5va meni

415

ALGEBRA CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV.

Excudebat Stephanus Gamonetus.

Anno M. DCIX.

GENEVÆ.

CLAVDIVS AQVAVIVA
Societatis Iesu Præpositus Generalis.

CVm opus hoc, cui titulus est Algebra, P. Christophori Clauij Bambergensis, Tres eiusdem Societatis Theologi, quibus id commisimus, recognouerint, ac in lucem edi posse probauerint: facultatem damus, vt typis mandetur, si Reuerendissimo D. Vicesgerenti: & Reuerendissimo P. Magistro Sacri Palatij ita videbitur. In cuius rei fidem has litteras manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus. Romæ Kalendis Octobris 1607.

Claudius Aquauiua.

Imprimatur si videbitur R. P. M. Sac. Palatij Apostolici.

Cesar Fidelis Vicesg.

Imprimatur.

Frater Augustinus Galaminius Sac. Pal. Apost. Magister.

ILL.MO ET EXCELL.MO D.

DON IOANNI DE GVEVARA DVCI BOVINI REGNI NEAPOLITANI MAGNO SENISCALLO.

Christophorus Clauius è Societate Iesu S. P. D.

SPLENDIDA sunt, & magnificis amplificata titulis, Dux Excellentissime quæ de animorum nostrorum nobilitate, ac præstantia circumferuntur: sed nullum profectò luculentius, nullum, si naturam spectes, ad vtilitatem, vel ad voluptatem iucundius, ab vniuersitatis artifice mortales obtinuere beneficium, quàm quod sibi bonarum artium, ac disciplinarum ad rerum naturam pertinentium ornamenta cōparare possunt. Has inter facultates, quarum

præcipūa laus in veri veſtigatione conſiſtit,
non poſtremæ notæ Mathematicas eſſe is ne-
get, qui nullum ſibi putet eſſe cum veritate
cōmercium. Ex Mathematicis verò, quæ quaſi
in patritias diſtributæ familias, aliæ aliò euaſe-
re, Arithmetica tantò cæteris præſtat, quantò
eius natura ſyncerior, veritas explicatior eſſe
iudicatur. Quid enim illa vel ad ingenij ſubti-
litatem acutius, vel ad certitudinem firmius
excogitari poteſt? quid eſt, quod Arithmeticis,
& illis quidem pauculis notis, addendo, ſub-
trahendo, multiplicando, diuidendóq; nume-
ros progreſſionum Geometricarum ab vnita-
te incipientium (quam artem patrio vocabulo
Algebram Arabes nominarunt) confici non
poſſit? Quoties huius diſciplinæ artificio ex-
territi etiam acutiores ita ſunt, vt nullum pu-
tarēt tacitum pectoris arcanum eſſe, quod nu-
merorum iudicium effugiat, fallat Arithmeti-
corum ingenia. Huius in facultatis ſinum, ta-
metſi ſemper, in hac tamen extrema ſenectute
mea quaſi contento curſu, tāquam in portum
ita me recepi, vt in eius placidiſſimo complexu
omne imbecillæ ætatis faſtidium leuauerim,
atque ob incredibilem eius varietatem, volu-
ptatémque moleſtias omnes temperauerim.

Quamuis

Quamuis verò extiterint non pauci tum ex an-
tiquis, tum ex recentiorib. qui aliqua cum lau-
de huius diſciplinæ excoluerūt cognitionem,
operæ tamen pretium fore iudicaui, ſi quæ illi
obſcurè, implicatè, confuſè ſcripſerunt, aperi-
rem ipſe, enodarē, ſuis locis exactè digererem.
Itaque ſpiſſum ſanè, & denſum opus, ſummiſ-
que difficultatibus inuolutum ſum ſenex ag-
greſſus, vt eorum vtilitati conſulerem, quorum
ingenia, dummodo prius non leuiter Arith-
meticis ſint regulis exercita, abſolutam Alge-
bræ cognitionem affectant. Libellum itaque
hunc, qua potui diligentia, conſcripſi, quem
iam improbę lucis iudicium ſubeuntem cuius
potius clientelæ committerem, Dux Illuſtriſ-
ſime, quàm tuæ, cuius generis ampliſſimi no-
bilitatem non longa ſolum auorum ſeries tot
magnificis nobilitata monumentis, ſed pro-
pria etiam laus omni virtutum genere ſpecta-
bilis commendat? Accedit ad hoc incredibilis
tua in me humanitas, qua me tunc adeò com-
plexus es, cùm te Romæ, ac Illuſtriſſimum Pa-
rentem tuū Innicum alloquutus ſum, qui prę-
clariſſimo ad imitationem, admirationémque
poſteritatis exemplo, rebus omnibus huma-
nis, honoribus, potentia, opibus, ſtudio pau-

