 Aſſes
Inde Palladi ſolutis 3 aſſibus reſtant —— 8 √ -- 21 Aſſes
Sed reſtabat unus tantum aſſis
Eſt ergo 1 Aſſis = 8 √ -- 21 Aſſes.
[illegible] n 2 Aſſ. = 8 √.

Et

Et $2\frac{3}{4}$ Asses – 1 √ id est, numero Assium allatorum.

B. Rectè sane, & breviter.

A. Fateor: sed in hac operatione quid vides propter quod dicenda sit *Analytica*? Sive (quod idem est) quodnam est hîc compositum quod resolvitur? Dicesne duplationem illam esse resolutionem?

B. Minimè.

A. Quid ergo? An ternorum illorum assium subductio resolutio est?

B. Non videtur.

A. Neq; est, nam Methodus tota est *Synthetica.*

B. Quid autem est Resolvere.

A. Resolvere, est id quod compositum est detexere, ordine qui sit ordini compositionis contrarius.

B. Declara hoc aliquo Exemplo.

A. Accipe Exemplum *Wallisii* Problema solventis (ut dicit) sine Algebra, hoc modo.

Relictus est Assis 1. itaq; si Pallas reddat virgini quas acceperat 3, fiunt quatuor. Si illa reddat Palladi quod ab ea acceperat dimidium, fiunt 2. Deinde si *Apollo* reddat quos acceperat 3, fiunt 5; & illa Apollini quod acceperat dimidium, fiunt $2\frac{1}{2}$; & Jupiter quos acceperat 3 Asses, fiunt $5\frac{1}{2}$. Et illa quod a Jove acceperat dimidium fiunt $2\frac{3}{4}$. itaq; omnia redeunt ad statum primum.

B. Rectè, breviter, & Analytice. Nam quod factum in Problemate describitur ab initio ad finem, id per mutuam redditionem fit infectum a fine ad initium.

A. Versus ipsius *Wallisii* sunt (neque enim hoc tacere potuit, etsi absque eo satis id manifestum erat) nam *ductos* geminavit Jupiter Asses, nemo dixisset alius.

B. Problema ergo vetus est.

A. Fortasse; at certe ingeniosum est, factumque, ut arbitror, data opera ad notandos Ethnicorum Sacerdotes, quod qui ad deos accedebant illis mediantibus, fiebant, etiam exauditi (ut virgo hæc) pauperiores.

B. Propone jam exemplum Analyticæ veræ, qua Problema datum resolvitur in sua Principia, nempe Definitiones & Axiomata.

A. Sit propositum, Exempli causa, super Lineam rectam ad unum & idem ejus Punctum constituere tres Angulos tribus Angulis Trianguli dati, unum quemlibet, uni cuilibet æqualem.

B. Datum sit Triangulum ABC.

A. Per verticem B, duco rectum DE quam suppono Angulum facere *DBA* Angulo *BAC* æqualem, & Angulum *EBC* æqualem Angulo *BCA*. Cum ergo Angulus *ABC* sit cōmunis, erunt tres Anguli ad *A*, *B*, *C* æquales tribus Angulis ad *B*, unus quilibet uni. Sumatur in *BE* (si opus est producta) *BF*, æqualis *AC*; & jungatur *CF*. Quoniam ergo duo latera *BF*, *BC*,

Trianguli

Trianguli *B C F* æqualia sunt lateribus *A C*, *B E*, Trianguli *A B C*, utrumque utrique, & Angulus *F B C* æqualis (per Hypothesin) Angulo *B C A*, superposita *B F* ipsi *C A* cum ipsa congruet, & *B C* cum ipsa *C B*, & Angulus *F B C* cum Angulo *B C A*, & proinde etiam *C F* latus cum latere *A B*, sunt ergo æquales inter se A B, C F, (per Axioma 8. Elem: primi Euclidis) & Angulus B E C æqualis Angulo B A C per 4 *Eucl.* 1. Qui autem ad punctum *B* in recta linea D F constituuntur Anguli omnes simul æquales sunt omnibus simul Angulis constitutis ad punctum C in recta A C producta ad G. Nam partes simul omnes æquales sunt toti utrobiq;. Cum ergo Angulus B C F æqualis sit Angulo A B C, & F B C æqualis B C A, erit reliquus F C G æqualis reliquo D B A, sive B A C. Sunt igitur rectæ A B, C F, (quæ ostensæ sunt æquales) inclinatæ ad easdem partes secundum angulos æquales. Parallelæ autem sive Æquidistantes lineæ definiuntur esse illæ quæ ab æqualibus rectis, æqualiter ad easdem partes inclinatis distinentur. Parallelæ ergo sunt BF, AC. Atque hactenus ratiocinacionem qua tres Anguli Trianguli rectilinei duobus rectis æquales esse demonstrantur, in partes ex quibus erat composita resolvimus quæ *Analysis* est.

B. Quomodo autem ex illis erat composita.

A. Sic. Ex eo quod A C, D F sunt parallelæ concludunt angulum D B A æqualem esse angulo alterno B A C, & angulum F B C, alterno B C A, & angulum A B C, communem, & proinde tres D B A, A B C, F B C æquales esse tribus B A C, A B C, A C B unum quemlibet uni. Sciendum autem est quod si *Analysis* plenissimè perageretur, non minus prolixa esset quam ipsa esset demonstratio, sumpta ab ipsis principiis usque ad illatam conclusionem.

B. Quin natura Analyseos talis sit qualis hic explicatur, dubitari non potest. Attamen ne imaginari quidem possum quo facto idem fieri possit per Algebram.

A. Neque hercle ego. Nam extra comparationem Rectangulorum (& Triangulorum, quæ sunt ipsorum dimidia) in Geometria; & extra potestates numerorum in Arithmetica, Algebræ locus nullus est, neque in illis Analysis magis est quam Synthesis.

B. Exemplum ostende Algebræ per potestates, ita dividens 8 ut quadratum unius partis sit ad Rectangulum sub tota & reliqua parte ut 2 ad 1.

A. Radix Quadrata quæsiti sit *A*. Reliquus ergo numerus est 8 — A Quadratum ipsum *A A*. Rectangulum quæsitum 8 in 8-8 *A*. Vis ergo *A A* — 8 in 8 – 8 *A* :: 2. 1 esse proportionales.

B. Volo.

A. Sunt ergo *A A* ∥ 16 in 8 – 16 *A*; & additis utrinque 16 *A*, a-

 runt

runt $AA + 16A - 16$ in $8 = 128$. Quare $16 + A$. A. $\surd 128$. A ſunt continue proportionales. Datur ergo A, & proinde etiam A A; & rectangulum 8 in 8 − A.

B. Sed datum eſſe A, nondum ſatis perſpicio.

A. Datur media proportionalis inter extrema 16 + A & A, nempe $\surd 128$. Quare deſcripto circulo cujus diameter eſt 16, a quovis puncto ejus ducatur tangens æqualis $\surd 128$; ab extremitate ejus ducatur per centrum recta ad adverſam circumferentiam, eritque pars ejus intercepta inter tangentem & circumferentiam æqualis quæſitæ A; ut manifeſtum eſt per *Eucl. Elem.* 3. *Prop.* 36.

B. Ac *Vieta* in hujuſmodi rationibus exponendis alia utitur operatione. Nam ex medio puncto differentiæ cognitæ deſcribit circulum cujus radius poteſt radicem numeri 128, & ſemiſſem differentiæ.

A. Eodem recidit utraque operatio.

B. Objicio etiam nondum inventam eſſe illam radicem. Numeri enim 128. radix quadrata nulla eſt.

A. Imo radicem habet ſed nullo æqualem numero. Nam numeri 16 & 8 qui faciunt 128 in linea recta ſimiliter diviſa in partes aliquotas diſtingui poſſunt, & inter illas rectas inveniri poteſt media proportionalis cujus quadratum erit ipſe numerus 128.

B. Etiam hinc intelligi poteſt problemata quanquam *A*rithmetica quæ ſine ope Geometriæ inveniri poſſunt per Algebram nulla eſſe.

A. *Ne crede* igitur nimium poſt hæc vaniloquio Profeſſorum. Sed quid quæſo in ratiocinatione hac obſervas propter quod dicenda ſit *Analyſis*? an cum ventum eſſet ad Analogiſmum hunc $16 + A$. $\surd 128$. A:: aberamus longius a Principiis, quam cum acceſſiſſemus *ad prop.* 36. *El.* 3. *Euclidis.*

B. Agnoſco hic quidem curſum quendam & recurſum inter æqualitatem Rectangulorum & æqualitatem Rationum, ſed utra harum viarum magis tendat ad Principia, ſtatuere nondum poſſum. Sed progrediamur *ad Cap.* 12.

A. Capita reliqua minus moleſta erunt. Nam quæ in illis recta ſunt (ut ſunt plurima) trita ſunt & edita in omnibus ferè libris arithmeticis, præter *A*lgebrica quæ ex Oughtredi Clave Mathematica, ubi multo brevius & apertius traduntur, deſumpta ſunt. Ea vero quæ *Walliſii* propria ſunt, falſa ſunt. Id quod habet ſub initium hujus capitis, nempe hæc verba, *ſunt autem* Fractiones *ſeu* numeri fracti *non tam numeri quam unitatis fragmenta* ſuum eſt, idemque falſum & abſurdum. Nam eo ipſo quod *fragmenta* ſunt, *fragmentorum numerus* ſunt. Neque enim ratio ulla adduci poteſt quare unciæ, ſextantes, trientes, beſſes, dodrantes, cæteraque fragmenta aſſis, minus proprie numeri appellantur unciarum, ſextantium &c. quam animalia, numerus

animalium. Capite decimo tertio traditur fractionum ſcribendarum ratio eadem quam vulgo ſciunt, præter notationem Fractionum Algebricarum, quas nemo intelligit niſi aliunde doctus. Quis enim intelligit quod 2 *Qu.* + 3 *R.* idem valeat quod $\frac{1\,R + \frac{3}{2}}{2\,R.}$ niſi qui ante id didiciſſet

B. Sed quæ regula eſt diviſionis (per ſymbola) accurata?

A. Differatur hoc ad examinationem capitis viceſimi, id eſt, ad locum proprium. Examinetur jam *Cap.* 13. ubi primo loco modum docet demonſtrandi additionem *numerorum* (ut vocantur) *digitorum*; *verbi* (inquit) *gratia* $2 + 3 = 5$ *ſic demonſtratur. Ponantur primum duo puncta, & deinde tria, quæ omnia, ſi numerentur reperientur quinque.* Libet hic quærere (cum dicat quod *reperientur quinque*) a quo reperientur. Utrum ab eo qui ſcit, vel ab eo qui neſcit 2 & 3 eſſe 5? ſi ab eo qui ſcit, id ei demonſtratum erat tunc cum neſciret. Sed qui potuit id fieri numerando, ab eo qui ſciret tantum quid eſſent duo & tria, neſciens quid eſſent quinque? Vides ergo ut nugatur.

B. Sed perge.

A. *Vel ſic quoniam notum eſt ex ipſa numerorum procreatione (quam Cap.* V. *tradidimus) quod ſit* $1 + 1 = 2$ *&* $2 + 1 = 3$ *&* $4 + 1 = 5$ *&c, erunt etiam* $2 + 3 = 1 + 1 + 3$ *&* $3 + 1 = 4$ *&* $4 + 1 = 5$. Quomodo autem notum eſt per *Cap.* 5. quod ſit $4 + 1 = 5$? Num id illic demonſtratur? Vel ſi demonſtretur, ex quibus principiis?

B. Caput illud quintum definitionum eſt, vel ut ipſe dicit quæ ibi traduntur ſunt inſtar definitionum.

A. Principium ergo eſt $4 + 1 = 5$ cur non & $2 + 3 = 5$ æque principium eſt, & proinde indemonſtrabile quod erat demonſtrandum? Non intellexit *Walliſius*, ſaltem oblitus eſt $1 + 1$ binarii, $2 + 1$, vel $1 + 1 + 1$ Ternarii & ſic deinceps eſſe definitiones, neque accedere ad Magiſtros Arithmeticæ niſi qui jam ſciunt quot ſunt in quolibet *numero Digito* unitates.

B. At in numeris quos articulos & compoſitos vocant methodus addendi quænam ſit ſatis demonſtravit. Num & hoc negas?

A. Non nego. Sed ita demonſtravit quemadmodum omnes; nam qui id quod ipſi faciunt inter operandum clarè eloquuntur, ut qui dicit 8 & 7 ſunt 15 ſubſcribo unitatum loco 5, reſervo 1 ad locum decadum, deinde, quod reſervabatur cum 9 & 6 & 8 ſunt 24 decades, id eſt duæ centuriæ & 4 decades, ſubſcribo decadum loco 4 & centuriarum loco 2, ut numerus totus fiat 245, non modo tres numeros 80, 68, 97, ſimul addidit, ſed etiam recte additos eſſe demonſtravit. Quid habet ille amplius in demonſtratione tripaginali præter abundantiam verborum & obſcuritatem ſymbolorum?

B. Nihil. Sed non animadverterat voces illas puerorum dum numeros ita addunt additionis esse demonstrationem.

A. Similiter demonstrationes Substractionis, Multiplicationis & Divisionis sunt ipsæ voces operantium, subtrahentium (inquam) multiplicantium & dividentium. Capite 14 de subductione tractat, quam eodem modo demonstrat quo demonstravit additionem.

B. Transeamus ergo ad 15 *de Additione & Subductione Speciosa.*

A. Quod habetur hoc capite totum desumptum est ex *Cap.* 2 & 3 *Oughtredi* clavis Mathematicæ, cujus sunt brevissimæ veruntamen plenissimæ regulæ; altera *Additionis*, nempe ut *conjungantur magnitudines servatis signis*; altera de Subductione, nempe ut *conjuncta utraque magnitudine mutentur omnia signa magnitudinis subducendæ.* Additionis exemplum apud *Oughtredum* est,

$$\begin{array}{l} \text{ad } 5\,A \\ \text{adde} -3\,A \\ \hline \text{fiunt } 5\,A - 3\,A \\ \text{sive } 2\,A \end{array}$$

Ubi *Wallisius* videns differentiam magnitudinum nempe 2 *A* poni ab *Oughtredo* pro 5 *A* — 3 *A*, duas facit regulas ex una; alteram ubi signa similia sunt, alteram ubi dissimilia, regulam Magistri sui elegantissimam non necessario corrumpens, Idemque facit circa regulam Subductionis.

B. Videtur mihi in hoc capite docere debuisse *Wallisius* quo pacto numeri dati radix alterius numeri dati radici commodissime addenda vel subducenda sit.

A. Additio radicum commodissima non fit sine multiplicatione; multiplicatio autem infra traditur *Cap.* 18.

B. Istuc ergo eamus.

A. Duo igitur capita integra prætermittemus?

B. Sed percurramus leviter.

A. Titulus Capitis 16 est *de Additionis & Subductionis probatione.* Per *probationem* intelligitur *Demonstrationem*?

B. Minime; nam neque additi subductionem, additionis; neque residui additionem subductionis; neque Probationem noventariam, demonstrationem esse ipse dicit.

A. Quomodo autem *Probatio* est si *Demonstratio* non est? Immerito ergo reprehendit *Ramum* quod examinationes illas negaverit esse probationes, affirmaveritque veritatem operationis satis ex ipsa apparere operatione; id quod ego paulo ante dixi, nempe, operationem ipsam suæ veritatis esse demonstrationem. Caput 17 additionis & subductionis exercitium est; ubi computat, primos annos a mundo condito ad annum præsentem, nempe ab initio ad diluvium; a diluvio ad Arphaxad; ab illo ad Tharam; a Thara ad *Abrahamum*, & promissionem,

B. Siste paulum. Cujus rei promissionem? salutisne gentium in semine *Abrahami*, an promissionem terræ *Canaan*?

A. Non distinguit, habens fortasse utramque pro eadem. Deinde a promissione ad *Exodum*; ad Templum; ad Christum; ad Æram vulgarem; ad annum Christi 1655. Deinde de annis moræ & servitutis *Israelitarum* in *Ægypto* disputat, & eorum computat mirabile incrementum.

B. Scio. Nempe ut obiter Chronologiam sacram emendaret.

A. Nec tamen emendationes suas satis probat; nec si probasset, pars ulla hujus capitis ad Arithmeticam pertineret. Vides ergo hominis ostentationem miseram quicquid aut in scientiis, aut in linguis, aut in Historia scire se sibi videbatur in publicum importune proferentis, certa juxta & incerta, etiam in libro Mathematico. Accedo jam *ad Cap.* 18. de *Multiplicatione.* Audi ergo, primo, quomodo definit *Multiplicationem. Multiplicare* (inquit) *est numerum invenire qui datam habeat rationem ad numerum datum.* Utrum propositio hæc (nam definitio non est) vera an falsa sit unico exemplo intelligi potest. Sic datus numerus quilibet 6 & data ratio 4 ad 5, potesne tu aut ille numerum quæsitum invenire per solam multiplicationem? datus 6 multiplicandus est, sed per quem numerum? quis (inquam) est multiplicans? an multiplicantem invenias per multiplicationem? Productus erit $7\frac{1}{2}$. Nam 4. 5 :: 6. 7. $\frac{1}{2}$ sunt proportionales. Numerum ergo quæsitum non invenies nisi dividendo $7\frac{1}{2}$ per 6. Emerget autem quotus $1\frac{3}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$. Quatnam autem Multiplicatione reperies istum $\frac{5}{4}$?

B. Intelligit ille datum oportere esse multiplicantem, eumque unitatis multiplum.

A. Alii quidem ita intelligunt. Interea vero definitio quam ipse affert vitiosa est; quam tamen ad alias etiam quantitates applicat, paulò inferius dicens, *multiplicare* esse *Datæ alicui quantitati aliam in data Ratione exhibere.*

B. Erravit.

A. Tanto decuit illum minus definitionem reprehendere allatum ab *Euclide* nempe quod *Numerus numerum multiplicare dicitur quando quot sunt in ipso unitates, toties componitur is qui multiplicatur, & factus est aliquis.*

B. Quid est quod hic reprehendit?

A. Quod vox hæc *is qui multiplicatur* posita sit in definitione *Multiplicationis.*

B. Nonne merito?

A. Ita. Sed cum tantillo opere emendari potuit, rectius fecisset, arbitror, si emendata potius usus esset, quam si falsam in locum ejus substituisset.

B. Sed quomodo corrigenda eſt ?

A. Sic. *Numerus numerum multiplicare dicitur quando quot ſunt in illo unitates, toties componitur hic, & aliquis fit.*

B. Recte, & tam parva mutatione emendata eſt, ut ſine ullo Geometriæ damno (& ſi peccatum ſit contra Logicam) potuiſſet retineri.

A. Etiam retinebitur. Reliqua capitis hujus eadem ſunt quæ vulgo traduntur, ſed verboſiùs, adeoque obſcurius ab *Walliſio*. Quod autem ad operationis demonſtrationem attinere videatur, nihil affert; neque vero opus erat ut afferret, cum, ut jam ſæpius dixi, ipſa operatio perfecta, ſit perfecti operis Demonſtratio.

B. Sequitur Caput 19 de Diviſione.

A. Nihil hic video novi præter tritarum jam omnium manibus regularum declarationem longam & frigidam & (ſiquidem id tibi aliquid videbitur) operationis formam aliquoties variatam.

B. Operationis alicujus formam variare non equidem difficile eſſe arbitror iis qui formam ejus unam aliquam jam intelligunt, ſi tamen alio & alio loco ſcribere reſiduam, vel alio atque alio modo diviſorem multiplicare & ſubducere formam operationis novam conſtituere dicendum ſit. Additionem & Subductionem radicum quadraticarum prætermiſſam ab *Walliſio* in hunc locum rejeciſti. Oſtende ergo nunc qua methodo operationes illæ perficiantur commodiſſimè, id eſt ubi fieri poteſt, accuratiſſimè; ubi fieri non poteſt, cum minimo errore.

A. Sed oſtendendum primo eſt quomodo radix quadratica multiplicanda ſit per numerum. Radicem autem per numerum multiplicandi regula hæc eſt. Quadretur tum numerus tum radix, & quadrata inter ſe multiplicentur, eritque facti radix factum quæſitum. Exemplum. Sit R q 4, multiplicanda per 6. Quadratum R q 4 eſt 4. Quadratum a 6 eſt 36. 4 in 36 producit 144, radix 144, nempe 12 eſt id quod fit ex ductu 6 in R q 4, id eſt, in 2. Quod ſic demonſtro. Sint duo quadrata A A = 36, B B = 4 erunt ergo A A, A B, B B, continuè proportionales, nimirum in ratione A ad B. Eſt autem A B id quod fit ex radice A ſive 6 in radicem B ſive 2.

B. Recte hoc. Sed cur non melius eſt dati quadrati radicem primo invenire, & deinde inventum multiplicare per datum numerum.

A. Quia (niſi numeri dati ſint quadrati) inventa radix accurata non erit, ſed error aliquis certe inerit qui poſt major fiet per multiplicationem, quæ multiplicatio per hanc regulam evitatur.

B. Video, hoc exemplo, quod datis duobus quadratis circa diametrum, completi ſuper totam diametrum quadrati utrumvis complementorum, medium eſt proportionale inter quadrata data.

A. Ita eſt.

B.

B. Adde jam radici quadraticæ radicem quadraticam.

A. Regula hæc eſt. Quadrati inter ſe multiplicentur; producti radix inveniatur, dupliceturque; duplicatæ addantur numeri quadrati dati; Radix ſummæ eſt ſumma radicum propoſitarum. Exempli gratia. Radix quadratica numeri 9 ſit addenda radici quadraticæ numeri 25. Quadrati inter ſe multiplicati faciunt 225, Cujus numeri radix quadratica eſt 15, qui duplicati ſunt 30, cui numero ſi ſumma quadratorum addatur nempe 34, fiunt 64; cujus radix 8 æqualis eſt radici numeri 9 una cum radice numeri 25. Demonſtratur autem ſic. Multiplicatæ inter ſe radices faciunt unum ex complementis; & duplicatus facit duo complementa ad duos quadratos 9 & 25 ſuper eandem Diagonalem diſpoſitos; additis ergo ipſis quadratis, fit quadratum a recta æquali lateribus ambobus. Illius ergo radix æqualis eſt ſummæ radicum propoſitarum.

B. Rectè. Multiplica jam numerum Radicum in numerum Radicum.

A. Regula eſt hæc. Ducatur quadratorum unus in alterum; radix producti multiplicetur per factum ex numeris. Exempli cauſa ſint Rq. numeri 9 multiplicandæ in 3 Rq. numeri 4. Quadrati 4 & 9 inter ſe faciunt 36, factus ex numeris 3 & 8 eſt 24; qui multiplicatus in Rq. 36=6 facit 144. Tantundem faciunt 8 Rq 9 id eſt 24 in 3 Rq 4 id eſt in 6. Demonſtratur autem ſic. Radix 9 in radicem 4, eſt radix ejus qui fit ex 9 in 4, per regulam primam ſupra traditam. Quare 8 Rq 9 in 3 Rq 4, eſt id quod fit ex 24 Rq ejus numeri qui fit ex 9 in 4; id eſt quod fit ex 24 in 6, id eſt numeri 144.

B. In numeris quidem quadratis operabimur per hanc regulam accuratiſſimè; etiam in numeris non quadratis minor multo erit error quam ſi radices extractas non veras poſt multiplicaremus. Nam multiplicaremus unà errorem; ſed eadem ne eſt methodus multiplicandi radices cubicas quæ fuit multiplicandi radices quadraticas ?

A. Eadem. Nam illic oſtenſum eſt productum ex radicibus inter ſe radicem eſſe producti ex quadratis inter ſe. Idem autem hic oſtendam de radicibus cubicis, quadrato quadraticis, & cæteris poteſtatibus. Sit enim datus cubus A A A, cujus proinde radix eſt A. Sitque datus numerus B, & per conſequens datus eſt cubus ejus *B B B*. Dico factum ex A in *B* eſſe radicem cubicam numeri facti ex A A A, multiplicati per *B B B*. Factum enim a cubis eſt A B A B A B cujus Rq. eſt A B,

B. Oſtende operationem in numeris, multiplicans Radicem cubicam numeri 64 in numerum 5.

A. Hoc eſt in radicem cubicam numeri 125. Multiplico 64 in 125, & factus eſt 8000; cujus radix cubica eſt 20 factus (ex 5 multiplicatis in radicem cubicam numeri 64, id eſt) ex 5 in 4. Similiter ſi duo numer meri multiplicentur inter se, facti radix quadrato-quadratica æqualis erit facto ex ipsorum radicibus quadrato-quadraticis. Exempli causa sint multiplicati inter se 16 & 81, factus erit 1296 cujus radix quadrato-quadratica est 6 factus ex 2 radice quadrato-quadratica numeri 16 & ex 3 radice quadrato-quadratica numeri 81.

B. Manifesta hæc sunt, sed si plures radices quadraticæ, puta 6 radices numeri 4 ducendæ sint in plures radices, puta in 4 radices numeri 9, quid faciendum est?

A. Regula est hæc, Multiplicentur inter se ipsi numeri quadrati, & producti radix ducatur in factum ex numeris (qui radices indicant) inter se multiplicatis. Productus erit factus ex numeris radicum inter se multiplicatis. Itaque si 9 ducantur in 4 fit 36 cujus radix in 24 facit 144. Tantundem faciunt 6 radices numeri 4 in 4 radices numeri 9.

B. Unde id contingit?

A. Si quadrati numeri ponantur esse A A, B B, multiplicati inter se erunt, A A B B. Et 6 A = 6 √ 4 & 4 B = 4 √ 9, & 6 A in 4 B erunt 24 A B id est, 24 √ A A B B. id est 24 √ 36, id est 144, factus ex 6 A (= 12) in 4 B = 12.

B. Verum quid si numeri dati non sint quadrati?

A. Habemus tamen quæsitum veritati quantum possibile est proximum. Nam 24 √ 36, inveniri possunt per regulam primam supra exhibitam sine radicis non accuratæ multiplicatione, nempe multiplicando 24 in se, & productum in 36. Orietur enim 20736, cujus radix est 144, idem numerus qui prius. Itaque etsi numerus 20736, quadratus non esset nulla tamen esset erroris (qui radicibus numerorum non quadratorum necessario adhæret) multiplicatio. Sed & in radicibus cubicis eadem est regula. Nam si 3 Rc numeri 8 ducendæ sint in 4 Rc numeri 27, multiplico inter se cubos, faciunt 216, cujus radix cubica est 6, qui multiplicans 12, factum ex numeris radicum facit 72, tantundem autem faciunt 3 radices cubicæ numeri 8 (nempe 6) ductæ in 4 radices cubicas numeri 27 (nempe in 12.) Similis quoque est methodus in radicibus quadrato-quadraticis, & radicibus cæterarum potestatum. Nam numeri radicum multiplicati erunt totidem A B, id est totidem radices quadrato-quadrati A A A A, in quadrato-quadratum B B B B.

B. Divide nunc numerum radicum quadraticarum per numerum alium radicum quadraticarum. Verbi gratia, divide 6 Rq numeri 36 per 2 Rq numeri 9.

A. Regula est hæc. Multiplicetur numerus radicum utrobique in ipsam radicem, & productus per productum dividatur. Radix quotientis est quotiens quæsitus. Itaque cum 6 Rq numeri 36 sit radix numeri 216, & 2 Rq numeri 9 radix numeri 36, multiplicatis 216 per 6, nempe per 2 Rq 9, fit 1296, diviso 1296, per 36 quotiens erit 36, cujus radix

radix est 6 $= 6\,\frac{Rq\,36}{2\,R\,9.}$ Ostenditur autem sic. Sit A A = 36. Ergo 6 Rq A A = 6 A. Sit 9 = B B. Ergo 2 Rq B B = 2 B. Et $\frac{6\,A}{2\,B} = 6.$

B. Etiam hoc ostende, quomodo dati numeri radix quadratica dividatur per numeri dati radicem quadraticam.

A. Sit Rq 49 dividenda per Rq 16. Regula est, Dividatur numerus major per minorem; radix quadratica quotientis est quotiens quæsitus. Itaque diviso quadrato 49 per quadratum 16, fit $\frac{49}{16}$, cujus radix est $\frac{7}{4}$ nempe quotiens divisi 49 per 16. Demonstratur autem sic. Sit numerus major A A, minor B B. Radix ergo illius A, hujus B. Et diviso A A, per *B B*, fit quotiens $\frac{A\,A}{B\,B};$ Dantur numeri A A, *B B*; datur ergo quotiens divisi A A per B B, nempe; $\frac{A\,A}{B\,B};$ quare datur etiam $\frac{A.}{B}$ Sic datis 49 & 16 datur quotiens $\frac{49}{16}$ & radix ejus $\frac{7}{4}$.

B. Quomodo autem radix quadratica numeri non quadrati a radice quadratica numeri etiam non quadrati subtrahitur?

A. Si radices illæ sint commensurabiles, per hanc regulam. Dividatur uterque numerus per maximam amborum mensuram communem. Radix autem majoris dividatur in rationem radicis quotientis ad radicem Quotientis. Exempli causa, sit Rq 20 subducenda ex Rq 45, divisis 45 & 20 per communem eorum mensuram maximam 5, Quotientes sunt 9 & 4 & eorum radices 3 & 2. Divide ergo *R*q 45 in rationem 3 ad 2; eritque segmentum minus *R*q 20; ex quo cognoscitur residuum ad *R*q 45.

B. Sed *R*q 45 cum numerus non sit, dividi in rationem 3 ad 2 accuratè non potest. Velim ergo scire cujus numeri radix sit illud residuum.

A. Aliam igitur methodum radices commensurabiles tum subducendi tum addendi, nec quadraticas modo sed etiam Cubicas habebis ex Clave Mathematica *Oughtredi*; *A*dditionis quidem hanc. Dividatur uterque numerus per maximam amborum mensuram communem; radices utriusque Quotientis simul addantur; totius quadratum per eandem communem mensuram multiplicetur; producti radix est radicum numerorum propositorum summa. Exemplum operationis affert hoc. Sit *R*q 147 addenda *R*q 12. Divisis ambobus numeris per maximam communem mensuram 3; fiunt quotientes 49 & 4; quorum radices sunt 7 & 2. Quadratus a 7 † 2 est 81 qui ductus in eandem communem mensuram 3 facit 243, cujus radix quadratica æqualis est radicibus quadraticis utriusque numeri 147 & 12. Subtractionis autem exemplum hoc est. Quadretur (non ut antè summa, sed) differentia radicum 7 & 2, quæ est 5, cujus quadratus est 25, qui

L

qui multiplicatus per eandem maximam communem menſuram 3 facit 75, cujus radix eſt æqualis numero qui relinquitur deducta *R*q 12 ex *R*q 147.

B. Num demonſtrat hoc *Oughtredus*?

A. Minime. Propoſitum enim illi (puto erat Algebram) non omnibus ſcribere, ſed Geometris qui quomodo demonſtrandum eſſet ex ipſa operatione intelligere poſſunt.

B. Demonſtra hoc tu.

A. Quod datum eſt ſumo, radices numerorum 147 & 12 eſſe commenſurabiles. Sunt ergo eædem radices numerorum quadratorum. Ut ergo 147 ad 12, ita eſt quadratus numerus ad quadratum numerum. Dividantur ambo per eorum communem menſuram maximam 3, eruntque quotientes 49 & 4. Eſt ergo ut 147 ad 12 ita quadratus numerus 49 ad quadratum numerum 4, & ut Rq 147, ad Rq 12 ita 7 ad 2. Additis ſimul 7 & 2 fit 9, cujus quadratus eſt 81, qui numerus multiplicatus per communem menſuram maximam 3 faciunt 243, ut ergo 147 ad 49, ita eſt 243 ad 81; & ut 12 ad 4, ita eſt rurſus 243 ad 81, Quare ut 147 † 12 ad 49 † 4, ita eſt 243 ad 81. Et proinde ut Rq 147 † Rq 12, ad Rq 49 † Rq 4, id eſt ad 7 † 2, ita eſt Rq 243 ad Rq 81, id eſt ad 7 † 2. Quare Rq 243 æqualis eſt Rq 147 † Rq 12. Quod erat demonſtrandum. Similis eſt demonſtratio ſubductionis. Eſt enim ut Rq 147 ad Rq 12 ita 7 ad 2. Quare ſi ſubducatur 2 ex 7, erit ut Rq 147 —— Rq 12, ad Rq 12, ita 7—2, (id eſt 5) ad 2. Eſt autem quadratus a 5 = 25, qui multiplicatus per eandem maximam menſuram communem 3 facit 75; eſt ergo ut Rq 147 —— Rq 12, ad 7 —— 2 ita Rq 75 ad 7 —— 2, ſive ad 5, eſt ergo Rq 147 —— Rq 12 = Rq 75. Eadem eſt Methodus etiam in ſubducendis addendiſque radicibus cubicis, & radicibus cæterarum poteſtatum, niſi quod in additione & ſubductione radicum quadraticarum quadratorum qui ex diviſione numerorum per maximam eorum communem menſuram oriuntur, ſumma vel differentia ducitur in communem menſuram; in cæteris verò poteſtatum radicibus, ſumma & differentia poteſtatum propriarum addendæ, & ſubſtrahendæ & per numerorum propoſitorum maximam communem menſuram multiplicandæ ſunt.

B. Sunt hæc quidem liquidò & breviter demonſtrata, ſed fortaſſe etiam demonſtrata ſunt in capite ſequente, ubi multiplicare & dividere docet *Wallifius* algebricè.

A. Operationum harum neque in eo capite, neque in toto hoc opere (etſi ab illo appellatur *Opus Arithmeticum integrum*) ne mentio quidem ulla eſt. Nihil enim aliud iſtic docet, quam multiplicare, & dividere ſymbola (ut cuilibet manifeſtum eſſe poteſt qui caput illud legerit,) & hæc quoque ex *Oughtredo* & *Digghesio*. Itaque caput illud nempe

Cap.

Cap. 20. tranſiliamus. Etiam *Cap.* 21. (in quo agit de multiplicationis, & diviſionis probationibus) poſſumus (cum nihil contineat neque boni, neque mali) ut innocuum quidem ſed inutile, ſine damno præterire. Caput 22 continet multiplicationis & diviſionis exercitium in menſurandis & comparandis rectangulis; in quo nihil quidem reperio quod, ut falſum, redarguendum ſit; omnia verà puerilia, & non neceſſaria, facilia tamen, eademq; verboſiſſimè ut pueris, ſymbolicè, ut *Wallifiis* ſcripta ſunt: ſequitur Caput 23 cui titulus, *Euclidis elementum ſecundum Arithmetice demonſtratum*, id eſt, ut mox ſubjungit, *totum fere Elementum ſecundum*. Nam demonſtrat Theoremata prima tantùm decem. Sed quomodo demonſtrat? Theorema primum per ſymbola ſcribit; & pro omni argumento, *patet* (inquit) *ex calculo.*

B. An pleniorem exigis demonſtrationem quam eſt calculus?

A. Minimè. Sed cum eædem propoſitiones per calculum demonſtratæ extent apud *Clavium*, quorſum attinuit aliorum laborem σφετερίζεσθαι?

B. Fortaſſe ille brevius eas demonſtravit.

A. Tantum abeſt ut demonſtrationes *Wallifii* breviores ſint illis *Clavii*, (quanquam Symbolicè ſcriptæ) ut pluſquam triplo ſint longiores: Et præterea citius intelliget lector quilibet etiam ſymbolicus decem illas demonſtrationes *Clavii*, quam quamlibet unam ex demonſtrationibus *Wallifii*. Denique propoſitiones illæ a quolibet, qui earum intelligit demonſtrationes Geometricas, non minus ad numeros applicari poſſunt quàm a *Clavio* applicatæ ſunt.

B. Pergamus ergo ad *Cap.* 24. *de Geodæſia*. Sed primo, dic mihi quid differt *Geodæſia* a *Geometria*?

A. Nihil, niſi quod quibusdam hominibus mirum in modum placet vocum Græcarum efformatio aliqua vel compoſitio nova, ad oſtentationem peritiæ linguæ Græcæ. Sed diu nunc eſt quod ea vox (ſignificans terræ diviſionem) pro parte artis Agrimenſorum uſurpata eſt. Noſti quam exigua & trita pars ea ſit Geometriæ quâ utuntur Agrimenſores. Docetur autem hoc Capite novi nihil, ſed quomodo triangulorum (& proinde *Polygonorum* rectilineorum) areæ ad numerorum Calculum reduci ſolent.

B. Nonne etiam Circuli & Sectorum menſurationem, & quadraturam Circuli hic docet?

A. Scribitur quidem in margine libri, *Menſuratio circuli & portionum ejus*; & paulo inferius *de Circuli quadratura; & ratio perimitri circularis ad diametrum.* In textu autem negat ſe hæc docere, ſed de illis fuſius dictum eſſe dicit in ſua *Arithmetica Infinitorum.* Dicit præterea *Joſephum Scaligerum, Severinum Longomontanum, & nuperrime Thomam Hobbs, immortales ſibi inde ſingulis laudes deberi ſomniantes, mire hallucinatos eſſe.*

L 2 B.

B. Socios adjungit *Hobbio* non ignobiles.

A. Sed quid habet ipse *Wallisius, de quadratura Circuli* in sua *Arithmetica infinitorum*.

B. Tu, si voles, videbis; nam afferam tibi etiam illum librum (postquam, hunc excusserimus,) excutiendum.

A. Caput 25 est *de quantitatum invicem comparatione quoad Differentiam, & quoad Rationem*, id est, ut vulgo loquimur de rationibus Arithmetica & Geometrica. Dicit autem sciendum esse quantitates non nisi Homogeneas comparandas esse; & hoc quidem rectè. Deinde subjungit *si quis autem contrarium fecerit, puta, datæ lineæ ad datam superficiem, vel Temporis ad Lineam Rationem inquirens, idem erit ac si quæsiverit quantum temporis æquetur Lineæ.*

B. Videtur hic repetere illud quod *Hobbio* ante objecerat, quod quantitatem Temporis cum quantitate Lineæ comparaverit.

A. Prætereo loquutionem illam barbaram, *idem erit*, &c. Sed a te quæro utrum idem sit quærere quam rationem habet quantitas temporis ad quantitatem Lineæ, & quærere quantum temporis æquatur Lineæ.

B. Puto.

A. Quantitas temporis quid est?

B. Nonne ipsum tempus determinatum?

A. Et quantitas Lapidis quid est?

B. Non est respondendum nunc ut prius, nempe esse ipsum Lapidem determinatum.

A. Refugis scilicet absurditatem dicti, *Lapis est quantitas*. Attamen non minus absurde dicitur tempus esse quantitatem.

B. Quid ita? Cum in prædicamento Quantitatis *Tempus* sit, *Lapis* non sit.

A. Quamdiu est, quod tempus sit in illo Prædicamento, & a quo ibi collocatum?

B. Positum ibi est ab *Aristotele*.

A. Si non posuisset non ibi esset, Nihil ergo agis nisi ostendas quare sic collocatum esse oportuit. *Tantum* quidem dicitur esse tam *Corpus naturale* quam *Tempus*; neutrum autem dici potest abstracte *Quantitas*. Omnis enim Quantitas (si accurate loquendum est) aut *Longitudo* est, aut *Superficies*, aut *Solidum*, sive ut quidam loqui solent corpus Mathematicum. *Tempus* autem & *Motus*, & *Vis* cæteræque res de quibus quæri potest quantæ sunt, quantitates habent, quibus quantæ sunt determinatur, aliquas vel aliquam ex illis tribus, nimirum illas ipsas quibus mensurantur. Temporis jam mensura quænam est?

B. Motus.

A. Scio. Sed ipsius motus quænam est mensura.

B.

B. Linea. Nam per Lineas metimur Motus, saltem metiri possumus, & per Motum Tempus.

A. Rectè. Et quod mensuram metitur, metitur etiam Mensuratum. Est ergo Linea mensura Temporis, potest autem Temporis mensura comparari cum Linea, hoc est Linea cum Linea.

B. Imo necesse est ut comparetur, quia alioqui non esset mensura. Video jam quanquam absurdum sit Lineam dicere Tempori æqualem esse, non tamen absurde dici quantitatem Lineæ æqualem esse Temporis quantitati. Assentior ergo tibi, quæri posse Rationem quantitatis Temporis ad quantitatem Lineæ, etsi non ad ipsum Tempus, ut neque ullius quantitatis ad Corpus naturale. Pudet ergo mei, tum etiam *Wallisii*, cui in hac re & nonnullis aliis nimium temere crediderim. Sed non satis intelligo cur potius *quantitatem Lineæ* dicis quam simpliciter Lineam.

A. Quia accuratè loquentes Lineam dicemus esse *Longam*, potiùs quam *Longitudinem*. Est enim Linea id quo longitudines mensuramus, nempe corpus aliquod, ut funis, virga, brachium, pes, vel aliquid simile; & quia dum eo utimur in rebus mensurandis, unam ejus dimensionem nempe longitudinem solam consideramus, ob eam rem obtinuit habere & dici longitudinem.

B. Fuimus sanè ego & *Wallisius* tardiores quam ut hæc ita esse (nisi ab aliis moniti) intelligeremus; cæterum ego aliquanto magis cavi quam ille, ne deridere viderer ea quæ non satis intelligerem, ne postea vera esse apparerent. Non ergo comprobo ea quæ subjungit, nimirum, Quærere quam Rationem habeat quantitas Lineæ, ad quantitatem Temporis *non minus absurdum esse, quam si quæratur quot colores constituunt sonum, & quot soni constituunt gravitatem.*

A. Sed ille se a scommatis abstinere ideo non potuit, quia ex eorum numero est, qui de iis quæ semel conceperint, dubitare non possunt.

B. Quos dicis?

A. Eos dico qui in civitate degentes, civitatisque commodorum participes, & a civili potestate accipientes quod vivunt, summo tamen imperanti civitati imperare, saltem non obedire, postulant.

B. Mitte ista. Perge legere.

A. Ita faciam. Vides interim quantitates Temporis & Lineæ esse Homogeneas; Homogeneæ enim quantitates sunt (ut in superioribus Colloquiis agnovisti) quarum mensuræ ἐφαρμόζουσι. Accedens inde ad distinctionem Rationis Arithmeticæ a Ratione Geometrica, Illam esse dicit *qua comparantur magnitudines secundum differentiam*, & id quidem rectè; *hanc, secundum quam una est alterius quotupla vel quantupla.*

B. Quid est illud quantuplum? Latinum certe non est.

A

A. Ἀπορία λόγων βήξ Proverbium Græcorum quod Latine ſonat, *cui
hæret oratio tuſſit*, verum eſt; ſed & verum eſt eos qui dicendo progredi
aliâs neſciunt, neceſſe aliquando habere nova verba cudere quæ nihil
ſignificant non plus quam tuſſis. Nam cum deberet dicere rationem
Geometricam eſſe tunc cum una quantitas tanta eſt reſpectu alte-
rius, quemadmodum ſuperius dictum eſt, & ignorans naturam rei dixit
eſſe tunc cum una quantitas eſt quantupla alterius.

B. Imo vero non ignorans, ſed nolens videre edoctus ab *Hobbio* (nam
is illum hoc docuerat) voluit ſaltem aliter loqui, ut videretur diſſen-
tire. Infæliciter.

A. Paulo poſt, eadem exemplo illuſtrans, *Secundo* (inquit) quæſito
ſatisfit ubi oſtenditur quotuplum ſit *hoc ad illud* (voluit dicere *hoc il-
lius*) omiſſa voce *quantupla*. Ex quo intelligitur Rationem *diametri*
ad *Latus*, Geometricam non eſſe, cum altera alterius totupla eſſe non
poſſit. Itaque melius aliquanto feciſſet, ſi retinuiſſet *quantuplum*.

B. Quomodo vertitur Anglicè *quantuplum* vel *tantuplum*.

A. Viderint lectores Angli. Sed lego. [*In poſteriori de Ratione ſive
proportione quæritur, differentia interim minime conſiderata.*] Quid?
in comparatione Geometrica 4 ad 2 vel 2 ad 1 nullane habita eſt ratio
differentiæ?

B. Æque ac in Ratione Arithmetica. Nam differentia inter 4 & 2
eſt dimidium Antecedentis, & differentia inter 2 & 1, eſt item dimidi-
um differentiæ inter antecedens & conſequens, Quarum differenti-
arum ſi nulla haberetur conſideratio, nulla conſideraretur omnino
ratio.

A. [*Diviſionis* (inquit) *quotiens oſtendit Rationem dividui ad diviſo-
rem.*] Verum eſt. Sed in ſequentibus, quoties propoſito ſuo expedit,
quotientem ſemper dicit eſſe dividui ad diviſorem Rationem ipſam;
quippe qui abſque eo Regulam Auream demonſtrare non potuiſſet, Si
Pondus (inquit) A *ſit ad Pondus* B *ut Linea α ad Lineam β, non tamen
dici poteſt* (*viciſſim*) *ut pondus* A *ad Lineam α ita pondus B eſſe ad Li-
neam β*,

B. Siquidem per *pondus* intelligat *ponderis quantitatem*, non video
cur non poſſit ita dici. Nam quantitates ponderis & Lineæ exhiberi
poſſunt in duabus Lineis.

A. Conſentanea hæc ſunt iis quæ ubique habet loquens de Natura
Quantitatis; confundit enim *Abſtractum* cum *Concreto*, *quantitatem*
cum *quanto*, tanquam ſignificarent idem. Sed vide quam imperite lo-
quitur in ſequentibus. Noſti Geometras, quando datur area rectan-
guli cum uno coefficentium, latus alterum ſolere invenire per Appli-
cationem areæ ad latus datum; Arithmeticos autem dato numero &
uno numerorum per quorum multiplicationem factus eſt, alterum in-
venire per diviſionem. Itaque propter ſimilitudinem methodi, Divi-
ſio

ſio Arithmeticorum & Applicatio Geometrarum pro eadem re haberi
conſuevit. Exempli cauſa, ſi rectangulum dicatur eſſe 12 intelligitur
continere 12 Rectangula æqualia & toti ſimilia; quod ſi dividatur per
6, intelligitur per 6, ſex ex iſtis rectangulis. Ita ut ſi quæratur quoties
6 rectangula contineantur in 12 rectangulis ejuſdem cum illis magni-
tudinis, reſpondebitur (ſecundum quotientem) 2. Itaque applicatio
Geometrarum vere & proprie dicitur Arithmeticorum diviſio. Quod
autem latus, id eſt linea per applicationem prodeat, cum per diviſio-
nem prodeat numerus rectangulorum, id contigit quia ſimilitudo &
æqualitas rectangulorum facit, ut alterum quidem indicet numerum
rectangulorum ſimilium & æqualium, alterum vero numerum multi-
plicantem. Neque in rectangulis tantum ſed etiam in quibuſlibet Pa-
rallelogrammis idem accidit. Quod cum ille non videret mirè ſe tor-
quet, cruda & indigeſta cogitata ſua explicare cupiens. Itaque divi-
ſionem eſſe negat (niſi καταχρηστικῶς) quotientemque non proprie
dici id quod prodit, neo reſpondere queſtioni *quot* aut *quoties*; cum
tamen manifeſtum ſit, id quod prodit eſſe latus cujus ſegmenta ſunt
numerus ſegmentorum indicans quoties numerus minorum Parallelo-
grammorum contineatur in Parallelogrammo toto. Exempli gratia,
in Parallelogrammo *A B C D*, diviſo *A B* in 6 partes æquales, &
A C in 2 partes æquales *A E*, *E C*, Latus *AC* (nempe quotiens)
eſt 2, indicans ſex parallelogramma contenta in A F, con-
tineri bis in toto parallelogrammo B C. Deinde paulo poſt, *ubi mag-
nitudo* (inquit) *aliqua numero dividitur, non tam diviſio eſt quam mul-
tiplicatio.* Quod falſum eſt; imo vero abſurdum, magnitudinem per
numerum dividi, ut nulla tamen fiat diviſio. Nam ſi quæratur quoties
2 A reperiantur in 1 A reſpondetur accurate $\frac{1}{2}$ ſemel, æque acſi quæren-
ti quoties 12 continentur in 6 reſponderetur $\frac{6}{12}$. At *quæritur* (*inquit
Walliſius*) *quoties numerus quadratorum in Area A B, contineat numerum
Longitudinum in latere A, ut proveniat numerus Longitudinum in
latere B.* Itaque in numero quadratorum, id eſt, in parallelogrammo
continetur numerus longitudinum, id eſt, longitudines aliquot faciunt
ſuperficiem. Quod & abſurdum eſt, & contra ea quæ proxime ante
dixerat, nimirum, *hic non quæri quoties A continetur in plano A B.* Sin
per numeros quadratorum & longitudinum intelligi vult numeros
ſimpliciter, ut ſenſus ſit, numerum aliquem ſimpliciter (id eſt) nulla-
rum rerum numerum contineri in Area parellelogrammi A B, loquitur
aliquanto etiam abſurdius.

B. Veritatem circa differentiam inter Applicationem plani ad li-
neam, & diviſionem numeri per numerum pauci ſunt qui non intelli-
gunt, ſed videntibus quaſi per nubem, utrum accuratiſſime conveniant
inter ſe nec ne, non ſatis conſtat.

A, Imo vero potius id quod conſtat neſcientes eloqui, coguntur a
ſua

sua ipsorum ἀκυρολογία veritati quam enuntiare nesciunt contradicere. Quod proxime sequitur *Rationes omnes* (subaudi Geometricas) *quorumcunque ad invicem quantitatum esse inter se Homogeneas* peracutum est, adeo ut non intelligatur. Ubi definivit *Homogeneum*?

B. Nusquam. Sed definiisti tu Homogeneas quantitates eas esse quarum mensuræ congruere possunt.

A. Sed quænam mensura est qua computantur inter se duæ rationes? Per Lineam minorem metimur majorem; & per superficiem minorem, majorem superficiem; nimirum, unam alteri superponendo. Sed an & rationem majorem superponendo metimur, vel ratio rationi superponi potest?

B. Minime. Sed possunt quantitates ipsæ quarum ratio quæritur una supra aliam poni, & Rationes ipsæ sic comparari; ut fecit *Hobbius*, *Cap*.13. *Art*.6. Libri *de Corpore*, in quo Capite Theoremata *El*. 5 Euclidis omnia, & nonnulla alia non minus pulchra, breviter & perspicue Demonstravit.

A. Si ab illis quæ ibi dicta sunt suam hanc rationum Homogeneitatem derivavit, recte fecit; id nescivit tamen. Præterea quod dicit Lineam & Pondus Heterogenea esse, verum est, potest tamen esse ut eorum quantitates sint Homogeneæ; nam ut Lineæ ad Lineam ratio in duabus lineis; exhibetur sic etiam eorum ponderum ratio in duabus lineis exhiberi potest Ut enim cubus ad cubum ejusdem materiæ duplum, ita est pondus, ad pondus duplum; & ut utrumvis ad suum duplum, ita linea ad lineam duplam, Erit ergo ut quantitas ponderis ad longitudinem lineæ quæ ipsum repræsentat, ita quantitas ponderis dupli ad longitudinem lineæ duplæ ipsum repræsentantis. Sed pergo. [*Si comparetur* (inquit) *quoad rationem quadripondium & bipondium, Ratio est dupla; si Linea quadrupedalis ad pedalem, Ratio est quadrupla; quæ rationes ad invicem comparari possunt, nempe, hæc illius dupla est.*] Bene se habet. Sed quid si pro *quadripondio* & *bipondio* posuisset sex pondo & tripondium; & pro Lineis quadrupedali & pedali lineam 12 pedum & 3 pedum, quomodo argumentum ejus quadrasset? Quomodo (inquam) rationem posteriorem prioris quanta pars esset ostendisset?

B. Sic. Si comparatur quoad rationem sex pondo & tripondium ratio est dupla; si linea 12 pedum comparatur cum linea 2 pedum oritur ratio sextupla Quæ rationes comparari possunt, nempe hæc illius erit tripla.

A. Quid ita? rationem 12 ad 2 triplam esse censes rationis 6 ad 3?

B. Video. Nam ratio 16 ad 2 est tripla rationis 6 ad 3; sed fraudi illi & mihi fuit, quod in exemplo *Wallisiano* tum quantitates, tum rationes altera alterius dupla est; id quod contingit in progressione pe

duplationem sola, aliâs non item. Sed miror cur hic dicit rationem 4 ad 1 duplam esse rationis 2 ad 1, cum ipse in Elencho multis & malis verbis contendat rationem illam dicendam esse non duplam, sed duplicatam.

A. Deinde causam reddens discriminis inter comparationem duarum quantitatum quoad differentiam & comparationem earundem quoad rationem, imperitiam suam ostendit etiam amplius. Nam cum ostendere deberet differentias *quantitatum* excessuum vel residuorum esse Homogeneas, ostendit tantum ipsa *quanta*, nempe excessus & residua, esse Homogenea. Nescit enim distinguere inter *quantum* & *quantitatem*. Secundo, cum dicat *Ubi autem comparatio fit quoad rationem, quæ emerget ratio comparatorum genus non raro deserit, & transit in genus numerosum*, manifestè prodit harum rerum ignorantiam invincibilem.

B. Invincibilem?

A. Talem, inquam, quæ a nullius hominis alterius ignorantia superari potest. *Comparatio* (inquit) *non raro relinquit comparatorum genus*. Concedit ergo quod relinquit comparatorum genus aliquando. Sunt ergo *comparatio* & *comparatum* aliquando Homogenea. Præclarè pro gradu doctorali & officio Professoris Geometriæ.

B. Vide quæso (omissis quæ ille erravit) an ego sensum tuum de hac re satis capiam. Videris enim tu sentire Rationem Rationi, Geometricam Geometricæ, & Rationem Rationi, Arithmeticam Arithmeticæ homogeneam esse.

A. Ita.

B. Et Rationem Geometricam Arithmeticæ Heterogeneam.

A. Etiam.

B. Et in *quantis*, lineam lineæ, superficiem superficiei, & solidum solido Homogenea; sed altera alteris Heterogenea.

A. Nimirum, sic sentiunt omnes?

B. Sed quantitatem (in abstracto) cujuscunque rei quantitati (in abstracto) cujuslibet alterius rei, Homogeneam esse; ideoque linearum, Superficierum, Solidorum, Temporis, Motus, Vis, Ponderis, Roboris, Resistentiæ quantitates esse Homogeneas, etsi ipsæ res sint Heterogeneæ. Item, loquendo de iisdem rebus pluraliter, quantitates plurium linearum, superficierum, solidorum, temporum motuum virium ponderum, resistentiarum esse Homogeneas, tum inter se, tum etiam Numero; Numerum autem non esse quantitatem, sed quantitates vel quanta, vel plura quæcunque. Nonne ita est?

A. Ita profecto arbitror.

B. Et ego; nam clarè & accuratissime quod res est, eloquutus es.

A. Quid autem volunt ista postrema verba *Et transit in genus Numerosum*?

B. Valent illa forte in homine Mathematico, idem quod tuſſis in Oratore.

A. Sed vide id quod ſequitur; primo an ſit verum; ſecundo, an conſentaneum illis quæ aliâs dicere ſolitus eſt. Verba hæc ſunt, *Et quidem cum duplum & dimidium, triplum & triens perinde pro Rationum nominibus habenda ſint, dimidii autem & trientis notæ* $\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ *numeris (fractis) accenſeantur, quidni & dupli, tripli notæ* $\frac{2}{1}\frac{3}{1}$ *vel* 2.3? *Atque hac potiſſimum de cauſa ego totam doctrinam rationum Arithmeticæ potius quam Geometricæ ſpeculationis eſſe autumo.*

B. Neque vera ſunt neque diſſentanea iis quæ ſenſit ſcripſitque pluribus in locis; nec tamen iis quæ in nonnullis aliis locis ſcripſit monitus conſentanea. Plerumque enim, ut nunc, numerum fractum (ſive Quotientem) eandem rem eſſe dicit cum ratione. Sed cum monitus ab *Hobbio* eſſet, numeros fractos, quotienteſque omnes eſſe quantitates abſolutas; rationem autem omnem quantitatem comparativam eſſe, negavit ſe dixiſſe, quotientem eſſe rationem ipſam, ſed rationem eſſe *penes* quotientem. Tractatus ejus de *Arithmetica Infinitorum* totus eo fundamento nititur, quod quotiens ſit ipſa diviſoris ad dividendum ratio, ut quod $\frac{1}{3}$ ſit ratio 1 ad 3.

A. Si ita eſt, neque totus iſte tractatus ullius eſt pretii, neque is qui illum ſcripſit. Scripſerat *Oughtredus* Cap. 6. *Clavis Mathematicæ* ſub initium, quod quotiens diviſoris ad dividendum rationem *indicat*, Verum in Editione Anglica invenio eo loco, quotientem *eſſe* rationem illam ipſam. Forte ergo Liber ille Anglicus ex verſione eſt ipſius *Wallisii.*

B. Neſcio, ſed parum refert; non enim creditur *Oughtredum* ſic veti voluiſſe.

A. Pergens, *Comparationem quæ eſt quoad differentiam, ad quantitatem; at quæ quoad rationem, ad qualitatem referendam eſſe ait.* Nempe illam ad prædicamentum *quantitatis,* hanc ad prædicamentum *Qualitatis.* Sed quare? Quia ab *Euclide* definitur ποιὰ σχέσις. En hic κατηγορηματίαν Profeſſorum Academicorum. Quid autem ſignificat ποιὰ σχέσις?

B. *Habitudinem qualitativam* ut ille nunc vertit. Sed fateor me non intelligere neque quid ſit *Habitudo,* neque quid ſit *Qualitativa.* Dices fortaſſe tu hoc loco tuſſiiſſe etiam *Euclidem.*

A. Sequuntur deinceps duæ Paginæ in quibus interpretatur quid ſint *Progreſſio Geometrica* & *Progreſſio Arithmetica, continua & interrupta,* Ubi non tam deeſt veritas quam abundant verba. *Cap.* 26 Continet ſolutiones quarundum quæſtionum facilium per Progreſſionem Arithmeticam, ſine demonſtrationibus, ut apud vulgus Arithmeticorum Practico. um. *Cap.* 27. eadem & nonnulla alia ejuſdem generis

per

per ſymbola demonſtrat, minus perſpicue, nec brevius quam poſſint demonſtrari oratione plena. Denique capite 28 eadem brevius ſcribit ſed obſcuriſſimè. Caput 29 continet Criticiſmos ſuper vocibus *Ratio, Rationalis,* ῥητὸν, ἄλογον, ἄῤῥητον, ποιὰ σχέσις, *Quantuplum* &c, quorum Criticiſmorum aliquos ſuperiùs abſurdos eſſe oſtendimus. Itaque Caput hoc dimiſiſſem jam, niſi quod præterire non placet, quod dicit, *Euclidem quidem in Elemento decimo rationales appellare Lineas quæ potentia tantum ſunt commenſurabiles. Verum alibi non raro, obtinet rationalia tantum ea dici quæ & σύμμετρα ſunt; ut proinde ſit* ἄλογον *ſive* ἄῤῥητον, *atque* ἀσύμμετρον. Non enim puto aut *Euclidem* uſquam, aut Geometram alium quemcunque ἄῤῥητον & ἀσύμμετρον pro eodem uſurpaſſe. Non ergo illi credendum eſſe niſi Authorem & locum indicaverit. Quis enim qui *El.* 10. legerit neſcit infinitas numero eſſe quantitates, inter ſe commenſurabiles, quæ tamen ſint irrationales; propterea quod τῇ ῥητῇ arbritarie ſumptæ commenſurabiles non ſunt. Pars hujus Capitis reliqua continet partem eorum quæ habet *Clavius* ad finem Elementi quinti de diſtributione rationum in ſuas ſpecies, nimirum *multiplicem, ſubmultiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem* &c. Præterire autem non poſſum verba ejus hæc, Et *quidem ipſæ fractiones nihil aliud ſunt quam rationes.* Nolo diutius neget ſe quotientem dicere diviſoris eſſe ad Dividendum Rationem. Neque hæc, *fractionis itaque Numerator & Denominator perinde ſunt atque rationis antecedens ad conſequens.* Quæ (etſi vera ſunt) verbis illius prioribus contradicunt. Neque hæc, *Sunt enim rationes non minus quam numeri veræ quantitates.* Nam ſi quantitates rationum effari cogeretur, neceſſarium eſſe videret, pro ratione æqualitatis ciphram ponere, id eſt confiteri quod ratio æqualitatis media eſt inter rationem quam habet quantitas ad quantitatem, & rationem quam habet privatio quantitatis ad privationem Quantitatis; & proinde quantitatem rationis quam habet æquale ad æquale eſſe nihil. Sequitur *Cap.* 30. de rationum compoſitione.

B. Differatur ſi vis, in diem craſtinum.

M 2 DIALO-

DIALOGUS QUARTUS.

A. Etiam hodiernus nobis ſermo totus fere erit de *rationibus.* Capite præſente de rationum agit compoſitione, prout definitur ab *Euclide* (El. 6. Def. ult) *Ratio ex rationibus componi dicitur quando rationum quantitates inter ſe multiplicatæ efficiunt aliquam rationem.* In Græco τινὰ λόγον. Sic enim invenio in libro cujuſdam Anonymi edita centeſimo ab hunc anno in quo ſunt definitiones & propoſitiones *Euclidis* omnes Græce ſcriptæ. *Wallifii* liber ut videtur loco hujus definitionis hanc habet *quando rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquas effecerint.* Quæ duæ lectiones ſenſu nihil differunt. Nam ſi duo termini unius rationis multiplicentur in duos terminos alterius rationis (id eſt, Antecedens in Antecedentem, & Conſequens in Conſequentem) orietur ratio ex duabus illis rationibus compoſita; vel quod idem eſt, orientur duæ quantitates quarum ratio æquatur duabus illis rationibus ſimul ſumptis. Itaq;, compoſitio rationum eſt rationum (unius ad alteram) Additio, ut ſupra oſtenſum eſt. Quare compoſitio rationum de qua hic loquitur *Euclides*, eſt ipſiſſima rationum unius ad alteram Additio.

B. Manifeſtiſſime. Additio tamen hæc per multiplicationem perficitur.

A. Verum. At non per multiplicationem rationum, ſed per multiplicationem terminorum, termini autem non ſunt *Rationes* id eſt *Relationes* ſed *Correlata*, quas *Euclides* hic appellat *Rationum quantitates.*

B. Ita eſt.

A. At *Wallifius* hæc non intelligit, ut per proxima ejus verba manifeſte apparebit; ſunt autem hæc, [*Quid per rationum quantitates intelligit Euclides non inter interpretes convenit: num ſcilicet ipſos terminos; num quod ex eorum comparatione provenit.*] Quæ proveniunt inde, nempe, a multiplicatione terminorum in terminos, habent quidem rationem ex propoſitis rationibus compoſitam, termini autem rationum componendarum eſſe non poſſunt.

B. Profecto *Euclidem* hoc loco Profeſſor noſter non intellexit. Neq;

(credo)

(credo) Authorem ullum vidit qui quantitates rationum eo modo interpretatus ſit.

A. Aliâs quoque animadverti eum quæ ſcripſit dubitans an eſſent vera necne, *quibuſdam*, id eſt Authoribus Anonymis, in dividuis vagis attribuere. Sed quid tibi videtur oratio hæc, [*Utrumvis autem dicatur perinde eſt. Puta, ſi rationis* A *ad* B *termini in terminos rationis* α *ad*, β *reſpective, ducantur; nempe* A *in* α, B *in* β, *ut proveniat ratio* A *in* α *ad* B *in* β; *ſive etiam ratio* $\frac{A}{B}$ *ducatur in rationem* $\frac{\alpha}{\beta}$ *ut proveniat* $\frac{A}{B}$ *in* $\frac{\alpha}{\beta}$ *perinde eſt*] Oratio quidem valde ſymbolica eſt, ſed quam non intelligo. Nunquam enim multiplicari aliquid audivi, neque imaginari poſſum, niſi ut fieret vel multiplo major (nempe quando multiplicatio ſit per numerum integrum) vel multiplo minor, (quando multiplicans eſt numerus fractus.) Non itaque intelligo quomodo aliquid multiplicari poſſit niſi per numerum integrum vel fractum. Veniam ergo mihi dabit *Walliſius* ſi non intelligam quomodo ratio A ad B duci poſſit in rationem α ad β Rationem per numerum multiplicari poſſe ſcio, ut quando ratio multiplicata per 2 duplicatur, & per 3 triplicatur, & per $1\frac{1}{2}$ fit ratio ſeſquialtera.

A. In omni multiplicatione fit ut multiplicans ad unitatem, ita productus ad multiplicatum. Itaque quot continet unitates ratio A ad *B*, toties $\frac{A}{B}$ in $\frac{\alpha}{\beta}$ continet rationem α ad β ſanine ſunt qui ſic loquntur? aut Profeſſorem talem ferre æquum eſt Academicos, ſi ad illum expuendum ſatis haberent virium? Paulo poſt cum dixiſſet rationem duplam componi ex ſeſquialtera & ſeſquitertia (quod verum eſt ſi per rationem duplam intelligit rationem dupli ad ſimplum; alioqui falſum. Nam dupla ratio exponi per pauciores quam tres terminos non poteſt; ut nec ratio ſimpla per pauciores quam duos.

Subjungit [*hoc eſt, ut loquuntur muſici, ex Diapente & Diateſſaron componitur Didapſon.*] Verumne hoc?

B. Equidem Artis Muſicæ Imperitus ſum. Scio tamen ex diapente, & diateſſaron componi diapaſon.

A. Sed a tono imo ad quintum quot numerantur toni?

B. Si extremi aſſumantur, quatuor cum ſemitonio.

A. A quinto ad octavum quot?

B. Si itidem extremi numerentur, tres cum ſemitonio. Intercedunt autem inter imum & quintum toni duo & ſemitonium; inter quintum & octavum, tonus & ſemitonium, & ſummus tonus duplo acutior eſt quam imus.

A. Quomodo autem conveniunt hæc cum compoſitione rationis ſeſquialteræ & ſeſquitertiæ ad faciendam rationem duplam? *B.*

B. Neſcio niſi rationum apud Muſicos & Geometras diverſa ſit computatio.

A. Videri vult ſcriptor hic omnium artium peritus eſſe cum ſit omnium quidem artium imperitus, duarum autem, quas profitetur, Theologiæ & Geometriæ imperitiſſimus. Quod habet deinde de rationis a ratione Ablatione (quam hic vocat ἄνης περισσὸς rationis imminutionem) per Diviſionem, reſpondit e contrario iis quæ habentur de rationum (quæ fit per terminorum multiplicationem) compoſitione, nec poterat id non videre.

Sed & aliter ratio a ratione detrahi poteſt, ſine diviſione. Nam ſi ratio 2 ad 3 detrahenda ſit, ex ratione 4 ad 5, & fiat ut 2 ad 3 ita 4 ad aliam 6, erit ratio reſidua ratio 6 ad 5; ut expoſitis numeris 4, 6, 5, videre eſt. Nam ſubducta ratione 4 ad 6 (id eſt 2 ad 3) ex ratione 4 ad 5 relinquitur ratio 6 ad 5.

A. Lego. [*Utrum hæc Rationum compoſitio, additio judicanda ſit, an multiplicatio, haud ſatis videtur apud Arithmeticos (vel etiam Geometricos) conſtare.*] Videtur his verbis reſpicere ad *Clavium* qui ad Prop. 23. El. 6. Contendit *compoſitionem hanc & detractionem non eſſe propriè Additionem & Subſtractionem; quia alias* (inquit idem *Clavius*) *eſſet totum æquale parti, & minus; & major proportio poſſet detrahi ex minore.* Quæ (ut videntur illi) abſurda, pluribus exemplis ex opinione contaria deducit, ad finem El. 9.

B. Neſcientibus rationis majoris ad minus, id eſt quantitatis ad quantitatem naturam diverſam eſſe a ratione minoris ad majus, id eſt, privationis quantitatis ad privationem quantitatis, & mediam inter utramque eſſe rationem æqualium, ſatis abſurdè ſonat, majorem rationem a minore detrahi poſſe, & totam rationem ejuſdem parte eſſe minorem. Sed ſi conſiderare vellent quod qui addit privationi privationem, quantitatem facit minorem; & qui privationem a privatione detrahit, quantitatem facit majorem, facile dici ferrent rationem majorem a minore, & totam a parte poſſe ſubſtrahi.

B. Erravit, ſcio *Walliſius*, ſed cum doctiſſimo *Clavio*.

A. Doctiſſimo quidem Jeſuitarum, & Scriptore omnium ſeculorum diligentiſſimo. *Walliſius* autem non ut ille quæſibundus erravit, ſed errorem illius amplecti ſatis habuit, quomodo quærendum ulterius eſſet ignorans. Attamen obtinuit (etiam contra ſententiam *Clavii*,) ut vocetur *Compoſitio rationis* (propter vim, credo, etiam intus latentis veritatis) *Additio* potius quam *Multiplicatio*. Sed id ægrè fert *Walliſius, quia certum eſt* (inquit) *quantitates invicem multiplicari non addi.* Quaſi diceret, *quia compoſitio rationum fit per multiplicationem terminorum, ergo compoſitio Rationum eſt Multiplicatio Rationum.*

num. Itaque paulo poſt, *deſignandam autem malim* (inquit) *per notam x Multiplicationis quam per † Additionis.* Adeoque quæ ex $\frac{A}{\alpha}$ & $\frac{B}{\beta}$ componitur ratio, ſcribenda eſt $\frac{A}{\alpha} \times \frac{B}{\beta}$, non autem $\frac{A}{\alpha} \dagger \frac{B}{\beta}$.

B. Certe non male ſcribi credo A ad α † B ad β pro compoſitione rationum A ad α & B ad β; quanquam pro multiplicatione fractionum male ſcriberetur $\frac{A}{\alpha} \dagger \frac{B}{\beta}$ & recte $\frac{A}{\alpha} \dagger \frac{B}{\beta}$.

A. Ita ſane, ſi modo per ſymbola ſcribere omnino neceſſarium eſſet. Quod addit, [*Adeoq; tota illa de fractionum multiplicatione & diviſione tradenda doctrina, de rationum continuatione & imminutione pariter intelligendum erit; ſunt enim ipſiſſima eadem res,*] Promiſſio eſt Capitis 45 de fractionum & rationum rationibus ab initio uſque ad finem abſurdiſſimi. Deinde, *non idem* (inquit) *ſonat ratio duplicata, triplicata* &c, *quod ratio tripla, dupla,* &c. Eſt in ſono (fateor) aliquod diſcrimen, ut inter diſſyllaba & quadriſyllaba, ſed tamen idem ſignificant. Nam quicquid duplicatur fit non minus duplum quam duplicatum; & quod ſubduplicatur (ignoſce loquenti non latine) fit non minus dimidium quam ſubduplicatum. Et ut ratio 1 ad 4 eſt duplicata rationis 1 ad 2, ita etiam dupla eſt, nempe ratio defectus duplicata ſive dupla.

B. Memini hæc eadem eodem modo explicata eſſe in Colloquiis ſuperioribus, & vera eſſe ſatis ſentio.

A. Quod autem ratio iterata non dupla dicenda ſit, ſed duplicata, confirmatum putat ab *Euclide*, qui perpetuo utitur hoc ſenſu vocibus διπλασίονα, τριπλασίονα, &c. non δίπλην, τρίπλην, neque διπλάσιον, τριπλάσιον; ſed vim nullam habet; nam utitur διπλασίονι in Prop. ult. El. 9. ad ſignificandum rationem ſimpli ad duplum. Non itaque verum eſt quod ea utitur perpetuo in ſenſu altero. Præterea fieri poteſt ut *Euclides* non ſatis ipſe perſpexerit rationis naturam; imo vero fieri aliter non poteſt, cum definierit rationem per ποιὰ σχέσις.

Capite 31, ubi tractat Progreſſionem Geometricam, Regulam affert generalem, qua terminorum omnium invenitur ſumma, nimirum hanc, [*ſi terminus ultimus per communem rationem multiplicetur (ſive quod tantundem eſt, Progreſſio per unum adhuc gradum continuetur) atque inde auferatur terminus primus, & quod reſtat per numerum unitate minorem quam eſt communis ratio dividatur, prodibit progreſſionis ſumma.*] Quam regulam *deinceps* demonſtraturum ſe eſſe dicit. Id autem quod deinceps legitur demonſtratio non eſt, ſed indicatio quod ita contingit eſſe in progreſſione numerorum ipſius arbitrio ſumptorum. Neq; ſi in progreſſione omni numerorum tuo meove arbitrio ſumptorum idem contingeret,

non tamen demonſtratio eſſet; tum quia cauſa accidentis non apparet, tum etiam quia inductio particularium, niſi numero infinitorum, regulam non facit univerſalem.

B. Verba ejus hæc, *Regulæ demonſtrationem deinceps exponemus,* non ſpectant ad id quod ſequitur, nimirum *ſi in progreſſione adjuncta,* &c, ſed ad id quod habetur Capite 33 ad Numerum 68 qui incipit, *ſi terminus maximus* &c.

A. Ergo vocem illam *deinceps* toties ubique, præſertim in libris Mathematicis, occurrentem Criticus Mathematicus doctor ille non intellexit.

B. Fortaſſe regulam tamen quam hic expoſuit, illic demonſtrabit.

A. Certone?

B. Puto. Verum ſi regulæ demonſtrationem aliquam ejus ipſe habes profer quæſo.

A. Sciendum prius eſt, in omni multiplicatione eſſe ut Numerus productus ad numerum multiplicandum, ita multiplicantem ad unitatem.

B. Scio. Nam opus Multiplicationis aliud non eſt quam numerum invenire qui toties contineat multiplicandum quoties multiplicans continet unitatem.

A. Tenes. Sit ergo numerorum quotlibet continue proportionalium ſeries A. B. C. D. in qua A ſit minimus. Fit ergo B ex multiplicatione A per aliquem numerum integrum vel fractum, ſit multiplicans primo integer quem tu vis.

B. Sit multiplicans 3.

A. Eſt ergo 3 A=*B*, & 3 *B*=C, & 3 C=D; & ut A ad *B*, ita 1 ad 3, ut tu modo ipſe demonſtraſti.

B. Concedo.

A. Sed in proportionalibus ut primum antecedens ad primum conſequens, ita ſumma antecedentium omnium ad ſummam conſequentium omnium.

B. Recte.

A. Et in ſerie propoſita A. B. C. D. omnes antecedentes ſunt A. B. C, & omnes conſequentes B. C. D. Quare ut 1 ad A † *B* † C, ita 3 ad *B* † C † D. Et proinde 3 A † 3 *B* † 3 C=*B* † C † D. Et ſubductis utrinque *B* † C, reſtabit hinc quidem D, illinc autem 3 A † 2 *B* † 2 C. Habemus ergo æquationem unam D=3 A † 2 *B* † 2 C; & ſublato utrinque A, æquationem alteram D−A=2 A † 2 *B* † 2 C. Quare diviſo numero dato D−A per 2, quotiens erit A † *B* † C; cui adjunctus datus D dat ſummam quæſitam.

B. Nihil clarius. Sed ſit jam multiplicans numerus fractus, puta $\frac{3}{2}$,

A. Erit igitur $B = \frac{3}{2} A$; & $C = \frac{3}{2} B$; & $D = \frac{3}{2} C$; & proinde ut A ad B, ita 1 ad $\frac{3}{2}$. Item ut $A + B + C$ ad $B + C + D$, ita 1 ad $\frac{3}{2}$. Quare $B + C + D = \frac{3}{2} A + \frac{3}{2} B + \frac{3}{2} C$. Et ſublatis utrinque $B + C$, fit æquatio hæc $D = \frac{3}{2} A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C$; & rurſus, ſublato utrinque A, fit hæc, $D - A = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C$. Quare diviſo $D - A$ per $\frac{1}{2}$, erit quotiens $A + B + C$. Datur autem D. Cognita ergo eſt ſumma ſimul omnium.

B. Multo magis perſpicua & amæna demonſtratio hæc eſt quam illa Profeſſoris noſtri Algebrica.

A. Quidni? An comparanda eſt *Algebra* cum Methodo Analytica? ſed de demonſtratione *VVallisiana* videbimus inferius.

B. In numeris proportionalibus, terminorum ulteriorum inveſtigatio apud noſtrum ærumnoſa eſt. Sed lege quæ ſequuntur.

A. [*Progreſſionis cujuſvis inchoatæ terminum ultimum a primo ſatis remotum invenire.*]

B. Operatio, inquam, quam docet per notationem exponentium, & iterationem, quam requirit, operis, ita ut niſi palpando progredi non liceat, & ignorantia finis, odioſa res eſt. Oſtende igitur illius rei Methodum certam.

A. Sint continue proportionales A. B. C. D. E, Communis autem multiplicans ſit M. Sunt igitur ipſis A. B. C. D. E. æquales A. M A. M M A. M M M A. M M M M A, (Si modo ſumantur eodem ordine) ſinguli ſingulis. Vides ergo progreſſionem generari ex multiplicatione termini minimi A, primo per multiplicantem communem M; & deinceps, per ipſius multiplicantis poteſtates ordine aſcendentes, nempe, per M M quadratum, M M M, Cubum, M M M M quadrato-quadratum, *&c.*

B. Video.

A. Et eſſe quot termini tot poteſtates aſcendentes, demptis duabus; nam M non eſt poteſtas ſed Radix. Multiplicationes autem tot ſunt quot ſunt (dempto uno) ipſi termini. Jam datis duobus tantum terminis primis datur M, nimirum dividendo B per A. Quæritur autem, verbi gratia, terminus poſt A quartus. Scribe M quater, ut M M M M. Quia ergo datur M, datur quoque M M M M. Datur autem & A. Datur ergo M M M M A terminus quæſitus, nempe quartus incipiendo a *B.* Multiplicationes enim una pauciores ſunt quam termini.

B. Teneo. Et ſiquidem terminus poſtularetur centeſimus, deberet M multiplicari in ſe nonageſies novies, & productus in A, ut haberetur terminus centeſimus.

A. Ita eſt; Sed labor aliquanto minor erit, ubi multi ſunt progreſſionis termini, ſi multiplicatio fiat per poteſtates altiores. Nam ſi multiplicans ſit 3, non eſt neceſſe aſcendenti ad Cubicubum, Multiplicationem incipere a 3; poſſumus enim incipere a Cubo ejus 27, vel ab alia altiore poteſtate cognita.

B. Sed cur tu pro multiplicante ponis M, cum *Wallisius* ponat ubique R.

A. In cauſa certè non eſt quod libeat ab illo diſſentiri, ſed ne alios, (ut ille) inducam in errorem. Ego enim pono M literam *Multiplicantis* initialem, ille R literam initialem *Rationis.* Nam in progreſſione (exempli cauſa) 2. *6.* 18. concedimus ambo communem multiplicantem eſſe 3 ſive R, ſive M appellatur. Ille autem hoc amplius rationem 2 ad *6* eſſe 3. Et propterea quem numerum ego communem multiplicantem voco, appellat ille communem rationem; unde fit ut nonnulli illius ſecuti Authoritatem, rationem putent eſſe numerum, nimirum quotientem; quod eſt erroneum.

B. Imò verò abſurdum.

A. Video hic ſymbola ab illis quæ hactenus uſus eſt diverſiſſima,

B. Non ſunt illa Symbola Algebrica, ſed literæ Arabicæ.

A. Legitne ille Arabica, ut Clericus?

B. Neſcio. Sed a viro doctiſſimo & illius linguæ peritiſſimo accepta libro ſuo viſum eſt illi Arabica hæc inſerere. Nam Progreſſionis Geometricæ *exemplum inquit elegans eſt & vetuſtum & forte omnium primum.* Oſtenditur autem hoc exemplo in quam immanem ſummam per paucas duplicationes excreſcit unitas.

A: Oſtenditur præterea legiſſe illum Edwardi primi *Statutum de menſuris Anglicanis*, ut eo tranſcripto videretur etiam peritus juris. Nam abſque his, quæ ad ſcientiam Arithmeticæ nihil pertinent, Caput hoc 31 vix contineret duas Paginas.

B. Datis terminis primo & ultimo, quomodo invenitur quem quis poſtularet terminus intermedius?

A. Dato quidem numero terminorum facillimè. Divido enim ultimum per primum, & quotiens erit poteſtas aliqua ex aſcendentibus; nempe ſi ultimus fiat a multiplicatione quadrati in terminum primum, erit terminus ultimus tertius; ſi fiat ex cubo in primum, erit ultimus quartus, & ſic deinceps; dato ergo terminorum numero cognoſco quota ſit in aſcendentibus poteſtas illa ex cujus multiplicatione in terminum primum fit ultimus. Diviſo ergo termino ultimo per primum, innoteſcit poteſtas illa cujus Radix propria eſt communis multiplicans. Exempli cauſa, ſi ſit progreſſio data 3. *6.* 12. 24. 48. *96.* & communis multiplicans M. Progreſſio hæc 3. 3 M. 3 M M. 3 M M M. 3 M M M M. 3 M M M M M. Eadem erit quæ eſt data. Datur autem numerus terminorum *6.* Fit ergo *96* ex poteſtate quarta in 3, id eſt, ex Multiplicantis ſurdo-ſolido in 3. Diviſo ergo *96* per 3 habetur multiplicantis ſurdo-ſolidum 32, cujus radix propria nempe 2 eſt communis multiplicans. Quo multiplicante cognito, quilibet terminus intermedius ſtatim invenitur, ut qui ſit ex 3 in 2, vel in 4, vel in 8, vel in 16, &c.

B. Methodus ut quæ procedit ab ipſa, terminorum generatione recta eſt.

A. Capite 32 loquitur de origine & uſu Logarithmorum (ut ex primis ejus verbis manifeſtum eſt) imperitè. Verba hæc ſunt [*eſt autem ea quam ſuperiore capite tradidimus regula (de terminis remotioribus intermediis quaſi per ſaltum inveniendis) maximi quidem momenti Regula; non tamen ob eum quem jam oſtendimus illius uſum, quam ob inſigniora quæ inde defluxerunt commoda. Ex hoc enim fundamento dependet Mirificum illud Logarithmorum Inventum.* Næ ille Nepperi inventoris & Briggii Logarithmorum inventorum excultoris, clariſſimis ingeniis non multum tribuit, qui principium tam facile inventionis aſſignat quam eſt ex datis primis terminis progreſſionis inventio ulteriorum. Præterea quod per eam Regulam inveniri putet Logarithmos terminorum intermediorum falſum eſt. Nam e contrario qui hac utuntur regula non Logarithmos per terminos progreſſionis, ſed terminos progreſſionis inquirunt per Logarithmos datos, nimirum, per poteſtatum aſcendentium indices Arithmetice Proportionales?

B. Unde ergo illi in mentem venire potuit tam inſigne inventum.

A. Obſervaverat ille inter duas quantitates extremas (cum mediæ interponi poſſint tum Geometricæ tum Arithmeticæ numero infinitæ) quanto plures interponuntur, tanto minus Geometricas & Arithmecas inter ſe differre. Inde (nec aliunde) venit ei in mentem, quod valde multis mediis interpoſitis in Ratione Geometrica, totidemque in Ratione Arithmetica, alteræ ab alteris non differunt niſi in notis numericis a prima adeo remotis, ut poſtremæ (retentis prioribus) ſine damno calculi poſſint negligi, & per conſequens, ea quæ per Multiplicationem & Diviſionem ſolebant ſupputari, per Additionem & Subſtractionem ſatis accurate expediri. Quæ deinceps ſcribit *Wallius* de Logarithmorum uſu pauca ſunt & tranſcripta ex initio libri de Logarithmis editi a Briggio.

B. Videamus jam ea quæ continentur in Capite 33 de Progreſſione Geometrica per ſymbola.

A, Toto hoc Capite difficultas præter eam quam faciunt ipſa ſymbola fere nulla eſt. Itaque unius tantum Theorematis demonſtrationem examinabimus, in qua regulam demonſtrare conatur qua vulgò utuntur qui quærunt ſummam Progreſſionis Geometricæ datæ. Ait ergo ad Art. 68, *Si terminus maximus in communem rationem ducatur; & ex producto auferatur terminus minimus, reſiduumque per rationem communem unitate minutam dividatur, quotiens exhibet totius progreſſionis ſummam; hoc eſt* $\frac{UR-A}{R-1}=S$.

B. Ita. Nam U, eſt terminus Ultimus R communis multiplicans *A* terminus minimus.

A.

A. Pergamus. [*Quis* (inquit) *hanc primus invenerit regulam plane ignoro, & quidem utut ea plerique utantur, non memini tamen me illam uſpiam demonſtratam vidiſſe; cum tamen vel maxime demonſtratione indigeat. Nobis ergo hanc libuit demonſtrationem comminiſci.*]

B. Lege demonſtrationem ipſam.

A. [*Ponamus* (inquit) *numerum terminorum* $T = 4$. *Adeoque* $AR^t = AR^4$. *Et dividenda proponatur* $AR^4 - A$ *per* $R - 1$. *Cum igitur ſit* $R)\,AR_4\,(AR^3$.] Non amplius intelligo quid ſibi vult.

B. Dicit, ſi quantitas facta ſit ex multiplicatione *A* in *R*, & producti in 4, Quotientem eſſe factum ex *A* in *R* & producto in 3.

A. Non vult hoc ſed aliquid aliud.

B. Neſcio, ſed aliis in locis ſymbola ſimilia id ſignificant quod dixi. Ut *Pag.* 172. *l.* 23. ubi ſic loquitur, *quoniam F) ABF (AB ſcribo in quotiente AB.* Hoc eſt *ABF* diviſo per *F* Quotiens erit *AB*.

A. Recte quidem illud; falſum ergo hoc, $R)\,AR_4\,(AR_3$. Nam $R)\,AR^4\,(A^4$ verum eſt. Si enim A_4 in R facit AR_4, etiam AR_4 diviſus per R dabit quotientem A_4.

B. Videtur hic lapſus eſſe aliquis vel feſtinantis calami, vel Typographi.

A. Sive lapſus ſit, ſive arcanum aliquod artis ſymbolicæ, vim certe habet omnem demonſtrationis hujus ulteriorem examinationem præcidendi. Tranſiliemus Caput 34. Ut quod nihil aliud eſt præter earundem demonſtrationum breviorem & fere totam ſymbolicè ſcriptam ſynopſin cæcam; Caput 35. eſt Elementi quinti *Euclidis* demonſtratio *A*rithmetica. Quod quidem Elementum ſymbolicè cuilibet & ſuis ſymbolis tranſcribere facile eſt.

B. Quid? Demonſtrationes ejus nihilne aliud ſunt præter tranſcriptiones,

A. Non id dico, ſed cum facile ſit demonſtrationes *Euclidis* una cum definitionibus ejuſdem ſcribere ſymbolicè, facilius eſt Theoremata ejus inferre ex aſſumpta ſine demonſtratione Hypotheſi. Nam cum totum illud Elementum 5 ex definitione dependeat *ejuſdem rationis*, ille neglecta definitione *Euclidis*, loco ejus ſubſtituit hanc. *Æqualitas ſive Identitas Rationis eſt æqualitas ſive identitas quotorum.* Deinde ſubjungit, *Puta ſi ſit* $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$, eſt & $a.\alpha :: b.\beta$. *& contra; quod nobis erit definitionis loco.* Similiter Rationem majorem & minorem definit ſic. *Ubi quotus major eſt, ibi ratio major; ubi minor, minor eſt.*

B. Propoſitio eſt, Definitio non eſt. Quanquam autem Definitio non ſit, ſed propria paſſio, vera tamen erit Demonſtratio.

A. Erit, modo ipſa paſſio fuerit prius demonſtrata.

B. Demonſtrata eſt Capite 33 per propoſitionem *Euclidis* 6. 16; nempe,

nempe, *ſi quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto a mediis, & contra.* Sed hoc *Euclides* in lineis, *VVallisius* in numeris demonſtrat.

A. Quid opus erat? Nam numerorum rationes omnes accommodari poſſun' Lineis, quanquam contra non omnes rationes linearum competant numeris. Sunt enim lineæ multæ inter ſe incommenſurabiles, numeri autem incommenſurabiles eſſe non poſſunt. Sed videamus ipſam Demonſtrationem. Capite 32, quo amandamur nihil eſt quod eo reſpicit.

B. Quære in Cap. 33, quod totum eſt de continuè proportionalibus. Lege prop. 21.

A. [*Continue proportionalium, ſi duorum quorumvis rectangulum per terminum primum dividatur, prodibit terminus, cujus index ſive diſtantia a primo æquatur illorum indicibus ſimul ſumptis.*] Quod verum eſt. Dum autem propoſitionem ejus hanc 21 percurro, intelligo quid ſignificant ſymbola prop. 68. ejuſdem Capitis. Nam $R)\ A\ R^4\ (A\ R^3$ hoc ſignificant, quod diviſo numero qui fit ex A in 4 & ex producto $A\ R$ multiplicato per poteſtatem cujus index eſt 4, quotiens erit factum ex A R in poteſtatem cujus index eſt 3. Quod non negatur. Sed hoccine eſt demonſtrare, nimirum rem ita obſcure enuntiare ut a nemine intelligi poſſit niſi qui non modo illius norit ſymbola ſed etiam methodo naturali idem poteſt demonſtrare?

B. Etſi propoſitionem hanc veram eſſe ex tua perſpexi demonſtratione, neſcio tamen an illius demonſtratio ſit legitima. Lego enim ſymbolica iſta ut pueri *Homerum*, quibus ad ſingula vocabula adeundum eſt Lexicon. Illud autem A R_4 ne in Lexico quidem eſt.

A. Sit quidem vera demonſtratio; at quomodo transferri poteſt ad proportionales quæ nec continuæ ſunt, nec in eadem ſerie continuarum, quales ſunt 2. 4 :: 3. 6. vel 3. 9 :: 4. 12. ubi diſtantiis & indicibus locus non eſt? Nondum ergo propoſitionem illam *Eucl.* 6. 16. demonſtravit.

B. Redeamus ad *Cap.* 35. unde fruſtra digreſſi ſumus.

A. Imo tranſiliamus & illud & proximum illi 36. Credo enim Elementum quintum ex Hypotheſi quam ille aſſumpſit aut recte demonſtratum eſſe, aut ſi vitium aliquod irrepſerit (præter ipſam ſcriptionem ſymbolicam) non illius imperitiæ, ſed Typographo vel tranſcriptori tribuendum eſſe. Eſt autem Cap. 36. ejuſdem Capitis 35 Brachyſtenographia.