pertatis cum religiosæ vitæ conditione commutatis, eo velificauit, vbi ne leuisquidem ambitiosæ gloriolæ aura animi fluctus commouente, ea consequi potest, quæ nulla temporum volubilitate labefactantur. Quod si aliquid huic addendum est, hoc addam (mitto tua in me, ac Mathematicos omnes, tum beneuolentiam, tum liberalitatem) quod nimirum hoc grati animi monumentum tua sibi vindicat in nostrum ordinem vniuersum munificentia, qua Bouini ad adolescentium excolenda, qua ad pietatem, qua ad litterarum studia, ingenia, Collegium à fundamentis excitasti. Complectere igitur qua soles clementia ac humanitate tenue hoc munusculum, in quo si rei amplitudinem, ac præstantiam, certè animi voluntatem non desiderabis. Ipse verò eam tibi à Deo Optimo Maximo precabor fœlicitatem, quæ votis tuis, nostrísque ex omni parte respondeat Romæ Idibus Martij M. DC VIII. Vale.

INDEX

INDEX CAPITVM ET RERVM, QVÆ IN IIS CONTINENTVR.

PROOEMIVM DE ALgebræ præstantia.

CAPVT I.

De Inuentore Algebræ, ac nomine.

CAPVT II.

De Numeris Cossicis, siue Denominatis.

CAPVT III.

De Numeratione Cossicorum numerorum.

CAPVT IIII.

De Additione, & Subtractione numerorum Coßicorum.

CAPVT V.

De Multiplicatione, & Diuisione numerorum Coßicorum.

CAPVT VI.

De numeris fictis, siue minoribus quàm nihil.

CAPVT VII.

De Fractionibus numerorum Coßicorum.

CAPVT VIII.

De Regula Algebræ.

CAPVT IX.

De Æquationum varietate.

CAPVT X.

De reductione Æquationum.

CAPVT XI.

De diuisione, quam præcipit Regula Algebræ.

CAPVT XII.

De extractione radicum, cuius mentionem facit Regula Algebræ.

CAPVT XIII.
De multitudine Regularum Algebræ, quam alij auctores introducunt.

CAPVT XIV.
Quæstio proposita, vtrum possibilis sit, necne, an vero inepta ac nugatoria, quo pacto ex ipsa operatione, quæ per Algebræ regulam fit, cognoscatur.

CAPVT XV.
De secundis radicibus.

CAPVT XVI.
De numeris irrationalibus, siue surdis.

CAPVT XVII.
De reductione radicum simplicium ad eandem denominationem.

CAPVT XVIII.
De multiplicatione, ac diuisione radicum simplicium.

LEMMA.

CAPVT XIX.
De Additione radicum simplicium.

CAPVT XX.
De subtractione radicum simplicium.

CAPVT XXI.
Inter duos numeros quotlibet medios proportionales constituere.

SCHOLIVM.

CAPVT XXII.
De additione, ac subtractione numerorum irrationalium compositorum.

CAPVT XXIII.

De multiplicatione, ac diuisione numerorum irrationalium compositorum, & diminutorum.

SCHOLIVM.

CAPVT XXIIII.

De Radicibus numerorum irrationalium compositorum, vel diminutorum, quas alij Vniuersales dicunt: Et de earundem Algorithmo.

CAPVT XXV.

De minutiis numerorum Irrationalium, ac de earundem Algorithmo.

CAPVT XXVI.

De numeris Irrationalibus Cossicis, siue Denominatis, vna cum eorum Algorithmo.

CAPVT XXVII.

De Binomijs, atque Apotomis, Residuisve.

CAPVT XXVIII.

De extractione radicum ex Binomiis, & Apotomis. Vbi obiter de aliis lineis irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. disputat.

LEMMA.

SCHOLIVM.

CAPVT XXIX.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

LEMMA.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

CAPVT XXX.

Ænigmata varia numerorum abstractorum per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus aliis duobus æqualis est, occurrit: quę quidem composita æquatio dicitur.

VEL

LEMMA.

COROLLARIVM.

SCHOLIVM.

CAPVT XXXI.

Ænigmata varia numerorum ad res materiales contractorũ, cum nonnullis exemplis ad ſecundas radices pertinentibus.

CAPVT XXXII.

Ænigmata varia ad figuras Geometricas pertinentia.

LEMMA.

SCHOLIVM.

EPIGRAMMATA QVINQVE Græca.