A. Caput 37 unicum habet problema hoc, datis tribus proportionalibus invenire quartum; quæ eſt regula aurea. Cujus conſtructio hæc eſt, *tertius multiplicetur per ſecundum, & productus dividatur per primum.* Quæ vera & vulgo recepta eſt. Demonſtrans autem ſumit (quod

Capite

Capite 25 loco definitionis nullo jure habuit) *ubi quotientes ſunt æquales, ibi rationes ſunt eædem, & ubi quotiens major eſt ibi major ratio, ubi minor, minor.*

B. Si ſint duo quotientes æquales, exempli cauſa, numero 4 (qui eſt quotiens diviſi 20 per 5) æqualis ſit 4 (quotiens diviſi 12 per 3) dicit ergo 4 ad 4 eſſe in eadem ratione; quod non intelligo, nam aliquid deeſt. Forte hoc vult, eandem eſſe rationem 20 ad 5, & 12 ad 3; vel $\frac{20}{5} = \frac{12}{3} = 4$.

A. Impropriè quidem loquutus eſt, verum autem eſt quod demonſtrare voluit, nec fecit. Poſtquam enim dixiſſet, cum ſit A. α :: B. β. ſubjungit, *hoc eſt* $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$. Quod nondum conſtat, ſed erat prius demonſtrandum. Argumentatio ex conceſſa Hypotheſi ſatis procedit. Sed demonſtratio non eſt.

B. Regula Aurea quomodo aliter demonſtrari poteſt?

A. Eo modo quo demonſtratur ab *Euclide Elem.* 9. 19. Vel ſic; numeri plani ſunt rectangula ſub rectas quarum partes aliquotæ numerantur. In duobus autem rectangulis æqualibus, ut latus unum primi ad latus unum ſecundi, ita latus reliquum ſecundi ad latus reliquum primi. Quare in numeris planis æqualibus eſt ut factor unus primi ad factorum utrumvis ſecundi, ita coefficiens ſecundi ad coefficientem primi. Si dentur ergo tres numeri A, B, C, & quæratur D, quia factus ex A in D æqualis eſt facto ex B in C, diviſoque $A\ D$ per A proveniet D, etiam diviſo $B\ C$ per A, proveniet idem D; quæ eſt Regulæ Aureæ demonſtratio naturalis. Nullus enim numerus rerum æqualium (quales ſunt partes aliquotæ) multiplicatus per numerum, producit numerum alium quam numerum rerum numeraturum, propterea quod ratio æqualitatis (cum ipſa non ſit quantitas) non addit neque detrahit quantitati rationum quam habent ipſi numeri.

B. Satis clarè. Sed putaram potuiſſe fieri aliquanto brevius.

A. Neſcio, nec credo; melius eſt autem quod probandum ſuſceperis pluribus verbis manifeſte demonſtrare, quam paucioribus non demonſtrare. Sequitur Aureæ Regulæ Praxis, id eſt, exempla operationis vulgaria. Deinde exemplum aliud ubi quæritur *quota hora ſit Athenis quando eſt Oxoniæ octava,* cujus praxis nulla eſſe poteſt, niſi iis qui ſciunt doctrinam Sphæræ & Circulorum quos in illa finxerunt Aſtronomi. Ii vero nulli ſunt qui non regulam hanc ante didicerunt. Non erat ergo Arithmetici hoc docere, cujus eſt omnia docere abſtractè a rebus numeratis, id eſt, univerſaliter. Deinde quod monitum lectorem voluit *ne quando fraudi ſit, quod ea tanquam proportionalia habeantur quæ proportionalia non ſunt,* ad Arithmeticam non pertinet, ſed ad Philoſophiam, ut ex ſuo ipſius exemplo eſt manifeſtum, *Poſito*

(in-

(inquit) *quod pondus gravitate sua motum duobus temporis momentis* 20 *pedes descendat; quæratur quot pedes descensurum sit momentis* 10. *Si fiat multiplicatio numeri tertii per secundum, atque divisio producti per primum, prodibit quartus* 100. *At ille numerus quæsito non satisfacit.*

B. Nonne ergo Regulæ Aureæ definitio tradita initio hujus Capitis falsa est?

A. Minime. Sed numerus qui in una quæstione secundus est, in alia debet fortasse esse tertius. Præterea, quæritur aliquando, datis tribus numeris, quis sit ad tertium in ratione primi ad secundum duplicata vel triplicata, pro ratione rerum numeratarum, ut in hac ipsa quæstione, ubi gravia non percurrunt spatia in eadem ratione, sed in duplicata momentorum temporis; ut a Galileo demonstratum est in Dialogis de motu; id quod *Wallisius* nescit. Qua ratione descendunt gravia, vel fluida e vase effluunt, non est Arithmetici docere, sed Physici.

B. Sed qui obiter Physicum Theorema docet Arithmeticus, an culpandus est?

A. Non. Parergon est si doceat; sin libro Arithmetico inserat, neque demonstrat neque conetur demonstrare (quod fecit ille) ineptum est. Quæ sequitur per tres paginas est præcedentium symbolica scriptio. Deinde ostendit quomodo multiplicari (in Regulæ Aureæ operatione) possint inter se duæ quantitates Heterogeneæ, vel una per alteram dividi possit; puta quomodo pondus in lineam multiplicari, vel per eam dividi possit; dicitque utrumque fieri per reductionem utriusque quantitatis ad numeros; & quidem rectè.

B. Sed nonne fieri potest etiam per reductionem ad lineas, cum ipsi numeri ad lineas reduci possint? Præterea fieri potest ut pondus ponderi sit incommensurabile. Tunc autem reduci ad numeros non possunt, ad lineas possunt.

A. Commodiùs certè reducuntur ad lineas. Sed ille quanquam non satis, non male tamen fecit.

B. At ille *Hobbium*, quia rationem ponderum & linearum mediantibus lineis permutavit acerrime increpat in *Elencho*.

A. Tanto ille nequior. Venimus jam ad Auream Regulam Inversam sive Reciprocam quam docet *Cap.* 38. *Ubi expositis* (inquit) *tribus quantitatibus quæritur quarta reciproce proportionalis.*

Demonstrationem Regulæ hujus deducit ab eo quod in rectangulis æqualibus latera sunt reciprocè proportionalia. Quod quidem rectè fecit, sed necessario. Fateatur ergo hic, quod negavit ante, Arithmeticam a Geometria, non contra, Geometriam ab Arithmetica dependere. Cætera transeo cum sint trita. Sequitur *Cap.* 30. de Aurea Regula

Regula composita, quam primò per duas operationes, deinde per unicam absolvit, sed non demonstrat. Nam ratiocinatio ejus ex eo dependet, quod regula composita ea est, qua datis quinque numeris invenitur sextus, ad quem ita se habeat tertius, ut factus ex compositione rationum primi ad tertium sibi cognominem, & secundi ad quartum sibi quoque cognominem. Ratio enim effectuum componitur ex rationibus causarum singularum unius ad singulas causas alterius ejusdem generis, ut hominum ad homines, & mensium ad menses. Itaque ut exemplo utar quod ipse adfert, *si* 4 *Academici in* 3 *mensibus expendant* 20 *libras; quot libras expendent Academici* 6 *in mensibus* 12. Numeri dati sunt quinque. 4 Acad. 6 Acad 3 menses. 12 menses. 20 Lib. Scribantur ergo $\frac{4}{6}\,\frac{3}{12}$ Ratio jam quæ oritur ex compositione rationum 4 ad 6 & 3 ad 12 est ratio 12 ad 72. Quare ut 12 ad 72 ita est 20 ad quæsitum. Multiplicatis ergo 72 per 20 fit 1440, qui divisus per 12 dat quæsitum 120.

Caput 40 de regula societatis, nihil habet in neutram partem singulare; itaque transiliri potest. In Capite 41, ubi tractat de numeris fractis, noto primo hæc verba, supponit Arithmetica *unitatem, sive unum, numerorum primum esse*, quod est falsum. Supponit hoc *Wallisius*, non supponit Arithmetica; nam unitatem *Euclides* numerum esse negat. Sed quæstio hæc non magis ad Arithmeticorum quam ad vulgi cognitionem pertinet. Et quid de ea sentiendum sit a nobis satis disputatum est supra ad Cap. 4. Secundo, verba hæc, [*Unum aliquod in partes dirimendum vero aliquo numero designari non potest.*] Nam & hoc falsum est; quia tres quartæ partes unius cujuslibet rei non minus verus est numerus quam tres quartæ partes unius octonarii. Et simpliciter, tres partes sunt æquè verus numerus ac tria tota. *Sed pro veris numeris haberi* (inquit) *non solent.* Neque hoc concedo.

B. Sed probat ex eo quod *sub numeri appellatione apud* Euclidem *non censentur.*

A. Quia numerus hominum sub appellatione numeri apud *Euclidem* non censetur, ideone sequitur quod numerus hominum non est numerus? Cur autem numerus hominum magis est numerus, quam numerus partium unius hominis?

B. Nescio, sed perge.

A. Hoc quoque animadversione dignum est. Quod dicit [*ex imperfecta & impossibili radicum extractione oriri numeros surdos* $\sqrt{3}$. $\sqrt{5}$, &c.] Numerus enim nullus est qui non est in progressionis hujus Arithmeticæ serie 1, 2, 3, &c, si continuetur quantum potest.

B. Nihil manifestius. Sed ignosce.

A. Quidni? Condonamus ei non modo hanc sed omnem ejus (quantacunque sit) ignorantiam; sed falsa corrigentibus liceat vera inve-

inveſtigare. Fractionem mox laborioſe definit eſſe *qua unius integri pars indicatur, quæ ad totum illam rationem habet quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem.*

B. Male hoc. Ni enim cognitum prius ſit quid ſit *fractio*, cognoſci non poteſt quid ſit *Numerator*, aut *Denominator fractionis*.

A. Poterat brevius verius & plenius naturam fractionis explicaſſe ſic, *Fractio eſt numerus partium. Propria quidem unius; impropria vero plurium quam unius.*

B. Accuratè.

A. Deinde verba hæc, [*Sed & hinc etiam patet Rationum & Fractionum identitas, ſive Affinitas maxima,*] illorum ſunt qui quid accuratè dicendum ſit ignorant. Vox enim illa *Affinitas* Mathematicorum non eſt. Si ratio & fractio eadem res ſit, quid opus eſt loqui de affinitate? ſi diverſæ, quomodo affines?

B. Quia fractio rationem indicat dividendi ad diviſorem.

A. Horologium indicat horam; quare ergo non eſt Horologii & Horæ vel identitas vel ſaltem maxima affinitas? Non ita ratiocinari ſolent Mathematici, Porro hæc, *Quippe nil aliud ſunt fractiones quam rationum denominatores*, accurata non ſunt, nam fractio denominat numerum certum certarum partium ut $\frac{3}{4}$, id eſt, tres partes quartas, qui numerus eſt abſolutus; ratio autem quantitas eſt non abſoluta ſed comparativa; Non ergo denominat fractio rationem, ſed oſtendit quantitatem numeri abſoluti ut 3, comparati cum numero abſoluto, ut 4.

B. Non video quomodo hæc negari poſſunt. Neque quicquam illum juvat quod deinceps habet, nimirum, *quod Aurea Regula rationum rationes comparat*; & *quod opus ſit Arithmetici non minus rationum quam numerorum rationes contemplari.*

A. Caput 42 eſt de Additione & Subductione Fractionum. Quod de Additione dicit earum Fractionum quarum idem denominator eſt, verum eſt, & quidem demonſtratum eſſet, niſi medium ipſum quo utitur ipſe aliâs negaſſet. [*Numeri* (inquit) 2 & 3 *ſimul additi conſtituunt* 5, *quæcunque res illæ ſint quæ numerantur, puta ſive integra ſive partes. Et qua ratione* 2 & 3 *homines, ſunt* 5 *homines, &c. eadem plane ratione* 2 & 3 *ſemiſſes ſunt* 5 *ſemiſſes.*] Cum ergo 2 & 3 homines ſunt verus numerus; etiam 2 & 3 ſemiſſes, vel etiam 2 & 3 centeſimæ ſunt verus numerus; ſunt autem fractiones; eſt ergo fractio verus numerus. Quod cum ille in præcedentibus ſemper negaverit, propoſitum non demonſtravit. Oſtendit paulo poſt, duarum fractionum diverſos habentium denominatores, ad duas alias quæ denominatorem eundem habent, Reductionem. Exemplo utitur $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ quas fractiones ad eundem denominatorem reduci demonſtrat, nempe ad fractionem hanc $\frac{4}{12} \dagger \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ & quidem (cum aliis pleriſque) rectè. Adeoque mirum eſt quod

quod non viderit fractiones & rationes quantum differunt. Nam ſi ratio $\frac{1}{3}$ (id eſt juxta illum ratio 1 ad 3) addatur rationi $\frac{1}{4}$ (id eſt, ut illi placet) rationi 1 ad 4, ſumma erit ratio $\frac{7}{12}$, id eſt, ratio 7 ad 12, quod manifeſtè falſum eſt. Si enim ratio 1 ad 3 addatur rationi 1 ad 4, ſumma erit ratio 1 ad 12, id eſt ſecundum *Waliſium* $\frac{1}{12}$. Itaque æquales inter ſe erunt $\frac{7}{12}$ & $\frac{1}{12}$. Vel componendo rationes eo modo quem docet *Euclides*, erunt, $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Similiter fractio $\frac{1}{2}$ addita fractioni $\frac{1}{2}$ duplicatur & fit 1. At ratio 1 ad 2 addita rationi 1 ad 2 duplicatur & fit ratio 1 ad 4. Sunt ergo per illum qui fractionem & rationem pro eadem habet re, $\frac{1}{4}$ & 1, inter ſe æquales, Quod vides quam ſit abſurdum. Sed abſurda quæ in ipſis numeris ſatis patent, deſcripta ſymbolis, ſymbolorum imperitos (quæ eſt utilitas ſymbolorum) facile fallunt. Neque ſi non fallerent, quicquam valerent ſymbola niſi ad obſcuritatem (alioqui) clariſſimis inducendam: ſequuntur *Cap.* 43. de fractionum Multiplicatione & Diviſione, & Caput 44 de fractionum reductionibus; in quibus ut nihil falſum, ita nihil novum reperimus, neque in demonſtratis neque in demonſtrationibus. Caput ultimum Epilogus eſt quo præcedens opus Arithmeticum ſe dicit abſolviſſe. Doctrinam enim de rationum rationibus traditam eſſe ait in Doctrina Fractionum; quod quam rectè factum ſit audiſti modo. Et ſiquidem ipſe huic Doctrinæ Theoremata ulla ſuperſtruxiſſet, abſurda ea eſſe intellexiſſet ipſe.

B. Non puto. Nam hæc Doctrina fundamentum eſt totius fere tractatus illius quem inſcripſit *Arithmeticam Infinitorum*; quem tractatum una cum tractatibus de *Conicis ſectionibus*, & de *Angulo Contactus* mecum attuli ut examines. Nam illos examinari cupio.

A. Examinabo. Sed ad *opus Integrum Arithmeticum* deſunt adhuc *Regulæ Alligationis* & *falſæ poſitionis, quarum altera* (inquit) *tum aliis de cauſis, tum quod illa non adeo frequentis uſus ſit, altera ſine magno diſpendio poſt introductam Arithmeticam ſpecioſam careri poſſit.* Quod utrumque falſum eſt. Nam & regulæ alligationis apud Mercatores uſus eſt ſatis frequens; & regula falſæ poſitionis cum dependeat ab hoc Theoremate, *Ut unum falſum ſuppoſitum, eſt ad errorem a ſe natum, ita alterum falſum ſuppoſitum, eſt ad errorem itidem a ſe natum, demonſtrari poteſt ſine Algebra.* Demonſtratio longiuſcula eſt. Sed legere eam poteris in fine libri quinti *Bartholomæi* Pitiſci de Triangulis.

B. Legam.

A. Sed deeſt etiam ad *opus Arithmeticum integrum*, methodus inveniendi radicem cujusque poteſtatis datæ. Item ars Analytica, niſi illa Arithmeticæ pars vel regula aliqua non ſit, quæ an rectè prætermiſit, item an ea quæ tradidit rectè tradidit tuum eſt conſiderare.

B. Reſtat adhuc percurrendus Tractatus Elenchticus contra *Meybomium de proportionibus*, una cum dedicatione. Dedicatio paginas habet 50; opus dedicatum 62.

A.

A. Scio. Sed non eſt illa tam dedicatio quam laborantis lapſum ſuum in Conicis corrigere miſerabilis labor & perplexitas.

B. Scripſerat *Prop. Sect. Con.* 47. *in paraboloide cubicali diametros eſſe ſibi invicem Parallelas*; Quod Robervallus illi falſum eſſe indicavit. Lege ergo ut ſciamus ſi quid afferat nunc quod ſit rectius.

A. Non eſt tanti tota Geometria, ſunt enim paginæ ſequentes duodecim quibus quæritur Æquationis neſcio cujus radix *q* adeo ſtigmoſa ſymboliſque ſcribillata, ut nulla humana patientia examinari poſſint. Illas igitur abhominans prætereo; præſertim cum Diametrum Paraboloidis cubici ne ſic quidem inventam eſſe dicat. Sed æquatio illa cujus Radix eſt *q* (*q* autem quid ſit neſcio) illum vexaverat; itaque homo vindictæ amans ulciſci parat. *Nempe* (inquit) *vexanda adhuc eſt æquatio illa quæ nos vexavit hactenus, ut tandem quid certi prodat.* Aſſimulanſque Proteo Æquationem, ea occaſione uſus, verſus ex Homer. Odys. pluſquam duodecem inſeruit. Deinceps autem reſumptam eandem æquationem vexat fruſtra, nec quidquam adhuc certi prodit *Proteus*.

B. Tranſeamus ergo ad ea quæ habet contra *Meybomium*.

A. Prætereo illa quæ ex Meybomio affert proprium inventum extollente (nam & *Wallisius* non minus glorioſe, & multo magis contumelioſè ſcribit quam Meybomius) & illud quod non ſatis diſtinguat Meybomius inter τὸ ἀπὸ & τὸ ὑπὸ, quia propero ad ea quæ ſcribit de Natura Rationum. Primum igitur quod reprehendit *Wallisius* eſt quod *Euclidis* illud (in Definitione Rationis) ποιὰ σχέσις vertit per *certa quædam relatio*, propterea quod ποιὸν *qualitatem reſpicit*. Si quid peccavit hoc loco Meybomius, peccatum, eſt quod illud quod *Euclides* inſignificanter dixerat id voluit dicere accuratius. Verteret *Wallisius habitudinem qualitativam*, quanquam *qualitativa* vox latina non ſit, neque intelligibilis. Habitudo autem in qualitatibus nihil aliud eſt quam habitus, id eſt facilitas agendi conſuetudine acquiſita. Hoc inquam ita eſt Latine. Ergo ſecundum *Wallisium* ratio eſt *duarum magnitudinum Homogenearum ea quæ ſecundum quantitatem eſt, facilitas agendi conſuetudine acquiſita.* Qua definitione quid poteſt eſſe magis ridiculum? non reſpexit *Euclides* ad prædicamentum qualitatis, in voce ποιὰ, ſed ad vocem in enuntianda rationum ſimilitudine vulgo uſitatam οὕτως ἔχει (ut in præcedentibus notavimus) atque inde definit rationem per *aliqualem habitum*, ſeu (quod hoc loco idem eſt) per habitum quendam (ſubaudi) neſcio quem; rectius ergo Meybomius rationem definivit quam aut *Wallisius* aut ipſe *Euclides*. Quid enim ratio aliud eſt quam magnitudo unius quantitatis quatenus ad aliam comparatur?

B. Nihil.

A.

A. Sed vide *Wallisii* ſuper hæc ſcholiaſtæ verba Latine ab ipſo verſa, ſubtilitatem, Verba ſunt hæc. *Eſt autem alia quæ dicitur relatio ſecundum exceſſum & defectum.*

B. Quid? Aliane ratio an alia Relatio?

A. Ἄλλη σχέσις id eſt *alia habitudo.*

B. Cur ergo non vertit per *alia habitudo*, ſed per *alia relatio*?

A. Quia ratio quæ hic innuitur ea eſt quam vulgo vocant rationem Arithmeticam, quam *Wallius* negat eſſe rationem. Itaque homo ſubtilis ſententiæ ſuæ convenienter locum vertens, maluit *Relationem* dicere quam *Habitudinem*, quæ vox eſt in definitione rationis. Deinde paulo infra præviſo quod non inepte quærere quis poſſet *an inſit in ratione qualitas aliqua*; reſpondet, *ut figurarum magnitudo ad quantitatem ſpectat, ita figurarum ſpecies ſpectat ad qualitatem.* Quaſi aliud in Figuris compararent Geometræ præter quantitates; aut eſſet aliqua ratio magnitudinum quæ eſſet qualitas. Illæ ipſæ ratio & inclinatio propter quas figuram qualitatibus accenſeri poſcunt, ambæ ſunt quantitates, nec ut *quales*, ſed ut quantæ conſiderantur a Mathematicis. Quod Meybomius *quantum* a *quoto* non diſtinguat, ab *Wallisio* recte reprehenditur. Deinde quod *Meybomium* reprehendit, quia in locis aliquot veterum ubi emendatio debebat fieri per διπλασίονα, emendat per διπλάσιον merito fecit. Sed quod Meybomius idem ſignificare cenſuerat διπλασίων & διπλάσιος recte cenſuit, *VVallisius* autem id negando, imperitum ſe oſtendit Linguæ Grecæ, etiam ejus qua utuntur Geometræ, ut in verbis ab ipſo recitatis manifeſtum eſt, οὐ λέγει ὅτι δύο λόγοι τοῦ ἑνὸς διπλάσιοί εἰσι, καὶ τοῦτο μὲν γὰρ, ἀλλὰ ὅτι ὁ λόγος ὁ ἐκ τῶν δύο διπλασίων ἐστί; *id eſt non dicit duas Rationes unius eſſe duplas, Quod tamen eſt verum, ſed Rationem ex duabus compoſitam eſſe duplicatam.*

B. Non capio. Vellem profeſſor noſter oſtendiſſet quare duæ rationes æquales compoſitæ non faciunt rationem unius duplam, & quare duplum ſimpli non ſit ejuſdem ſimpli duplicatum.

A. Sed harum vocum alium ſenſum eſſe dicit apud Mathematicos.

B. Credo.

A. Et ego, etſi non ſemper, tamen ſæpiſſimè ita eſſe. Id quod ex eo contigit quod (ut dixi ante) non auſi ſunt Rationem minoris ad mediam duplam eſſe dicere Rationis ejuſdem minoris ad maximam. Quæ tamen magnitudine dupla eſt, quamquam numero Rationum dimidia; ut ratio 1 ad 2 dupla eſt Rationis 1 ad 4 quantitate, etſi contra Ratio 1 ad 4 dupla ſit, ſi ſpectes rationum numerum. Id quod ſæpe alias dixi, nimirum, in Rationibus minoris

ad

ad majorem, quæ ſunt Rationes Defectus, multiplicatio Rationum quantitatem Rationis minuit, Diviſio auget. Deinde, quod *Meybomius* dicit, *Si rationum magnitudo ſit exploranda, ille major eſt cujus termini longius inter ſe diſtant*, falſum eſt; nam 1 ad 2 majorem habet rationem quam 1 ad 4 cum tamen termini 1 & 4 longius inter ſe diſtent quam 1 & 2. Quod etiam vidit *VVallisius*. Rurſus Meybomius reprehendit Definitionem *Eucl. Elem.* 5. 6. ut falſum; non rectè; poterat tamen ut non definitionem; nam poteſt demonſtrari.

B. Et demonſtravit *Hobbius*.

A. Vidiſti jam quam ſunt naturæ Rationum de qua litigant ambo ignari.

B. Reliqua ergo ne examines. Attuli autem mecum alterum illum librum ejus de *Angulo Contactus*, de *Sectionibus Conicis*, & de *Arithmetica Infinitorum*, ut cum perlegeris excutiamus ſicut hunc.

A. Libet autem antequam diſcedas videre utrum rectè reprehenderit *Merſennum*. *Merſennus* in Cogitatis Phyſico-Mathematicis, *Proportio* (inquit) *æqualitatis, nihili ſimilitudinem refert. Proportio majoris inæqualitatis attollitur ſupra nihilum. Proportio minoris inæqualitatis deprimitur infra nihilum.* Contra hæc ea quæ affert *VVallisius* continentur omnia his verbis. *Qui ſimplum dicit, non ille rem nullies apponi intelligit, ſed ſemel. Et qui ſubduplum poni dicit, non aliquid auferri dicit, ſed ſaltem ſemiſſem poni.* Quæ ſatis illos quidem redarguerent qui ſimplum, vel ſemiſſem, vel trientem nihil eſſe dicerent vel quantitatem habere nullam, ſed contra *Merſennum* qui nihil horum dicit, ſed ſemiſſem, trientem &c, aliquid eſſe & quantitatem poſitivam eſſe concedit, nihil faciunt. Nam illius verbis, non ſemiſſem neque trientem &c, aliquid eſſe negatur, ſed tantum ſemiſſis ſive trientis &c, ad integram rationem quantitatem habere, id negatur. In legendis ergo Mathematicis non nimis eſt acutus.

B. Sed noſti juxta ſententiam *Wallisii*, ſemiſſem, & ſemiſſis ad totum rationem, eandem eſſe rem.

A. Scio. Vidimus jam in hac parte operis Mathematici, Profeſſoris veſtri quot ſunt errores, ſcilicet plures quam cenſor ullus quantumvis ſeverus in omnibus ſcriptis omnium Mathematicorum editis invenire poteſt.

B. Id quidem neſcio. Verum ſi de omnibus ſimul doctrinæ partibus judicium facies, non mediocriter doctum eſſe exiſtimabis. Theologus enim eſt, & Logicus, & Phyſicus, & Metaphyſicus, & Politicus, & Ethicus, & Peritus Juris Romani & Anglicani. Præterea linguas novit

novit Hebræam, Arabicam, Teutonicam, Gallicam, Italicam, Armoricam (quarum ſpecimina & criticiſmos vidiſti in hoc libro) & præterea Symbolicam, quæ, ut lingua quædam univerſalis eſt inſtar omnium.

A. Vidimus quidem videri velle hæc noſſe, neque quicquam aliud præter errores & nugas noſſe.

B. Liber hic alter quem examinaturi ſumus videbitur tibi fortaſſe melior. Vale.

DIALO-

DIALOGUS QUINTUS.

A. Bene advenis, ſed te expectabam heri.

B. Venire non potui. Tu vero tanto plus habuiſti otii librum quem tecum reliqui perlegendi.

A. Perlegi, niſi quod tractatus de *Sectionibus Connicis* Capita aliquot quæ ſymbolis nimium impedita erant tranſilui; & tractatus de *Arithmetica Infinitorum*, cum Capita prima & reliquorum omnium fundamenta falſa eſſe inveniſſem, cætera legi quidem ſed examinare nolui. Capite primo de Angulo contactus occaſio declaratur controverſiæ de natura ejus inter Clavium & Peletarium, nempe *Pr.16.Ele.3.* Euclidis, una cum demonſtratione ejuſdem. Propoſitio quidem Græcè & Latinè (Græcè in eorum forte gratiam qui Latine neſciunt) Demonſtratio Latine tantum repetitur. In ſecundo controverſiam illam oſtēdit diremptam ab Euclide non eſſe. Nec mirum, Euclides enim de futura ſuper verbis ejus tanto poſt tempore inter Peletarium & Clavium controverſia ne ſomniavit quidem. Capite tertio controverſiam intimius (ut ille parum latinè loquitur) aggreditur; Anguli plani definitionem afferens hanc, *Angulus* (inquit) *planus eſt mutua* κλίσις, *ſeu inclinatio duarum linearum in plano ſeſe tangentium & non in directum poſitarum.*

B. Definitio quidem Euclidis eſt, ſed Anguli plani natura ubi explicatur.

A. In ipſa definitione.

B. At non agnoſco; nam repugnat iis quæ idem ſcripſit Euclides *Def.* 5. *Elem.* 11. Ibi enim definit *rectæ lineæ ad planum inclinationem itēm plani ad planum inclinationem eſſe Angulum acutum.* Cum ergo omnis inclinatio ad planum, ſit inclinatio ad lineam in plano, erit (per hanc definitionem) omnis Angulus Acutus.

A. Sed non videtur vox *Inclinatio* eodem ſenſu accipienda eſſe hic atque in *Elem.* 11. Scias ergo nonnullos eſſe qui etſi a poſitis Principiis nunquam non rectè Ratiocinentur, ipſa tamen Principia non ſatis fæliciter ſemper ponunt. Oportuit prius definitum eſſe quid ſit Inclinatio quam per *Inclinationem* definiiſſet Angulum planum. Quod cum non fecerit in cauſa fuit quod *Walliſius* fruſtra ſe torſerit in vocibus κλίσις & ἀκλισία. Sapit enim definitio Euclidea plus quam ſatis de vulgi imaginatione Anguli, cum dicant hoc vel illud *non factum eſſe in Angulo*. Sic quoque accipit *Clavius*, cum contra *Peletarium* diſputans, Angulum rectum majorem eſſe dicit quam eſt Angulus ſemicirculi, ut totum quam pars; deceptus eo quod ſuperficies aliqua intercipi videtur inter Arcum & Tangentem. Itaque naturam Anguli vulgi more, in arcta quadam ſuperficie conſiſtere arbitrabatur. Quod eſt falſum.

B. Imo vero adeo abſurdum, ut nemo illud unquam apertè dicere auſus ſit; quanquam inhærente illa falſa imaginatione id dixerint ex quo inferri poſſit.

A. Audiamus *VValliſium*. [*Et quidem ipſæ lineæ concurrentes quamvis totæ forſan inclinentur ad invicem, Angulum tamen non alibi quam in ipſo puncto concurſus formant.*] Nonne hinc ſequitur ipſa puncta formare Angulum?

B. Planè. Et ſiquidem punctum ſit (ut vult *VValliſius*) nihil, duo nihila formabunt Angulum.

A. Videntur mihi duæ lineæ etiamſi non concurrant, ſi tamen eadem regula qua generantur productæ concurſuræ ſint, Angulum efficere.

B. Hoc quomodo ſit poſſibile vix intelligam, niſi ſciero quis ſit quem tu appellas Angulum.

A. *Angulum ſimpliciter* (excluſo Angulo Contactus) *appello lineæ quæ Circulum deſcribit converſionis totius portionem. Anguli autem quantitatem, quantitatem arcus quolibet tempore deſcripti.* Itaque qui dicunt Angulum duabus rectis e centro contineri, non ſuperficiem, ſed arcum contineri intelligunt, vel intelligere debent.

B. Ita quidem cenſeo, nec *Walliſius* aliter ſentire poteſt, quicquid tuendæ exiſtimationis cauſa dixerit in contrarium.

A. Itaque Angulum contactus Angulum ſimpliciter dictum non eſſe ex eo probandum erat quod recta circulum tangens nullum abſcindit arcum, *VValliſius* autem hoc partim ex Pelitario, partim ipſe, ex eo probare vult, Capite 4, quod lineæ illæ non ſunt una ad alteram inclinatæ, quamquam quid ſit Inclinatio adhuc neſciatur. Inclinationem autem in Angulo contactus nullam eſſe, ſatis quidem, ſed operationibus a motu circulari deductis tandem demonſtrat. Ex quo nihil aliud efficitur præterquam quod Angulus contactus non ſit Angulo ſimpliciter dicto Homogeneus. Quod quidem verum eſt, ut tamen verum quoque ſit quod Angulus Contactus ſit verus Angulus, idemque Quantus. Capite 5, idem probat Pelitarius ex *prop.* 1. *Elem.* 10. Sed

angulum omnino non eſſe aut nullam habere quantitatem non probat. Cap. 6. reſpondetur Argumenta ad Clavii. Ego (dicit *Clavius*) *Angulos illos ejuſdem eſſe generis negavi hac ſolum de cauſa, quod Angulus contactus quantumvis multiplicatus Angulum acutum rectilineum ſuperare nequeat.* Quod quidem argumentum firmum eſſet, ſi modo Angulus Contactus eſſet Angulo rectilineo Homogeneus. Eſt ergo Homogeneus aut nullus. Nullum eſſe reſpondet *VValliſius*. Quorſum igitur dicitur *Angulus* contactus, potius quam *punctum* contactus? Sed neque ille nullum eſſe demonſtravit, ſed tantum nullum rectilineum. Quod autem *Angulus* contactus Angulus ſit, & quantus, verum Heterogeneus, poſt demonſtrabitur. Rurſus *Clavius*, *ut Angulus planus efficiatur, ſufficit* (inquit) *duas lineas in plano ad invicem inclinari, non autem requiri ut ſe mutuo ſecent*, Quod *VValliſius* non negat, inclinari negat. Quid autem eſt inclinatio ſi duæ lineæ tunc non inclinantur ad ſe invicem, cum a diverſis regionibus utræque concurrunt ad idem punctum? At *Inclinatio* in definitione Anguli non ſumitur ut in Elemento 11, pro Angulo rectilineo acuto, ita ut Angulus præter acutum nullus ſit.

B. Quin arcus & tangens ad ſe inclinentur dubitari non debet. Non ergo ſolvit argumentum *Clavii*.

A. Atqui hæc ſunt præcipue quæ diſputantur Cap. 6. ubi neuter ob ignorationem naturæ Angulorum veritatem conſtanter tenet, ſed modo hic, modo ille incidit in abſurda. Capite 7. probare conatur *Walliſius Anguli* ſimpliciter & *Anguli* contactus ὁμογενείαν. [*Primo* (inquit) *quæ mutuo poſſunt vel addi vel auferri ea non ſunt heterogenea.* Conceditur. *At Angulus contactus* (*ſiquidem ſit Angulus*) *& recto auferri poteſt ut maneat Angulus ſemicirculi internus, & recto adjungi poteſt ut fiat Angulus ſemicirculi externus.*] Percepiſtin' hujus argumenti vim?

B. Ita Si, inquit, ſuperficiem illam quæ ſe ingerit inter tangentem & arcum auferas, remanebit Angulus quem efficiunt diameter & arcus. Quod per ſe manifeſtum eſt, quia aufertur pars a toto.

A. Ergo per *VValliſium* uterque Angulus tam ſemicirculi quam contactus eſt ſuperficies.

B. Id quidem quanquam ſit abſurdum manifeſtè ſequitur.

A. [*Secundo, duæ* (inquit) *quantitates quarum altera eſt major, altera minor ſunt Homogeneæ.* Conceditur. *Sed Angulus contactus* (*ſiquidem ſit Angulus*) *& Angulus quivis rectilineus ejuſmodi ſunt quantitates*;] id eſt, quarum altera altera poteſt eſſe major vel minor. Negatur.

B. Sed probat ex *prop.* 16. *Eucl. Elem.* 3.

A. Nego hoc quoque. Nam per illam propoſitionem probatur hoc ſolum, intercedere inter tangentem & arcum ſuperficiem aliquam, non autem angulum aliquem.

B. Tertio, [*Angulus* (inquit) *Semicirculi ad angulum rectum rectilineum certam habet & determinatam rationem.*]

A. Conceditur.

B. *Habebit ergo rationem ad reliquum*, id eſt, ad angulum contactus.

A. Negatur. Non eſt enim angulus contactus pars reliqua anguli recti rectilinei, neque dempto angulo ſemicirculi ex angulo recto rectilineo relinquitur angulus contactus. Verum autem eſt dempta ſuperficie intercedente inter diametrum & arcum, quod relinquitur ſuperficies quæ intercedit inter arcum & tangentem; quam ſuperficiem putavit *VVallisius* eſſe angulum. Caput 8. Teſtimonium habet *D. Hen. Savilii.* Is vero Quadratum & Circulum Homogenea eſſe oſtendit; de angulo contactus, eo loco, ne verbum quidem. Sed paulò inferius de hac re dubitaſſe eum fatetur ipſe *VVallisius.* Nec ſi aliter ſenſiſſet, ullius apud Mathematicos qui omnia rationibus, Authoritatibus nihil penſitant, momenti eſſet. Capite 9. Continetur primo Argumentum Peletarii deductum ex gratis aſſumpto Lemmate, *Angulos ſemicirculorum*, (id eſt quos faciunt diametri cum ſemiperimetris) *eſſe æquales.* Quod veriſſimum quidem eſt, ſed omnino idem quod probandum erat. Inde autem demonſtrare, quod angulus contactus non habet quantitatem, impoſſibile eſt. Sequitur quidem inde angulum contactus nullam partem eſſe anguli qui continetur a Diametro & Circumferentia, non autem quod non habet ſuam ſibi quantitatem; nec quod angulus contactus unus altero non poſſit eſſe vel major, vel minor, vel æqualis. Ea autem quæ per Lemma ſuum tria enuntiantur, non ſunt de angulo contactus, ſed de ipſo contactu; quaſi eſſent qui ipſum contactum angulum eſſe dicerent.

B. Sed per contactum intelligi vult contactus angulum.

A. Credo. Sed quod non loquutus ſit accuratè in cauſa erat quod naturam anguli non perſpexerit. Verum lemma illud Peletarii Cap. 10. demonſtrare fruſtra conatur *VVallisius.* Nam etſi veriſſimum ſit, tamen niſi ex definitione anguli ſimpliciter dicti, ſive rectilinei, demonſtrari non poteſt.

B. Quomodo autem lemma illud demonſtrabis tu?

A. Quantitas anguli rectilinei (per definitionem meam) eſt quantitas quam habet arcus interceptus inter duos radios comparata ad quantitatem totius perimetri. Sed angulus factus inter Diametrum & tangentem nullum intercipit arcum. Eſt ergo quantitas anguli contactus nulla pars quantitatis anguli rectilinei. Quare arcus ſemicirculi ſolus abſque angulo contactus rectus eſt.

B. Si angulus contactus nulla pars ſit ejus qui efficitur a Tangente & Diametro, quare dicitur angulus? & quomodo dici poteſt quantus?

A.

A. Dicitur angulus, quia formatur a duabus lineis in communi puncto concurrentibus. Quantus dicitur propterea quod unius anguli contactus quantitas, poteſt eſſe vel major vel minor quam quantitas alterius. In quinque paginis quæ faciunt Cap. 10. ad probandum quod angulus ſemicirculi eſt rectus, affert ſex demonſtrationes, quarum ne una quidem ſatis firma eſt; ideoque Caput undecimum totum occupat objectio contra Cap. 10. & ad objectionem reſponſio. Quod non fuiſſet neceſſarium, ſi fuiſſent legitimæ demonſtrationes ejus. Elige quamlibet & quam putas firmiſſimam.

B. Eligo quartam, ubi cum angulum conſtituiſſet in ſemicirculo rectum *A B C*, ſupponit *A B* ſuper terminum Diametri moveri circulariter ad terminum oppoſitum. Quanto ergo eo motu minuitur perpetuo angulus ad *A*, tanto augetur angulus ad *C*. Itaquè angulus in circumferentia perpetuo ſervatur rectus, quare & rectus erit quando *A B* eſt in ipſo Diametro in C. Itaque angulus ſemicirculi in *C* erit rectus.

A. Ita quidem, cujus crus alterum ſemicirculum tangat in *C*. Sed ſi crus alterum ſit arcus, non eſt neceſſe, non inquam neceſſe eſt propter vim hujus demonſtrationis, niſi & angulus factus ab *A B* & arcu *B C* ſit etiam rectus; quod, quanquam verum ſit *Clavius* non concedet. Capitibus 12 & 13 Argumenta quæ adducit, nihil amplius probant quam quod angulus contactus anguli rectilinei non eſt pars. Quod non negatur. Capite 14. Argumenta explicat deſumpta ex optica *Vitellionis* (ut ne hujus quidem philoſophiæ partis ignarus eſſe videretur) ſed ab illis nihil aliud derivari poteſt præterquam quod angulus contactus angulo rectilineo nihil addit. Quod quidem fieri poteſt ex eo quod quantitati nihil addit non modo quantitas nulla, ſed etiam quantitas Heterogenea. Poſtremo, Cap. 15. reſpondet ad *Clavii* quædam Corollaria. Quorum unum eſt, quod *poteſt aliqua quantitas continue & infinite augeri, & tamen augmentum illius quamtumcunque minus ſemper erit decremento hujus.* Quod quidem eo ſenſu quem hoc loco habere debet, dictum eſt planè abſurdum. Alterum, *tranſiri poſſe a minore ad majus vel contra, & per omnia media nec tamen per æquale.* Quod eſt abſurdiſſimum. Hiccine fuit qui adeo ſuperbè inſultaverat *Jos. Scaligero*, quod dixerat *latera* 12 *Dodecagoni majora eſſe Perimetro circuli circumſcripti*; quod quidem abſurdum erat, ſed non tam, quam monſtrum hoc Clavii, propter quod Geometriam ipſam non magni facerent homines non Geometræ. At notat hoc non ut abſurdum *Wallisius*, ſed ut falſum.

B. Reſtat, (quoniam angulo contactus quantitatem tribuis, ſed anguli

anguli rectilinei quantitati Heterogeneam) ut ostendas quare sit Heterogenea, & qua mensura quantitates duorum Angulorum contactus possint mensurari. Primo autem quid est illud esse *Homogeneum*? Et quid est esse *Heterogeneum*?

A. *Homogeneæ* quantitates sunt quarum mensuræ applicari possunt una ad alteram ita ut congruant. Itaque cum linea lineæ applicari possit, & superficies superficiei; & solidum solido applicari concipi potest, erunt quantitates eorum Homogeneæ. Item quia quantitas temporis per lineam mensurari potest, & linea lineæ applicari potest erit quantitas temporis quantitati lineæ Homogenea.

B. An tempus & linea congruere inter se possunt?

A. Non. Nec id dixi, sed mensuram lineæ, & mensuram temporis quæ ambæ sunt lineæ congruere posse. Etiam Motus & Ponderis quantitates ad lineas reduci possunt, & proinde eorum quantitates Homogeneæ sunt.

B. Quid ergo Homogeneum non est? Nam solidum & Linea ad numeros reduci possunt; est autem numerus numero Homogeneus.

A. Numerus numero, si quæ numerantur sunt Homogenea, Homogeneus est; alioqui Heterogeneus, ut duæ lineæ & duæ superficies. Nisi enim numeri ex Unis Homogeneis constent, ipsi Homogenei non sunt. Numerus enim omnium rerum est communis, et lineæ sunt numerus linearum, quadrata numerus quadratorum; fractio numerus partium. Præterea, angulus rectilineus cum angulo rectilineo congruere potest, cum possint per arcum circuli ambo mensurari; arcus autem cum arcu ejusdem circuli congruere potest. Anguli autem contactus mensura cum Anguli rectilinei mensura congruere non potest, quia angulus rectilineus non mensuratur per lineam nisi circularem; & quidem quatenus circularem, mensura autem anguli contactus est linea recta quatenus recta.

B. Quomodo id fieri potest?

A. Circulum non modo circino describi posse nosti, sed etiam continua flexione rectæ. Ut enim recta linea frangi potest in Polygonum quotvis laterum æqualium; ita flecti potest (id est, in omni parte frangi) in Polygonum laterum numero infinitorum.

B. Scio.

A. Prior generatio lineæ circularis est generatio ab initio, nulla præexistente linea recta; posterior est præexistentis rectæ mutatio in curvam circularem.

B. Ita est.

A. Sunt autem curvarum aliæ magis, aliæ minus curvæ. Itaque & curvitati omni sua est certa quantitas.

B.

B. Est.

A. Et curvitati circulari sua certa quantitas.

B. Etiam.

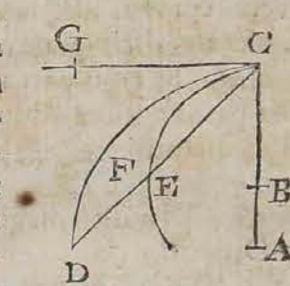
A. Si quæratur autem duorum arcuum æqualium in diversis circulis, uter sit magis curvus, quomodo respondebitur?

B. Nescio, nisi quod mihi quidem videatur minor circulus esse magis curvus. Nam legi in Galileo quod arcus circuli, si radius esset infinitus, esset linea recta.

A. Ego vero omnium circulorum perimetros, si totas spectes dico æque esse curvas; item partem perimetri unius similem parti alterius esse æqne curvam; nec dissentio a Galileo. Nam si in perimetris diversorum circulorum arcus sumpseris æquales, magis curvus est is qui sumitur in perimetro minore. Id quod voluit Galileus. Verum si sumpseris arcus proportionales æquè curvi sunt; ut quorum curvitates oriuntur a totidem rectæ lineæ fractionibus, in partibus totidem (quæ sunt numero infinitæ) proportionalibus.

B. Manifesta hæc sunt, sed non mihi videntur satis respicere ad angulum contactus.

A. Dico igitur quantitatem anguli contactus esse quantitatem curvitatis perimetri quam contingit. Vide figuram hanc, ubi centris A & B descripti sunt duo circuli C D, C E contigui in C. Ducta autem recta C D secans circulum alterum in E, alterum in D, non modo ostendit quod similes arcus C E, C D æqualem habent curvitatem, sed etiam quod illa curvitas distributa sit in majori circulo per majorem arcum quam in minori; contra vero partem C E in minore perimetro magis curvam esse quam pars perimetri majoris, puta C F, ipsi arcui C E æqualis, idque in ratione Chordæ majoris C D, ad Chordam minorem C E, id est in ratione radii A C ad radium B C.



B. Nihil clarius. Sed quid hæc ad angulum contactus?

A. Ducatur ergo tangens C G, determinabitque illa quanto arcus C E propter curvitatem suam in arcu minore magis recedit a Tangente quam arcus C D, propter curvitatem eandem in arcu majore.

B. Video reliqua. Recta a puncto contactus cum secet omnes circulos interiores transeuntes per C proportionaliter, determinabit quantitatem curvitatis arcuum æqualium in unoquoq; circulo sumptorum

torum

torum; & proinde earum curvitatum est mensura; quæ mensura cum sit linea recta, C E D, partes ejus omnes applicatæ sibi invicem æquales cum æqualibus congruent. Quare anguli contactus inter se Homogenei sunt, habentque quantitatem, & sunt angulis rectilineis Heterogenei. Perge modo.

A. Hactenus tractatus *de Angulo contactus*, quem vides ejusdem esse farinæ cum opere ejus Arithmetico integro.

B. Progrediamur ergo ad tractatum *de Sectionibus Conicis*, qui distinguitur in tres partes; quarum prima proœmium habet & Prop. 20. Secunda, Prop. 23. Tertia, Prop. 6. In proœmio plus promittit quam post præstat. Supponit autem Prop. 1. *planum quodlibet conflari ex infinitis Parallelogrammis æqualibus quorum quidem singulorum altitudo sit totius altitudinis pars aliquota infinite parva.* Prætereo, quod si planum parallelogrammum non sit, conflari ex parallelogrammis non potest. Prætereo item quod planum finitum ex infinitis parallelogrammis conflari non potest. Ille autem hoc voluit conflari planum ex infinitis numero parallelogrammis, idem putans esse infinita parallelogramma & infinita numero parallelogramma. Id quod notare volo hoc est, quod supponat partem aliquam aliquotam esse infinite parvam; nam est contradictio in adjecto, non minor quam si quis diceret curvam aliquam lineam esse rectam. Cum enim dicit partem aliquotam, dicit quantitatem in quantitates divisibilem perpetuo divisibiles. Si ergo pars aliquota sit infinite parva, erit illa nihil. Et quia pars aliquota ad totum est ut 1 ad numerum, erit quoque, ut nihil ad quantitatem, ita unitas ad numerum. Nonne hoc æque absurdum est ac illud *Clavii, transiri posse a minore ad majus nec tamen per æquale?* Et multo magis absurdum quam ulla aut Scaligeri conclusio, aut Orontii?

B. Ita est. Neque rectè dicit Consentaneum esse hoc Geometriæ indivisibilium Cavallerii, qui per indivisibilia intelligit indivisa.

A. Falsum quoque est quod dicit planum quodlibet conflari ex infinitis parallelogrammis æqualibus. Neque enim trianguli constant ex parallelogrammis, sed ex Trapeziis; neque ullum aliud planum ex parallelogrammis constat præter parallelogrammum. Neque sequitur ex doctrina *Cavallerii*, sicut ex doctrina hac *Wallisii, nullam esse cujuscunque plani altitudinem.* Prop. ergo prima nihil egit.

B. Dicit fortasse idem sentire se quod Cavallerius, nempe esse altitudines suorum parallelogrammorum infinitè parvorum non prorsus nullas, sed valdè exiguas.

A. Quid ergo opus erat dicere *infinite parvas*, cum suffecisset dixisse non consideraturum se illorum altitudines ut quantitates. Deinde prop.

Prop. 2, ubi demonstrare vult triangulum totum æquale esse omnibus basi parallelis, supponitque triangulum divisum esse in parallelogramma altitudines habentia infinitè parvas; & quia illa parallelogramma sunt Arithmetice proportionalia, concludit (& quidem rectè) ea simul omnia toti triangulo esse æqualia; animadverto, quod si altitudines nullæ sint, ut is supponit, nulla erit proportio Arithmetica, nisi 0, 0, 0, 0, &c, sint Arithmeticè proportionales. Neque erunt parallelogramma toti triangulo æqualia; nisi infinities nihil possit esse æquale alicui rei; neque si per *infinite parvum* intelligit *exiguum*, necesse erat facere illa exigua. An in ratione Arithmetica non fuissent aut toti, non æqualia, si altitudines supposuisset quascunque? Tota ergo hæc propositio unicam habet demonstrationem, quæ poterat decuplo esse brevior. Itaque quæ sequuntur Prop, 3, 4, 5, 6, etsi veras habeant conclusiones, vitiosas continent ratiocinationes. Easdem tamen conclusiones nemo non novit, nec rectè non potest, & breviter demonstrare. Prop. 7. præter terminorum, quibus utuntur scriptores Conici definitiones, unicam habet demonstrationem, & monita quædam ne non rectè intelligeretur, illi qui non satis accurate loquitur planè necessaria. Propositio quam demonstrat hæc est. *Planum coni sectionem efficiens, si unum ex parallelis in cono circulis secet secundum rectam ipsius diametro perpendicularem, etiam reliquos illi parallelos circulos secabit secundum rectas, quæ ipsorum Diametris parallelis sunt perpendiculares,* quæ per se perspicua, nec nova est. Hanc ergo propositionem ut non falsa continentem (quod deberi puto absentiæ symbolorum) dimittamus.

B. Expectabam hic ut demonstraret circulorum omnes in Cono perimetros perimetro basis parallelas coni totius superficiei esse æquales; ut antè minuta parallelogramma triangulo toti.

A. Et ego. Sed id forte oblitus prætermisit nam propter 2^{am}, Arith. Infin. non potuit videre falsitatem. At Prop. 5. eadem illa methodo ostendit semiparabolæ planum ex infinitis constare lateribus quadratorum Arithmeticè proportionalium; & rectè quidem modo latus quadrati concedamus esse parallelogrammum.

B. Sed illud falsum est.

A. Scis autem ex falsis verum, etsi non contra ex veris falsum concludi posse. Idem eodem modo Prop. 9, probat de Conoide parabolico, quod constat ex infinito numero planorum Arithmeticè proportionalium. Quod concedimus ut verum, sed non ut novum, nec hic demonstratum, nisi illa plana sint Cylindrul'i. Quod tu iterum dices esse falsum.

B. Quidni?

A. Propositio 10 est, quod *Pyramidoeidis Parabolici & plani per Axem*

Axem ſecantis communis ſectio eſt parabola. Quod eſt falſum, niſi addat quod ſectio tranſire debeat per angulos oppoſitos. Cum enim Conoidis parabolici planique per axem communis ſectio ſit parabola, impoſſibile eſt ut idem contingat in pyramidoide aut ulla alia figura baſem habente rectilineam nempe polygonum.

A. Prop. 11. figuram exhibet aliam novam quam appellat Cuneum parabolicum, qui nihil aliud eſt ut mihi videtur quam ſimpliciter Cuneus, nimirum priſma cujus baſis eſt parallelogrammum, acies autem linea recta. Quod quidem priſma eſt aggregatum Triangulorum quorum quidem baſes ſimul omnes faciunt parallelogrammum, vertices autem lineam rectam. Quæ eſt figura tecti domus.

B. Temerè hæc.

A. Sequuntur rurſus inventa aliena. Itaque Prop. 12. oſtendit quid ſit *latus rectum*, ſive *Parameter*, ſive *juxta quam poſſunt* ordinatim Applicatæ. [Parameter hæc, *non uſpiam* (inquit) *vel in coni ſectione vel in ipſo Cono realiter exiſtit, ſed ſola imaginatione ſuppletur.*] Quod eſt falſum, natumque ex imperitia hominis in Connicis ſemidocti.

B. Quænam autem eſt recta illa in Coni ſectione realiter exiſtens parameter?

A. Dicam. Deſcribe parabolam (non nunc ſed cum fueris apud te) & comprehende parallelogrammo, cujus unum latus tanget parabolam in vertice & faciet angulum cum Diametro. Angulum illum, ducta recta ſecans lineam parabolicam alicubi, dividat bifariam, & compleatur parallelogrammum, cujus unus Angulus eſt in vertice, alter eſt in linea parabolica. Erit autem parallelogrammum illud vel quadratum vel Rhombus. Hujus latus eſt parameter. Meditare, inquam, hoc tecum, & judica an *Parameter* magis ſit imaginaria quam Diameter, vel alia quævis linea. Eſt autem ubique ut intercepta Diameter ad illam, ita illa ad ordinatim applicatam. Id quod *Walliſius* enuntiat per *Quantuplo major eſt vel minor &c, tantuplo &c*; quæ voces *Quantuplum* & *Tantuplum* neque Latinæ ſunt, neque quicquam ſignificant.

B. Miror certè alienæ Latinitatis reprehenſorem tam acrem, toties barbare ſcribentem non ſenſiſſe.

A. Fieri poteſt ut linguæ Latinæ uſum aliqua ex parte labefactaverit ſtudium nimium Linguæ Arabicæ.

B. Non puto.

A. Proximo loco quamlibet parabolam cuilibet cono aptari poſſe (puto nam obſcure) demonſtrat; neque enim nova res eſt, neque difficilis Prop. Decem hujus partis primæ reliquæ, ubi de Ellipticis & Hyperbolicis *Pyramidoidibus* & Cuneis, & de Ellipſium & Hyperbola-

rum parametris *imaginariis* loquitur, eodem laborant vitio. Vides ergo ſectiones Conicas quatenus in ipſo Cono conſideratas quam parum intelligit. Quod attinet ad conſiderationem earundem ſectionum extra Conum, ea ſcribit quæ (quia non intelligi) reprehendi non poſſunt; nam Theoremata (excepto quadrageſimo ſeptimo, quod ſuum eſt & falſum) ab aliis vere demonſtrata ſunt, *Walliſii* autem demonſtrationes propter denſitatem ſymbolorum non apparent. Neque quicquam habent, etſi veræ eſſent, præter Analyſin alienæ Syntheſeos. Ea igitur tranſilio, properans ad tractatum *de Arithmetica infinitorum*, quo nihil unquam quiſquam vidit in Geometria turpiùs.

B. Incipiamus ergo ab Epiſtola Dedicatoria.

A. Non eſt neceſſe. Nihil enim continet præter ordinem ſuarum ipſius cogitationum quibus perductus eſt ad abſurdam illam ejus circuli quadraturam: Neque in tractatu ipſo ulterius legam quam ad prop. 41. quia priores has pro fundamento ponit omnium quæ ſequuntur. Prima propoſitio eſt *Lemma* vel potius *Problema* hoc, *Si proponatur ſeries quantitatum Arithmetice proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſequutionem) continue creſcentium, a puncto vel o (cyphra ſeu nihilo) inchoatarum (puta o, 1, 2, 3, 4, &c,) propoſitum ſit inquirere quam habet rationem earum omnium aggregatum ad aggregatum totidem maximæ æqualium.*

B. Rationem habet tota ſeries ad numerum terminorum multiplicatum per maximum, eandem quam habet ſemiſſis ad integrum. Summa enim terminorum omnium (ut in hac ſerie o, 1, 2, 3, 4,) æqualis eſt producto ex numero terminorum ducto in ſemiſſem maximæ. Itaque cum termini hic ſint quinque & maximæ ſemiſſis 2, erit productus ex 2 in 5 æqualis 10. Eſt autem 10 ſumma terminorum omnium; idem contingeret in alia quavis progreſſione Arithmetica incipiente a cyphra, ut o, 3, 6, 9, ubi ſumma maximæ & minimæ id eſt 9 ducta in ſemiſſem numeri terminorum 2, facit 18, ſemiſſem ducti 9 in numerum terminorum 4. Geometricè etiam probari poteſt, eodem Argumento quo triangulum oſtenditur parallelogrammi ſui eſſe dimidium.

A. Notiſſimum eſt. Sed non hic de veritate quæritur concluſionis ſed demonſtrationis. Nam per inductionem probat. Inductio autem demonſtratio non eſt, niſi ubi particularia omnia enumerantur, quod hic eſt impoſſibile. Itaque cum poſt expoſita aliquot particularia ſubjungit, [*Et pari modo quantumlibet progrediamur, prodibit ſemper ratio ſubdupla,*] libenter velim ſcire, unde id ſcit, niſi cauſam proferat aut ſciat quare neceſſario ita eſt. Secunda propoſitio eadem eſt cum prima (& propterea falſa, ut alio tempore oſtendetur) niſi quod addit idem contingere etſi numerus terminorum ſit infinitus.

B. Id certè falsum est. Siquidem enim numerorum termini numero infiniti essent, etiam terminus maximus solus per se infinitus esset, & summa terminorum numero infinitorum semissis esset infinitæ summæ infinities multiplicatæ.

A. Non ille primus se induit absurdis quæ circumstant contemplantes Infinitatem. Prop. tertia hæc est, *Triangulum ad Parallelogrammum (super æquali basi æque altum) est ut 1 ad 2.* Imo verò, non *ergo*, sed propter causas ab Euclide dictas Elem. 1. Prop. 41. Idem dicendum est ad Prop. 4. de Conocide parabolico, propter causas ab aliis exhibitas. Propositione quinta, eadem methodo probare vult lineam spiralem esse ad Arcum Circuli sibi respondentem ut 1 ad 2. Quod est falsum.

B. Etiam confitente *Wallisio*, qui in Scholio ad Prop. 13: per spiralem intelligere se dicit arcuum omnium infinite parvorum aggregatum.

A. Sed in propositione hac loquitur manifesto de spirali descripta ab Archimede. Propositiones ergo 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, sunt falsæ, ut quæ ab hac dependent. Præterea quam absurdum est lineam constantem ex infinitis numero Arcubus infinitè parvis appellare spiralem, quæ si regulariter sive regulari motu generetur, necessario erit arcus circuli. Itaque etiam propositiones 14, 15, 16, 17, 18, quæ fundantur super hanc ejus spiralis interpretationem, sunt omnes falsæ. Neque ductæ a Centro ad æquales illos exiguos arcus erunt Arithmetice proportionales. Comparata hæc ad sequentia leviuscula sunt.

B. An pejus in Geometria esse potest quàm facere spiralem constare ex arcubus circuli, iisdemque a rectis e centro interceptis Arithmetice proportionalibus, quique etaiam æquales efficiunt Angulos?

A. Satis quidem absurda illa sunt; sed videamus & hæc. Propositio 19. Lemma. [*Si proponatur series quantitatum in duplicata ratione Arithmetice proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium a puncto vel o inchoatarum, puta ut o, 1, 4, 9, 16, &c, propositum sit inquirere quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium.*

Fiat investigatio per modum inductionis (ut in prop. 1.)

Eritq; $\begin{cases} \dfrac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\ \dfrac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \\ \dfrac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} \text{ \& sic deinceps.} \end{cases}$

Ratio

Ratio proveniens est ubique major quam subtripla, seu $\frac{1}{3}$. Excessus autem perpetuo decrescit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$ &c, aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis numero senario (ut patet) ut sit rationis provenientis excessus supra subtriplum, ea quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post o, adeoque ;]

B. Permitte mihi eadem unà tecum inspicere.

A. Illud $\dfrac{0+1}{1+1}$ quid sunt? Fractiones an Rationes?

B. Utrumvis. Nosti enim huic scriptori eandem esse rem, Rationem & Fractionem.

A. Est ergo Fractio, & $\frac{1}{1}$ Fractio & $\dfrac{0+1}{1+1}$ summa earum, eademq; æqualis $\frac{1}{2}$.

B. Ita.

A. Sed Fractio $\frac{0}{1}$ est nihil; ergo sola Fractio $\frac{1}{1}$ per se æqualis est fractioni $\frac{1}{2}$ Satin' hoc absurdum?

B. Ita est, sed non magis quam doctrina ejus de spirali. At fortassis $\dfrac{0+1}{1+1}$ unica est fractio & proinde, æqualis $\frac{1}{2}$, & illa æqualis $\frac{3}{6}$ & hæc æqualis $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Quid hic absurdi est?

A. Nonne vides dum copulatas quantitates pro fractione una habes facere te $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ id est $\frac{2}{9}$ æqualem $\frac{1}{2}$?

B. Video. Sed etsi ponat $\dfrac{0+1}{1+1}$ pro unica fractione, ponit fortasse $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ pro duabus.

A. Esto. Quomodo ergo unica ratio 3 ad 6 æqualis est duabus Rationibus 1 ad 3 & 1 ad 6, quod ille dicit, cum rationem 3 ad 6 superare dicat Rationem 1 ad 3 Ratione 1 ad 6?

B. Nonne recte?

A. Minime. Quoniam enim $\frac{3}{6}$ est Ratio 3 ad 6, eademque æqualis duabus simul Rationibus 1 ad 3, & 1 ad 6; si componantur Ratione, 1 ad 3, & 1 ad 6, erit Ratio proveniens (per illum) Rationes 3 ad 6.

B. Rectè.

A, Componuntur autem Rationes quando Rationum quantitates id est, tam Antecedentes quam Consequentes ipsarum inter se multiplicantur. Rationes ergo 1 ad 3, & 1 ad 6 compositæ faciunt Rationem 1 ad 18. Vel sic, fiat ut 1 ad 6 ita 3 ad aliam & oritur 18. Et proinde expositis his numeris 1, 6, 18 priores duo habent Rationem 1 ad 6, & posteriores Rationem 6 ad 18, sive 1 ad 3. Quare ratio $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ æqualis est Rationi 1 ad 18. Est ergo per *Wallisium* eadem Ratio 3 ad 6 quæ 1 ad 18.

B.

B. Monstri simile est.

A. Similiter rationem 5 ad 12 æqualem facit Rationibus 1 ad 3, & 1 ad 12 simul sumptis; quæ duæ Rationes compositæ faciunt Rationem 1 ad 36, itaque 5 ad 12 eandem habet Rationem quam 1 ad 36.

B. Itaque quicquid ex hac operatione inferetur pro indemonstrato habendum est.

A. Inferetur autem primo, propositio sequens, nempe vicesima. [*Si proponatur series quantitatum in duplicata Ratione Arithmetice proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum continue crescentium, a puncto vel o inchoatarum; ratio quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, subtriplam superabit; eritque excessus, ea ratio quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post, o; sive, quam habet radix quadratica termini primi post o, ad sextuplum radicis quadraticæ termini maximi.*] Clarè hic loquutus est.

B. Intelligo. Rationem quam habet series crescentium ad seriem totidem maximæ æqualium, majorem esse dicit, quam Ratio 1 ad 3 tanto quanto est Ratio unitatis ad sextuplum numeri terminorum post o, hoc est (in serie, $\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12}$) rationem 5 ad 12 majorem esse Ratione 1 ad 3, sive 4 ad 12 tanto quanta est ratio 1 ad 12.

A. Rectè intelligis. Est autem falsum. Nam ratio 5 ad 12 æqualis esset ambabus simul rationibus 1 ad 3, & 1 ad 12. Quæ rationes compositæ juxta definitionem Elem. 6. 5. faciunt rationem 1 ad 36. Est ergo ratio 5 ad 12 æqualis rationi 1 ad 36. Vel si inter 5 & 12 interponamus 4, ut sint tres quantitates 5, 4, 12, ratio primæ 5 ad tertiam 12, major erit ratione 4 ad 12, id est Ratione subtripla, tanto quanta est ratio 5 ad 4. Itaq; per bonum vestrum *Professorem* eadem est ratio 5 ad 4, & 1 ad 12.

B. Error manifestus est, & quidem major illo quem erravit in doctrina spiralium. Quod non facile credidissem.

A. Vide jam id quod inde infert, nempe, Si series hæc quadratica esset infinita, summa crescentium ad summam totidem maximarum esset accuratè in ratione 1 ad 3. Sic enim probat, [*Cum autem crescente numero terminorum, excessus ille supra Rationem subtriplam ita continuo minuatur, ut tandem quovis assignabili minor evadat, (ut patet) si in infinitum procedatur prorsus evaniturus est. Adeoque, si* (quæ est propositio 21) *proponatur series infinita quantitatum in duplicata Ratione Arithmetice proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium, a puncto sue o inchoatarum; erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 3.*]

B. Videtur sane excessum rationis si perpetuo minuatur, debere tandem evanescere; saltem tam exiguum esse, ut nullius deberet esse considerationis. Itaque pereunte excessu rationis supra subtriplam relinquetur præcisè subtripla.

A. Ita certè, nisi una crescerent quantitates comparatæ. Vide seriem primam $\frac{0+1}{1+1}$; nonne majorem rationem habet $0+1$ ad $1+1$ quam 1 ad 3, id est quam ratio subtripla?

B. Ita quidem, sed ut additâ ad consequentem unitate esset subtripla.

A. Deinde vide seriem secundam $\frac{0+1+4}{4+4+4}$. Nonne ratio seriei crescentis 5 ad seriem maximarum 12 major est quam subtripla?

B. Etiam. Ita vero ut addito ad consequentem numero 3 fiat subtripla?

A. Manifestum ergo est, si procedatur in infinitum numerus crescentium major erit numero subtriplo maximarum; eritque excessus numerus major quam ut possit dici. Tantum abest ut series crescentium, quantumvis procedendo, possit esse subtripla seriei maximarum.

B. Error est manifestissimus.

A. Ex propositione hac dependent non modo omnes sequentes usque ad 39, sed etiam omnes illæ quibus rationem determinat parabolarum & paraboloideum ad circumscripta parallelogramma.

B. Sed rationes quas assignavit veræ sunt, & a Mathematicis receptæ.

A. Vere quidem, & jamdiu circumlatæ sunt, sed sine demonstratione.

B. Demonstratæ extant ab *Hobbio* Cap. 7. Lib. de Corpore, Editione Latina. Item aliter demonstratæ in Editione Anglica, Cap. 15. Art. 2.

A. Prop. 39. [*Si proponatur series quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice proportionalium (sive juxta seriem numerorum Cubicorum,) continue crescentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 8, 27, 64, &c.) propositum sit inquirere quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium.*]

Fiat investigatio per modum inductionis (ut in Prop. 1. & 19.)

Eritq;
$$\begin{cases} \dfrac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}. \\[2ex] \dfrac{0+1+8=9}{8+8+8=24} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \\[2ex] \dfrac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108} = \frac{4}{12} = \frac{1}{4} = + \frac{1}{12}. \end{cases}$$
Et sic deinceps.

Ratio proveniens est ubique major quam subquadrupla, seu $\frac{1}{4}$. Excessus autem

autem perpetuo decreſcit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$. *&c. aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis, numero quaternario, (ut patet) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o, Adeoque.*]

B. Eadem eſt methodus quæ in Prop. 19. An & iidem errores?

A. Plane iidem. Nam ſi $\frac{2}{4} = \frac{1}{4} \dagger \frac{1}{4}$ rationes ſint, impoſſibile eſt ut ratio 2 ad 4, ſit æqualis duabus rationibus 1 ad 4, & 1 ad 4, Nam ratio 2 ad 4 duplicata eſſet rationis 1 ad 4. Sed ratio 1 ad 16 duplicata eſt rationis 1 ad 4. Eſſet ergo ut 2 ad 4, ita 1 ad 16. Concluſio autem quam deducit ex hac Prop. 39. eſt propoſitio 40, nempe hæc. [*Si proponatur ſeries quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continue creſcentium, a puncto vel o, inchoatarum; ratio, quam habet illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium ſubquadruplam ſuperabit; eritque exceſſus, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o; ſive, quam habet radix cubica termini primi poſt o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.*

B. Erit, inquit, exceſſus rationis quam habet ſeries creſcentium ad totidem maximas, ſupra rationem ſubquadruplam, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt o. Id eſt, in hac ſerie $\frac{0 \dagger 1 \dagger 8}{8 \dagger 8 \dagger 8}$ ratio 9 ad 24 ſuperabit rationem ſubquadruplam, & exceſſus erit ratio 1 ad 32.

A. Nonne ergo ratio 1 ad 32 compoſita cum ratione ſubquadrupla faciet rationem 9 ad 24.

B. Certiſſimè.

A. Sed ratio 1 ad 32; & ratio 6 ad 24, id eſt ſubquadrupla faciunt rationem 6 ad 768. Eſt ergo ut 9 ad 24 ita 6 ad 768. Vel ſi ponantur ordine hi numeri 9, 6, 24, ratio 6 ad 24 eſt ſubquadrupla. Superat autem ratio 9 ad 24 rationem 6 ad 24 ſubquadruplam, ratione 9 ad 6, Eſt ergo ut 9 ad 6 ita 1 ad 32. Siccine ſolent γεωμετρεῖν Profeſſores publici?

B. Eundem errat errorem nunc & ante.

A. Deinde quod infert, [*Cum autem, creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra rationem ſubquadruplam ita continuo minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat, (ut patet;) ſi in infinitum procedatur, prorſus evaniturus eſt. Adeoque* (quæ eſt propoſitio 41) *Si proponatur ſeries infinita quantitatum in Triplicata Ratione Arithmetice proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continue creſcentium, a puncto ſeu o inchoatarum; erit ille ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 4,*] falſum eſt. Eſt enim in prima ſerie

o † 1

$\frac{0 \dagger 1}{1 \dagger 1}$ ſumma creſcentium major quam ſubquadrupla totidem maximarum, tanto quanta eſt ſemiſſis Unitatis. In ſerie ſecunda ſumma creſcentium ſuperat ſubquadruplam maximarum tribus unitatibus. In tertia novem Unitatibus &c. Quouſque procedendum eſſe putas ut ſumma creſcentium ſit tandem maximarum ſubquadrupla.

B. Quanto plus proceditur tanto pejus. Propoſitio eſt falſa.

A. Deinde prop. 43. [*Pari* (inquit) *methodo invenietur ratio ſeriei infinitæ quantitatum in ratione quadruplicata, quintuplicata, ſextuplicata, &c, Arithmetice proportionalium a puncto ſeu o inchoatarum ad ſeriem totidem maximæ æqualium; nempe in quadruplicata 1 ad* 5. &c.]

B. Falſum eſt; ne examines.

A. Imo vero quid afferant novi quæ ſequuntur, ulterius ne quæramus, cum ab his dependeant cætera omnia.

B. Ne imaginari quidem poſſum quicquam quod aut *VVallíſius* aut eorum ullus, qui libros ejus literis ad ipſum ſcriptis laudaverunt contra hæc tam perſpicue demonſtrata afferre poſſunt.

A. Extantne Geometrarum literæ quibus Geometria hæc *Walliſii* comprobatur?

B. Extant quidem (editæ ab *Walliſio*) altera *Hugenii*, altera neſcio cujus, ſed dicunt aliqui eſſe *Schootenii* vix Latina. Præterea *Robervallus*, Profeſſor Pariſiis Celeberrimus, idemque alias in demonſtrationibus propriis ſatis cautus, chartulæ cujuſdam manuſcriptæ exemplaria aliquot in Angliam tranſmiſit, in qua doctrinam de comparatione parabolarum, & Conoideum ex illis factorum ad parallelogramma & Cylindros circumſcriptos, in hoc tractatu *De Arithmetica Infinitorum*, expoſitam negat ab *Walliſio* primo, ſed a ſe inventam eſſe aſſerit. Quod non feciſſet niſi Doctrinam ipſam veram eſſe cenſuiſſet.

A. Mirandum non eſt ſi illi qui maximam operam in eo poſuerunt ut rationem Arcus ad radium ad numeros reducerent, Methodum hanc Symbolicam incautè amplexi ſint. Sed ut *Robervallus*, qui Geometrarum primus eſſe vult & ferè eſt (nam excipio ſaltem D. Fermatium) Paralogiſmos tam craſſos videre non potuerit, profecto mirandum eſt.

B. Habet hoc peculiare *Robervallus*, cum egregium quis a ſe inventum Theorema in publicum emiſerit, ut ſtatim diſtributis chartulis dicat idem a ſe inventum eſſe prius. Itaque Theorema de ſolido Hyperbolico inventum, a Toricellio poſtquam eſſet editum ad ſe rapuit; & nunc Methodum de comparatione Paraboloideum editam

R ab

ab *VValliſio* & ſolo *Walliſio* dignam ſuam haberi incautus petit. Idem *Hobbium* qui æqualitatem inter ſpiralem, & parabolicam, primus vidit, quia ipſe eandem priùs demonſtraverat appellat Plagiarium.

B. Et merito? ſiquidem *Robervalli* demonſtrationem ediderat ut ſuam.

A. Sed demonſtrationem *Robervalli* negat ſe vidiſſe; ſed cum conveniſſent Pariſiis in Cænobio Minimorum, ipſe, Merſennus, *Robervallus*, & quartus (quem non nominat) incidiſſetque ſermo de comparatione Spiralis & Parabolicæ, videtur, inquit *Hobbius*, linea ſpiralis æqualis eſſe rectæ quæ ſubtendit Semiparabolam, cujuſque quidem Axis, ſit æqualis Semiperimetro circuli ſpiralem continentis; Baſis autem ejuſdem circuli Radio. Itaq; creta deſignans figuram in pariete, ſic arguebat. Quoniam in Axe parabolæ, motus quo parabola generatur augetur juxta rationem temporum duplicatam, motus autem in Baſe eſt uniformis; item quia motus quo generatur ſpiralis, in circulo augetur in ratione temporum duplicata, & in Radio eſt Uniformis; videtur ſimilis eſſe generatio unius generationi alterius; & proinde ſi vertex Semiparabolæ cum termino Baſis connecteretur per lineam rectam, rectam illam, ut quæ eandem habet generationem, æqualem eſſe oportere Spirali. Quæ illatio vera non erat, ſed contra concluſionem quam probare conatus eſt. Id cum animadvertiſſet *Robervallus*, recta (inquit) Semiparabolam ſubtendens fit a motu utroque uniformi. Itaque abjecta creta errorem agnovit *Hobbius*. At *Robervallus* poſtridie eandem propoſitionem ad Merſennum demonſtratam attulit. Quam tamen demonſtrationem non vidit *Hobbius*, ſed poſtea Theorema idem ſua Methodo demonſtravit ediditque.

A. Si ita eſt, inventionem illam *Hobbio* potius quam *Robervallo* adjudicarem, & hunc quam illum dicerem plagiarium. Sed quo teſte rem ita eſſe probaveris ſi opus ſit.

B. Quæſivit *Hobbius* per epiſtolam a quarto illo, quem non nominavit utrum chartula illa ipſius eſſet *Robervalli*, necne. Is autem neſcire ſe reſcripſit cujus eſſet; ſed paratum ſe teſtem eſſe, lucem & Methodum demonſtrationis ſuæ accepiſſe ab *Hobbio Robervallum*. Sic enim ſcribit Gallice. *Ie n'ay pas veu ſa demonſtration, mais quoy quil faſſe il ne peut deſnier que vous ne ſoyes cauſe quil ait trouvé cette propoſition, puiſque vous luy aves donné l'idee, & le ſuiet de la trouver, C'eſt ce que ie teſmoigneray tous jours;*

B. Quoniam parabolæ & Paraboloideum cum Parallelogrammis, & Conoideum cum Cylindris comparationem, neque methodo hac *Walliſiana*, neque ab ullo alio (quanquam vulgo receptam) demonſtrationibus

ſtrationibus editis demonſtratam eſſe dicis, age, ſi quam habes ejus rei demonſtrationem, profer illam.

A. Proferam, puto, eamque univerſalem.

Deſcribatur parallelogrammum A B C D intelligaturque baſis A *B* moveri parallela ad C D, ita ut dum movetur perpetuo decreſcat donec evaneſcat in puncto C; ſitque ratio diminutæ A B ad ipſam A B integram, ubique eadem quæ ratio A C ad A G, vel ubique duplicata, vel triplicata, vel in alia quacunque ratione rationis ad rationem. Dum A *B* eo modo decreſcit, punctum *B* deſcribat lineam aliquam, puta *B* E F C. Dico jam, ſi ratio A C ad A G ſit eadem quæ ratio A *B* ad G E, ſpatium A *B* E F C eſſe ad ſpatium A C F E *B* ut 1 ad 1; ſi vero ratio A C ad A G ſit duplicata rationis A *B* ad G E ſpatium D *B* E F C eſſe ad ſpatium A C F E *B* ut 1 ad 2; ſi triplicata, ut 1 ad 3; & ſic deinceps. Intellextin'?

B. Intelligo, & ſiquidem ita eſſe demonſtraveris, video eſſe facillimum paraboloidis cujuſcunque ad ſuum parallelogrammum, & Conoidis cujuſcunque ad ſuum Cylindrum rationem exhibere in numeris.

A. Aſſumo autem primo, [*quod qua ratione Mobilis velocitas augetur eadem ratione augeri quoque ſpatia ab ea iiſdem vel æqualibus temporibus percurſa. Secundo, quod ſi inter duas rectas interponantur mediæ tum Arithmeticæ tum Geometricæ numero infinitæ, hæ & illæ magnitudine non different; ſaltem differentiæ earum minores erunt qualibet quantitate finita.*]

B. Utrumque manifeſtum eſt; & poteſt demonſtrari. Nam incipiendo a maxima extremarum major eſt media Arithmetica quam Geometrica; quanto autem minus inter ſe extremæ differunt tanto differentia inter mediam Arithmeticam & Geometricam minor eſt. Itaque ſi mediæ tum Arithmeticæ tum Geometricæ ubiq; interponantur minus inter ſe different omni quantitate effabili.

A. Recte. Itaque in parallelogrammo A B C D concipiatur latus A B moveri ad latus C D Parallelam, & movendo decreſcere donec tandem evaneſcat in puncto C, & per talem motum deſcripta ſit figura A B E F C, relicto complemento D C F E B, cujus linea *B* E F C deſcribitur a termino B decreſcentis A B. Eodem autem tempore moveri intelligatur latus A C ad latus A B uniformiter; poteſt igitur haberi C D pro menſura Temporis; rectæ autem ipſi C D parallelæ, terminatæ ab una parte in linea *B* E F C, in altera parte in recta A C erunt menſura partium Temporis in quo A *B* movetur ad C D, & A C ad B D. Sumatur jam in recta C D, ad placitum punctum O, ducaturque O R parallela lateri B D ſecans lineam B E F C in E, & rectam A B in R, Et rurſus a puncto Q ſumpto, in C D arbitrarie, ducatur eidem lateri B D parallela Q S secans B E F C in F, & A B in S. Ducantur etiam E G, F H parallelæ C D secantes A C in G & H. Postremo idem supponatur fieri per omnia puncta lineæ B E F C. Habes Constructionem.

B. Habeo & teneo.

A. Dico jam esse ut aggregatum omnium velocitatum quibus describuntur rectæ Q F, O E, D B, cæteræque omnes eadem Methodo genitæ, ad aggregatum rationum Temporum designatorum per rectas H F, G E, A B, & cæteras, ita planum D C F E B ad planum A B E F C. Sicut enim A B decrescendo per lineam B E F C in Tempore C D, evanescit in punctum C, ita C D (ipsi A B æqualis) decrescendo per eandem lineam C F E B eodem Tempore evanescit in punctum *B*, discripta recta D B æquali A C. Sunt ergo velocitates quibus describuntur A C &D B inter se æquales. Rursus quoniam eodem Tempore quo punctum O describit rectam OE, eodem Tempore punctum R describit rectam R E, erit O E ad R E, ut velocitas qua describitur O E, ad velocitatem qua describitur R E. Et propter eandem causam Q F erit ad S F ut velocitas qua describitur Q F ad velocitatem qua describitur S F; & sic de cæteris omnibus rectis rectæ D B parallelis. Ut ergo rectæ quæ sunt parallelæ lateri A B, terminanturque in linea B E F C sunt mensuræ Temporum; ita rectæ quæ sunt parallelæ lateri B D, terminatæque in eadem linea *B* E F C, sunt mensuræ velocitatum. Nam concessum est, in qua ratione augentur velocitates, in eadem augeri rectas eodem Tempore percursas, id est, rectas Q F, O E, B D, &c.

B. Verum est.

A. Jam lineæ illæ omnes Q F, O E, B D, &c. constituunt planum D B E F C, & lineæ omnes H F, G E, A B &c. constituunt planum A C F E B. Quarum illæ sunt aggregatum velocitatum, hæ aggregatum Temporum. Ut igitur aggregatum volocitatum ad aggregatum temporum, ita Complementum D B E F C ad figuram A B E F C. Siquidem ergo rationes D B ad O E & O E ad Q F fuerint ubique rationum A B ad G E, & G E ad H F (exempli causa) triplicatæ, erunt vice versa rationes O E, ad D B, & Q F ad O E, rationum G E ad A B, & H F ad G E subtriplicatæ. Quare aggregatum omnium Q F, O E, B D &c. aggregati omnium H F, G E, A B &c. erit (per assumptum secundum) subtriplum. Ut ergo aggregatum velocitatum ad aggregatum Temporum quibus describuntur figura deficiens & Complementum, ita erit ipsum Complementum ad figuram ipsam, nimirum complementum D B E F C ad figuram A B E F C quod erat Demonstrandum.

B.

B. Sequitur hinc quod cum in Triangulis basis decrescit in ratione Temporum, parallelogrammum erit sui Trianguli duplum; cumque basis semiparabolæ decrescat in ratione Temporum duplicata erit parallelogrammum suæ parabolæ sesquialterum, ut & Cylindrus sui Conoidis parabolici duplum; cum item basis paraboloidis cubici sive parabolastri primi, decrescat in ratione Temporum triplicata, erit parallelogrammum sui parabolastri primi sesquitertium; & Cylindrus sui Coni triplum; & parallelpipedum sui pyramidis triplum. Et sit de cæteris figuris, prout postulant rationes juxta quas generantur.

B. Itaq; Theorema hoc universale nempe [*in omni figura generata per motum quanti decrescentis donec evanescat in punctum, secundum quamlibet rationem constantem ab initio motus ad finem, Rationem figuræ factæ ad complementum ejus, id est ad id quo figura facta superatur ab ea figura quæ facta esset si Quantum Generans mansisset integrum, eam esse quam habet ratio reliqui ad reliquum ad Rationem ablati ad ablatum*,] Ideoque ubi reliquum ad reliquum est in ratione ablati ad ablatum duplicata vel triplicata &c, ibi figuram factam ad complementum esse duplum, triplum &c: respective; Theorema (inquam) hoc habet claritudinem per se tantam ferè ut possit haberi pro Axiomate, atque ob hanc fortasse causam, veritatem a tot Geometris agnitam fuisse etsi a nemine hactenus demonstratam.

A. Itaque *VVallisius* qui nil tam difficile esse arbitratus est quin per artem Analyticam inveniri & solvi posset, artemque Analycam nihil aliud esse quam vocabulorum & orationis loco, notis quibusdam novis (quæ vocant symbola) Ratiocinationis suæ vestigia pingere, Theoremata hæc, aliaque difficiliora, quæ ut certa jamdudum circumferebātur, nova a se methodo demonstrata esse opinatus est. Et quia videbat (cum omnibus) in progressione numerorum a Cyphra sive o, summam numerorum progredientium dimidiam esse summæ numeri maximi toties sumpti quot sunt termini progressionis, idem accidere etiam affirmavit ubi lineæ latitudinis infinite exiguæ, crescētes a puncto, secundum progressionem eandem, constituent superficiem qualemcunque. Quod (nescientibus illius Encomiastis & nonnullis præterea Geometriæ professoribus) falsum, neque nisi de Triangulis rectilineis universaliter pronunciandum est.

A. Vidisti jam Tractatus *Wallisii* tum Geometricos tum Arithmeticos nullius esse pretii, ut qui nullam continent veri Theorematis demonstrationem novam; sed vel aliorum demonstrationes symbolicè (id est obscurè) transcriptas; vel suas ipsius falsas; vel etiam aliquando, (præsertim in Tractatu de Arith. infinit.) Theoremata ipsa falsa.

Judica

Judica ergo, ipse *Wallisius* & Doctrinæ *Wallisianæ* comprobatores & Encomiastæ quales sunt Mathematici. Legisti etiam Elenchum ejus & vidisti quam sit refertus conviciis rusticanis. Judica ergo quam necessaria conditio sit ad Theologiæ Doctoratum ut quis sit vir bonus. Conviciorum causa fuit ira, sed quæ causa iræ? Nempe homines ambitiosi cupidique regnandi non modo in foro externo, sed etiam in interno, ad omne dictum vel scriptum quod cupiditati eorum adversatur illico excandescunt; & (siquidem audent) maledictis onerant. Causa autem ignorantiæ est partim quod scientias non ipsarum amore, sed lucri causa adeunt ut stipendia mereantur; maxime vero quod scientiam non in rerum ipsarum Imaginibus, sed in verbis Magistrorum quærunt, iisque non semper intellectis. Itaque Principia ignorantes, id est naturam Puncti, Lineæ, Anguli, Rationis nescientes, in absurda quæ recensuimus delapsi sunt.

B. Sic puto.

A. Accessit quoque scientiis damnosa illa multitudo Symbolorum, quorum fiducia attentionem ad rerum ipsarum Ideas remiserunt, quæ inventa ad leniendum nobilium adolescentulorum in quærendis Problematum Arithmeticorum solutionibus molestiam, adeo visa est res elegans, ut nihil esse neq; in *Arithmetica*, neq; in Geometria tam difficile videretur quod ope Symbolorum solvi non posset. Itaq; omnes laudare & magnifacere scientiam quandam quam nominarunt *Symbolicam*; etiam homines quibus nihil videbatur ad eminentiam deesse præterquam ut docti essent in Mathematicis, Magistris usi sunt Symbolicis, frustra. Verum sicut sine suspitione criminis nemo fit inexpectatò & repentine dives, ita nemo ullo modo sine magno studio & labore fiet doctus.

B. Parumne prodest ad solutionem problematum Mathematicorum ars *Analytica*, & ad *Analyticam* usus symbolorum?

A. Imo multum. Sed quid hoc ad nuper introducta Symbola? Literæ A, B, C, &c, quibus solis usi sunt Geometræ veteres, nonne sunt Symbola? Plura autem sæpius ἐνοχλοῦσιν quam adjuvant. Quod autem *Analysin* attinet, non minus apparet in scriptis *Euclidis*, *Archimedis*, *Apollonii* aliorumque antiquorum, quam Vietæ, Oughtredi, & cæterorum *Algebristarum*. Quid enim est Analytica hæc recentium?

B. Est ars qua a quæsiti suppositione pervenitur per consequentias ad vera Naturæ ordine priora. Et Synthetica, qua reciprocè a veris prioribus venitur ad quæsiti Conclusionem.

A. *Euclides* ergo & cæteri antiqui ea perpetuo usi sunt. Quid enim, cum apud illos Theorema legis quod incipit a *Si*, nonne vox illa *Si* denotat aliquid esse suppositum, exempli gratia æqualitatem angulorum,

rum,

rum, unde per consequentias venitur ad aliquod prius quæ est æqualitas laterum? Hæc autem est *Analysis*. Deinde reciproce ex æqualitate laterum concluditur æqualitas angulorum, quod ante erat quæsitum; quæ est synthesis. Itaque ne crede symbolicam hanc hodiernam veteribus in usu fuisse, aut omnino cognitam, neque, ut quidam nimium astuti homines dixere (nescio quam ab causam) dissimulatam. Sed *Wallisio* laudatoribusque ejus nunc amissis, convertamur ad alia.

DIALO-

Dialogus Sextus.

A. IN dimensione Circuli investiganda Methodus Arithmeticorum vulgo recepta falsa est. Salve mi B; non te prævideram.

B. Et tu salve.

A. Unde advenis.

B. ἥκω λίπων Ἀγγλείου ἅλμυρον βάθος πόντου.

A. Usus ergo es (ut videtur) navigatione adversa.

B. *Jamjam tacturos sidera summa putes. Jamjam casuros Tartara ad ima putes.*

A. Non tam marinis quam Heliconiis aquis madescere videris. Sed unde ad mare?

B. Parisiis.

A. Gaudeo salvum te rediisse atq; etiam hilarem. At quid istinc adfers novi?

B. Reges, aiunt– –.

A. Noli de Regibus mihi, Loquere de iis rebus quæ pertinere possunt ad te & me.

B. Nuntio ergo tibi, inventam esse quadraturam Circuli.

A. Papæ! a quo?

B. Inventam dico, non editam. Nam siquidem nemo ante primum diem mensis Octobris proximi (in quem diem circa eam rem indictum est Geometris, proposito præmio, certamen) demonstrationem ejus invenerit, is qui præmium proposuit ipse a se inventam publici juris faciet.

 A. Loqueris

A. Loqueris, credo, de quæsitis circa Cycloidem, nimirum, *Quænam sit datæ partis ejus magnitudo, & quod Centrum gravitatis.* Item *quæ sit solidi magnitudo & Centrum gravitatis facti ex datæ partis revolutione, sive circa Cycloidis Basem, sive circa Diametrum Circuli genitoris*; sine ulla quadraturæ Circuli mentione.

B. Sed qui ista problemata omnia solverit, nonne Centrum gravitatis etiam Circuli genitoris idem exhibebit? Eo dato, quin dimensio Circuli innotescat quid impedit? Adde, quod vera Cyclois, nisi cognita perimetri Circuli magnitudine, id est, ratione quam habet ad suam Diametrum, ne describi quidem potest. *Describitur enim Cyclois a puncto Circuli genitoris & diametri communi, moto super lineam rectam in plano existentem cui Diameter est erecta, per motum compositum ex motu Circulari per peripheriam. & motu recto Centri uniformi, & æquè veloci.* Fit igitur ut Circulus, una facta revolutione, rectam describat in plano, suæ perimetro æqualem; ut videre est in revolutione cujuslibet rotæ. Dum ergo perimetri longitudo justa ignoratur, neque vera Cyclois describi, neq; Centrum gravitatis ipsius (multo minus partium ejus) exhiberi potest.

A. Quod Centrum gravitatis Cycloidis sit in linea recta Basi Parallela, ita secante Diametrum Circuli genitoris, ut pars major sit ad minorem ut 7 ad 5, demonstrari potest, etiamsi magnitudo perimetri sit incognita. Etiam demonstrari potest Centrum gravitatis ejusdem esse in linea recta, ita secante Basem ipsius ad angulos rectos, ut pars major ad minorem iterum sit ut 7 ad 5. Duæ ergo Diametri gravitatis inventæ sunt. Sed illæ se mutuo secant in gravitatis Centro. Nonne ergo datur Centrum ipsum?