Finis Indicis Capitum, & rerum.

PROOEMIVM
DE ALGEBRAE PRÆSTANTIA.

ET DIGNITATE *summa, & amplissimarum laudum præconijs nulli postrema ea ars est, quam recepto vocabulo Algebram nostrates appellarunt: siue enim eius veluti natiuam originem inquiras: inde vsque ab Arabum felicibus ingenijs repetenda est: siue honestatem inter Mathematicarum ordinis primas versatur: siue amplitudinem, nullis numerorum statis finibus, nulla magnitudinum mole, nullis gentium priuatis, publicis, priscis, recentibus, cultis, barbaris institutis, non vllo terrarum, vasto licet, ambitu continetur. Propositum siue scopus eius est, vt certam aliquam à sensuum cognitione, ac sensu secretam quantitatem exploret, & tandem inter duos aliquos numeros æqualitate, siue æquatione comperta, deprehendat, atque demonstret. Venaticæ canis instar, quæ, si quando diuturna venatione fatigata, & fame exagitata delitescentem feram subodorata fuerit, tamdiu oculis, tamdiu odora narium sagacitate scrutatur singula, donec comprehensam, dentibúsque hærentem prædam domino sistat. Et sanè multo etiam opificium ipsum opus admiratione antecellit, & arduum sua sponte facinus, atque præclarum exornat ipsa conficiendi ratio, redditque præstantius. Persimile est, quod dissimili in re andabatarum more ludentibus euenire solet. Quamdiu enim obuelatis oculis vrgentur ipsi, vrgéntque vrgen-*

Scopus Algebræ.

tesse, comprehensuros se aliquem nunquam desperant, è multis tamen, quis tandem sit intercipiendus, ignotum habent, & frustra sæpe his atque illis tentatis tenebris, vbi aliquem tenuerunt, tum demum detracta vitta, lucem oculi recipiunt, & ludus absoluitur. Obscuros enim numeros Algebra nunc addendo, nunc diuidendo, nunc multiplicando, suspenso velut vestigio, pertentat, certa, se in aliqua Geometrica progressione ab vnitate profecta deprehensuram, quod quærit, in qua tamen progressione inuentura sit, incerta: ac tam diu cæco labore ludit, tamdiu latitantis numeri tenebras omnes explorat, vestigat, ac perfert, donec eò progrediatur, & ad eum numerum deueniatur, qui fuerat quæstioni subiectus, qui tum demum in lucem emergit, cum ipsa absoluitur operatio. Et primo quidem is numerus existit, qui in toto illo numerorum labore vnitatem progressionis ab vnitate incipientis proximè consequitur, tum etiam y omnes numeri deprehenduntur, qui ad quæstionem explicandam indagandúmque propositum additi & diuisi fuere, vt suis deinde locis planum faciemus. Quàm igitur scopus iste latè vagatur, qui nec genus vllum numerorum, nec vllius magnitudinis diuersitatem, à se alienam putat? vt non numerorum modò latebras omnes detegat, sed vniuscuiusq; etiam molis finitam magnitudinem, sonorum metrum, ponderum momenta, mensurarúmque certos terminos assequatur: neque vlla Arithmeticæ quæstio subyciatur, quam non veluti suam agnoscat Algebra, atque expediat. Tam multas, tam varias, tam obscuras, tam difficiles Mathematicæ partes vna Algebra pertractat vniuersas. Nam quod rerum Mathematicarum inextricabiles nodos solui non posse, accidit aliquando, aut si quid obscurum extrahi à tenebris nunquam potuit, non huius facultatis præcepta certissima, sed æquationum & æqualitatum difficultates, & quæ nondum innotuit, earundem ratio causanda est. De his tamen plura ad finem capitis 12. habentur. Illud modò agamus, vt quantis interuallis Algebra Arithmeticæ præceptionibus antecellat, videamus: Quid enim in illa

Algebra excellentia.

est, quod non etiam huius veluti fasces vereatur? quæ exempla tam sua, quæ tam ancipites quæstionum ambages, quæ tantæ moles difficultatum, qui tam inextricabiles meandri rerum abditissimarum, quæ non sint omnia illi cum ista communia? Nihil habet Arithmetica, nihil quod Algebram fugiat, quæ explicare ipsa cùm nequeat, cognoscenda Algebræ tradat, habet quam plurima. Illud verò quam præcla-