B. Minimè. Nam lineam non datam secare in datas partes non potes. Etsi enim motus uterque (rectus & circularis) uniformis sit, si tamen æque veloces non sint, facient compositi talem motum, ut partes rectæ lineæ super planum a Circulo designatæ, sint partibus perimetri eodem tempore percursis proportionales quidem, verum non æquales; id quod in vera Cycloide requirendum est.

A. Recte dicis. Expectabimus ergo Circuli quadraturam, non illam veræ propinquam Arithmeticorum, sed in lineis vel numeris calculo exactissimo demonstratam. Sed quis est certaminis hujus institutor Hercules Mathematicus?

B. Nescio sane. Sed propositum præmium intuenti videtur mihi, quisquis est, non esse e numero Professorum.

B. Sed cur non ad certamen hoc accessisti tu?

A. Ut dicam quod res est, problemata illa ante diem præstitutum non potui omnia solvere; sunt enim difficillima. Quoniam autem dignissima ea

ea judicavi in quibus exercerer, quantum potui animum ad ea applicui. Sed cum non viderer mihi quicquam proficere posse sine cognitione magnitudinis Arcus Circuli, meditationes meæ primæ in ea investiganda consumptæ sunt; & Theorematum aliquot Cyclometricorum demonstrationes (ut mihi videntur) faciles & perspicuas jam scriptas habeo.

B. Licetne mihi eas videre?

A. Imo vero, nisi improbum esset, ultro te rogarem, ut illas velles examinare.

B. Quid improbum? Ego vero ad te venio tibi vacaturus, & si quid vis, operam meam, quantulacunq; ea sit, oblaturus; sed ea lege, ut si quid reprehendero, quanquam etiam inepte, æquo animo id feras.

A. Benigne dicis. Et malo errata mea à te minime maledico monstrari mihi, quam ab inimicis cum convicio exprobrari.

B. Profer quæ scripsisti.

A. En Lege, adhibens figuram primam.

B. Hanc dicis lineosam?

A. Ne metue. Nam cum multis ea inserviat demonstrationibus, brevitate ipsa perspicuis, fiet ut multitudo linearum paulatim tibi familiaris facta molesta futura non sit.

Prop. 1.

Si ad Arcum quadrantis Circuli, & ejusdem Radium, assumatur tertia proportionalis; & ab ea tertia, ut radio, describatur rursus Arcus quadrantis; erit is Arcus æqualis Radio quadrantis prioris.

Fig. 1. Describatur quadratum ABCD, & Centro D, describatur Arcus quadrantis AEC, quem secet Diagonalis BD in E. Secet & diagonalis AC arcum BD in I, supponaturq; in recta BC producta, sumptam BF æqualem esse arcui AEC, jungaturq; AF, secans DC in G. Erit ergo (propter similitudinem triangulorum FBA, ADG) ut FB ad AB, id est, ad AD, ita AD ad DG, & propterea erunt BF, AB, DG, continue proportionales. Centro D, intervallo DG, describatur arcus quadrantis GHI, secans Diagonalem BD in H. Dico arcum GHI esse æqualem Radio AB. Quoniam enim FB, AD, DG sunt continue proportionales, etiam illarum æquales, nimirum arcus AEC, Radius DE, & recta DH sunt continue proportionales. Ut ergo arcus AEC ad DE, ita est DE ad DH. Sed ut arcus AEC ad DE, ita est arcus GHI ad DH. Est ergo arcus GHI æqualis rectæ DE, id est, Radio arcus AEC. Quod erat demonstrandum.

A. Qualis tibi videtur hæc demonstratio?

B. Proba & perspicua. Procedo ad cætera.

Definitio

Definitio.

Recta quæ ad Arcum quadrantis & Radium totius Circuli est tertia proportionalis; sive Recta, a qua descriptus arcus quadrantis æqualis est Radio totius circuli appelletur *Z*.

Consectarium. Radius quadrantis, cujus quidem arcus æqualis sit rectæ BO sive Semiradio, æqualis est dimidiæ Z. Et Radius arcus quadrantis, qui quidem arcus æqualis sit duabus tertiis Rectæ AB, æqualis est duabus tertiis ejusdem Z. Et sic per omnes proportiones.

Prop. 2.

Dividatur quadratum ABCD in quatuor quadrata æqualia a rectis MN, OP (quæ secabunt se mutuo ad angulos rectos in centro totius quadrati ad *Q*) junganturq; AO, BN secantes se mutuo in V. Dico angulum AVB esse rectum.

Cum enim triangula ABO, NMB, sint similia, erunt anguli ad A & N æquales. Equales item erunt anguli ad O & B. Sed in triangulis ABO, AVB angulus ad A est communis, & angulus ABV æqualis angulo AOB. *Q*uare angulus reliquus AV*B*, æqualis est reliquo ABD, id est rectus. *Q*uod erat demonstrandum.

Consectarium. Punctum V est in arcu AEC; producta enim recta BN abscindet in producta AD, duplam ipsius AD. Idem autem faciet arcus AEC continuatus in Semicirculum. Erit ergo angulus AVB (qui ostensus est rectus) in semicirculo. Et proinde punctum V est in arcu AEC.

Prop 3.

Continuetur arcus BD usq; ad productam BA in K; & rectæ MN apponatur in directum NS æqualis semiradio; junctaq; KQ producatur, secans arcum BD in R, & rectam BC in T. Jungaturq; BS. Dico BS transituram esse per R.

Sunt enim triangula KMQ, SMB similia & æqualia. Ducta autem recta BR, erit angulus KRB (in semicirculo) rectus. Similia ergo sunt triangula KM*Q* id est SMB, & KRB; Habent enim angulum KBS communem. Et propterea transit BS per punctum R. *Q*uod erat demonstrandum.

Consectarium 1. Angulus BR*Q* est rectus in semicirculo.

Consectarium 2. Recta BT est $\frac{2}{3}$ Radii BC. Est enim ut KM ad M*Q*; id est, ut 3 ad 1, ita KB diameter ad BT. *Q*uare BT est $\frac{1}{3}$ diametri KB, id est, $\frac{2}{3}$ semidiametri BC.

Consectarium 3. *Q*T est $\frac{1}{3}$ rectæ K*Q* sive BS. Et BR $\frac{1}{5}$ rectæ KR.

Sunt

Sunt enim similia triangula KM*Q*, KBT, KRB. Cum ergo recta MB sit tertia pars rectæ KM, erit *Q*T tertia pars rectæ K*Q* sive BS; & BR $\frac{1}{5}$ rectæ KR. Et præterea recta RT erit $\frac{1}{5}$ rectæ BR. Nam similia sunt triangula KBT, BRT, propter angulum rectum ad R.

Prop. 4.

Recta BS dividit rectam *Q*C bifariam.

Secet BS rectam *Q*C in X. In triangulis BCX, S*Q*X, anguli ad X verticales sunt æquales; anguli ad B & S alterni in parallelis BF, MS sunt etiam æquales.

Similia ergo sunt triangula. Sunt autem latera BC, *Q*S æqualia. *Q*uare etiam QX, XC sunt æqualia. Itaq; recta BS dividit rectam QC bifariam. *Q*uod erat demonstrandum

Confect. X*a* ducta parallela rectæ BC & terminata in AB est $\frac{3}{4}$ Radii AB. Et potest BX decem quartas Radii AB.

Prop. 5.

Ut AO ad Radium AB ita est BX ad BQ, & ita BQ ad BR.

Est enim tum AB ad BO, tum BQ ad QX ut 2 ad 1. Sunt & anguli ad B & Q (triangulorum ABO, BQX) recti. Sunt ergo triangula illa similia. *Q*uare ut AO ad AB ita BX ad BQ. *Q*uod est primum. Rursus, quoniam in triangulis BQX, BRQ, anguli ad Q & R sunt recti, & angulus ad B communis triangula illa sunt similia. Ut ergo BX ad BQ ita est BQ ad BR. *Q*uod erat demonstrandum.

Coroll. BR est dupla QR, & BQ dupla QX.

Prop. 6.

Radius AB (sive recta QS) est media proportionalis inter BS & BR.

*Q*uoniam enim in triangulis SMB, SQR angulus ad S est communis, & anguli ad M & R recti; triangula illa sunt similia. *Q*uare ut BS ad BM ita est QS (sive dupla BM) ad QR, & ut BS ad duplam BM, ita *Q*S ad duplam QR, id est ad BR. Est ergo *A*B sive QS media proportionalis inter BS & BR. Quod erat demonstrandum.

Prop. 7.

Recta BR æqualis est duabus quintis rectæ BS.

Cum enim quadratum à QS æquale sit decem quadratis a QR, erit recta SR tripla rectæ QR. Sed BR est dupla ejusdem QR. Quare BS est quintupla QR. Est ergo BS ad BR ut quintupla ad duplam, hoc est ut 5 ad 2.

Itaq;

Itaq; BR est æqualis duabus quintis totius BS. Quod erat demonstrandum.
Coroll. Arcus quadrantis descriptus radio BS (æquali BF) nempe arcus FS*e* est ad arcum quadrantis descripti centro B, semidiametro BR, ut 5 ad 2. Nam arcuum similium ad suas semidiametros eadem est ratio.

Prop. 8.

Si a puncto R ducatur recta RY perpendicularis ad AB, erit RY æqualis tribus quintis Radii AB.

Nam propter angulum RYB rectum, erunt SM, RY parrallelæ, & angulus BSM æqualis angulo BRY, & per consequens, triangula BSM, BRY similia. Quare ut BS ad BR, id est ad $\frac{2}{5}$ ipsius BS ita est SM ad RY. Sed ut BS ad $\frac{2}{5}$ ipsius BS, ita est SM ad $\frac{2}{5}$ ipsius SM. Est ergo RY $\frac{2}{5}$ ipsius SM sive trium semiradiorum, id est $\frac{3}{5}$ duorum semiradiorum, sive ipsius radii AB. Est ergo RY æqualis tribus quintis radii AB. Quod erat demonstrandum.

Prop. 9.

Recta BY est quinta pars Radii AB.

Est enim KQ æqualis rectæ BS, sive BF. Est ergo KQ ad BR ut 5 ad 2; & proinde eadem KQ est ad QR ut 5 ad 1; & KR ad QR ut 6 ad 1. Quare (propter similitudinem triangulorum KYR, KMQ) erit KY ad KM ut 6 ad 5, sive ut 18 ad 15. Sed KM est $\frac{15}{5}$ semiradii BM; ergo KY est $\frac{18}{5}$ ejusdem semiradii BM, id est $\frac{9}{5}$ Radii AB. Cum ergo KA sit $\frac{5}{5}$ Radii AB erit AY $\frac{4}{5}$ ejusdem AB; & BY $\frac{1}{5}$. Quod erat demonstrandum.

Prop. 10.

Recta BR est media proportionalis inter BC & YV, id est $\frac{2}{5}$ ejusdem BC.

Cum enim YR æqualis sit $\frac{3}{5}$ & BY æqualis $\frac{1}{5}$ radii AB, quadratum a BR æquale erit decem quadratis a BY, id est rectangulo sub tota BC vel AB, & sub $\frac{2}{5}$ ejusdem AB. Ut ergo radius BC vel AB est ad BR, ita est BR ad YV sive ad duas quintas radii ejusdem BC. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Intervallo B R descriptus arcus quadrantis *b*R*c* est media proportionalis inter arcum BLD, & arcum quadrantis descripti semidiametro YV. Centro enim B intervallo B*f* æquali YV descriptus arcus quadrantis *f g* est ad arcum BLD, id est ad arcum CA descriptum radio BC, ut BR, sive B*b* ad BC; & arcus *b* R*c* ad eundem arcum CA ut B*b* ad BC. Nam arcus similes sunt inter se ut Radii; & recta B*b* est media proportionalis inter B*f* & BC. Quare arcus *b*R*c* est medias proportionalis inter arcum CA & arcum descriptum Radio YV nempe arcum *f g*.

Itaq;

Prop. 11.

Radius BC est media proportionalis inter quintuplam dimidiæ Z, & duas quintas arcus BLD.

Supponatur quod recta aliqua, puta BF sit æqualis quintuplæ dimidiæ Z, Dico radium BC mediam esse proportionalem inter BF & duas quintas arcus BLD.

A recta BN auferatur B*d* æqualis semiradio BO. Reliqua ergo *d* N erit majus segmentum radii BC divisi extrema & media ratione, per 13 *Eucl.* 1. 2. Subtendit ergo *d* N decimam partem circuli cujus radius est BC (per 14. *Euc.* 4.) id est quintam partem semicirculi BDK, id est duas quintas quadrantis BLD. In arcu BLD applicetur recta B*r* æqualis IK. Est ergo arcus B*r* æqualis duabus quintis ipsius BLD. Semidiametro BF describatur arcus quadrantis FS*e* secans rectam B*r* productam in *s*. Erit ergo arcus F*s* quinta pars arcus FS*e*; cujus duplus sit F*t*. Eritq; arcus F*t* duæ quintæ arcus *Fe*. Quoniam autem arcus quadrantis descripti a Z (per primam) est æqualis rectæ BC, erit arcus quadrantis descripti a quintupla dimidiæ Z æqualis quintuplæ rectæ BO. Quare arcus F*t* est æqualis rectæ BC. Jungatur B*t* secans arcum C*u*A in *u*. Erit ergo recta B*u* æqualis radio BC; & arcus C*u* æqualis duabus quintis arcus C*u*A, sive arcui B*r*. Est autem ut BF vel B*t*, nempe quintupla dimidiæ Z ad arcum F*t*, id est ad rectam BC, id est ad rectam B*u* ita recta B*u* id est BC ad arcum C*u*, id est ad duas quintas arcus C*u*A sive arcus BLD. Est ergo recta BC media proportionalis inter quintuplam dimidiæ Z & duas quintas arcus BLD. Quod erat demonstrandum.

Prop. 12.

Radius BC est media proportionalis inter arcum quadrantis descripti a quintupla dimidiæ Z & duas quintas ipsius radii BC.

Supponatur quod arcus FS*e* sit quintuplus semiradii BO. Erit ergo recta BF quintupla dimidiæ Z. Sumatur autem recta B*b* æqualis duabus quintis ipsius *BF*; & describatur quadrans B*bc*. Erit ergo arcus *bc* æqualis ipsi radio *BC*. Sumatur etiam B*f* æqualis duabus quintis radii *BC*. Eritq; ut arcus F*se* id est quintuplus semiradius ad arcum *bc*, id est ad duplam *BO* sive $\frac{2}{5}$ ipsius arcus F*se*, ita arcus *bc* id est recta *BC* ad duas quintas ipsius *BC* sive ad B*f*. Est ergo radius *BC* media proportionalis inter arcum quadrantis descripti a quintupla dimidiæ Z & duas quintas radii *BC*. Quod erat demonstrandum.

Prop. 13.

Prop. 13.

Ut recta BS, nempe ea quæ poteſt 10 ſemiradios, ad rectam AO, ita eſt recta AV ad BR ſive Bc, ſive duas quintas ipſius BS.

Cum enim idem radius BC ſit media proportionalis inter BS & BR, & inter AO & AV; erit rectangulum ſub BS, BR æquale rectangulo ſub AO & AV. Ut ergo BS ad AO, ita reciprocè AV ad BR. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 14.

Ut radius BC ad ſemiſſem rectæ BS, ſive ad BX, ita eſt BR ad ſemiſſem radii BC.

Quoniam enim rectæ BR, BC, BS ſunt continue proportionales, erit ut BC ſecunda ad dimidiam BS tertiæ, id eſt ad BX; ita BR prima ad dimidiam BC ſecundæ. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 15.

Ut radius BC ad dimidiam quintuplæ ſemiſſis Z, id eſt ad $\frac{5}{4}$ Z, ita eſt $\frac{2}{5}$ arcus BLD ad ſemiſſem BC.

Sunt enim quintupla dimidiæ Z. Radius BC. $\frac{2}{5}$ arcus BLD (per 11) continue proportionales. Quare ut ſecunda BC ad ſemiſſem primæ, (id eſt ad $\frac{5}{4}$ Z) ita eſt tertia; nempe $\frac{2}{5}$ Arcus BLD, ad ſemiſſem ſecundæ BC ſive ad BO. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 16.

Ut radius ad ſemiſſem arcus BLD, ita eſt Z ad ſemiſſem radii BC.

Sunt enim Arcus BLD. Radius BC. Z continue proportionales. Quare ut BC ſecunda ad dimidiam BLD primæ, ita Z tertia ad $\frac{1}{2}$ BC ſemiſſem ſecundæ. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 17.

Si centro B intervallo BV deſcribatur arcus quadrantis hVi, ducta recta hi æqualis erit rectæ Bb ſive duabus quintis rectæ BS.

Quoniam BY eſt $\frac{1}{5}$ radii AB, & YV eſt $\frac{2}{5}$ ejuſdem radii, & angulus BYV rectus quadratum a recta BV ſive Bh æquale eſt quinq; quadratis a recta BY. Quare quadratum a recta hi æquale eſt decem quadratis ab eadem BY. Sed recta YR eſt æqualis triplæ BY. Quadratum ergo a BR, id eſt a Bb æquale eſt decem quadratis a BY. Sunt ergo Bb, hi inter ſe æquales. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 18.

Prop. 18.

Si centro B intervallo Bk, quod ſit æquale ſemiſſi rectæ AO deſcribatur arcus quadrantis kl; erit recta quæ ipſum ſubtendit æqualis rectæ BX, ſive ſemiſſi rectæ BS.

Quadratum ab AO æquale eſt quinq; quadratis à BO. Quare quadratum a ſemiſſe ejus Bk æquale eſt quinq; quadratis a dimidia BO. Et quadratum a recta kl æquale decem quadratis a dimidia BO. Sed quadratum a BX æquale eſt decem quadratis a Ba, id eſt decem quadratis a dimidia BO. Sunt ergo rectæ BX & kl inter ſe æquales. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 19.

Deſcribere arcum quadrantis æqualem duabus quintis arcus BLD, & in ipſo rectam ſemiradio BO æqualem ita accomodare ut a Diagonali BD dividatur bifariam.

Centro B intervallo Bf, quod ſit æquale duabus quintis radii BC deſcribatur quadrans Bfg. Erit ergo arcus fg æqualis duabus quintis arcus BLD. Centro eodem B, intervallo BQ deſcribatur arcus quadrantis op ſecans diagonium BD in q; Eritq; recta op (quæ ſecat diagonium BD in q) æqualis radio BC; Centro B, intervallo quod ſit æquale dimidiæ BQ, deſcribatur Arcus quadrantis mn. Et a punctis m & n ducantur rectæ mx, ny parallelæ diagonali BD ſecans arcum fg in x & y. Ducta ergo xy eſt æqualis rectæ mn. Et quia ſubtenſa arcus quadrantis deſcripti radio BQ æqualis eſt radio AB, recta quæ ſubtendit arcum quadrantis deſcriptum dimidia BQ æqualis erit ſemiradio BO. Itaq; deſcriptus eſt arcus, &c. Quod erat faciendum.

Prop. 20.

Recta hi quam oſtendimus (*Prop.* 17.) eſſe æqualem duabus quintis rectæ BS ſive BF tranſit per puncta x & y.

Centro B, intervallo BN (æquali AO) deſcribatur quadrans circuli $B\alpha\zeta$, jungaturq; $\alpha\zeta$ ſecans arcum CuA in γ & δ, poteritque recta $\alpha\zeta$ 10 ſemiradios, & proinde æqualis erit rectæ BF. Ducantur Bx, By & producantur ad arcum CuA. Quoniam ergo eſt ut recta xy, (id eſt duæ quartæ Radii BC) ad arcum fg duas quintas arcus CuA, ita quinq; quartæ radii BC ad quinq; quintas arcus, id eſt ad totum arcum CuA, erit recta quæ jungit Bx, By productas ad arcum CuA æqualis $\frac{5}{4}$ radii BC. Similiter ſi ſumatur in recta hi pars ipſius æqualis ipſi xy, diviſa item a Diagonali BD bifariam, & per ex-

extrema ejus puncta ducantur a puncto B duæ rectæ donec occurrant rectæ $\alpha\beta$, erit rursus ut xy id est duæ quartæ radii BC ad hi duas quintas rectæ $\alpha\beta$ ita $\frac{5}{4}$ radii BC ad totam, $\alpha\beta$ & proinde pars ea ipsius $\alpha\beta$ quæ intercipitur a rectis ductis a puncto B, æqualis erit $\frac{5}{4}$ radii BC, id est rectæ $\gamma\delta$ quæ jungit Bx, By productas ad arcum CuA.

Rursus quoniam est ut Bx vel By (id est $\frac{2}{5}$ radii BC) ad arcum fg (id est ad $\frac{2}{5}$ arcus CuA) ita radius totus $B\gamma$ ad arcum totum CuA; & ut eadem Bx vel By ad hi (id est ad $\frac{2}{5}$ rectæ $\alpha\beta$) ita radius totus $B\gamma$ ad totam rectam $\alpha\beta$, necesse est ut rectæ Bx, & By productæ incidant in puncta γ, δ. Nulla enim alia recta præter $B\gamma$ & $B\delta$ incidere potest in rectam $\alpha\beta$, quin vel major sit radio BC, vel minor. Cum ergo recta $\alpha\beta$ transeat per puncta γ, δ, etiam recta hi transibit per x & y. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Omnes arcus quadrantum paralleli sunt ad omnes rectas parallelas quæ ipsos secant in rectis Bx, By in ratione arcus CuA ad rectam $\alpha\beta$, propterea quod arcus fg est $\frac{2}{5}$ arcus CuA, & hi $\frac{2}{5}$ rectæ $\alpha\beta$ sive BF.

Itaq; cum arcus OM sit semissis arcus CuA, & recta kl semissis rectæ BF, secabunt se mutuo arcus OM & recta kl in productis Bx, By.

Item quia arcus bc est media proportionalis inter arcum CuA, & arcum fg (nam recta Bb quæ potest $\frac{10}{5}$ radii BC est media proportionalis inter radium BC & rectam Bf) recta autem op (id est radius) est media proportionalis inter BF & $\frac{2}{5}$ ejusdem BF, secabunt se mutuo arcus bc & recta op, in rectis Bx & By productis.

Item quia arcus op est media proportionalis inter arcum CuA, & semissem ejusdem arcus OM, recta autem $\eta\zeta$ sive AO (quæ sunt ut infra ostendetur inter se æquales) media inter BF & semissem ipsius BF (nam BF potest 10 semiradios, & AO potest 5 semiradios) recta $\eta\zeta$ & arcus op secabunt se mutuo in productis rectis Bx & By. Et sic de cæteris.

Prop. 21.

Radio BX describatur arcus quadrantis $\eta X\zeta$; & erit recta $\eta\zeta$ quæ ipsum subtendit æqualis rectæ AO.

Est enim BX, semissis rectæ BS sive BF. Potest ergo BX sive $B\eta$ decem quartas radii BC. Tantundem potest $B\zeta$. Itaq; recta $\eta\zeta$ potest viginti quartas radii BC. Sed recta AO potest quinq; semiradios, id est viginti quartas Radii sive BC. Sunt ergo rectæ $\eta\zeta$ & AO inter se æquales. Quod in præcedente promisimus demonstrare.

Consectarium. Constat hinc rectam $\eta\zeta$ sive AO esse mediam proportionalem inter BF & dimidiam ejus BX vel $B\eta$.

Prop. 22.

Recta bc quæ subtendit arcum bc æqualis est rectæ AV.
Nam BR, id est Bb, potest decem quintas Radii AB. Tantundem potest Bc. Quare recta BC potest viginti quintas Radii AB. Sed recta AV (nempe $\frac{4}{5}$ Radii AB) potest sexdecem quintas Radii AB, & YV (quæ est $\frac{2}{5}$ Radii AB) potest quatuor quintas ejusdem AB. Potest ergo AV viginti quintas Radii AB sive BC, Sunt ergo recta bc & AV inter se æquales. Quod erat demonstrandum.
Coroll. Recta AV est media proportionalis inter Bb & ipsius duplum; nimirum, propter triangulum rectangulum & æquicrurum bBc.

Prop. 23.

Ut semissis arcus BLD, id est arcus OM ad BQ sive rectam OM (semissem Diagonalis BD) ita est BQ sive recta OM ad Z.
Quoniam enim Radius BC est media proportionalis inter Arcum BLD & Z; & idem Radius media proportionalis inter rectas BD & BQ, erit ut arcus BLD ad rectam BD, ita reciprocè BQ ad Z; & proinde ut semissis arcus BLD ad semissem rectæ BD, id est ad BQ; ita est BQ sive recta OM ad Z. Quod erat demonstrandum.
Consectarium. Recta BQ potest quinq; quorum BR potest quatuor.
Nam recta BX (quæ est semissis rectæ BF potest quinquies rectam QX. Itaq; (propter Triangula Rectangula similia BQX, BRQ) BQ potest quinquies rectam QR. Sed est dimidia BR. Quare BR potest quater QR. Potest ergo BQ quinq; quorum BR potest quatuor.
Consect. 2. Arcus op, est media proportionalis inter arcum quadrantis descriptum Radio qui æqualis sit semissi arcus CuA, & Radium. Nam Radius arcus op est media proportionalis inter semissem arcus CuA & Z, nempe radium Radii.

Prop. 24.

Z. Recta hi. Arcus fg sunt continue proportionales.
Quoniam enim Radius BC est media proportionalis tam inter arcum CuA & Z quam inter $\frac{55}{25}$ Z & arcum fg, erit ut $\frac{55}{25}$ Z ad arcum CuA, ita reciprocè Z ad arcum fg. Et quia Radius BC est etiam media proportionalis inter BF & hi, erit ut $\frac{55}{25}$ Z ad BF ita recta hi ad arcum fg, sed ut $\frac{55}{22}$ Z ad BF ita est Z ad hi; nam utraq; ad utramq; est ut 5 ad 2. Quare ut Z ad hi ita est hi ad arcum fg. Sunt ergo Z. Recta hi, Arcus fg, continue proportionales. Quod erat demonstrandum.

Confect. Arcus quadrantis cujuſlibet deſcripti centro B, ſi ſecetur recta quæ ſit rectæ hi parallela, terminata in BC & BA, & ſecante arcum in rectis $B\kappa$, $B\gamma$ productis, erit ille arcus ad illam rectam in ratione non modo arcûs $C\upsilon A$ ad rectam BF, ſed etiam in ratione rectæ BF ad quintuplam dimidiæ Z.

Prop. 25.

Recta $B\eta$ æqualis eſt ſemiſſi arcus $C\upsilon A$.

Nam ſi $B\eta$ ſemiſſi arcus $C\upsilon A$ æqualis non ſit, erit vel major eo vel minor. Et ſit primo major. Sumatur ergo minor quam $B\eta$, puta $B\epsilon$ quæ ipſi arcui ſupponatur æqualis. Et centro B, intervallo $B\epsilon$ deſcribatur arcus quadrantis $\epsilon\theta$ ſecans rectas $B\gamma$, $B\delta$ in κ & λ. Ducaturq; per $\kappa\lambda$ recta $\iota\mu$ ſecans BC, BA in ϵ & θ. Secet autem arcus $\eta\zeta$ rectas $B\gamma$, $B\delta$, in π & ϱ, & rectas BC, BA, in σ & λ. His conſtructis. Erit ut arcus fg ad rectam hi, ita arcus $\epsilon\theta$ ad rectam $\iota\mu$. Sed arcus $\epsilon\theta$ deſcriptus eſt Radio æquali ſemiſſi arcus $C\upsilon A$. Quare (per conſectarium præcedentis) recta $\iota\mu$ æqualis eſt arcui quadrantis deſcripti radio qui eſt æqualis dimidiæ BF, id eſt arcui $\eta\zeta$. Rurſus quoniam arcus $\eta\zeta$ eſt deſcriptus Radio qui eſt æqualis dimidiæ BF, erit recta $\sigma\tau$ æqualis arcui quadrantis deſcripti à ſemiſſi quintuplicatæ dimidiæ Z, id eſt a $\frac{5}{4}Z$. Eſt autem ut arcus $\epsilon\theta$ ad rectam $\iota\mu$, ita arcus $\eta\zeta$ ad rectam $\sigma\tau$. Et Ratio quidem arcus $\epsilon\theta$ ad rectam $\iota\mu$ eadem eſt quæ arcus fg ad rectam hi, ratio autem arcus $\eta\zeta$ ad rectam $\sigma\tau$ eadem quæ rectæ hi ad Z, id eſt arcus fg ad rectam hi. Eſt etiam ut arcus fg ad arcum $\epsilon\theta$, ita recta hi ad $\iota\mu$ (ſive ut modo oſtenſum eſt ad arcum $\eta\zeta$.) Sunt ergo arcus $\epsilon\theta$, recta $\iota\mu$, & recta $\sigma\tau$ continue proportionales. Quod eſt impoſſibile. Nam cum ſit ut arcus $\epsilon\theta$ ad rectam $\iota\mu$ id eſt ad arcum $\eta\zeta$ ita arcus $\eta\zeta$ ad rectam $\sigma\tau$, media proportionalis inter arcum $\epsilon\theta$ & rectam $\sigma\tau$, erit ea recta, quæ media eſt inter rectas $\iota\mu$ & $\sigma\tau$. Non eſt ergo recta $B\eta$ major quam ſemiſſis arcus $C\upsilon A$. Eâdem plane methodo oſtendi poteſt quod recta $B\eta$ non eſt minor quam ſemiſſis arcus $C\upsilon A$. Nam ſi ſumatur in BC major quam $B\eta$ quæ ſupponatur æqualis dimidio arcus $C\upsilon A$, & illa ſemidiametro, deſcribatur arcus quadrantis, & ducatur recta per interſectiones ejus & rectarum $B\gamma$, $B\delta$ (quibus lineis ducendis in tantula tabula ſine confuſione non eſt locus) omnia contingent quæ prius; niſi quod antè major erat Z quam hi nunc vero minor. Eſt ergo $B\eta$ nec major nec minor quam ſemiſſis arcus $C\upsilon A$, & proinde ipſi æqualis. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. Recta BF, quintupla dimidiæ Z, & arcus $C\upsilon A$ ſunt inter ſe æquales. Et Bc (ſive hi) Z, & arcus fg inter ſe æquales.

Prop.26.

Prop. 26.

$\frac{5}{2}Z$ & BF ſunt inter ſe æquales.

Cum enim arcus fg. Radius. $\frac{5}{2}Z$ ſint continue proportionales, erunt convertendo, Radius. Arcus fg : : $\frac{5}{2}Z$. Radius. proportionales. Et ſumpto dimidio Antecedente primò, & duplo Conſequente altero, erunt $\frac{1}{2}$ Radius. Arcus fg : : $\frac{5}{2}Z$. Duplus Radius, proportionales. Rurſus quoniam recta hi ſive Bb. Radius. BF $\div$ ſunt continue proportionales, erunt convertendo, Radius. Bb : : BF. Radius. proportionales; ſumptoq; dimidio Antecedente primo, & duplo Conſequente ſecundo, erunt $\frac{1}{2}$ Radius. Bb : : BF. Duplus Radius proportionales.

In rectis BF, Be ſumantur $B\upsilon$, $B\varphi$ utraq; æqualis diagonio BD, eritque $\upsilon\varphi$ æqualis duplo Radio, tangetq; arcum $C\upsilon A$ in medio ejus puncto. Rectam $\upsilon\varphi$ ſecent productæ $B\gamma$, $B\delta$ in χ & ψ. Erit igitur ut xy (id eſt $\frac{1}{2}$ Radius) ad arcum fg; ita $\frac{5}{2}Z$ ad duplum Radium, nempe ad rectam $\upsilon\varphi$. Radio $B\chi$ deſcribatur arcus quadrantis $\xi\omega$. Erit ergo ut $\frac{1}{2}$ Radius ad arcum fg ita $\frac{5}{2}Z$ ad arcum $\xi\omega$. Sunt ergo duplus Radius ſive recta $\upsilon\varphi$ & arcus $\chi\omega$ æquales. Eſt ergo recta $B\xi$ vel $B\omega$ æqualis duplæ Z. Et quia eſt ut $\gamma\delta$ ad $B\gamma$ ita 5 ad 4, erit $\chi\psi$, æqualis $\frac{5}{2}Z$. Rurſus quoniam eſt ut $\frac{1}{2}$ Radius ad Bb, id eſt ad hi, ita BF ad duplum Radium, id eſt ad $\upsilon\varphi$ ſive ad arcum $\xi\omega$, erit recta $B\xi$ æqualis duplæ Z. Sunt ergo Bb & Z inter ſe æquales, & pronide etiam BF & $\frac{5}{2}Z$ inter ſe æquales. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. 1. Manifeſto hinc ſequitur quod etiam arcus $C\upsilon A$ & $\frac{5}{2}Z$ ſunt inter ſe æquales. Nam oſtenſum eſt in præcedentibus quod $\frac{5}{2}Z$. BF, et arcus $C\upsilon A$ ſunt continue proportionales.

2. Duæ quintæ arcus quadrantis eſt media proportionalis inter Radium & duas quintas Radii. Nam oſtenſum eſt Bb ſive $\frac{1}{4}$R cui æqualis eſt arcus fg, poſſe decem quintas Radii BC, & per conſequens mediam eſſe proportionalem inter totum Radium BC & duas ipſius quintas.

Prop. 27.

Decem quadrata ab octante perimetri circuli æqualia ſunt viginti quinq; quadratis a quarta parte diametri, vel (quod eodem recidit) quatuor quadrata ab octante perimetri æqualia ſunt decem quadratis a quarta parte diametri.

Cum enim quadratum a BF æquale ſit decem quadratis a BO quarta parte diametri, erit quadratum ab arcu Fe æquale decem quadratis a ſemiſſi arcus $C\upsilon A$, id eſt ab octante totius perimetri. Quia vero BF & quintupla dimidiæ Z ſunt æquales, etiam arcus quadrantum ab illis deſcripti

ſcripti

scripti sunt æquales. Sed arcus quadrantis descripti a quintupla dimidiæ Z est æqualis quinq; semiradiis, id est quinq; quartis diametri. *Quare* quadratum ejus æquale est 25 quadratis a quarta parte diametri. Itaq; decem quadrata ab octante perimetri æqualia sunt 25 quadratis a quarta parte diametri, sive semiradii. Id est (quia est ut 10 ad 25, ita 4 ad 10) quatuor quadrata ab octante perimetri, sive quadratum unum a quadrante perimetri, sive ab arcu CuA æquale est decem quadratis a semiradio BO. Quod erat demonstrandum.

B. Ita certe, sed a *Josepho Scaligero* prius quam a te. Nam & ille potentiam perimetri facit decem diametros. Quem errorem confutatum esse nosti a *Clavio*.

A. Quomodo autem confutavit?

B. Ostendens majorem esse rectam illam quæ potest decem diametros quam ea quæ numeris determinata est ab *Archimede*.

A. Videtur ergo *Scaligerum* refutasse non *Clavius*, sed *Archimedes*.

B. Parum refert uter id fecerit. Pone Radium partes habere æquales 10000000. Itaq; semiradius est 5000000; quadratum ejus est 25000000000000. Id decuplatum est 250000000000000. Hujus numeri Radix est 15811, *&c*. At qui *Archimedem* sequuti sunt quadrantem perimetri minorem esse faciunt quam 15708, *&c*.

A. Scio. Et nisi tibi Arithmeticos Cyclometras omnes hac in re deceptos esse clarè ostendam. Et præterea rationem hanc perimetri ad diametrum manifestius adhuc comprobavero, sentias licet cum *Clavio* aliisq; ; atq; etiam cum illis (nisi mores tui id non sinant) conviciare. Interea vero vides quod, nisi hæc vera non sint, quam facile sit arcui quadrantis cujuscunq; rectam exhibere æqualem; & contra, rectam arcui quadrantis, ope rectæ Bγ datæ positione. Nam omnes rectæ quæ sunt parallelæ arcui *h i*, & arcus quadrantum ipsas secantes in rectis Bx, & By quando opus est productis, sunt inter se æquales.

Prop. 28.

Radius AB assumpta Tangente arcus triginta graduum æqualis est rectæ BF. Ducatur Az Secans arcus 30. grad. Jam radius AB est media proportionalis inter secantem arcus 30. graduum, & Sinum grad. 60. Eadem autem AB est media proportionalis inter arcum CuA & Z. Quare ut arcus CuA est ad Secantem grad. 30. ita est Sinus arcus 60 grad. ad Z. Est ergo etiam ut arcus CuA ad potentiam Secantis 30. grad. id est ad radium AB una cum dimidia Secante Bz (quæ est Tangens arcus 30. graduum) ita sinus arcus 60. graduum ad potentiam ipsius Z, id est ad radium quadrantis cujus arcus est æqualis ipsi *Sinui* arcus 60. graduum, una cum dimidia ipsius Z. Sed radius quadrantis cujus

arcus

arcus æqualis est Sinui 60. graduum, potest $\frac{3}{2}$ Z. Quare ut arcus CuA est ad radium AB plus Bz, ita est Sinus 60. graduum ad eam quæ potest $\frac{3}{2}$ Z una cum ipsa dimidia Z. Arcus *h i* secet diagonalem in 2. ducaturque 23 paralella BO secans AB in 3; eritque 2 3 æqualis dimidiæ Z. Nam recta B*h* id est B 2 est media proportionalis in *h i* & $\frac{1}{2}$ *h i*, id est inter B 3 † 23 & ipsam 23. Centro 2 intervallo quod sit duplum rectæ 23 ducatur arcus circuli secans AB in μ; eritque quadratum ab μ 2 æquale quatuor quadratis a dimidia Z, & quadratum ab μ 3 æquale tribus quadratis a dimidia Z. Est ergo μ 3 radius quadrantis, cujus arcus est æqualis Sinui 60 graduum. Est autem μ 2 radius quadrantis cujus arcus est æqualis AB. Cum ergo sit ut μ 2 ad 23, ita radius ad semiradium; & ut μ 2 ad μ 3, ita radius AB ad Sinum 60 graduum, producta μ 2 incidet in punctum O, quia BO æqualis est semiradio. Et proinde μO erit æqualis AB; &, per consequens, μB æqualis est Sinui 60 grad. Quoniam autem anguli B 23 & 3 B 2 semirecti sunt æquales, etiam rectæ B 2. 23 sunt æquales. Est ergo recta B 3 æqualis dimidiæ Z; & tota μB (id est Sinus 60 graduum) æqualis rectæ quæ potest $\frac{3}{2}$ Z una cum dimidia Z. Quoniam ergo est ut arcus CuA ad radium AB una cum Tangente 30 graduum, ita Sinus 60 graduum ad eam quæ potest $\frac{3}{2}$ Z una cum dimidia Z; & ostensum modo est Sinum 60 grad. æqualem esse ei quæ potest $\frac{3}{2}$ Z una cum dimidia Z, erit quoque arcus CuA æqualis Radio AB una cum dimidia secante, sive tota Tangente 30 graduum. Sed BF (per præcedentia) æqualis est arcui CuA. Quare radius AB assumpta Tangente arcus triginta graduum æqualis est rectæ BF. quod erat demonstrandum.

B. Videtur bene demonstratum esse, ut est certissime, si *h i* & Z sint æquales, id est, si vera sunt præcedentia. Sed res adeo subtilis esse videtur ut minus fidenter huic quam præcedentibus demonstrationibus assentiar.

A. Age ergo, alia methodo, omissa ista Z, clarius adhuc idem demonstrabo. En Methodum, quæ sequitur, alteram, atque etiam tertiam.

Prop. 29.

Describatur rursus (*Fig*. 2.) quadratum ABCD; dividaturq; a rectis MN, OP secantibus se mutuo in centro quadrati ad Q in quadrata quatuor æqualia. Ducantur idem diagonales AC, BD, quæ transibunt per Q deinde Radiis AB, BC, CD, DA describantur quatuor arcus BLD, CEA, DHP, AGC secantes rectas MN, OP, in I,K,S,T; & diagonales AC, BD, in H,L,G,E. Postremo producatur AP in directum usq; ad X, ita ut AX sit æqualis duplæ MK, id est duplo Sinui recto 60 graduum. Dico ductam XD æqualem esse duplo Radio AD; & pro-

ductâ

ductâ XD ad BC productam in F, rectam CF æqualem esse tangenti arcus 30 graduum.

Producta enim recta SP donec occurrat producto arcui BLD in V, erit PV Sinus rectus 60 graduum. Itaq; ducta DV erit æqualis radio AB; & ducta VY parallella AD, erit æqualis semiradio; & AY æqualis PV, id est semissi totius AX. Itaq; producta DV ad AX dividetur bifariam in V. Incidet ergo DV producta in X. Est ergo XV æqualis VD, id est Radio AD; & proinde XD æqualis est duplo Radio. *Quod* est primum. Rursus, quoniam est ut PV Sinus rectus 60 graduum ad Radium CD, ita Radius ad secantem arcus 30 graduum, si producatur XD ad BC productam in F, erit DF ipsa secans arcus 30 graduum; & per consequens CF erit Tangens arcus 30 graduum. Quod erat demonstrandum.

Consect. 1. Recta XF est dupla rectæ BF. Nam XD est dupla Radii DC & DF est dupla CF. Quare & tota XF est dupla duarum DC, CF id est totius BF.

Consect. 2. Omnis pars rectæ XF sumpta ab X dupla est rectæ quæ ipsi parti sumptæ existens contermina ducitur rectæ BF parallela. Nam in triangulo quocunq; quæ ducuntur basi parallelæ sunt inter se ut laterum segmenta.

Prop. 30.

In triangulo rectangulo cujus Hypotenusa est laterum reliquorum unius dupla, potentiæ laterum sunt inter se ut 4.3.1.

Quoniam enim Hypotenusa est dupla lateris unius eorum quæ continent angulum rectum, quadratum ab Hypotenusa erit quadrati ab eodem illo latere quadruplum. Quare potentia Hypotenusæ ad potentiam unius laterum reliquorum est ut 4 ad 1. Sed in triangulo rectangulo potentia Hypotenusæ æqualis est duabus potentiis duorum laterum reliquorum. Quare si a potentia Hypotenusæ, id est a 4 subducatur potentia lateris ejus cujus Hypotenusa est dupla, remanebit potentia lateris reliqui. Deducta autem 1, (potentia unius lateris) a 4 (potentia Hypotenusæ) restant 3. Est ergo 3 potentia lateris reliqui. In triangulo igitur rectangulo cujus Hypotenusa est unius laterum reliquorum dupla, potentiæ laterum sunt inter se ut 4, 3, 1.

Prop. 31.

Si a puncto L quod dividit arcum BLD bifariam ducatur recta lateri CD parallela secans XD in λ, erit Xλ æqualis diagonali AC.

Ducatur *Lb* sinus rectus arcus *BL*. Deinde ducatur recta Lλ parallela rectæ

rectæ XA. Præterea ducatur λΣ ad XA perpendicularis, eritq; λΣ æqualis rectæ *bL*, id est semissi diagonalis *AC*. Quoniam autem est ut XD ad AD ita 2 ad 1, & ita Xλ, ad λΣ, erit Xλ dupla rectæ *bL*, id est æqualis diagonali AC. Quod erat demonstrandum.

Prop. 32.

Si per punctum S ducatur recta *e*S parallela rectæ BF secans diagonalem AC in *q*, & rectam XF in *f*, erit recta A*q* æqualis rectæ XΣ.

Cum enim in triangulo rectangulo A*e*S latus AS est duplum lateris *e*S, erit potentia rectæ A*e* tripla potentiæ *e*S. Potest ergo A*e* tres semiradios. Et quoniam angulus A*eq* est rectus, & angulus *e*A*q* semirectus, etiam angulus, *eq*A erit semirectus. Itaq; trianguli A*eq* anguli ad A & *q* sunt æquales; quare & rectæ A*e*, *eq* sunt æquales, quarum utriusq; potentia est 3 semiradii. Quare recta A*q* quæ potest utramq;, potest 6 semiradios. Tantundem autem potest recta XΣ. Est enim Xλ æqualis diagonali AC & proinde potest 8 semiradios, & semissis ejus Σλ potest 2 semiradios, est autem angulus ad Σ rectus; potest ergo XΣ 6 semiradios. Sunt ergo ipsæ A*q*, XΣ (quæ æqualia possunt) inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

Prop. 33.

Si fiat triangulum rectangulum cujus Hypotenusa æqualis sit duplæ diagonali AC, & latus minimum sit eidem AC æquale, poterit latus reliquum 24 semiradios.

Producatur *b*L ad *a* ita ut *ba* sit dupla ipsius *b*L, & (per consequens) æqualis diagonali AC. Centro autem *a*, intervallo quod sit duplum ipsius *ba* vel AC describatur arcus circuli secans BA in λ. Itaq; triangulum λ*ba* est rectangulum in *b*, & Hypotenusa λ*a* est dupla lateris *ba*. Dico latus λ*b* posse 24 semiradios. Nam diagonalis AC vel *ba* potest 8 semiradios. Quare dupla ejus, id est λ*a* potest 32 semiradios. Ablatis autem 8 a 32 restant 24 semiradii pro potentia lateris λ*b*. Itaq; si fiat triangulum rectangulum, &c. Quod erat demonstrandum.

Prop. 34.

Idem est punctum X & λ.

Secet *ba* latus CD in *g*. Quoniam ergo utraq; AL, *bg* est æqualis radio, erit LC (nempe excessus diagonalis supra Radium) æqualis *ga* (excessui item diagonalis supra Radium.) Et quoniam λ*a* est æqualis duplæ *ba*, si detrahatur ab λ*a* duplus Radius, id est *XD*, relinquetur dupla

LC, sive dupla *ga*. Sed D*a* pars rectæ DF est dupla rectæ *ga*. Nam ut DF ad CF, id est ut 2 ad 1, ita est D*a* ad *ga*. Recta ergo XD una cum recta D*a* est æqualis duplæ AC, id est rectæ λ*a*. Sunt ergo X*a*, λ*a* inter se æquales. Est ergo X & λ idem punctum. Quod erat demonstrandum.

Prop. 35.

Recta quæ potest 3 semiradios assumpta quarta parte Diagonalis, poterit 6 semiradios.

Producatur AL ad latus BC in R. Intersectio autem duarum rectarum OQ & BR sit in *r*. Juncta ergo A*r* potest 3 semiradios. Nam *br* potest unum semiradium, & A*b* duos semiradios. Producta autem A*r* ad latus BC incidet in R. Est enim ut *Ar* quæ potest 3 semiradios ad *br* quæ potest unum semiradium, ita AR quæ potest 6 semiradios (nam AB potest 4 semiradios, & BR duos semiradios) ad BR. Sumatur jam in recta RB pars ejus R*s* æqualis dimidiæ BR, id est quartæ parti diagonalis AC. Et in recta AD sit sumpta A*t* æqualis rectæ A*r*; jungaturq; *ts*. Jam tam A*r* quam A*t* (quarum utraq; potest 3 semiradios) potest 6 rectas R*s*; & ipsa R*s* unam R*s*. Est ergo A*r* ad R*s* ut ea quæ potest 6 ad eam quæ potest 1. Et ut A*r* ad R*s* ita est utraq; simul A*r* & A*t* ad R*s* bis sumptam. Jungatur *ts*. Si ergo *ts* transeat per *r* erunt R*r*, & R*s* inter se æquales; & per consequens AR quæ potest 12 quartas partes diagonalis AC, superat A*r* quæ potest 6 quartas partes diagonalis ejusdem AC, tanto quanto est quarta pars diagonalis AC. Quod est propositum. Sin R*r* non sit æqualis R*s*, sumatur a puncto R in ipsa recta RA alia quædam *Ru* ipsi *Rs* æqualis; ductaq; *su* producatur ad latus AD in *h*. Eruntq; (propter *Ah*, *Rs* parallelas) triangula *Rus*, *Auh* similia. Et quoniam latera *Rs*, *Ru* trianguli *Rus* sunt æqualia, erunt quoq; latera *Ah*, *Au* trianguli *Ahu* inter se æqualia. Quod est absurdum. Nam rectæ *sh*, *st* non possunt esse parallelæ, quia ducuntur ambæ a puncto *s*. Itaq; cum *At*, *Ar* sint æquales, rectæ *Ah*, *Au* non possunt esse æquales. Sunt ergo *Rs* & *Rr* æquales; & per consequens *Rr* est æqualis quartæ parti diagonalis AC. Quare differentia inter *Ar* quæ potest 3 semiradios, & AR quæ potest 6 semiradios est æqualis quartæ parti diagonalis AC. Quod erat demonstrandum.

B. Manifestum est. Pergo ad cætera.

Prop. 36.

Ducta XP & producta transibit per L, & secabit omnes rectas parallelas rectæ BF, interceptasq; inter XB & XF, bifariam.

Est enim ut ea quæ potest 12 semiradios (id est ut XA) ad eam quæ potest unum semiradium (id est ad AP) ita ea quæ potest 24 semiradios (id est X*b*) ad eam quæ potest 2 semiradios, id est ad *bL*. Quoniam ergo AP & *bL* sunt parallelæ, & Anguli ad *A* & *b* recti, ducta XP transibit per *L*. Secundo quoniam XP secat AD bifariam, eadem producta secabit omnes rectas ipsi AD parallelas, quæ intercipiuntur inter XA & XD productas, bifariam. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. XL dividit arcum BLD ita ut pars una sit ad reliquam ut 1 ad 1.

Prop. 37.

Si *AD* divisa sit in *d*, ita ut *Ad* sit $\frac{1}{3}$ totius *Ad*, ducta *Xd*, & producta transibit per punctum S.

Quoniam enim est ut $\sqrt{12}$ ad $\sqrt{27}$ ita $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{9}$, & ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{9}$ ita $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ad $\sqrt{\frac{1}{4}}$, erit ut $\sqrt{12}$ ad $\sqrt{27}$ ita $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{1}{9}}$. Est autem *Ad* $\sqrt{\frac{1}{9}}$ Radii BC; (nam *Ad* est tertia pars Radii) quare *Xd* producta ad *eS* abscindet partem ejus quæ erit $\sqrt{\frac{1}{4}}$ BC. Abscindet ergo ipsam *eS*; (nam quadratum ipsius *eS* est æquale quartæ parti quadrati a Radio BC.) Transit ergo *Xd* producta per punctum *S*. Quod erat demonstrandum.

Aliter.

XA est ad *Xe* (per constructionem) ut 2 ad 3. Item *Ad* est ad *AP* sive *eS* (per Hypothesim) ut 2 ad 3 est ergo ut *XA* ad *Xe*, ita *Ad* ad *eS*. Ducta ergo *Xd* & producta transibit per *S*. Quod erat demonstrandum.

Consectarium 1. *Xd* producta ita secat arcum BLD ut pars minor sit ad reliquam ut 1 ad 2. Est enim arcus BS tertia pars totius arcus BLD.

Consect. 2. Producta *eS* ad XF in *f*, manifestum est, cum sit *Ad* $\frac{1}{3}$ *AD*, totam *ef* triplam esse semiradii *eS*; minorem autem arcu BLD.

Consect. 3. Manifestum quoq; est omnes rectas quæ sunt parallelæ *AD*, & interceptæ inter XB, & XF secari ab eadem *Ad* producta in ratione *Ad* ad *dD*, id est in ratione 1 ad 2.

Prop. 38.

Si recta *Ad* secetur bifariam in *i*, ducta *Xi* & producta secabit arcum BS bifariam.

Ducatur *Xi* & producatur ad arcum BS in *c* secans *eS* in *p*. Quoniam ergo in triangulis *XAd*, *XeS* bases *Ai*, *eS*, interceptæ sunt parallelæ,

rallelæ, & X *i* secat A *d* bifariam, secabit bifariam quoq; *e*S, puta in *p*. Dividitur ergo *e* S bifariam in *p*. Dico eandem X *p* productam secare arcum BS bifariam in *c*.

In latere BC sumatur B*o* æqualis chordæ arcus BS; & in latere AD sumatur eidem chordæ æqualis A *n*; ducaturq; *on* secans XS productam in *m*. A puncto autem *m* ducatur ad latus AB perpendicularis *m l*. Deinde centro *n*, Radio *n o* (qui est æqualis Radio AB) ducatur arcus circuli indefinitè. Quoniam jam *l m* (æqualis B*o*) est æqualis chordæ arcus BS, erit semissis ipsius *l m* æqualis Sinui recto arcus graduum 15. Arcus autem 15 graduum sumptus ab *o* in arcu qui describitur Radio *n o*, æqualis est arcui 15 graduum sumpto a B in arcu BS; & utriusq; Sinus rectus est semissis rectæ *l m*. Quare duo arcus, quorum alter describitur a Radio AB, alter a Radio *n o* secabunt se mutuo in medio rectæ *l m*. Sed quoniam *l m* & *e* S sunt parallelæ, & ambæ terminatæ in rectis X *l*, X *m*, recta X *p* quæ secat *e* S bifariam, secabit quoq; *l m* bifariam. Secat autem in *c*. Est ergo *l c* Sinus rectus arcus 15 graduum sumptorum in arcu BS; & *c m* Sinus rectus arcus 15 graduum sumptorum in arcu descripto Radio *n o*. Itaq producta recta X *i* dividit arcum BS bifariam. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Eadem methodo ostendi potest, Quod bisecta rursus A *i* in *x*, juncta X *x* & producta secabit arcum B *c* bifariam. Et sic perpetuò ab eodem puncto *X* rectæ ductæ per partes ipsius A *d* ortas ex bisectione, bisecabunt etiam arcum quæq; sibi respondentem.

Prop. 39.

Recta BF est æqualis arcui BLD.

Producatur recta *l c* ad occursum rectæ XF in *α*, & erit ut A *i* ad AD, ita *l c* ad *l α*. Sed A *i* est sexta pars lateris AD. Ergo & *l c* est sexta pars rectæ *l α*. Est ergo *l α* æqualis 6 Sinubus rectis arcus *b c*, id est 6 Sinubus rectis sextæ partis arcus BLD. Est autem arcus B *c* major quam Sinus suus *l c*. Totus igitur arcus BLD major est quam tota recta *l α*. Similiter quia X *x* producta dividit arcum B *c* bifariam, Sinus rectus dimidii arcus B *c* productus ad XF erit duodecuplus ejusdem Sinus. Arcus autem totus duodecuplus dimidii arcus B *c*. Est autem dimidius arcus B *c*, major quam Sinus suus. Quare & totus arcus BLD major est quam duodecuplus Sinus dimidii arcus B *c*, id est quam Sinus dimidii arcus B *c* productus ad XF. Atq; ita contingit per omnes bisectiones ulteriores. Omnis ergo recta parallela BF, & intercepta inter rectas XB & XF minor est quam arcus BLD. Non est ergo recta BF major quam arcus BLD. Minor autem esse non potest. Recta enim parallela ipsi BF, & intercepta inter XB, & XF quantulumcunq;

pro-

productas, major erit omnibus simul Sinubus rectis arcuum æqualium ortorum ex bisectione etiam æterna. Non est ergo recta BF aut major aut minor quam arcus BLD. Restat ergo ut illi sit æqualis. Quod erat demonstrandum.

B. Absq; dubio ita est. Recta BF arcui BLD æqualis est exactissimè. Neq; quisquam, credo, est qui negabit.

A. Non videris ingenium humanum satis explorasse, qui sic credis. Homines enim ad contemptum pecuniæ nondum exculti accedunt ad scientiarum studium lucri causa. Eorum ergo interest, si volunt magnis mercedibus conduci, ut non videantur Artium quas profitentur quoquam alio esse imperitiores. Præterea quotus quisq; est qui, cum Problema aliquod ex difficilioribus solutum esse a se publicè prædicaverit & deceptus fuerit, emanantem aliunde veritatem quantum potest & quamdiu color aliquis inveniri potest, ad tuendam existimationem suam supprimere non conabitur? An fœdissimos illos errores quos prioribus colloquiis in Scriptis *Wallisii* animadvertimus, confitebitur *Wallisius*? Nihil minus.

B. Tecum sentio.

A. Propositionis hujus 38 veritatem confirmabunt non nihil, & valè illustrabunt quæ nunc dicturus sum. Semidiametris AP, A *d*, A *i*, A *x*, describantur quadrantes, quorum arcus sint MP, *k d*, *y i*, *z x*. Imaginare autem dum producuntur rectæ XP, XA, una promoveri puncta A, & P, usq; ad arcum BL. Nonne ergo, cum arcus MP & BL sint æquales, & producta XP transit per L, nonne inquam rectæ X *d*, X *i*, X *x*, singulæ abscindent partes arcus BL ipsis A *d*, A *i*, A *x*, proportionales? Et quoniam arcus MP, coincidit cum arcu BL, & arcus *k d*, cum arcu BS, nonne cæteri quoq; arcus *y i*, *z x* coincident quoq; cum partibus arcus BL sibi æqualibus? Ex quo sequetur, ut prius rectam BF æqualem esse arcui BLD.

B. Sine dubio coincident omnes cum suis æqualibus, propterea quod congruunt in tribus punctis B, S, L. Alioqui dubitarem ne ex una parte magis extendi possent quam ex altera. Nunc autem videtur hæc ipsa etiam per se planissima demonstratio; & eadem quam scripserat *Hobbius* Cap. 20 *de Corpore*.

A. Ita est.

B. Cur ergo quod bene scripserat retractavit?

A. Confisus demonstrationibus suis non dubitavit quin idem sentiret *Archimedes*. Postea verò cognito quod discreparent inter se Methodus Geometrica sua, & *Archimedis* Arithmetica, quæ rectè scripta erant, quantum potuit ad consensum cum calculo *Archimedis* cœpit detorquere. Quod cum non successit, totum illud caput induxit; & denuò rem aggressus non sensit delapsus in eosdem numeros, antequam

librum

librum edidiſſet. Itaq; iterum demonſtrationem ſuam ad veriſimilitudinem revocavit, reverentia *Archimedis*. Tantum abfuit ut doctos homines ſeculorum antecedentium parvi faceret (quod dicunt adverſarii) ut veritatem ipſam propter eorum exiſtimationem deſeruerit, & penè prodiderit. Quod etiam ante eum fecit *Joſephus Scaliger*, ſed ἀμυνικωτέρωσ. Nam *Hobbius* concluſionem quam abjecerat reſumptam in eodem libro Anglicè edito, ut videtur (nam tacent adverſarii) demonſtravit.

B. De veritate concluſionis non amplius dubito. Veruntamen habeo quæ te interrogare velim pauca quædam, & (ut mihi videntur) neceſſaria. Primò, quî ſciam rectam BF poſſe decem ſemiradios? Oſtende igitur quod recta BF compoſita ex Radio BC & Tangente arcus 30 graduum poteſt decem ſemiradios.

A. Demonſtratio ſequitur.

B. Ignoſce quod reſpexeram, non proſpexeram.

Prop. 40.

Recta BF poteſt decem ſemiradios.

Ducantur rectæ Bq, tq, quarum tq erit latus quadrati Aq, junctaq; Xq producatur ad BC in μ. Producatur quoq; tq ad idem latus BC in ξ. Deinde ducta $q\nu$ dividat angulum $\xi q \mu$ bifariam; itaq; eadem $q\nu$ producta ex parte q dividet quoq; angulum Xqt bifariam. In recta Xq ſumatur qo æqualis $q\xi$, jungaturq Bo quæ producta ſecet νq, ξq, productas in π & ρ. Sunt ergo quatuor anguli ad q, nimirum $\xi q\nu$, $\nu q\mu$, $\rho q\pi$, πqo inter ſe æquales. Producatur Bq utcunq; in x, eritq angulus $Bq\xi$ æqualis angulo $xq\mu$ (ut mox demonſtrabitur. Si igitur angulo $Bq\xi$ addatur angulus $\xi q\nu$, & angulo $xq\mu$ addatur angulus $\nu q\mu$ (ipſi $\xi q\nu$ æqualis) erunt anguli $Bq\nu$ & $xq\nu$ (anguli deinceps ſuper rectam Bx) inter ſe æquales; & propterea uterq; eſt rectus. Itaq; ſimilia ſunt triangula $Bq\nu$, $B\xi q$; & proinde anguli eqB, $\xi q\nu$, id eſt eqB, πqo ſunt inter ſe æquales. Eſt ergo angulus Xqe recto minor, tanto quantus eſt angulus eqB, ſed angulus ex BLq eſt recto minor tanto quantus eſt angulus eqB. (Nam angulus rectus Xeq æqualis eſt utriq; ſimul angulo XBq, eqB.) Sunt ergo anguli XBq, XqB æquales. Quare etiam rectæ XB, Xq æquales ſunt. Sed recta Xq poteſt 30 ſemiradios (poteſt enim Xe 27, & eq 3 ſemiradios). Ergo & XB poteſt 30 ſemiradios. Et quia XF eſt dupla BF, poteſt XF 40 ſemiradios, & BF 10 ſemiradios. Quod erat demonſtrandum.

Reſtat probandum quod anguli $xq\mu$, $Bq\xi$. Sunt æquales. Quod ſic oſtendo. Quoniam angulus $\xi q\mu$ dividitur bifariam a recta $q\nu$, erit ut $\mu\nu$ ad $\nu\xi$; ita μq ad ξq, id eſt ad qo. Dividit ergo recta Bq angulum

gulum ξqo, in eandem rationem in quam recta $q\nu$ dividit $\xi q\mu$ id eſt bifariam. Sunt igitur anguli $Bq\xi$, Bqo inter ſe æquales. Sed angulus Bqo æqualis eſt verticali ſuo $xq\mu$. Sunt ergo $xq\mu$, $Bq\xi$ inter ſe æquales, ut erat aſſumptum.

Aliter.

A puncto B ad rectam $X\mu$ ducatur perpendicularis, & in ea ſint
puncta o, π, ρ. Eſt ergo angulus Boq æqualis duobus angulis $o\pi q$, πqo; &
angulus $B\xi q$ æqualis duobus angulis $\xi\nu q$, $\xi q\nu$. Sunt igitur duo
anguli $\xi q\nu$, $\xi\nu q$ æquales duobus angulis $o\pi q$, πqo. Sed angulus $\xi q\nu$ æ-
qualis eſt angulo πqo. Quare & angulus $\xi q\nu$ eſt æqualis angulo $o\pi q$.
Itaq; anguli $B\nu q$, $B\pi q$ ſunt æquales. Sed & anguli recti ad ξ & o ſunt
æquales. Quare omnes anguli trianguli $B\xi q$ æquales ſunt omnibus an-
gulis trianguli Boq; ſumptis maximo ad maximum, minimo ad mini-
mum, medio ad medium. Habent autem triangula $B\nu q$, $B\pi q$ latus Bq
commune. Quare etiam latera lateribus angulos æquales ſubtendentia
ſunt æqualia. Sunt ergo rectæ νq, πq æquales; & proinde angulus
$Bq\nu$ eſt rectus, & angulus $\xi q\nu$ æqualis angulo Bqe ſive $qB\xi$; & angulus
oqB (id eſt XqB) æqualis eſt angulo XBq. Rectæ ergo XB & Xq ſunt
inter ſe æquales. Sed recta Xq poteſt 30 ſemiradios. Ergo & XB poteſt 30 ſemiradios. Quod erat, &c.

B. Aſſentior. Sed quando veniemus ad calculum Arithmeticum?

A. Paulo inferius, ſed non concordabit cum modo demonſtratis.

B. Mirum ergo ni quæ pro demonſtratis habuimus demonſtrata non ſint.

A. Ne metue; nam diſcordia hæc apparens non noſtra eſt erratio,
ſed orta a prava vel male intellecta definitione puncti atq; etiam li-
neæ (tanquam eſſent indiviſibilia) quædam γοητεία, ſicut ego facile,
ut puto, oſtenſurus ſum.

Prop. 41.

Linea omis recta comparata cum curva conſideranda eſt ut habens
latitudinem. Centro A radio Aq ducatur arcus $q\sigma$ ſecans AD pro-
ductum in σ, jungaturq; $X\sigma$, $e\sigma$. Quoniam ergo XA poteſt 12 ſemi-
radios, & $A\sigma$ poteſt 5 ſemiradios; poterit $X\sigma$ 18 ſemiradios. Et
quia $A\sigma$ poteſt 6 & Ae 3 ſemiradios, poterit $e\sigma$ 9 ſemiradios. Sed Xe
poteſt 27 ſemiradios, id ambas rectas $X\sigma$, $e\sigma$. Eſt ergo angulus $X\sigma e$ eſt
rectus. Producatur recta $X\sigma$ in τ, ita ut $X\tau$ æqualis ſit duplæ AN, id
eſt duplæ ejus quæ poteſt quinq; ſemiradios. Poterit ergo $X\tau$ 20 ſe-
miradios. Quoniam ergo eſt ut eX quæ poteſt 27 ſemiradios ad $e\sigma$
quæ poteſt 9 ſemiradios, ita BX quæ poteſt 30 ſemiradios ad eam

quæ

quæ potest 10 semiradios; & iterum ut eX quæ potest 27 semiradios, ad Xσ quæ potest 18 semiradios, ita BX quæ potest 30 semiradios, ad ad Xτ quæ potest 20 semiradios, erunt Bτ & $e\sigma$ parallelæ, & uterque angulus BτX, $e\sigma$X rectus. Quoniam autem juncta Bσ potest duas rectas Aσ, AB quarum hæc potest 4, illa potest 6 semiradios poterit Bσ 10 semiradios. Sunt ergo Bσ, Bτ æquales, & proinde ambo puncta σ & τ erunt in eodem arcu circuli cujus centrum est B, radius Bσ. Cum ergo $B\tau$ sit ducta ex centro, recta $X\tau$ tangit circulum in τ. Quare recta $X\sigma$ circulum eundem secabit. Sunt autem σ & τ in eadem recta Xτ per constructionem. Eadem ergo recta tanget circulum eundem in τ & secabit in σ. Quod est absurdum. Non est ergo recta $X\sigma\tau$ sine latitudine per quam possit latus ejus exterius circulum tangere & latus interius secare eundem circulum. Si ergo comparetur recta & curva neutra earum considerari potest sine latitudine. Quod erat demonstrandum.

B. Etsi mira mihi hæc videantur, nihil habeo tamen quod dicam in contrarium. Sed ita sunt subtilia ut non possim sine majore adhuc luce intimam tanti Paradoxi causam, ut cupio, comprehendere. Expectabo igitur calculum Arithmeticum.

A. Calculus Arithmeticus parum te juvabit, quod ipse facile prævidere potes, qui nosti neq; lineæ rectæ & curvæ, neq; quadrati & circuli ullam partem aliquotam esse posse communem; & proinde nullum illis esse commune *Unum*, quod haberi necesse est in omni comparatione quantitatum Arithmetica. Veniamus tamen ad Calculum. Quod rectangulum sub lateribus duorum quadratorum medium est proportionale inter ipsa quadrata satis nosti. Nam si fuerint duo quadrata AA, BB, erunt AA, AB, BB continuè proportionalia; quia ut A ad B, ita est tam AA, ad AB, quam AB ad BB. Scis etiam quod si duo quadrata AA, BB, constituantur deinceps ita ut eorum utriusq; duo anguli oppositi sint in eadem recta, rectangulum AB erit unum ex complementis ad quadratum a tota A†B. His intellectis quæremus potentiam recti XQ hoc modo. Recta XA æqualis est (per constructionem) duplo Sinui recto arcus 60 graduum. Quoniam ergo Sinus ille rectus potest 3 semiradios, potest XA, quæ ejus dupla est 12 semiradios. Potest autem AB 4 semiradios. Quare utrumq; simul quadratum æquale est 16 quadratis à semiradio. Est autem rectangulum sub AX & AB medium proportionale inter 12 & 4 quadrata a semiradio. Quare rectangulum sub XA, AB est, $\surd$ 48, idemq; duplicatum fit radix 48 quadruplicati sive $\surd$ 192, id est $13\frac{23}{27}$ proximè. Tantum ergo valent ambo simul complementa quadrati ab XB. Totum ergo quadratum ab XB æquale est $12 \dagger 4 \dagger 13\frac{23}{27}$ id est $29\frac{23}{27}$, quod minus est quam 30 quadrata a semiradio. Quod prædixi tibi fore. Nam ut fieret 30 quadrata, oportuit rectangulum

angulum sub XA, AB esse $\surd$ 196. Vides ergo calculus Geometricus & Arithmeticus quantum inter se differunt. Simili Methodo quadratú ab XF invenietur minus quam 40 quadrata semiradii. Potest enim XD (duplus radius) 16 semiradios: & DF Secans $5\frac{1}{3}$ semiradios (nam Sinus rectus arcus 60 graduum. Radius. Secans arcus 30 graduum, sunt continuè proportionales in ratione $\surd$ 3 ad $\surd$ 4. Quare Secans DF est $\surd$ $5\frac{1}{3}$ semirad.) Rectangulum ergo sub XD & DF est $\surd$ $85\frac{1}{3}$; & duplum ejus est $\surd$ $341\frac{1}{3}$, id est $18\frac{17}{36}$ proxime. Itaq; totum quadratum ab XF æquale est $16 \dagger 5\frac{1}{3} \dagger 18\frac{17}{36}$ semiradiis, id est $39\frac{29}{36}$ semiradiis proxime. Id quod rursus minus est quam 40 semiradii.

B. Equidem stupeo ad hæc, & vereor ne subsit novæ methodo calculi aliquod θαυματέργημα. Scio rectam quæ sit tripla rectæ Ae, sive Sinus recti arcus 60 graduum posse 27 semiradios; cum certissimum sit ipsum Sinum posse tres semiradios. Vide si idem probabitur methodo hac tua.

A. Recta XA potest 12 semiradios, & recta Ae tres semiradios; summa amborum quadratorum est 15 quadrata semiradii. Medium proportionale inter 3 & 12 est $\surd$ 36. Duplum hoc medium est Radix quadruplicati 36, id est $\surd$ 144. id est 12. Itaq; aggregatum ex 3, 12 & 12, id est 27 æquale est quadrato totius Xe.

B. Videtur ergo recta quæ a D transit per f, id est recta quæ ducta a centro A transit per S, & terminatur in Tangente BC non esse Secans arcus 30 graduum; id quod certe Geometris ferè omnibus videbitur prodigiosum.

A. Sed quæ videntur prodigiosa causa rei nondum percepta, percepta aliter videbuntur. Putasne quadrantem circuli ABD divisibilem esse in Sectores semper divisibiles?

B. Certe. Est enim quantitas.

A. Et diagonalem AC dividere quadrantem ABD bifariam in L?

B. Etiam.

A. Et duos semisses ita divisi quadrantis, nimirum duos sectores BLA, LDA æquare totum ABD?

B. Quidni?

A. Et, siquidem tu auferres alterum duorum sectorum *Parisios* usq;, ego alterum hic retinerem, illos tamen sectores esse duos?

B. Proculdubio.

A. Et concurrere latera utriusq; in duobus punctis, quorum unum esset hic, alterum *Parisiis*?

B. Certissime. Sed quorsum hæc?

A. Ut videas punctum A id est centrum circuli dividi in tot centra, in quot Sectores dividitur quadrans; & proinde centrum circuli non esse punctum indivisibile, sed habere magnitudinem, etsi magnitudinem

tudinem illam non sit necesse semper considerari, id est venire in demonstrationem.

B. Quare autem punctum aliquando consideratur, aliquando non?

A. Quia magnitudo ejus quibusdam binis quantitatibus communis esse potest, ut duabus rectis; quibusdam autem binis quantitatibus communis esse non potest ut rectæ & curvæ. Itaq punctum A commune non est Radio & circumferentiæ, & proinde in comparatione Radii & circumferentiæ sumi pro unitate non potest. Nam si centrum (cum habeat magnitudinem) sumatur pro nihilo, omnes rectæ ductæ inde ad circumferentiã considerandæ sunt ut totidem Sectores. Sin sumatur pro quanto, tum linea recta cujus centrum A est terminus habebit latitudinem aliquam, quam diagonalis AC dividet bifariam. Rursus pars utravis centri A, a recta quæ dividet utrumvis Sectorum secabitur in duas partes. Secabit ergo recta illa (exempli causa), quæ ducta ab S Sectorem cujus arcus est BL, secat in ratione 3 ad 2, extra punctum A. Est ergo recta AB rectangulum Parallelogrammum minutum, habens quatuor angulos rectos & quatuor latera, quorum duo latera opposita bifariam dividit recta NM, & reliqua duo opposita latera bifariam dividunt puncta *A* & *B*. Itaq; si ab angulo exteriore rectanguli AB, qui est ultra *A*, ducatur ad *S* linea recta & producatur ad BC, erit ea major quam est *AS* etiam producta ad idem latus, & quæ vulgo habetur pro Secante vera arcus *BS*. Atq; hinc etiam sequitur quod Tangens minuti alicujus arcus, si Secans ejusdem arcus ducatur a puncto *A*, minor esse potest quam arcus ipse, Nam triangulum rectangulum quod fit a Radio, Sinu recto, & Secante habet pro uno latere extremam lineam rectam quadrantis, id est lineam extimam rectanguli *AB*.

B. Itaq;, ut ante recta X τ tangebat arcum $\sigma\tau$ in τ, & secabat in σ, ita nunc una eademq; recta *AB*, (id est rectangulum exilissimum *AB*) latere suo interiore secat arcum *CGA*, ad A, & latere exteriore eundem tangit. Et quoniam linea circularis æque lata supponenda est atq; ipse Radius, idem rectangulum tanget arcum eundem in duobus punctis, quorum alterum est in *CGA* convexa, alterum in *CGA* concava. Nam Curvitas ne intelligi quidem potest sine convexo & concavo. Nonne id vis?

A. Tenes.

B. Sunt hæc acutissima quidem, sed tamen vera. Et revocant in mentem mihi quam habui olim quasi ἀρχὴν τῦ γεωμετρεῖν. Vidi forte librum Elementorum *Euclidis* in *Bibliotheca* quadam, fortuito apertam ad *Prop*.47. *El*. 1, Et cum legissem hæc verba. *In rectangulis triangulis quadratum quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur*, Ego continuo, etsi verum sit (inquam) sciri tamen ab homine non

non potest, ignarus scilicet rerum Mathematicarum. Inspiciens autem demonstrationem statim rejectus sum ad *Prop*.36. Et inde ad alias usq; ad principia. Intellecta demonstratione animadverti quod longitudinem subtendentis angulum rectum *Euclides* vel *Pythagoras* (vel quisquis ille fuerit Propositionis 47 inventor) mensurabat (juxta *Prop.* 36.) per laterum rectum angulum continentium latitudines, id est, ut nunc loquuntur, per indivisibilia. Quod nunquam potuisset facere, si lineæ sine latitudine semper considerandæ essent.

A. Sic est. Itaq; recta quam *Archimedes* intra suos numeros conclusit, *Peripheria* circuli minor evadere debuit.

B. Veritatis hujus, nempe quod aliud est *non esse*, aliud *non computari* (quam primus docuit nos *Hobbius*) ignoratio, multorum absurdorum Mater fuit.

A. Quod erravit *Wallis* in computatione *Spiralium* ab aliis animadversum est; erroresq; ejus tum hic tum in multis aliis locis ortum habuerunt ab ignoratione naturæ *puncti*, *lineæ* & *Superficiei*. Etiam propositionem ejus secundam *Arithmeticæ Infinitorum*, idem infecit error, quem errorem quam absurdæ sequantur propositiones uno exemplo nunc indicabo.

Arithmeticæ Infinitorum Wallisii Propositio secunda hæc est. *Si sumatur series quantitatum Arithmeticè proportionalium (sive juxta naturalem numerorum consequutionem) continuè crescentium, a puncto vel o inchoatarum, erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium ut* 1 *ad* 2. Sumamus jam (in *Fig*. secunda) triangulum ABO, quam supponamus divisam esse in partes aliquotas quotcunq; & quatenus fieri potest numero infinitas. Et sit *A* punctum, vel o. Erit ergo *AB* series quantitatum Arithmeticè proportionalium, a puncto sive o inchoatarum. Itaq; ductæ rectæ ipsi *BO* per omnes divisiones rectæ *AB* terminatæq; in recta *AO* erunt quoq; Arithmeticè proportionales, & inchoatæ a puncto, (nempe a puncto *A*) sive o. Eruntq; propterea illæ parallelæ simul omnes ad toties sumptam *BO*, ut 1 ad 2. Quod est verissimum. Nam crescentes parallelæ constituunt planum *ABO*; totidem autem æquales maxime *BO* constituunt rectangulum *AO*. Et est illud triangulum ad hoc rectangulum ut 1 ad 2. Sed est ut quælibet crescentium ad quamlibet crescentium, ita perimeter circuli ex illa descripti ad perimetrum circuli ex hac descripti. Itaq; perimetri circulorum descriptorum a singulis parallelis crescentibus sunt quoq; Arithmeticè proportionales, eædemq; inchoatæ a puncto sive o. Constituunt autem superficiem Coni Isoscelis, cujus basis est circulus descriptus Radio *BO*, & cujus latus est recta AO. Totidem autem perimetri circulorum æqualium maximo, cujus Radius est *BO* constituunt superficiem *Cylindri* cujus basis eadem est cum base Coni

Coni, & altitudo eadem. Est ergo superficies Coni cujus latus est AO, & cujus Radius diametri *BO*, ad superficiem *Cylindri* eandem habentis basem & altitudinem ut 1 ad 2. Atq; hoc manifestè sequitur ex propositione secunda Arithmeticæ Infinitorum *Wallisii*. Videamus an sit verum. Latus *Cylindri* recti cujus basis est circulus descriptus Radio *BO*, est æquale ejusdem circuli diametro. Quare & latus AB est etiam media proportionalis inter ipsum & diametrum Cylindrii sui; nimirum propter æqualitatem altitudinis & basis. Ergo per *Prop.* 14. libri primi *Archimedis* de Sphæra & Cylindro, superficies Cylindri hujus æqualis est circulo descriptio Radio AB, id est circulo quadruplo ejus qui describitur Radio *BO*, id est superficiei Sphæræ in qua maximus circulus est, is qui describitur radio *BO*. Sed per *Prop.* 16. ejusdem libri primi de Sphæra & Cylindro. omnis Coni Isoscelis superficies est ad basem ut latus ad radium basis. Sit jam Conus Isosceles cujus latus sit AS, æqualis Radio AB & Radius basis *e*S, æqualis BO. Quoniam ergo est ut superficies Coni ad basem ejusdem, ita latus AS ad BO erit superficies Coni cujus latus est AS, & Radius basis BO (id est $\frac{1}{2}$ AS) ad superficiem Cylindri eandem habentis altitudinem & basem ut 1 ad 2. Est ergo superficies Coni cujus latus est AS vel AB, & Radius basis *e S* æqualis superficiei Coni cujus latus est AO (major quam AS.) & Radius basis BO (æqualis *e S*) Quod est impossibile. Falsa est ergo Propositio illa secunda Arithmeticæ Infinitorum *Wallisii*. Et propter hanc solam caussam falsa est quod non videret non omnia puncta esse inter se æqualia.

B. Miror non vidisse hæc *Schooten* & *Hugenium Wallisii* encomiastas, neq; etiam *Robervallum*, qui cum aliqua in libris *Wallisii* rectè reprehenderit, totam ejus Arithmeticam Infinitorum reliquam (excepto Paralogismo quem habet circa Spiralem) ita deglutiit ut suã esse dixerit.

A. Quod *Schooten* hæc non viderit mirandum non est homo parum literatus, ut ex Epistola ejus constat scripta ad *Wallisium*, qui eam edidit. *Hugenius* autem qui adhuc puer magnam in Mathematicis spem sui fecerat postea doctissimus sibi visus circa dimensionem circuli tempus contrivit inutiliter.

B. Videbunt tandem Canonum Sinuum, Tangentium, & Secantium admiratores Trigonometræ Tabulas illas non esse Geometricè demonstratas & numeros in illis conscriptos ab initio esse justo minores usq; ad Tangentem graduum 45.

A. Id quidem verum est. Sunt tamen illæ Tabulæ Trigonometris necessariæ; & in operibus parvis errores adeo sunt insensibiles ut videantur satis utiles esse, nec careri posse.

B. Rogo secundo.

A. Differ rogare paulisper, & lege Methodum adhuc aliam & breviorem.

METHODUS III.

Prop. 42.

Superficies Conica Coni Isoscelis cujus latus est AO, Radius basis BV, æqualis est circulo descripto Radio BQ.

Est enim (in *Figura* prima) ut AO ad BO, ita AB ad BV, propterea quod triangula AOB, ABV sunt similia. Quare media proportionalis inter BO & AB est media quoq; inter extremas AO & BV, id est inter latus Coni & Radium Basis. Sed media inter BO & AB & proinde etiam inter AO & BV, est semidiagonalis BQ. Ergo (per *Prop.* 15. libri primi *Archimedis* de Sphæra & Cylindro) descriptus circulus Radio BQ sive B*o* est æqualis superficiei Conicæ Coni cujus latus est AO, Radius basis BV. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Superficies Conica Coni cujus latus est AO, Radius basis BV, æqualis est dimidio circulo descripto Radio AB vel BC. Est enim circulus descriptus Radio BQ semissis circuli descripti Radio *AB*.

Prop. 43.

Arcus quadrantis descripti Radio BQ sive B*o* æqualis est rectæ AO (vide Figuram primam).

Quuoniam enim circulus descriptus Radio B*o* æqualis est Conicæ superficiei Coni recti cujus latus est AO, Radius basis BV, sive B*h*, Conica hæc superficies, & circulus ille ad circulum *hi* completum rationem habebunt eandem. Ergo & quarta pars dictæ Conicæ superficiei & quadrans B*op*, ad quadrantem B*hi*, eandem habebunt rationem, id est rationem rationis B*o* ad B*h* sive ad BV duplicatam, id est rationem AO ad B*h*. Sumatur in latere AO Coni cujus semidiameter basis est B*h*, pars quædam æqualis BQ. Eritq; superficies totius Coni cujus latus est æquale AO ad superficiem suæ partis habentis latus æquale BQ, in duplicata ratione AO ad BQ. id est in ratione AO ad B*h*. Quare & quarta pars superficiei Conicæ Coni cujus latus est æquale AO, est ad quartam partem superficiei Conicæ ejusdem, habentis latus BQ, in duplicata ratione AO ad BQ, id est in ratione AO ad B*h*. Jam quarta pars circuli descripti semidiametro BQ, & quarta pars superficiei Conicæ Coni cujus latus æquale est AO, semidiameter autem basis est B*h* sunt æquales; & utraq; æqualis dimidiæ areæ quadrantis BCA. Quare pars ejusdem Conicæ superficiei quæ habet pro latere BQ, æqualis est areæ quadrantis B*hi*, id est in ratione AO ad B*h*. Est ergo area quadrantis B*op*, ad aream quadrantis B*hi* in duplicata ratione AO ad BQ. Sed est in duplicata ratione arcus *op* ad arcum *hi*, id est in ratione duplicata B*o* ad B*h*, id est in ratione AO ad B*h*. Quare arcus *op* & recta AO sunt

ſunt inter ſe æquales, ut & arcus *hi* & recta BQ. Quod erat demonſtrandũ.

Conſectarium. Recta *BF* quæ poteſt decem ſemiradios æqualis eſt arcui *BLD*. Eſt enim arcus *op* media proportionalis inter arcum *BLD* & ipſius ſemiſſem; quia recta BQ eſt media proportionalis inter Radium *BC* & ipſius ſemiſſem *BO*. Sed recta *nζ* ipſi arcui *op* eſt æqualis; & proinde ipſa *nζ* eſt media proportionalis inter arcum *BD*, & ipſius ſemiſſem. Sed *nζ* (cum poſſit quinq; ſemiradios) media eſt proportionalis inter rectam *BF* & ſemiſſem ejus nempe rectam *BX*. Itaq; *BF* eſt æqualis arcui *BLD* & recta *BX* æqualis arcui *BL*.

Prop. 44.

Recta *BS* (quæ poteſt 10 ſemiradios, ſive *BF* ſumpta ipſi *BS* æqualis) æqualis eſt arcui *BLD*. (Vide *Fig*. 1.)

Cum enim BQ ſit media proportionalis inter *BC* radium, & *BO* ſemiradium, erit quoq; arcus quadrantis deſcripti Radio BQ media proportionalis inter arcum *BLD*, & arcum *MO* ipſius ſemiſſem. Ergo et recta *AO* (arcui quadrantis deſcripti Radio BQ æqualis) erit media proportionalis inter eundem arcum *BLD* totum, & arcum *MO* ejus dimidium. Sed recta *AO* (quia poteſt quinq, ſemiradios) eſt media proportionalis inter *BS* quæ poteſt 10 ſemiradios & ſemiſſem ejus *BX* quæ poteſt decem quartas Radii. Eſt ergo *BS* æqualis arcui *BLD*. Quod erat demonſtrandum.

Conſectarium. Arcus quadrantis. Radius. & $\frac{2}{5}$ arcus quadrantis ſunt continue proportionales. Nam B*b* eſt $\frac{2}{5}$ rectæ *BF*.

B. Argumentorum abundè eſt; neq; quid porro deſit ad perimetri circuli magnitudinem determinandam poſſum imaginari. Nam quæ ego te rogaturus eram, non ad hæc confirmanda, ſed ad minora quædam cognoſcenda ſpectant. Et video quidem rectas omnes (Figuræ ſecundæ) ductas ab X, & ſecantes AP, ſecare ipſam & arcum BL in eaſdem rationes. Nam AP eſt ſemiradius, & BL ſemiarcus, A*d* eſt $\frac{1}{5}$ Radii, & BS $\frac{1}{5}$ Arcus. Item XO abſcindit ab AD æqualem rectæ QR id eſt dimidiæ Z, ſed utrum recta XC abſcindat in arcu BLD arcum duplum ejus quem abſcindit XO, non video. Neq; video utrum juncta XK abſcinderet ab AD duas ejus tertias partes, ſed ſcire cupio.

A. Quamvis ſemiradius AP & ſemiarcus BL ſimiliter dividantur a rectis ductis ab X, non ſequitur tamen idem fieri oportere uſq; ad punctum D. Neq; poſſibile eſt. At rectæ ductæ ab X dividunt totum Radium AD & totam rectam BF (ipſi arcui BLD æqualem) in rationes eaſdem.

B. Id quidem manifeſtum eſt. Cur autem ſemiradium PD & arcum LD non ſimiliter dividunt?

A. Non habent duo arcus BL, LD ad latus BC ſitum ſimilem. Itaq; ſi

ſi velis dividere ſemiarcum LD ſicut dividitur BL producendum eſt latus DA donec æqualis fiat ipſi BX, & ab eo termino oportet rectas ducere ad arcum DL, quæ ſecabunt ſemiradium AM & DL arcum in eaſdem rationes.

B. Quoniam ſæpius & a teipſo audivi demonſtrationem legitimam omnem procedere a cauſa Efficiente, ſcire cupio in his tuis demonſtrationibus ubi apparet Cauſa Efficiens.

A. Quid? Ipſa ductio rectæ ita ut potentia ejus æqualis ſit 10 ſemiradiis, nonne eſt efficere ut exiſtat linea recta æqualis arcui quadrantis?

B. Eſt quidem; ego vero cauſam aliquam expectabam Phyſicam; nimirum, motum puncti, vel naturam (non ante cognitam) curvitatis.

A. Nonne vides ut recta ducta *XS* & producta ad *BC* (in *Fig*. 2^d^)
aufert ſecum & extendens arcum *BS* collocat terminum ejus *S* in
recta BC. Utq; recta *XL* ſimiliter extendit arcum *BL* & ponit in
eadem *BC*. Eodem modo fit in omni parte arcus *BL*. Itaq; per
extenſionem iſtorum arcuum factam per motum rectum a puncto *X* in-
venietur recta æqualis parti quotæcunq; arcus *BL*. Atq; cum hoc
rectè inveniſſet *Hobbius*, alieno poſtea magis quam ſuo ingenio fiſus,
repudiavit; quanquam ad demonſtrationem ejus infirmandam nihil af-
ferre potuerunt adverſarii ejus præter numeros Ludolphinos, quos tan-
dem vides eſſe falſos. Idem in libro *de Corpore Anglicè* edito, Pro-
blema idem ſolvit per naturam Curvitatis; Et demonſtratio clara eſt
& facilis, quam ibi, ſi libet, legas. Interea ſume rectam æqualem chor-
dæ quartæ tantum partis arcus AE, & illam quadruplica. Statim vi-
debis rectam illam conflatam ex 4 chordis quartæ partis arcus BE,
quæ multo minor eſt quam arcus ipſe AE, vix tamen ſenſibiliter dif-
ferre a dimidia BS. Adeo ut minorem forte putes BF quam arcus
BLD, nunquam majorem. An Paralogiſmis aliorum tantum tribuen-
dum eſt (etiam ubi differentiæ ſunt valde ſenſibiles) ut noſtris ipſorum
ſenſibus credendum non ſit? Sed mihi conſideranti valde paucos eſſe
Geometras qui ſcribentem de motu poſſunt aſſequi, aut qui naturam
curvitatis perſcrutati ſunt, & (quod noſti) argumenta a motu (in
certamine de Cycloide prohibita eſſe) Viſum eſt non aliis uti Princi-
piis quam *Euclideis* & receptis.

Prop. 45.

Si a puncto X ducatur recta Secans arcum *BL* inter *B* & *L* illa
producta ad rectam *BF* abſcindet partem ipſius *BF* a puncto *B* men-
ſurandam, æqualem arcui abſciſſo menſurando item a puncto *B*. (Vide
Fig. 2^m^.)

Sit

Sit arcus $B\gamma$ minor arcu BL. Dico ductam $X\gamma$, & productam donec incurrat in rectam BF ad β, partem ejus abscindere a termino B æqualem arcui $B\gamma$. Secetur arcus $B\gamma$ bifariam in ϵ, & ducatur $\zeta\epsilon$ Sinus rectus arcus $B\epsilon$. Ducatur quoq; $\delta\gamma$ Sinus rectus totius arcus $B\gamma$, seceturq; bifariam in θ. Præterea producatur $\zeta\epsilon$ in η, ita ut $\zeta\eta$ sit dupla $\zeta\epsilon$, id est æqualis chordæ totius arcus $B\gamma$; est ergo $\zeta\eta$ duplus Sinus arcus $B\epsilon$, & proinde per ea quæ demonstrata sunt (*Prop.* 37. recta $X\theta$ producta secabit $\zeta\eta$ bifariam.) Eadem Methodo ostendi potest quod perpetuo bisecando ita contingit. Itaq; perpetua bisectione devenietur ad arcum minimum cujus Sinus haberi possit pro ipso puncto B; & propterea recta $B\beta$ æqualis erit omnibus simul Sinubus vel etiam chordis arcus minimi, id est ipsius B, & propterea æqualis ipsi arcui $B\gamma$. Quare si a puncto X ducatur recta Secans arcum BL inter B & L, illa producta abscindet partem ipsius BF mensurandam a puncto B æqualem arcui abscisso mensurando item a puncto B. Quod erat demonstrandum.

Prop. 46.

Datum arcum quemlibet $B\gamma$ dividere in ratione data. *Fig.* 2ª.

Jungatur $X\gamma$ & producatur ad BC in β, sitq; ratio data $B\beta$ ad $B\iota$. Deinde ducatur $X\iota$ secans arcum $B\gamma$ in S. Quoniam igitur (per præcedentem) arcus $B\gamma$ est æqualis rectæ $B\beta$, & arcus BS rectæ $B\iota$; erit ut arcus $B\gamma$ ad rectam $B\beta$ ita arcus BS ad rectam $B\iota$. Secatur ergo datus arcus $B\gamma$ in S in ratione data rectæ $B\beta$ ad rectam $B\iota$. Sed si quantitates Rationis datæ vel alterutra earum major sit quam semissis arcus BLD, sumendæ sunt in eadem ratione minores, exempli gratia, ipsarum semisses, & operatio instituenda ut prius. Divisimus ergo datum arcum in ratione data. Quod erat faciendam.

Quid ad hæc dicent illi convitiatores *Hobbii* ?

B. Nescio. Sed etiamsi neq; demonstrata neq; vera hæc essent morem tamen illum maledicendi illis qui aliter atq; ipsi sentiunt non excuso; præsertim ex animi sententia scribentibus, nec studio partium veritatem oppugnantibus. *Quando* vero libros doctorum (ut habentur) hominum, maxime vero Theologorum, maledictis, dicteriisq; (frigidis) refertos sæpe videam, admirari soleo quo læsi, Unde tantæ iræ, & cui bono erumpunt.

A. Læsi sunt, eo quod existimatio eruditionis suæ, quæ illis omnia est, læsa est. Sed ut iram conviciis manifestam faciant, causa nulla esse potest præter ingenium illiberale. Convitium enim est indictio quædam belli, sive provocatio ad pugnam, quam Leges prohibent. Vident ergo posse se impune maledicere silentio legum abutentes, ut mos est

est muliercularum, aut virorum imbellium. Credin' tu authores Librorum quos modò dicebas plenos esse conviciorum, ad pugnam aptissimos esse ?

B. Minime omnium. χέσαιντο γάρ εἰ μαχέσαιντο.

Prop. 47. *Describendæ Cycloidis* METHODUS.

Sit Semicirculus BCD cujus Centrum A. Supponaturq; punctum B moveri uniformiter in Arcu BCD, (qui sit divisus bifariam in C) & eodem tempore moveri eadem velocitate in recta AC. Sunt autem anguli ad A recti. Et (quia motus rectus Centri A æqualis est motui Circulari per Arcum BCD) quando punctum B est in D erit descripta a Centro A recta (transiens per C) æqualis ipsi Arcui BCD.

Sit ea recta AE, cui æquales ponantur DF, BG, nempe quæ possit decem (semiradios) AB ; erit ergo AE sive DF æqualis arcui BCD. Compleatur rectangulum BDFG.

Jam ad descriptionem Cycloidis dividatur tum Arcus BCD, tum recta BG in partes æquales quotlibet. Ego utramq; lineam secui in partes 12; nempe Arcum ad puncta 1.2.3.4.5. C. 7.8.9.10.11.12. D; & rectam BG in totidem partes ad puncta $\alpha.\beta.\gamma.\delta.\epsilon.\zeta.\eta.\theta.\iota.\kappa.\lambda$. Et per illa puncta duxi totidem rectas diametro DB parallelas. Item per singula puncta divisionis Arcus BCD, singulas rectas lateri BG parallelas; quas appello *parallelas altitudinis*, ut quæ designant partiun circumferentiæ BCD altitudines. *Quibus* constructis erit Arcus B 1 (pars Arcus BCD) æqualis $B\alpha$ parti ipsius rectæ BG, & tota BG toti Arcui BCD æqualis.

In recta AE notentur divisiones eædem quæ sunt in recta BG, nempe 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11. E. Et Radio 1α ducatur Arcus αa secans parallelam altitudinis primam in a. *Quando* ergo punctum B deberet esse (propter motum circularem) in arcu suo ad punctum 1, erit (propter motum rectum Centri) in puncto a. Motus enim Centri non variat altitudines circulatione acquisitas, quæ semper sunt in altitudinum parallelis. Deinde radio 2β ducatur arcus Circuli Secans parallelam altitudinis secundam in b. *Quando* ergo punctum B propter motum circularem deberet esse in suo arcu ad 2 erit propter motum rectum Centri in eadem parallela altitudinis ab b; eritq; arcus αa æqualis arcui B 1, & arcus βb æqualis arcui B 2. Item si Radio 3γ describatur arcus γc secans tertiam altitudinis parallelam in c erit arcus γc tripla arcus B 1. Eadem Methodo constituuntur reliqua puncta $d.e.f.g.h.i.k.l.$ per quæ puncta Cycloïs debet transire, quæ est descriptio Cycloidis.

Con-

Confectarium primum. Manifeſtum hinc eſt Arcus omnes $\alpha a. \beta b. \gamma c$ uſq; ad Arcum ſemicirculi GF eſſe in ratione continua Arithmetica.

Confectarium ſecundum. Manifeſtum quoq; eſt ſi plures fierent diviſiones accuratiorem fore Cycloidem, ratione Arithmetica ſemper ſervata, & deniq; ſi arcus ducerentur eadem Methodo, tot quot duci poſſibile eſt, impleretur ſpatium planum comprehenſum duabus lineis curvis (nempe Arcu ſemicirculi GF & linea Cycloide F*d*B) & deniq; recta BG.

Prop. 48.

Spatium trilineum incluſum Cycloide & duabus rectis BG, GF, æquale eſt ſemicirculo ABCD.

Nam Arcus GHF, λl κk, ιi, θh, & cæteri ſecundum rationem Arithmeticam perpetuo decreſcentes, æquales ſunt totidem Arcubus ſemicirculorum integris, deſcriptis a Radiis quorum maximus quidem eſſet EG, cæteri vero minores decreſcentes ſcilicet ſecundum eandem rationem Arithmeticam, donec evaneſcerent in puncto E. Sed Arcus hi conſtituerent ſemicirculum, (modo Radius EG partes aliquotas diviſus eſſet in quot partes dividi illum eſt poſſibile) conſtituerent, inquam, ſemicirculum EGHF. Quare compoſitæ lineæ BGHF, Bλl, Bκk, Bιi, Bθh, Bηg, Bζf, & cæteri omnes eadem Methodo deſcriptibiles qui dupli ſunt arcuum GHF, λl, κk, ιi, &c. cuncti conſtituent ſpatium duplum ſemicirculi EGHF. Sed ſpatium incluſum Cycloide, & arcu GHF, & recta BG eſt ipſum ſpatium quod conſtituitur a lineis illis compoſitis BGHF, Bλl, &c. Eſt ergo ſpatium incluſum Cycloide, & Arcu GHF, & recta BG, duplum ſemicirculi EGHF. Reliquum ergo Spatium incluſum Cycloide, & duabus rectis BG, FG æquale eſt ſemicirculo. Quod erat demonſtrandum.

Confectarium primum. Sequitur hinc Spatium comprehenſum Cycloide & duabus rectis DF, DB triplum eſſe ſemicirculi genitoris. Nam rectangulum totum quod fit a ſemiperimetro (id eſt a DF) in diametrum BD eſt ſemicirculi quadruplum.

Confect. 2. Manifeſtum quoq; eſt Spatium duabus curvis, nimirum Cycloide & Arcu BCD & recta DF incluſum duplum eſſe ſemicirculi genitoris ABCD. Eſt enim ſemicirculus ABCD unum quorum trilineum incluſum Cycloide & rectis DF, DB, eſt tria.

Confect. 3. Sequitur etiam rectam quamlibet parallelam baſi DF & interceptam a Cycloide & Arcu BCD, æqualem eſſe Arcui ſibi contiguo ſumpto a contactu ad punctum B. Tota enim recta DF æqualis eſt toti Arcui DCB, per Hypotheſin. Quoniam ergo ſpatium trilineum comprehenſum Cycloide, Arcu BCD, & recta FD, duplum eſt

eſt ſemicirculi ABCD, & recta FD dupla eſt fc erunt ſingulæ rectæ ſingulis Arcubus (propterea quod ſimiliter generantur) æquales, id eſt recta l11 æqualis Arcui B11, recta k10 æqualis arcui B10, & ſic de cæteris.

Confectarium hoc tertium etiam ſic demonſtratur ſeorſim.

Sumpto quolibet Arcu B3 cujus Sinus productus ſit ad Cycloidem in c, & pars intercepta ſit 3c. Quoniam ergo (per conſtructionem) quo tempore per motum circularem punctum B deberet eſſe in 3, eodem tempore per motum rectum debet deſcripſiſſe rectam arcui B3 æqualem, erit recta Bc ipſi arcui B3 æqualis. Itaq; ſi vera ſit Cyclois, non modo baſi ejus DF æqualis erit arcui BCD, ſed etiam omnis alia recta inter arcum BCD & Cycloidem intercepta baſiq; parallela erit arcui ſibi contiguo terminato in B æqualis.

Quod ſi motus Centri rectus motui circulari per arcum BCD ſit inæqualis, erunt parallelæ interceptæ Arcubus ſuis contiguis proportionales quidem, ſed inæquales; & per conſequens non erit ea vera Cyclois quam definivimus.

Prop. 49.

Recta *DG* dividit bifariam tum triangulum rectilineum BGF, tum partes ejus nempe ſpatium Cycloidale externum BGF & bilineum BFB.

Secet recta *D G* Cycloidem in *m*. Eritq; triangulum rectilineum
G6F æquale quartæ parti rectanguli *BDFG*, id eſt ſemicirculo geni-
tori; & tria ſpatia nempe triangulum *G6F*, ſpatium Cycloidale ex-
ternum *BFG*, & bilineum *BFB* inter ſe æqualia. Rurſus triangulo
rectilineo G 6 F æquale eſt triangulum rectilineum G 6 B. Dividitur
ergo totum triangulum BGF a recta DG bifariam. Pars ergo Cycloida-
lis ſpatii comprehenſa parte Cycloidis F*m* & duabus rectis FG, G*m*, una
cum parte bilinei B*f*B comprehenſa ab eadem parte Cycloidis F*m*, &
duabus rectis *F*6, 6*m* æquale eſt duobus ſpatiis, nempe Cycloidali BG*m*
& parti bilinei B*m*6B. Cum autem triangulum rectilineum G6F æ-
quale ſit ſpatio Cycloidali BFG, ablato communi ſpatio G*m*B reſtabit
ſpatium B*m*6B (pars bilinei BFB) æquale ſpatio FG*m* parti Cycloidalis
ſpatii externi reliquæ. Quare ſpatium Cycloidale ablatum, nempe *BGm*
æquale eſt parti reliquæ bilinei F6*m*. Si oſtendero jam ſpatium Cy-
cloidale FG*m* æquale eſſe ſpatio F6*m* parti bilinei BFB, neceſſe eſt ut
quatuor illa ſpatia ſint inter ſe æqualia. Dividatur recta G6 bifariam, id
eſt, in *s*, ducaturq; recta F*s* ſecans Cycloidem in *n*; eritq; triangulum
rectilineum GF*s* æquale triangulo *s*F6. Superat autem triangulum GF*s*
ſpatium Cycloidale FG*m* ſpatio trilineo *s n m*, minus ſpatio bilineo
F*n*F.

FnF. Sed triangulum *s*F6 (triangulo GF*s* æquale) superat spatium F6*m* (partem bilinei BFB) eodem spatio trilineo *s n m*, minus spatio bilineo FnF. Sunt ergo partes trianguli G6F diremptæ a parte Cycloidis F*m*, inter se æquales. Itaq; recta DG secat tum rectangulum totum BGF tum partes ejus, &c. bifariam. Quod erat demonstrandum.

Prop. 50.

Partes duæ Cycloidalis spatii *BFG*, ut & partes bilinei *BFB* diremptæ a recta *DG* æquiponderant super ipsam *DG*.

A puncto *B* ducatur recta B*o* secans rectam *DG* in ipso Arcu *BCD*. Eritq; B*o* ad *DG* (propter Arcum semicirculi *BCD*) perpendicularis; distantia ergo puncti *B*, a recta *DG* est recta B*o*. Item Centro *E* radio *EG* descripto arcu secante *DG* in *p* recta F*p* erit distantia puncti *F* a recta *DG*; & sunt rectæ B*o*, F*p* inter se æquales. Cum ergo spatia FG*m* & *m*GB ostensa sint æqualia, & æqualiter distent a recta *DG*, quæ dividit illa bifariam, etiam super ipsam *DG* æqui ponderabunt. De partibus bilinei nempe *F6m*, *B6m* eadem est demonstratio. Quare partes, &c. Quod erat demonstrandum.

Per eandem causam demonstrari potest quod Centrum gravitatis etiam spatii Cycloidalis interni *BFD*, terminati Cycloide ipsa & duabus rectis *BD*, *DF* est in eadem diagonali *DG*.

Prop. 51.

Centrum gravitatis spatii Cycloidalis externi *BGF*, est in *s*.

Juncta enim *FA* & divisa in I, ita ut *FI* sit ad *IA* ut 2 ad 1 erit punctum I Centrum gravitatis trianguli rectilinei *BFD*, quod quidem triangulum rectilineum *BFE* duplum est spatii bilinei *BFB*. Est autem punctum I in concursu rectarum *ss* & *DG*. Itaq; si Centrum libræ statuatur in *L*, ubi *I6* dividitur bifariam, erit Centrum gravitatis bilinei *BFB* in *K* ubi *6M* dividitur bifariam. Est enim triangulum *BFD*, duplum bilinei *BFB*. Rursus juncta *BE* erit divisa in *M*, ita ut *BM* sit ad *ME* ut 2 ad 1, nempe in concursu rectarum *DG* & *θθ*. Erit ergo *M* Centrum Gravitatis trianguli *BFG*. Cum ergo Centrum gravitatis bilinei *BFB* sit in *K* erit Centrum gravitatis spatii Cycloidalis externi *BGF* in *s*, ita ut M*s*, *MK* sint æquales. Et propterea punctum *s* est in concursu parallelæ *ιι* & *DG*. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Centrum gravitatis spatii interni Cycloidalis *BFD*, est in puncto *L*, ubi diagonalis *DG*, ita dividitur ut *GL* sit ad *LD* ut 7 ad

7 ad 5. Cum enim spatium Cycloidale internum *BFD*, triplum sit spatii Cycloidalis externi *BGF*, si centrum libræ statuatur in puncto *6*. erit *6s* triplum distantiæ centri gravitatis spatii Cycloidalis interni ab eodem puncto 6. Sed *6s* est triplum *6 L*. Est ergo Centrum gravitatis spatii Cycloidalis interni *BFD* in *L*. Dividitur autem recta *DG* ita ut *GL* sit ad *LD* ut 7 ad 5, cum sit *L* in concursu *εε* & *DG*.

Prop. 52.

Quadrilineum *m6 CB* comprehensum duabus curvis B*m*, *BC*, & duabus rectis 6*m*, *6C* æqualis est quadranti *ABC*.

Secet enim recta *6B* Arcum *BC* in *q*. Quoniam ergo triangulum rectilineum *AB6* est pars octava rectanguli *BDFG* erit idem æquale quadranti *ABC*, Ablato ergo spatio communi *ABqC* erit reliquum spatium *6qC* æquale bilineo *BqB*. Sed spatium *6m BC* comprehensum a parte Cycloidis *Bm* & duabus rectis *m6*, *6C* ostensum est æquale quadranti *ABC*. Itaq; si ipsi addatur spatium *6qC*, & eidem auferatur bilineum *BqB*, erit factum spatium *m6CB* (comprehensum duabus curvis *Bm*, *BC* & duabus rectis *m6*, *6C*) æquale (ut ante) quadranti *ABC*. Quod erat demonstrandum.

Prop. 53.

Spatium Cycloidale internum *BAf* comprehensum a parte Cycloidis B*f*, & duabus rectis *AB*, *Af* superat semicirculum genitorem tantum, quantum est trilineum *6fm*.

Nam (per præcedentem) spatium quadrilineum *BC6m* æquale est quadranti *ABC*. Quare quadrilineum *ABm6* æquale est semicirculo genitori, cui si addatur trilineum *m6f* fit spatium Cycloidale integrum *BAf*. Spatium ergo Cycloidale *BAf*, &c. Quod erat demonstrandum.

Prop. 54.

Si ducatur recta *DC* & producatur ad *BG* in *N*, juncta *FN* transibit per punctum *f*.

Cum enim *DN* transeat per *C* erit *BN* æqualis diametro *BD*, & quoniam *BG* est æqualis Arcui semicirculi Genitoris, erit *GN* excessus quo Arcus *BCD* superat diametrum *BN*. Est autem *6E* semissis ipsius *BG*, & *6f* semissis diametri sive rectæ *BN*. Quare recta *Ef* est semissis rectæ *GN*. Etiam *FE* est semissis *FG*. Ut ergo *FG* ad *GN*, ita *FE* ad *Ef*. Transit ergo *FN* per punctum *f*. Quod erat demonstrandum.

Prop.

Prop. 55.

Triangulum rectilineum EE*f* æquale eſt ſpatio intercepto inter arcum quadrantis ABC & ejuſdem ſubtenſam.

Triangulum *6EF* æquale eſt quadranti *ABC*. Et quoniam *6f* æqualis eſt ſemidiametro, erit Triangulum F*f6*, æquale dimidio quadrato ab *f6*. Reliquum igitur triangulum rectilineum *FEf*, æquale eſt reliquo ſpatio, nimirum, ſpatio quod relinquitur, dempto a quadrante *ABC* triangulo rectilineo *ABC*, id eſt ſpatio incluſo intra Arcum *BC* & ſubtenſam ejus. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 56.

Si ducta B*o* producatur ad baſim Cycloidis *BF* in *u*, erit recta D*u* duæ quintæ ipſius *DF*, ſive ipſius arcus *BCD*.

Oſtenſum enim eſt in præcedentibus arcum quadrantis, cujus Radius eſt æqualis rectæ *BD*, æqualem eſſe rectæ quæ poteſt decem ſemiradios (id eſt quæ poteſt decem radios ſemicirculi genitoris.) Eſt autem *DF* (per conſtructionem) æqualis arcui *BCD*. Quoniam autem angulus B*o*D in ſemicirculo eſt rectus, & quatuor rectæ 6G, 6B, 6D, 6F, ſunt æquales, item quatuor anguli BD*o*, GB*o*, 6DB, 6FD inter ſe æquales; erunt triangula GDB, BD*o*, D*uo* ſimilia. Eſt ergo ut BG (id eſt arcus BCD) ad DB diametrum, ita BD diameter ad D*u*. Eſt ergo D*u* æqualis rectæ quam appellavimus Z, ſive duabus quintis rectæ quæ poteſt decem ſemiradios, id eſt rectæ BF, id eſt arcus BLD. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 57.

Centrum gravitatis bilinei contenti linea Cycloidale B*f*F, & recta BF, eſt in eo puncto diagonalis DG, quod ipſam ita dividit in K, ut DK ſit ad KG ut 7 ad 5.

Eſt enim triangulum *AFD* quarta pars rectanguli DG, id eſt æqualis ſemicirculo genitori. Et triangulum BFD æquale duplo ſemicirculo genitori. Quoniam autem centrum gravitatis trianguli AFD eſt in recta DG ad I (nam FA eſt ad IA ut 2 ad 1 & oſtenſum eſt centrum gravitatis figuræ Cycloidalis comprehenſæ Cycloide B*f*F & duabus rectis BD, DF eſſe in puncto L, & bilineum BFB æquale eſſe ſemicirculo genitori) erit bilineum BFB unum, quorum triangulum rectilineum BFD, vel etiam BFG eſt duo. Quoniam ergo centrum gravitatis figuræ B*f*FD, quod eſt tria, eſt in L, erunt IL, LK inter ſe in ratione reciproca magnitudinum KL & LI. Si ergo punctum L ſtatuatur centrum libræ, triangulum BFD & bilineum BFB ſuſpenſa in I & K æquiponderabunt. Eſt ergo K centrum gravitatis bilinei BFB. Quod erat edmonſtrandum.

Prop

Prop. 58.

Planum incluſum intra Arcum quadrantis & ſubtenſam ejuſdem arcus, eſt ad trilineum concluſum ab eodem arcu quadrantis & duos radios in angulo recto concurrentes, ut ſexta pars ſemiperimetri circuli genitoris unâ cum tertia parte exceſſus ipſius ſemiperimetri ſupra tres radios ejuſdem circuli, ad dictam ſextam partem ſemiperimetri mulctatam duabus tertiis prædicti exceſſus circuli genitoris ſupra tres Radios.

Centro *E*, Radio *EG* vel *EF* deſcribatur ſemicirculus *GRF* ſecans *EA* in *R*. Eritq; *R*8 æqualis *C*4 vel 1*of*, id eſt tertiæ parti exceſſus rectæ *AE*, ſive arcus *GRF* ſupra tres radios ſive triplam *AC*.

Nam oſtenſum eſt (*Prop.* 55.) quod triangulum rectilineum *FEf* æquale eſt plano incluſo intra arcum quadrantis & ipſius ſubtenſam, id eſt bilineo *RFR*. Ducatur *RS* perpendicularis ad *FD* in *S*. Jam duplum planum *RFR* unâ cum trilineo incluſo intra *FS*, *SR* & arcum *FR* conſtituunt planum quadrantis *ERF*. Quoniam igitur triangulum rectilineum EF*f* & bilineum *RFR* ſunt duplum bilineum *RFR*, erit triangulum rectilineum reliquum *FfR* æquale trilineo *FSR* incluſo intra radios *FS*, *SR* & arcum quadrantis *FR*. Eſt ergo bilineum *RFR* ad trilineum *FSR*, ut E*f* ad *f*R; id eſt ut ſexta pars ſemiperimetri circuli genitoris unâ cum tertia parte exceſſus ipſius ſemiperimetri ſupra tres Radios ejuſdem circuli, ad dictam ſextam partem ſemiperimetri mulctatam duabus tertiis prædicti exceſſus ſemiperimetri circuli genitoris ſupra tres Radios. Quod erat demonſtrandum.

Conſectarium 1. Rectangulum ſub *SR*, R*f* æquale eſt duplo trilineo *FSR*; & rectangulum ſub *FE*, E*f* æquale duplo bilineo *RFR*; propterea quod æqualia ſunt alterum duplo triangulo F*f*R, alterum duplo triangulo *FEf*.

Conſect. 2. Rectangulum ſub *SR* & dupla *R*8 eſt æquale exceſſui quo ſegmentum *RFR* ſuperat trilineum concluſum rectis *FS*, *SR* & Arcu quadrantis *FR*, (quod trilineum eſt complementum quadrantis ad quadratum Radii) nam rectangulum FE*f* ſuperat rectangulum SR*f* duplo rectangulo *SR* in 8R. Quare triangulum FE*f* ſuperat triangulum SR*f* ipſo rectangulo SK in 8R.

Prop. 59.

Trilineum *6fm* clauſum duabus rectis *6m*, *6f*, & parte Cycloidis *fm*, æquale eſt trilineo FE*f* clauſo duabus rectis *FE*, E*f* & parte Cycloidis F*f*.

Eſt

Eſt enim planum clauſum parte Cycloidis *Ffm* & duabus rectis *F6*, *6m*, æquale quadranti *ERS* (per *Prop*.49.) Ablato ergo communi ſpatio trilineo F*f*, *RF* clauſo duabus curvis, nempe arcu *FR*, & parte Cycloidis F*f* & recta *f*R, reſtabunt ex altera parte trilineum *FEf*, ex altera parte *6mf* inter ſe æqualia. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 60.

Trilineum *6fm* æquale eſt complemento quadrantis *ERF* ad quadratum Radii *ER*.

Sunt enim triangula rectilinea *FEf*, *FR6* æqualia, propter altitudinum inter ſe, & baſium inter ſe æqualitatem. *Quare* utrumq; eorum æquale eſt bilineo *RFR*. Eſt autem tam triangulum rectilineum *6EF*, quam trilineum *6fm* æquale quadranti *ERF*, & proinde æqualia inter ſe. Itaq; ſi auferatur commune triangulum rectilineum F*f*R, reſtabunt ab una quidem parte duo triangula FE*f*, *FR6*, quæ ſunt inter ſe æqualia, & ambo ſimul æqualia duplo bilineo *RFR*; ab altera vero parte duo trilinea nempe triangulum rectilineum F*f*R, & trilineum *6fm*, quæ ambo ſimul æqualia ſunt duplo complemento quadrantis *ERF* ad quadratum Radii *ER*. Sed cum duo triangula FE*f*, *FR6* æqualia ſint duplo bilineo *RFR*, erit triangulum F*f*R æquale uno complementorum prædictorum (eſt enim quadrans æqualis duplo bilineo *RFR* una cum complemento ipſius quadrantis ad quadratum Radii.) *Quare* trilineum *6fm* æquale eſt altero complementorum. Trilineum ergo *6fm*, *&c.* *Quod* erat demonſtrandum.

Prop. 61.

Spatium Cycloidale AB*f* terminatum duabus rectis AB, *Af* & curva B*cmf* æquale eſt quadranti ABC una cum quadrato ABzC.

Oſtenſum enim eſt (*Prop*. 52.) q od quadrilineum *m6*CB terminatum duabus rectis *m6*, 6C, & duabus curvis, arcu BC, & curva B*cm*, eſt æquale quadranti *ABC*. Cui additum ſpatium *6fm* æquale (ut in præcedente oſtenſum eſt) complemento quadrantis *ABC* ad quadratum ABzC facit planum comprehenſum a duabus curvis B*mf* & arcu *BC*, & a recta *f*C, æquale quadrato ABzC. Cui ſi addatur rurſus ipſe quadrans *ABC*, fit totum planum terminatum duabus rectis *AB*, A*f*, & curva B*mf* æquale utriq; ſimul, quadranti *ABC* & quadrato ABzC. *Quod* erat demonſtrandum.

B. Cum Rectangulum $f\pi z$C duplum ſit quadrantis *ABC*, & rectæ parallelæ quæ complent trilineum *f*B C*f* creſcant a puncto B ſecundum progreſſionem Arithmeticam uſq; ad C*f* æqualem arcui *BC*, ego

Ego crediſſem, juxta doctrinam *Wallisii* in ſua Arithmetica Infinitorum, ſpatium planum *f B C f* æquale eſſe dimidio Rectangulo $f\pi zC$, id eſt quadranti ABC.

A. Vides ergo regulæ *Wallisianæ* falſitatem, & quod extra figuras rectangulas & earum partes nihil valet.

Conſectarium 1. Si ducatur recta B*f* erit factum ſpatium bilineum B*f*B, æquale dimidio quadrato ABzC. Ducta enim recta $f\pi$ perpendiculari ad BG in π, & juncta *fz*, erit rectangulum *fz* (contentum ſub *f*C quæ æqualis eſt arcui ABC & ſub Radio $f\pi$) æquale duplo quadranti ABC ; & proinde totum rectangulum B*f* æquale duplo quadranti una cum quadrato ABzC. Et triangulum rectilineum *ABf* æquale uni quadranti ABC una cum dimidio quadrati ABzC. Quare quod reſtat bilineum B*f*B æquale eſt alteri dimidio quadrati ABzC.

Conſect. 2. Recta *fz* ita ſecat Cycloidem, puta in *c*, ut bilineum *cfc* & trilineum *cz*B ſint inter ſe æqualia; quod ex eo manifeſtum eſt quod ſpatium Cycloidale *f*AB*mf*, & quadrilaterum rectilineum AB*fz* ſunt inter ſe æqualia.

Conſect. 3. Triangulum rectilineum *fz*B æquale eſt bilineo *f*B*f*. Eſt enim triangulum *fCz* (cujus latus *f*C æquale eſt arcui BC, & latus C*z* æquale Radio AC) æquale quadranti *ABC*. Quoniam autem triangulum *fzB* una cum quadrato ABzC æquale eſt ſpatio Cycloidali *f*BA, ablato communi triangulo rectilineo *f*AB erit reliquum triangulum *fz*B æquale reliquo bilineo *f*B*f*, id eſt dimidio quadrato ABzC.

Prop. 62.

Solidum deſcriptum a plano Cycloidali B*f*FDB moto ſuper baſem DF per quadrantem circuli eſt æquale duabus tertiis Solidi quod ſit a rectangulo DG moto item ſuper eandem baſem, & per quadrantem circuli.

Intelligatur rectangulum DG moveri ſuper baſem D*F* immotam, donec rectæ DB, FG, cæteræq; intermediæ parallelæ deſcripſerint ſingulæ ſuos quadrantes; quo facto, dictum rectangulum DG inſiſtet plano chartæ perpendiculariter in communi ſectione DF; eritq; deſcripta quarta pars Cylindri recti. Erit autem arcus quadrantis deſcripti ab una quaq; parallelarum dictarum, æqualis arcui BCD, & quotalibet pars ejus æqualis parti cognomini arcus BC. Præterea Sinus rectus quotælibet partis arcus quadrantis deſcripti a DB, æqualis erit chordæ arcus cognominis deſcripti ab AB. Ubi enim arcus quadrantis arcui ſemicirculi eſt æqualis, ſi ſumantur in utroq; eædem partes, quæ recta chorda eſt arcus ſumpti in ſemicirculo, eadem recta erit Sinus rectus arcus analogi in quadrante. Itaq; ſi ducatur recta parallela & æqualis rectæ

rectæ DB, terminata in DF & BG secans Cycloidem in 1, parte duodecima arcus BCD, erit chorda B1 æqualis Sinui recto partis duodecimæ arcus quadrantis descripti Radio qui sit æqualis rectæ DB. Quare si in arcu quadrantis descripti a parallela per 1, sumatur pars ejus duodecima, & demittatur inde in Chartæ planum recta perpendicularis, incidet illa in parallelam altitudinis quæ transit per 1.

Similiter ostendi potest quod si sumatur pars sexta, id est arcus B2, Sinus rectus duarum duodecimarum partium arcus quadrantis descripti a parallela per *a*, ea incidet perpendiculariter in parallelam altitudinis quæ transit per 2. Et sic de cæteris partibus quadrantis. Itaq; arcus quadrantum descriptorum a rectis parallelis ipsi DB, decrescunt in ratione Arithmetica, donec evanescant in puncto *F*. Plana autem quadrantum eorundem decrescunt in ratione arcuum duplicata. Quare aggregatum quadrantum omnium descriptorum a dictis parallelis sumptis usq; ad Cycloidem, id est Solidum descriptum a plano Cycloidali BfFDB est ad Solidum descriptum a conversione spatii Cycloidalis externi BGFfB. Et ad Solidum descriptum a rectangulo DG ut 2 ad 3. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Sequitur hinc quod solidum descriptum a triangulo *FBD*, solidum descriptum a bilineo BFB, & solidum descriptum a plano Cycloidali externo BGFfB esse inter se æqualia; & unum quodlibet eorum æquale quartæ parti Coni, ejusdem altitudinis & basis cum Cylindro descripto a rectangulo *DG*. Est enim Conus, id est solidum descriptum a triangulo rectilineo *DGF* converso super rectum *DF*, tertia pars Cylindri descripti a revolutione rectanguli *DG* super eandem rectam *DF*.

Consect. 2. Manifestum hinc est eadem Methodo demonstrari posse, sumptâ quavis aliâ parallela altitudinis, ut Af, terminatâ ex una parte in diametro *DB*, ex altera parte in Cycloide, & ductâ $f\pi$ perpendiculariter ad *BG*, Quod solidum factum a conversione plani Cycloidalis BmfA circa rectam Af per quadrantem circuli æquale esse duabus tertiis solidi facti eodem tempore a conversione rectanguli $A\pi$ supra eandem Af.

Prop. 63.

Centrum gravitatis semicirculi genitoris *ABCD* ita dividit Radium *AC* in *O*, ut pars *AO* sit $\frac{2}{15}$ arcus *BCD*.

Si fiat ut tertia pars arcus *BCD* ad tertiam partem subtensæ (id est diametri) *BD*, ita duæ tertiæ Radii *AB*, id est una tertia diametri *BD*, ad quartam, erit terminus illius quartæ sumptæ ab *A* versus *C* centrum gravitatis semicirculi *ABCD*. (per lib. primum *cap. 9 Prop. 1.*

Prop. 1. Guldini de Centro gravitatis.) Sit terminus ille O.

Est ergo tertia pars diametri *BD* media proportionalis inter tertiam partem arcus *BCD* & *AO*. Quoniam ergo diameter (per superius demonstrata) est media proportionalis inter arcum *BCD* & duas quintas arcus ejusdem, etiam tertia pars diametri erit media proportionalis inter tertiam partem arcus *BCD* & tertiam partem duarum quintarum sive sex quindecimarum dicti arcus *BCD*. Sed tertia pars sex quindecimarum est $\frac{2}{15}$, quare *AO* est $\frac{2}{15}$ arcus *BCD* sive rectæ *AE* vel *DF*. Itaq; centrum gravitatis semicirculi genitoris *ABCD*, ita dividit radium *AC* in *O*, ut pars *AO* sit $\frac{2}{15}$ arcus *BCD*. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Ducta ab *O* recta $O\nu$ parallela diametro *BD* secans rectam Az, in ν, erit punctum ν centrum gravitatis quadrantis *ABC*.

Aliter.

Si fiat ut arcus *BC* ad duas tertias subtensæ *BC*, ita $A\xi$ semisubtensa ad quartam sumendam ab *A* versus *C*, erit terminus ejus centrum gravitatis semicirculi. Demonstratum est a *Jo. de la Faille*, *Prop. 36.* Sed ut arcus *BC* ad subtensam *BC* ita subtensa *BC* ad $\frac{2}{5}$ arcus *BC*, id est ad unam quintam totius *BCD*. Quare ut arcus *BC* ad $\frac{2}{5}$ subtensæ *BC* ita $A\xi$ id est semisubtensa ad duas tertias duarum quintarum arcus *BC*, id est ad unam tertiam duarum quintarum totius arcus *BCD*, id est ad $\frac{2}{15}$ arcûs *BCD*. Quod erat demonstrandum.

B. Si fiat semicirculus æneus accuratus qui sit ejusdem ubiq; crassitudinis, isq; in puncto *O* tenui filo suspensus maneat plano Horizontis parallelus, quin recta *DF* æqualis sit arcui semicirculi genitoris, dubitari amplius non potest.

A. Etsi experimenta talia vim non habeant demonstrationis, juvat tamen operis cum contemplatione consensio. Itaq: semicirculum æneum fieri curavi, & suspendi ab eo puncto, & parallelismum Horizontalem inveni exactissimum; sed procede.

Prop. 64.

Invenire centrum gravitatis segmenti *BCB* contentum arcu quadrantis & subtensa arcus *BC*.

Invento centro gravitatis trianguli rectilinei *ABC* fiat ut segmentum *BCB* ad triangulum *ABC*, ita distantia inter centra gravitatis quadrantis *ABC* & trianguli *ABC* ad aliam. Et illa inventa ponatur

tur a puncto ν versus arcum in eadem recta Az, nempe νr, & erit r centrum quæsitum. Datur autem ratio bilinei *BCB* ad triangulum *ABC*, nempe ratio *FR* ad *FE*, & est centrum gravitatis segmenti *BCB* in recta Az in qua sunt centra gravitatis tum Trianguli tum quadrantis *ABC*. Datur ergo punctum r, id est centrum gravitatis segmenti *BCD*. Factum ergo est, quod erat faciendum.

B. Video etiam aliud sequi scitu non indignum, nimirum, Planum quod nascitur ab aggregatione rectarum, quæ æquales sunt partibus arcus BC perpetuo a nihilo crescentibus juxta rationem Arithmeticam, quando applicantur ordinatim ad terminos curvarum sibi æqualium nempe B1 B2 B3, *&c.* æquales esse plano quod nascitur ab aggregatione sinuum rectorum eorundem arcuum, quando illi sinus ordinantur singuli ad terminos arcuum suorum in rectâ quæ sit ipsi arcui BC æqualis. Nam quod aggregatum sinuum rectorum omnium ita ordinatorum æquale est quadrato Radii demonstrarunt fortasse plures; sed invenit & demonstravit primus *Ch. Wren* Astronomiæ Professor *Greshamensis*.

Prop. 65.

Solidi quod fit a conversione trianguli rectilinei FDB per quadrantem circuli super basem FD, centrum gravitatis est in plano quadrantis descripti semidiametro $\gamma\gamma$ & erecti ad planum chartæ, & in ea recta quæ ducta a puncto γ dividit arcum ejusdem quadrantis bifariam, distatq; a puncto γ quod est in basi tantum quanta est dodrans duplæ rectæ $A\nu$.

Factum enim solidum a revolutione integra trianguli FDB super basem FD est Conus cujus centrum gravitatis dividit basem FD, ita ut pars ad verticem sit ad reliquam ut 3 ad 1, id est in γ. Quare planum erectum ad planum chartæ in communi sectione FD secans eam in γ, est planum æquilibrii tum ipsius Coni tum etiam dimidii vel quotælibet partis ejus. Planum enim æquilibrii dividit hæc in momenta æqualia. Est ergo centrum æquilibrii solidi quod fit a quarta parte conversionis trianguli FD, in plano quadrantis descripti a $\gamma\gamma$, & erecti ad planum chartæ. Quoniam autem arcus quadrantis descripti a DB duplus est arcus BCD descripti ab AB, & centrum gravitatis semicirculi BCD distat a centro A intervallo AO, erit centrum gravitatis semicirculi descripti a DB in distantia, a centro D tanta quanta est dupla AO. Sumatur DT æqualis duplæ AO, ducaturq; FT secans $\gamma\gamma$ in V. Quare, quando in conversione trianguli FDB recta DT fit plano chartæ perpendicularis, erit punctum T centrum gravitatis semicirculi descripti a diametro DB. Secet recta FB rectam $\gamma\gamma$ in X. *Quare* quando

do in conversione trianguli FDT, γV est ad planum chartæ erecta, erit punctum V centrum gravitatis semicirculi descripti a semidiametro γX. Et sic continget in intersectionibus rectarum omnium (quæ sunt Parallelæ rectæ DB) cum recta FT, ut centra gravitatis quadrantum descriptorum ab ordinatis in triangulo FDB, sint in intersectionibus ipsarum ordinatarum cum recta FT. Sed intelligendum est triangulum FDT erectum esse ad planum chartæ. Itaq, omnes semicirculi descripti a conversione trianguli FDB super basem FD æquiponderabunt super rectam FT, erectam ad planum chartæ. Sed quod æquiponderabunt etiam super $\gamma\gamma$ similiter erectam manifestum est ex eo quod Fγ est ad γD ut 3 ad 1. Est ergo centrum gravitatis Semiconi descripti a triangulo FDB in puncto V elevato perpendiculariter super planum chartæ sive Horizontis in γ; & distat a puncto γ quod est in base, tantum quanta est $\frac{2}{5}$ arcus semicirculi descripti a semidiametro γX, sive dodrante rectæ DB.

Rursus, quoniam centrum gravitatis quadrantis *ABC* est ad ν in recta Az quæ dividit arcum *BC* bifariam, erit quoq; centrum gravitatis quadrantis descripti a *DB* in recta quæ dividit arcum quadrantis ejusdem bifariam; distabitq; tantum a puncto *D* quanta est dupla $A\nu$. Sumatur Dφ æqualis duplæ $A\nu$, ductaq; Fφ secet rectam $\gamma\gamma$ in υ. Quoniam ergo Dφ est distantia centri gravitatis quadrantis descripti semidiametro DB a puncto D, & $A\nu$ est in recta quæ dividit arcum *BC* bifariam, erit quoq; $\gamma\upsilon$ distantia centri gravitatis quadrantis descripti a γX & in recta quæ dividit arcum ejusdem quadrantis γX bifariam. Idem accidit in cæteris omnibus ordinatis trianguli *FDB*. Est igitur Fφ diameter æquilibrii solidi quod fit a conversione trianguli *FDB* super basem *FD*. Et recta $\gamma\upsilon$ sumpta in recta quæ dividit arcum quadrantis descripti a γX bifariam Diameter æquilibrii altera, & $\gamma\upsilon$ dodrans sive $\frac{3}{4}$ rectæ Dφ, id est, duplæ $A\nu$. Itaq; punctum intersectionis ambarum $\gamma\upsilon$ & Fφ id est punctum ipsum υ est centrum gravitatis Solidi quod fit a conversione trianguli FDB per quadrantem circuli. *Quare* Solidi quod fit, *&c.* *Quod* erat demonstrandum.

Consectarium. Centrum gravitatis quartæ partis Cylindri descripti a conversione integra rectanguli DG super latus FD est in plano quadrantis descripti a $\zeta\zeta$ in distantia a puncto ζ quod est in base tanta quanta est Dφ, & est in recta quæ dividit arcum ejusdem quadrantis bifariam. Et centrum gravitatis dimidii Cylindri ejusdem est in recta quæ ex ζ erigitur plano chartæ perpendicularis in distantia æquali rectæ DT.

Prop.

Prop. 66.

Invenire centrum gravitatis Solidi quod fit a conversione plani Cycloidalis DBF circa basem DF per circuli quadrantem.

Sumitur $\zeta\chi$ æqualis rectæ $D\varphi$, & collocetur unus ejus terminus in recta DF ad ζ, & alter terminus in plano quadrantis erecti ad planum chartæ in $\zeta\zeta$, ita ut $\zeta\chi$ faciat cum recta $\zeta\zeta$ angulum semirectum; jungaturq; $\upsilon\chi$ seceturq; $\delta\varepsilon$ tam supra quam infra bifariam a recta $\sigma\sigma$, quæ secet $\upsilon\chi$ in τ. *Dico* punctum τ esse centrum gravitatis Solidi propositi.

Quoniam enim Solidum propositum (per *Prop.* 62.) est ad Solidum descriptum eodem tempore a rectangulo DG ut 2 ad 3, & centrum gravitatis Solidi facti a rectangulo DG est in plano erecto ad chartam in $\zeta\zeta$, & utriusq; centrum gravitatis in recta quæ facit cum diametro sui quadrantis angulum inclinationis semirectum, cumq; centrum gravitatis Solidi a conversione simili trianguli DBG sit similiter positum ad planum super $\gamma\gamma$, erit centrum gravitatis Solidi propositi (propter rationem magnitudinum 2 ad 1) in eo plano quod distat a plano per $\zeta\zeta$ ex altera parte, ita ut distantia $\iota\zeta$ sit ad distantiam ejus, ex altera parte reciprocè ut 2 ad 1. Erit ergo centrum gravitatis Solidi propositi in plano quod ad planum chartæ est erectum in $\sigma\sigma$. Nam $\iota\zeta$ est 3 quorum $\zeta\sigma$ est 2. Rursus centrum gravitatis Solidi propositi est in recta quæ facit cum recta $\sigma\sigma$ angulum semirectum. Rectarum $\delta\delta$, $\upsilon\chi$ intersectio sit ω. Quoniam jam $\omega\upsilon$ est ad $\omega\tau$ ut 2 ad 1, id est in ratione Solidi propositi ad Solidum factum a simili conversione trianguli DBF; & centrum gravitatis Solidi a triangulo DBF est in υ, si fiat ω centrum libræ, distabit centrum gravitatis Solidi propositi a centro libræ ω, ita ut distantia $\upsilon\omega$ sit dupla distantiæ centri gravitatis Solidi propositi ab eodem puncto ω. Erit ergo in τ. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Sequitur hinc punctum ω positum item in recta $\delta\omega$ ita ut faciat cum recta $\delta\delta$ angulum semirectum esse centrum gravitatis utriusq; simul Solidi, nempe Solidi propositi, & solidi facti a simili conversione trianguli *DBF*.

B. Credo equidem, & præterea punctum *C* esse centrum gravitatis utriusq; simul Solidi, nempe Solidi propositi, & Solidi quod fit a conversione simili plani Cycloidalis externi BFG. Video etiam basem *FD* ita dividi a plano æquilibrii $\sigma\sigma$ ut pars $F\sigma$ sit ad reliquam ut 5 ad 3, ut fit in semiparabola; nec mirum, cum ratio Solidi propositi sit ad suum complementum eadem quæ plani semiparabolici ad complementum suum. Cæterum *BD* non dividitur in 3 ad 2 ut Diameter semiparabolæ. Cujus rei causam non video.

A. Neq;

A. Neq; ego; sed neq; quare ita esse debeat. Ex iis quæ demonstrata sunt de ratione propositi Solidi facti a conversione ejus circa basem *FD*, ad Solidum factum a simili conversione rectanguli *DG*, & de centris gravitatis ipsorum, Methodus apparet inveniendi rationem Solidi facti a conversione cujuslibet partis ejus abscissæ a parallela altitudinis quacunq;. Nam si planum Cycloidale cujus basis (exempli causa) est Af convertatur super basem suam Af recta quidem *AB* describet quadrantem integrum, reliquæ autem ipsi parallelæ describent arcus quadrantum minores semper in ratione Arithmetica, donec in puncto *f* describatur nihil. Ex quo, ut ante, inferetur Solidum factum a conversione plani Cycloidalis ABf super Basem Afz duplum esse Solidi quod fit a simili conversione trianguli fAB; Cognitisq; magnitudinum rationibus invenientur, ut ante, eorum centra gravitatis.

Prop. 67.

Solidum factum a conversione rectanguli *DG* per quadrantem circuli, circa diametrum circuli genitoris *DB* (quæ est Cylindri totius sic facti altitudo) est ad Solidum factum a conversione ejusdem rectanguli *DG* circa rectam *DF* (quæ est Cylindri hujus altitudo) ut *DF* ad illius altitudinem *DB*.

Sunt enim Cylindri inter se in ratione composita basis ad basem (id est diametri basis ad diametrum basis duplicata) & altitudinis *DB* ad altitudinem *DF*. Sunt autem rectæ *DF*, *DB*, Du (per *Prop.* 56.) continuè proportionales. Est igitur basis ad basem ut *DF* ad Du. Componitur ergo ratio Cylindri facti a conversione plani *DG* circa altitudinem propriam *DB* ad Cylindrum factum a conversione circa altitudinem propriam *DF*, ex rationibus altitudinis *DF* ad Du, & *DB* diametri basis, ad *DF*, hoc est rectæ, Du ad altitudinem *DB*. Si componantur ergo ratio *BD* ad Du (id est ratio basis ad basem) & ratio *DB* ad *DF* id est Du ad *DB*, erit ratio Cylindri facti a conversione ejusdem rectanguli *DG* circa *DB* ad Cylindrum factum a conversione ejusdem rectanguli circa *DF* in ratione composita, ex rationibus *DF* ad Du, & Du ad *DB*; & propterea Cylindrus ad Cylindrum & proinde $\frac{1}{4}$ illius ad $\frac{1}{4}$ hujus, est ut *DF* ad *DB*. Quod erat demonstrandum.

B. Si certum esset quod Cylindri sunt inter se in ratione composita ex rationibus basis ad basem, & altitudinis ad altitudinem, dubitari non posset de Theorematis hujus veritate. Sed ubi est hoc demonstratum?

A. Demonstravit *Hobbius lib.* de Corpore *cap.* 13. *Art.* 14. Quod caput ipse *Wallisius* non improbavit, sed quia nihil in eo reperit quod

potuit

potuit rodere, *Hobbii* ipſius eſſe negavit. Non quod alienum revera eſſe putarat, ſed quia inſtituto ejus mentiri expedivit. Theorema hoc non modo in quantitatibus factis, ſed etiam in omni genere rerum factarum verum eſt. Neq; arte Logicæ, ſed ratione tantum naturali opus eſt ad veritatem ejus agnoſcendam. Satis enim manifeſtum eſt quod omnis Effectus naturalis ad omnem Effectum naturalem rationem habet compoſitam ex rationibus earum rerum quæ cauſas eorum componunt integras. Nihil enim in effectu eſſe poteſt quod non fuit in aliqua parte Cauſæ ſuæ; nec in Cauſa quod non in Effectum derivetur.

B. Mihi nova quidem hæc contingit doctrina, attamen veriſſima eſt & procedens a contemplatione quæ in iis (qui jurant in verba magiſtrorum) raro invenitur. Videamus jam conſectaria.

Conſectarium 1. Conus qui fit a converſione trianguli *FDB* circa *DB* diametrum circuli genitoris eſt ad Conum qui fit a converſione ejuſdem trianguli circa *DF* ut *DF* ad *DB*. Sunt enim ut ipſi Cylindri, Habent autem vertices ille in *B*, hic in *F*.

Conſect. 2. Solidum factum a converſione plani Cycloidalis *DBfF* circa *DB*, eſt ad Solidum factum a converſione ejuſdem plani Cycloidalis circa *DF*, ut *DF* ad *DB*. Sunt enim ut ipſi Coni.

Conſect 3. Exceſſus Cylindri facti a converſione rectanguli *DG* circa *DB*, ſuper Solidum factum a converſione plani Cycloidalis DBfF circa eandem *DB*, eſt ad exceſſum Cylindri facti a converſione rectanguli *DG* circa *DF* ſuper Solidum factum a converſione plani Cycloidalis DBfF circa eandem *DF*, ut *DF* ad *DB*. Sunt enim hi quoq; ut Cylindri ipſi.

Prop. 68.

Centrum gravitatis ſemicirculi cujus diameter eſt *DF*, id eſt recta æqualis arcui *BCD* eſt in recta quæ ducta a centro dividit ipſum ſemicirculum bifariam, & diſtat a centro *D* tantum quanta eſt recta æqualis duabus tertiis ſemiradii *AB*.

Oſtenſum enim eſt, Quod centrum gravitatis ſemicirculi *ABCD* eſt in recta *AC* quæ a centro *A* dividit ſemicirculum *ABCD* bifariam, diſtatq; a puncto *A* tantum quanta eſt *AO*, id eſt, quanta eſt duæ quindecimæ rectæ *DF* ſive arcus *BCD*. Sed in omnibus ſemicirculis centra gravitatis ſitum habent ſimilem. Quare centrum gravitatis ſemicirculi, cujus diameter eſt *DF*, diſtat a puncto *D* tantum quanta eſt duæ quindecimæ arcus ſemicirculi cujus diameter eſt *DF* æqualis Arcui *BCD*. Eſt autem arcus ſemicirculi cujus diameter eſt æqualis arcui

arcui *BCD*, æqualis (per *Prop.* 11.) quinque ſemiradiis ſive quintuplæ *BO*
Itaque centrum gravitatis diſtat a centro D tantum quanta eſt duæ
quindecimæ quintuplæ *AB*, id eſt duæ tertiæ ſemiradii *AB*. Quod
erat demonſtrandum.

Conſectarium. Dato centro gravitatis ſemicirculi, datur quoq; centrum gravitatis dimidii ejus; atq; etiam cujuſlibet Sectoris qui ſit ſemicirculi quotalibet pars.

B. Methodo (ut videtur) eadem qua centra gravitatis partium
Cylindri facti a converſione plani DG circa DF inventa ſunt, inveniri
poſſunt etiam centra gravitatis partium Cylindri facti a converſione
ejuſdem plani DG circa DB; Quid ergo ea quæ reſtant non demonſtras?

A. Primo quia hæc parata habui, cætera nondum contemplatus
ſum. Secundo, quia alia Figura deſcribenda eſſet, in qua ſemicirculus,
cujus diameter eſt DF eſſet deſcribenda, & non paucioribus lineis quam
hæc onerata eſt, oneranda; id quod mihi quidem operæ pretium eſſe
non videtur. Nam ſemicirculorum quidem, & quadrantum, & alio-
rum ſectorum centra gravitatis cognoſcere, utilitatem aliquam habet
ad magna ædificia, propterea quod ſaxa grandia talis formæ appenſa
a centris gravitatum ſuarum elevari in altum poſſunt Horizontaliter,
& proinde apte collocari; quod aliter fieri non poteſt, ſine multo
labore, atq; etiam periculo, ne dum vectibus detorqueantur, dif-
fringantur.

B. Redigis mihi in memoriam fabulam Vulpis & Racemi.

A. Irride quantum libuerit, ego hæc nihilominus relinquam illis
quibus longius ſperatur tempus vivendi.

Credo te qui demonſtrationibus legendis animum acriter intendere
ſolitus es, ſatis jam tandem defatigatum eſſe.

B. Ego vero minime. Delector enim Paradoxis, qualia ſunt hæc quæ
legimus fere omnia.

A. Itane ais?

B. Quid ni? Quod punctum magnitudinem, etſi aliquando non
conſideratam, aliquam tamen habeat, Paradoxum non eſt?

A. Eſt quidem, ſequutis doctorum authoritatem; utentibus autem
ratione propria Paradoxum non eſt.

B. Quod Ratio ea quidem quam habent inter ſe duo inæqualia
quantitas ſit, ea vero quam habent duo æqualia quantitas non ſit,
Paradoxum eſt. Quod in tribus continue proportionalibus quorum
primum eſt minimum, Ratio primi ad ſecundum ſemiſſis eſt Rationis
primi ad tertium. Quod angulus rectilineus eſt quantitas converſionis
Radii circa centrum. Quod angulus Contactus eſt quantitas, eſſe tamen
angulos ad quos ille rationem habeat nullam. Deinde illa quæ
hinc

hinc deduxisti, nempe, latus quadrati, quod quadratum æquale sit decem quadratis a quarta parte diametri, æquale sit arcui quadrantis, contra *Archimedem*. Quod arcum vel angulum dividis in rationem datam. Quod centrum gravitatis semicirculi tantum distat a centro circuli quanta est $\frac{2}{15}$ arcus ejusdem semicirculi, nonne hæc tua & *Hobbiana* Paradoxa sunt Geometrica?

A. Sunt quidem Paradoxa, nihil tamen impedit quo minus vera sint, & fortasse in rebus, quales sunt hæ, speculationis aliquanto profundioris, nihil tam Paradoxum est quam ipsa veritas.

B. Paradoxum quoq; est quod Regulam Algebræ (id est delicatorum hominum Geometriam totam) in Figuris curvilineis parum aut nihil valere dicis.

A. In scriptis Geometricis aliorum nulla credis esse Paradoxa? Primo, lineam latitudinem non habere, & tamen duci posse. Secundo, angulum planum esse inclinationem quam habent duæ lineæ concurrentes, in ipso puncto concursus. Tertio, posse transiri a majore ad minus per omnia media, nec tamen per æquale. Quarto, duplicatum minus esse quam Simplum.

B. Cujus hoc sit non memini.

A. Nonne omnes affirmant in ratione minoris ad majus duplicata (exempli causa) in his continuè proportionalibus 1. 2. 4, rationem 1 ad 4 duplicatam esse rationis 1 ad 2, iidem tamen (cum *Eucl. Ele.* 5. *Prop.* 8.) Rationem 1 ad 2, quæ est simpla, majorem esse quam Ratio 1 ad 4, quæ est duplicata.

B. Non sunt hæc Paradoxa.

A. Quid ergo sunt?

B. Absurda. Sed ultimum hoc de duplicata ratione ex eo natum esse videtur quod *Euclides* utitur voce διπλασίονι semper pro *duplicata*, nunquam pro *dupla*.

A. Quid autem? An Geometram decet Theorematum veritatem ex usu verborum, an ex rebus ipsis rectè conceptis æstimare. Sed quod *Euclidem* ais nunquam uti voce διπλασίονι pro duplo verum non est. Lege *Elem.* 3. *Prop.* 20. quæ sic se habet, Εν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐςὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, &c.

B. Tua illa quanquam Paradoxa vera tamen sunt, ut mihi videntur, & futura aliquando Endoxa. Interea tu, qui defendis omnem doctrinam *Hobbianam*, quid dicturus es ad ea quæ habet in Physica sua & Politica. Et primo, in Physica, quod omnium rerum naturalium causas dicit esse Motum, eumq; Moti & contigui corporis.

A. Sive verum hoc sit sive falsum, Paradoxum certè non est. Nam *Aristoteles* quem sequitur schola, idem dicit, si non & amplius,

plius, cum dicat *Naturam* nihil aliud esse præter *Motum*; Motum autem proprium esse corporis. Quod internum esse dicat, non negat quin causam habeat in externo. Nam affirmat alibi *nihil posse movere seipsum*. Ab hoc Principio orsus causas qualitatum sensibilium & Phænomenωn Naturalium fere omnium satis probabiles deducit *Hobbius*; id quod illi quibus Principium hoc videtur falsum facere nunquam poterunt.

B. Maximam partem Effectuum Naturalium deducit ille a motu quodam quem vocat *Circularem Simplicem*, quem motum vereor ne Lectores, exceptis paucis non satis concipiant. Nam etsi talis motus ad producenda Phænomena Naturæ ferè omnia sit omnium motuum aptissimus, quia tamen a nemine ante illum animadversus & explicatus est, Lectores pauci ductum Orationis, qua motus ille describitur & Computatur, facile sequi possunt.

A. Si quis manu teneat corpus aliquod figuræ cujuscunq;, puta Pilam, e qua Pila promineret stylus scriptorius, an difficile est imaginari quo modo ille eo stylo possit literam aliquam Alphabeti ductu continuo exarare?

B. Nihil facilius.

A. Quod si plures simul styli prominerent, ita ut tabellam aliquam omnes simul tangerent, nonne idem eodem tempore literas plures exarare poterit?

B. Mille si vult, & tot sint styli. Sed illæ erunt omnes inter se similes et æquales.

A. Id quidem manifestum est. Sed quis interea motus & qualis dicetur totius Pilæ.

B. Profecto, quem motum habet unius styli cujuslibet cuspis, eundem habebit cuspis styli alterius cujuscunq; ; imo vero punctum unum quodlibet tum Pilæ tum manus.

A. Motus jam Pilæ ipse est, quem appellat ille *Motum Circularem Simplicem*, non modo quando Pilæ puncta describunt Circulos, sed etiam quando quaslibet alias describunt figuras, modo puncta illa motu suo ad loca redeant unde moveri inceperunt. Cujus motus proprietas una est ut quælibet linea in Pila sumpta feratur sibi semper Parallela. Notandum est etiam hoc, Quod Naturæ non repugnat tali motu quamquam velocissimo describi posse figuram etiam minutissimam. Hunc motum Telluri quidem toti attribuit *Copernicus*; *Hobbius* autem etiam Soli, & Planetis omnibus, & singulis etiam minimis eorum partibus. Aliam ejusdem motus proprietatem ostendit esse quod Heterogenea segregans congregat Homogenea. Atq; ex his proprietatibus causas reddit omnium ferè Phænomenωn Naturalium,

ium, satis probabiles, tantas ubiq; Magnitudines & Velocitates supponens quantas effectus cujus causa quæritur postulat.

B. Nihil a Physicis, quorum Principia, ut Geometrarum, proprio arbitrio certa statui non possunt, amplius requirendum est, quam ut causæ rerum tales esse possint. Itaq; Physica illa *Hobbii* tam diu improbanda non est, quam diu nemo eorundem Effectuum per alios motus causas reddiderit probabiliores.

A. Id quod nunquam, credo, fiet. Nam causa naturalis omnis rei est motus aliquis; ii autem qui philosophiæ maximè nunc studentes naturam motus minime contemplati sunt, in hanc unam rem incumbunt, ut nova acquirant Phænomena; cum Phænomena sola experiendo, causæ ratiocinando a Motu cognoscendæ sunt.

B. *Qui* corpora corporibus admovendo, nova & mirabilia ostendunt Naturæ opera, mirum in modum incendunt animos hominum amore Philosophiæ, & ad causas investigandas non parum instigant, eoq; nomine laude digni sunt.

A. Ita est; nam Historiam Naturalem (sine qua scientia Naturalis frustra quæritur) locupletant. Sed intueri & admirari Naturæ opera, ut puer Pulchritudinem libri plus Contemplatur quam literas, non est hominis Philosophi; id quod faciunt qui videntes Phænomena, non considerant quo Agente, quo motu, & quo modo generari potuerunt. Nam si experientia rerum naturalium, scientia dicenda sit, Optimi omnium Physici sunt Pharmacopœi.

B. Cæterum Dogmata aliorum de iisdem rebus consideremus paulisper. Luminis quænam est causa efficiens? *Lumen* (dicit aliquis) *est corpus cujus particulæ exeuntes e Sole, penetrant oculos animalium, unde vident.* Quidni eadem facilitate & veritate dicant etiam tenebras esse corpuscula, quæ exeuntia ab aliquo corpore tenebroso & delata ad oculos faciunt ut non videant. *Lumen* (dicit alius & magis accedens ad veritatem) *est inclinatio ad motum.* Sed id quod jam est ad motum inclinatio, quid impedire potest ne non sit ipse motus? Si quæras quæ sint Causæ Rari & Densi, dicit alius quod idem corpus, quo plus quantitatis habet, eo Rarius, quo minus eo Densius esse. Sed quæris (puto) tu qua de causa, & quo pacto effici potest, ut idem numero corpus, id est corpus sibi semper æquale, possit habere quantitatem modo minorem, modo majorem.

B. Ego vero id non quæro. Scio enim quod est impossibile. Sed corpora videmus modo augeri, modo diminui, quæ tamen eadem esse dicimus.

A. Non autem idem numero corpus esse possunt, nisi idem esse censeas Totum & Pars. Sed hæc nihil attinent ad Densum & Rarum.

An

An putas idem vas plenum Aquæ majus minusve esse quam si plenum esset quocunq; alio corpore?

B. Minimè profecto.

A. Quidam ex Philosophis hujus seculi causam Rari & Densi explicat hoc modo. Si dato corpori immisceatur quantitatis plus, fit Rarum; si minus, Densum.

B. Nullus omnino est Effectus naturalis cujus causa non facillime sic expediatur, & eodem modo quo Pharmacopolæ temperant sua Pharmaca ad præscriptum Medicorum. Recipe Corporis puri ad libitum; Gravitatis gradus octo; quantitatis paululum; Coloris flavi quantum sufficit; Misce. Fiat aurum. Lepidam narras Philosophandi Methodum.

A. Et eam quidem Philosophiæ reformatæ. Vide jam antiquiorem, Quæritur quænam sit Causa quod Magnes ferrum ad se trahit. Respondetur, per Συμπαθείαν. Quæritur rursus, Quid est Συμπαθεία. Respondetur, Occulta qualitas. *Quæ*ritur etiam, *Q*uid est, Occulta qualitas. Respondetur, *Q*uam nescimus. Nonne ad primam interrogationem melius responsum esset, Nescio?

B. Minime sane. Sic enim visi fuissent cum jactura aliqua authoritatis suæ nihilo plus sapere quam vulgus hominum.

A. Ita est. Respexerunt ergo ad utile deserta honestate.

B. In Politica autem, quis unquam ante illum, tantum Summis Imperantibus Juris attribuit, ut quicquid illi jusserint, eo ipso quod jusserint, sine injuria esset?

A. Imo vero, quæ Civitas unquam extitit ubi Summo Imperanti minus Juris concessum est. Civitatis Romanæ Imperium Summum quis Jure habuit?

B. Ipsa quidem Civitas semper, Civitatis autem munus exequebatur modo unus modo alius, & post *Tarquinium*, ante *Cæsarem*, Senatus Populusq; *Romanus*.

A. Legistin' unquam quod *Romæ* pro injuria habitum sit, quod de Cive *Romano* constituisset Senatus populusq; *Romanus*?

B. Non memini.

A. Cur ergo injuriam nominaremus nos, id quod constitueret Senatus populusq; *Anglicanus*?

B. Non faceremus, sed quod unus homo vel pars aliqua populi juberet non dubitaremus aliquando injustum dicere.

A. *Q*uid autem intelligis per *Injustum*?

B. Id quod factum est contra Leges.

A. Quid sunt Leges?

R. Jussa Civitatis, id est, jussa Curiæ sive Cœtus illius qui a Civibus

vibus eligitur, ut totam Civitatem repræsentet. Non enim pars millessima Civium Romanorum potuerunt in forum convenire.

A. Non ergo ille unus homo, aut pars populi habebat Imperium Summum.

B. Minimè.

A. Nondum ergo ostendisti injustum esse habitum quod factum est a Summo Imperante, sed tantum sententiam tuam de Forma Regiminis summi subindicasti, de qua hoc loco disputare nolo. Dicam tantum, quod est verissimum, si singuli Cives representari se jusserint ab uno homine, & per consequens, illius esset Imperium Summum, id quod ille jusserit non minus pro justo habendum esse, quam si idem jussisset Senatus & Plebs eandem habentes authoritatem. Nihil ergo in Politica peccavit certè hactenus.

B. Nihil profecto. Sed Parturit jam *Anglia*, & hoc ipso die speratur nascitura Pax & Imperium firmum. *Quod* nisi *Justitiæ Libra Gladius Belli*, & *Virga scholæ* in eadem sint manu, diuturnum esse vix potest.

A. Finem ergo sermonibus nostris tandem imponentes, si placet surgamus, & precemur Deum, ut illis qui de Imperio *Angliæ* nunc deliberant, id decernant quod ad ipsius gloriam amplificandam, & ad statum Civitatis confirmandum erit convenientissimum; maximè verò ut velint Imperium in eum locum, unde avulsum est, restituere.

B. Amen.

FINIS.

Quæ sequuntur, Correctiones quædam sunt libri *de Corpore* Latinè editi, quorum correctiones ex Editione *Anglica* hic apponuntur, eo fine ut liber ille, si cui dignus videbitur aliquando qui operâ sua, unà cum cæteris Sectionibus denuò imprimatur, veniat in manus Lectorum emendatior. Si vero non videbitur, quid mea qui abeo?

In locum Capitis decimi octavi substituatur quod sequitur.

De

De Rectarum & Paraboliformium linearum Æquatione.

1. Datæ lineæ Parabolicæ æqualem exhibere rectam. 2. Datæ lineæ curvæ Parabolastri primi, sive Parabolæ cubiformis, rectam invenire æqualem. 3. De rectis inveniendis cæteris ex genere Parabolico curvis lineis æqualibus methodus Generalis.

1. Datæ lineæ Parabolicæ æqualem exhibere rectam.

Sit linea Parabolica data ABC (*Fig.* 1.) & inventa diameter AD:
Ducatur basis DC, & compleatur Parallelogrammum ADCE; jun-
gaturque AC, & divisâ AD bifariam in F, ducatur FH æqualis & pa-
rallela rectæ DC, secans AC in K, & lineam Parabolicam in O. De-
inde inter FH & FO sumatur media proportionalis FP, ducanturque
rectæ AO, AP & PC. Dico duas rectas AP & PC simul sumpas æ-
quales esse lineæ Parabolicæ ABOC.

Nam linea ABOC cum sit Parabolica, generata est a concursu
duorum motuum, altero uniformi ab A ad E, altero eodem tempore
uniformiter accelerato a quiete in A ad D. Cum autem motus ab
A ad E sit uniformis, potest AE repræsentare tempora utriusque
motus. Sit ergo AE Tempus; quare rectæ in Semiparabola Ordinatæ
designabunt partes temporis in qua corpus quod describit lineam
ABOC est in unoquoque ipsius puncto, ita ut quemadmodum in
fine temporis AE vel DC corpus illud est in C; ita in fine tempor-
FO erit in O. Et quoniam Velocitas in AD crescit uniformiter, id
est in ratione temporum, eædem Ordinatæ in semiparabola desig-
nabunt perpetua incrementa Impetûs, donec fiat maximus, qui ma-
ximus Impetus designatur a base DC. Itaque supposito quod mo-
tus sit uniformis, corpus quod est in A, tempore FK, propter con-
cursum duorum motuum uniformium in AF & FK, movebitur uni-
formiter in AK. Et KO erit incrementum Impetus (vel velocita-
tis) acquisiti tempore FK; & AO describetur uniformiter a concursu
duorum motuum uniformium per AF & FO, in tempore FO. A
puncto O ducatur OL Parallela rectæ EC, secans AC in L; & LN
parallela DC, secans EC in N, & lineam parabolicam in M, & pro-
ducatur ex altera parte ad AD in I; eruntque IN, IM, & IL (per

con-

constructionem parabolæ) in ratione continua , & æqualis tribus rectis FH, FP, & FO singulæ singulis; & recta quæ sit rectæ EC parallela transiens per M, incidet in P , & proinde OP erit incrementum Impetus acquisiti tempore FO vel IL. Postremo producatur PM ad CD in Q, eritque QC, vel MN, vel PH incrementum Impetûs proportionale tempori FP, vel IM, vel DQ. Supponatur jam motus uniformis ab H ad C in tempore PH. Quoniam ergo in tempore FP motu uniformi, & Impetu crescente in ratione temporum describitur recta AP, & reliquo tempore & Impetu, nimirum tempore & Impetu PH, describitur CP uniformiter, sequitur totam lineam APC descriptam esse Impetu toto , & tempore eodem in quo describitur linea Parabolica ABC. Quare linea APC composita ex duabus rectis AP & PC æqualis est lineæ parabolicæ ABC. Inventa est ergo recta æqualis curvæ lineæ semiparabolæ. Quod erat faciendum.

2. Lineæ curvæ Parabolastri primi, sive Parabolæ cubicæ, invenire æqualem rectam.

Sit ABC(*Fig*.2.) linea curva Semiparabolastri primi; AD diameter; DC basis; compleaturque parallelogrammum ADCE, cujus diagonalis sit AC. Secetur diameter bifariam in F, ducaturque FH æqualis & parallela DC, secans AC in K, & curvam in O, & rectam EC in H. Deinde ducatur OL parallela EC, secans AC in L, ducaturque LN parallela basi DC, secans curvam in M, & EC in N, producaturque ex altera parte ad AD in I. Postremò, per punctum M ducatur PMQ Parallela & æqualis HC, secans FH in P, junganturque CP, AP, & AO. Dico duas rectas AP & PC simul sumptas æquales esse curvæ ABOC.

Nam linea ABOC, cum sit linea curva Semiparabolastri, generata est a concursu duorum motuum altero uniformi ab A ad E, altero eodem tempore accelerato a quiete in A ad D, ita ut Impetus crescat in ratione triplicata ejus secundum quam crescunt tempora, sive (quod idem est) longitudines transcursæ sunt in ratione triplicata temporum quibus transcurruntur. Nam ut Impetus sive Velocitates crescunt, ita crescunt etiam transcursæ longitudines. Et quoniam motus ab A ad E est uniformis, recta AE potest repræsentare Tempus, & per consequens , rectæ ordinatim applicatæ in Semiparabolastro, designabunt partes Temporis, in quo corpus incipiens a quiete in A, motu suo describit lineam ABOC. Et quia DC, quæ repræsentat Impetum acquisitum maximum æqualis est ipsi AE, eædem ordinatæ repræsentabunt singula incrementa Impetûs crescentis a quiete in A. Itaque si supponatur motus uniformis ab A ad F in tempore FK, describetur a concursu duorum motuum uniformium

formium per AF & FK, linea AK uniformiter; & KO erit incrementum Impetus pro tempore; & per concursum duorum motuum uniformium per AF & FO, describetur Linea AO uniformiter. Per punctum L ducatur recta LMN parallela DC, secans rectam AD in I, curvam ABC in M, & rectam EC in N; & per punctum M rectam PMQ parallelam & æqualem AC, secans DC in Q, & FH in P. Itaque a concursu duorum motuum uniformium per AF & FP, in Tempore FP describetur uniformiter recta AP. Et LM vel OP erit incrementum Impetûs addendum pro tempore FO. Et quia ratio IN ad IL triplicata est rationis IN ad IM, ratio FH ad FO erit etiam triplicata rationis FH ad FP. Et Impetus acquisitus tempore FP est PH. Itaque cum FH sit æqualis PC quæ designabat Impetum totum acceleratione acquisitum, nullum amplius Impetûs incrementum computandum est. Jam in tempore PH si supponatur motus uniformis ab H ad C, describetur uniformiter a duobus motibus per CH & HP uniformibus recta linea PC uniformiter. Cum ergo duæ rectæ AP & PC descriptæ sint tempore AE cum eodem incremento Impetûs, quo curva linea ABOC describitur eodem tempore AE, id est cum linea composita a rectis AP, PC. & linea ABOC transcursa sit ab eodem corpore eodem tempore, & æquali velocitate, ipsæ lineæ erunt æquales. Quod erat demonstrandum.

Eadem Methodo recta linea inveniri potest æqualis lineæ curvæ cujuscunque Semiparabolastri eorum quæ disponuntur in Tabella Articuli 3[i] Capitis 17[i] ; nempe, secando Diametrum bifariam, & procedendo ut antè.

Cap. 4. Art. 4.	l. antepenultima dele *itaque*. l. ultima pro *necessarius non est* lege *necessariæ*.
Cap. 5. Art. 2.	l. 9. pro *ut Nomen copuletur cum Oratione* scribatur *ut Nomen Rei copuletur cum Nomine Orationis*. l. 27. pro *Corporis* scribatur *Rei*. & pro *cum Oratione* scribatur *cum Nomine Orationis*.
Cap.14.Art.12.	l.6. inter *ipsarum* & *Angulos* interpone *ad easdem partes*.
	l. 15. pro *erunt* BE, DF *æquales* scribatur *erunt anguli* EBA, FDC *æquales*.
	l. 19. pro *non ergo intercipiuntur parallelæ* scribatur *non erunt ergo Anguli* EBA, FDC *æquales*.

 Cap.

Cap. 14. Art. 14. l. 10. pro *si jam*. &c. usque ad finem paragraphi scibatur *si jam punctum* A *intelligatur moveri uniformiter per* AB, *& eodem tempore punctum* B *moveri ad* C, *& omnia puncta* F, D, B *moveri uniformiter & æquali inter se velocitate per* FG, DE, BC, *punctum* B *percurret* BH (*æqualem* FG) *eodem tempore quo punctum* A *percurrit* AF. *Et erit ratio* AF *ad* FG *ut illius velocitas ad hujus velocitatem. Et quando* A *est in* F *erit* D *in* K; *& quando* A *est in* D *erit* D *in* E. *Et ut punctum* A *transit per* F, D, B, *ita* B *transit per* H, I, C. *Et rectæ* FG, DK, KE, BH, HI, IC *sunt* (*propter parallelismum*) *æquales. Quare ut velocitas per* AB *est ad velocitatem per* BC, *ita est* AB *ad* BC. *Id est, singulæ parallelæ erunt ad partes a Vertice abscissas ut* AF *ad* FG. *Itaque* AF. FG : : AD. DE ; : AB. BC *sunt proportionales.*

Cap. 16. Art. 1. lineis tribus ante finem, inter *semissem* & *Nam* interponantur hæc verba, *alterum, semissem Impetus maximi.*

Coroll. 3. Art. 4. l. 1. pro *in motu uniformiter accelerato* scribatur *in motu ita accelerato, ut Impetus crescat in ratione Temporum duplicata.*

Cap. 19. Pro ultimis verbis *demonstrabitur Capite proxime sequente Articulo tertio* scribatur *demonstrabitur alio loco.*

Cap. 20. Paragraphus post finem Coroll. Art. 2. incipiens per *scio* deleatur. ad finem Consectarii Art. 3. verba illa *& laudes*, &c deleantur.

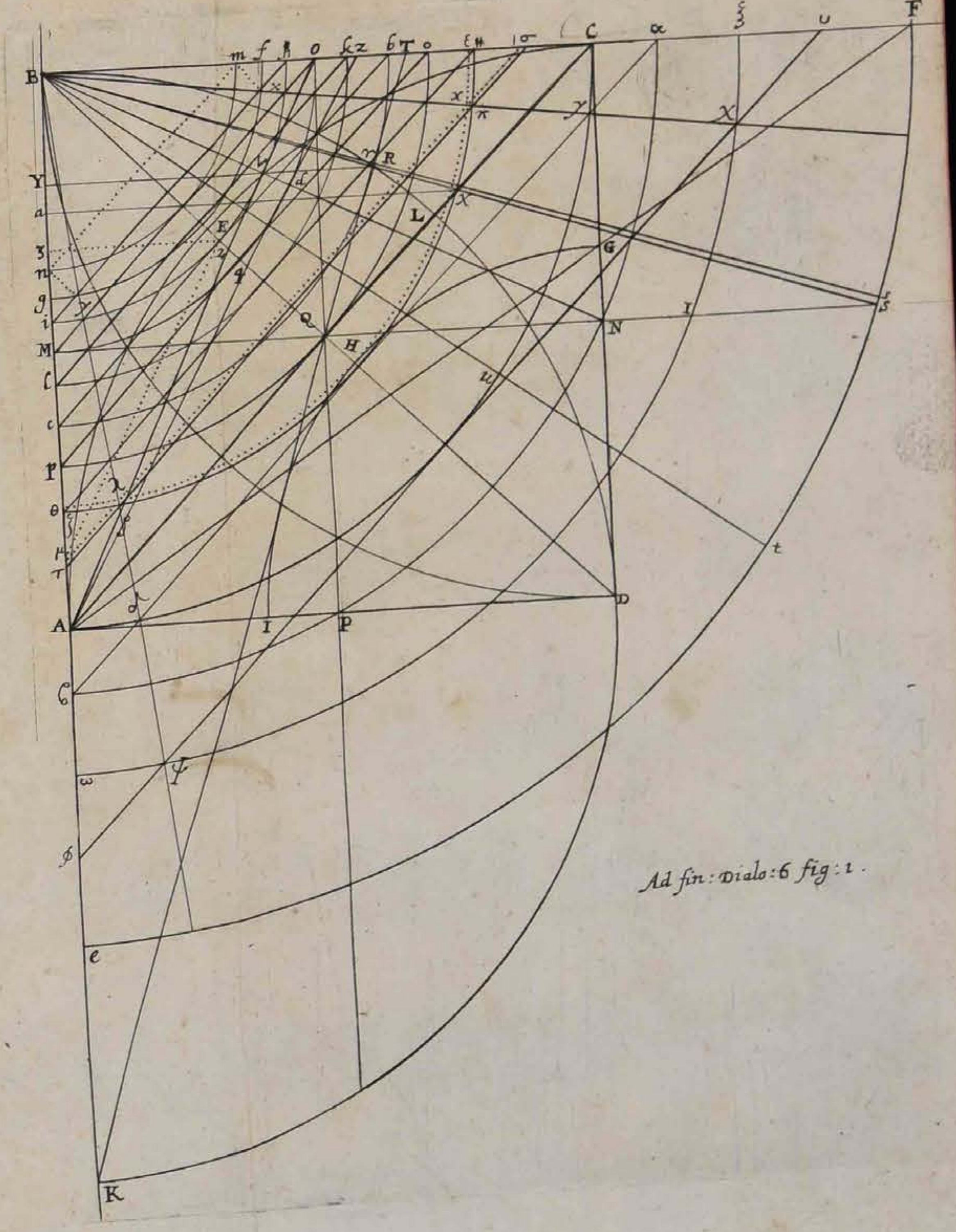
Cap. 23. Art. 9. Novem lineis ante finem, pro *quæ rationes sunt, &c.* usque ad finem Paragraphi, scribatur. *Sed ratio* AL *ad* AZ *componitur ex rationibus* AL *ad* BZ & BZ *ad* AZ. *Jam ratio* BZ *ad* AZ *est ratio ponderum reciproca, id est ponderis* CIAPE *ad pondus* CDFE. *Itaque ratio reliqua* AL *ad* BZ, *id est* LB *ad* BZ *est ratio momenti ponderis* CDFE *ad momentum ponderis* CIAPE. *Sed ratio* AL *ad* BZ *componitur ex rationibus* AL *ad* AZ, *&* AZ *ad* BZ, *quarum rationum ea quæ est* AZ *ad* BZ, *est ratio ponderis* CDFE *ad*

ad pondus CIAPE. *Quare (per Articulum quintum) reliqua ratio* AL *ad* AZ *est ratio distantiarum punctorum* Z *&* L *a Centro Libræ, quod est* A. *Quare (per* Art. 6. *) pondus* CIAPE *æquilibratum erit super rectam* OZ. *Est ergo* OZ *altera diametrorum æquilibrii ponderis* CIAPE. *Sed altera ejusdem ponderis diameter æquilibrii est recta* AB. *Quare (per* Def. 7.*) punctum* Z *est centrum gravitatis ponderis* CIAPE *quod punctum (per constructionem) dividit axem ita ut pars* AZ *quæ est ad Verticem, sit ad partem reliquam* BZ, *ut Figura completa* CDFE *ad Figuram Deficientem* CIAPE. *Quod erat demonstrandum.*

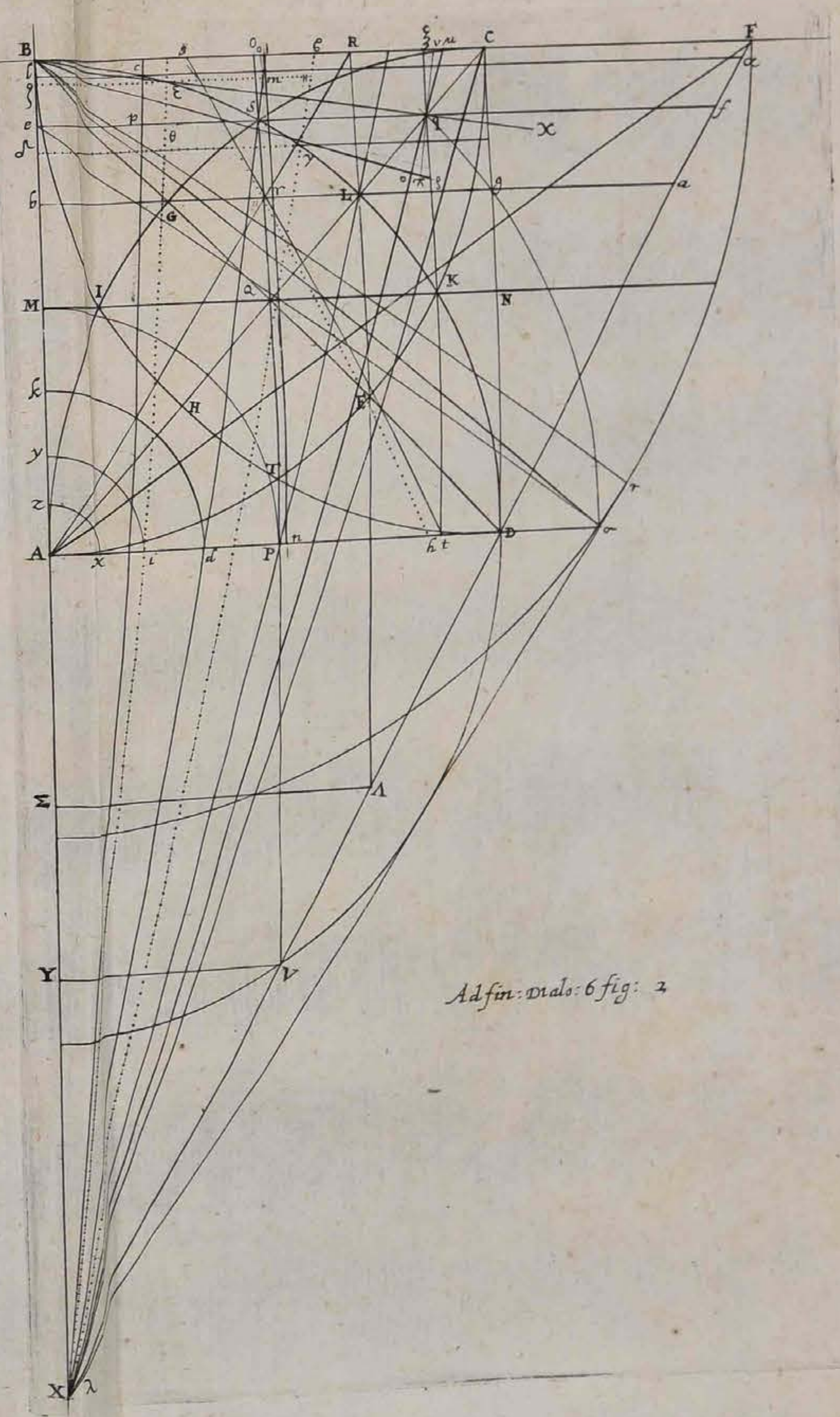
Books written by this Author besides these Dialogues.

In Latine
1. *De Corpore.* The same in English with 6 Lessons to the Professors of Geometry in *Oxford.*
2. *De Homine.*
3. *De Cive.*

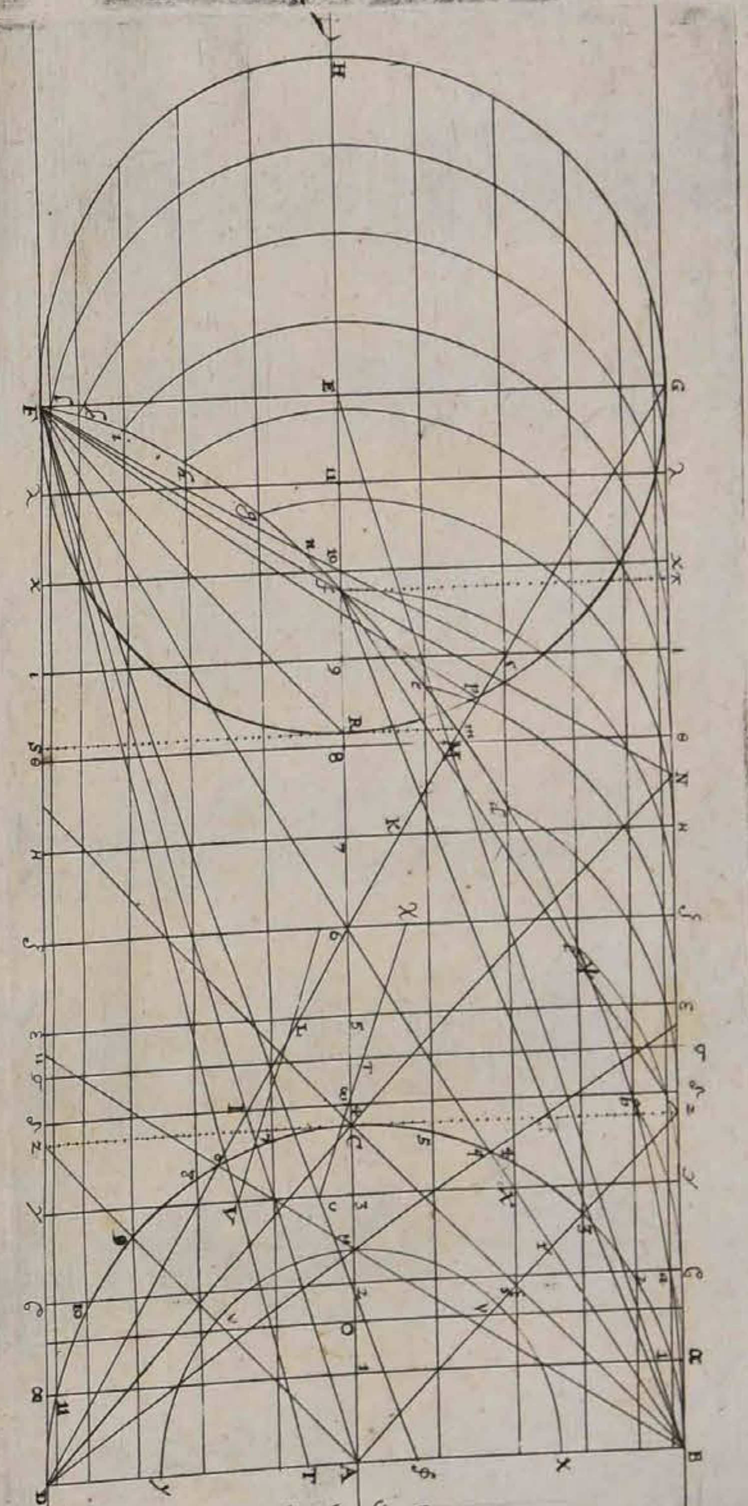
In English
1. *Leviathan.*
2. *Marks of the Absurd Geometry*, &c. of *John Wallis* Professor, *&c.*
3. *Of Liberty and Necessity* against Bishop *Bramhall.*



Ad fin: Dialo: 6 fig: 1.



Ad fin: Dialo: 6 fig: 2



Ad fin: Dialo: 6: fig: 3

Cap: XVIII

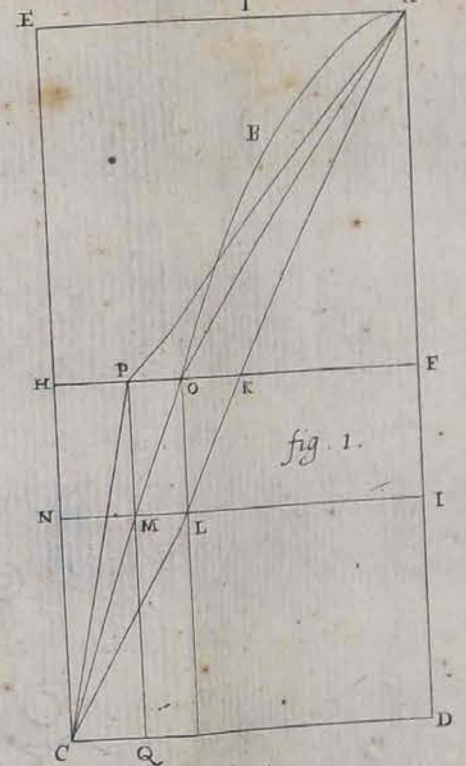


fig. 1.

Ad fin: lib:

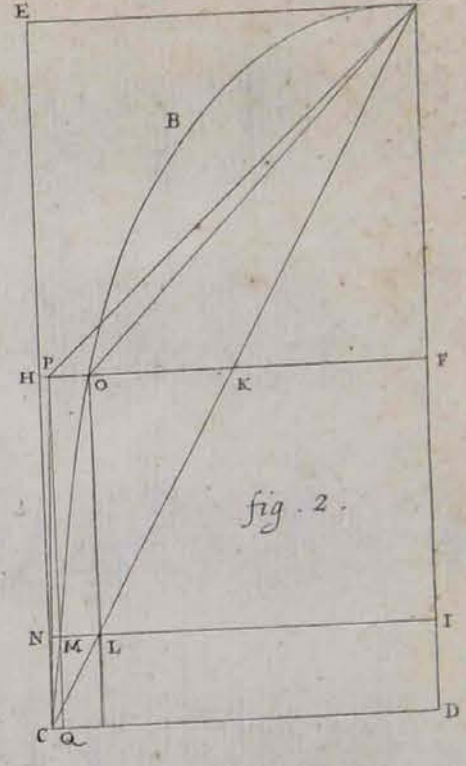
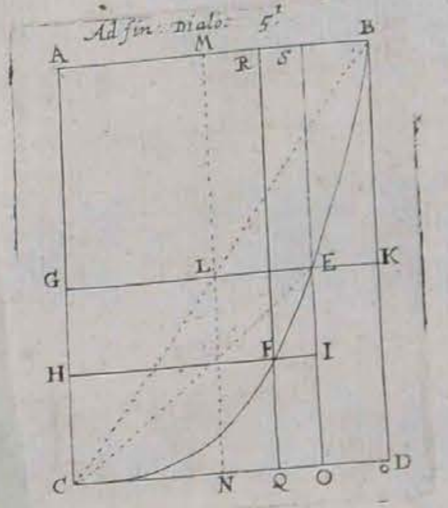


fig. 2.



40 =

(4)

104

40

256.82