præclarum est, quàm vnicuique optandum maximè, quam huius facultatis peculiare? Quod enim cæteris commune est, vt non ante proposita difficultas expediri possit, nec ne, sentias, quam totam absoluas, & bis iterúmque integram repetas, iteréisque operationem, id in hac, in ipso operationis decursu obuiam fit, & prodit ipsa se quæstio, prius quàm labor finem accipiat. Quæ enim sæpe suppositæ fallaciæ, & quæstionum pugnantes inter se sententiæ Algebræ imperitos latent, eas Arithmeticæ studiosus, nisi per hanc exploratas habeat, totus de propositæ quæstionis solutione sollicitus frustra laborat, atque ad has, atque ad illas regulas animum refert, experitur singulas, singulas recognoscit, torquet sese & conficit, ad extremum inanes labores suos sentit, studiúmque infelix damnat. Quare ne illud quidem in hac facultate est magnopere verendum, ne laborem vllum temerè susceptum, & ad extremum vsque frustra toleratum dolendum sit: quod aliæ Mathematicæ partes accipere quidem ab hac possunt, præstare ipsæ non possunt. Atque hæc pauca de præstantia ac dignitate Algebræ præfationis loco dicta sint.

DE INVENTORE ALGEBRÆ AC NOMINE.

Caput I.

DE INVENTORE huius artis non conuenit inter omnes, Gebrum Arabem Aſtronomum aſſerunt non pauci, & à Gebro Algebram dictam contendunt. Vero ſimilius tamen Ioannes Regiomõtanus in præfatione Alphragani Diophanto Alexandrino hoc inuentum attribuit. Ipſe enim Diophantus in tredecim librorum pręfatione, quos hac de re ſcripſit ad Dionyſium, ſe primum huius ſcientiæ inuentorem profitetur, & à nemine ante ſe in lucem datam, immò ad ſuam vſque ætatem ignotam omnino fuiſſe, pronunciat. Maiorem accepit nomen ipſum varietatem, nam quod inter cæteras Arithmeticæ regulas maximè pręſtat, Ars maior à plurimis appellata eſt. Regulam cenſus & rei Latini dixerunt, hoc eſt, regulam Radicis & quadrati. Magna enim ex parte quæſtiones in hac arte propoſitę ſoluuntur per calculationes radicum, quos ipſi res, & quadratorum, quos iidem cenſus vocant, vt ſuo loco conſtabit. Apud Italos Regula coſę (ſeu della coſa) nuncupatur, quod in quæſtionib. ſoluendis ſemper vna radix ponatur, quam ipſi coſam dicunt. Ex quo etiam nomen illud ſortita eſt, quo à multis regula Coſſica nominatur. Non vno eam nomine Arabes omnes nominarunt, Algebram enim quidam vocant, quod apud eos idem ſonat, ac reſtauratio, quia nimirum in quęſtionibus hac arte ſoluendis ad aliquam ſemper æquationem, ſiue æqualitatem eſt deueniendum, in qua, quidquid ablatum, quidquid diminutum eſt, quidquid deeſſe comperitur, reſtaurari oportet. Almuchabulam verò, quod oppoſitionem eorum lingua ſignificat, propterea vocant alij, quòd in quæſtionum abditis exponendis in hac ſcientia, cum ad æquationem ęqualitatémve aliquam peruentum eſt, duo ſemper numeri æquales, diuerſo tamen nomine, ſibi inuicem opponuntur. Atque hinc poſtremo factum eſt, vt geminatis nominibus Algebram & Almuchabulam aliqui vocauerint, quòd ſcilicet tum per reſtaurationem, tum per hanc, quam modò diximus, oppoſitionem, quæſtiones omnes expediat. Harum tamen appellationum rationes is cognoſcet planius, qui quęſtionũ, quę hoc opere continentur, ſolutiones diligentius cognouerit. Vſus tamen apud ſcriptores, vt cum Arabib. Algebra hæc tota noſtra ſcientia cõmuni appellatione diceretur, obtinuit.

Varia nomina Algebra.

HÆC de inuentore & nomine Algebræ dicta ſufficiant. Quæ ſi quàm præclara eſt, quàm iucunda ſtudioſis ſui, quam omnibus ſe

ſe præ-

ſe præſtat admirabilem, tam etiam perſpicuè tradita eſſet, nec in Arithmeticorum, qui eam docuerunt, obſcuritate declaranda magis quàm in eiuſdem facultatis præceptis explicandis laborandum eſſet, coleretur etiam ipſa inter primas, ſuamque dignitatem pariter, & nominis ſplendorem integrum retineret: nec tam multi ſcriptorum vel ambagibus impediti, vel obſcuritate deterriti, relato repente veſtigio, ante diſcendæ Algebræ voluntatem & ſpem perdiſcendi abieciſſent, quam Algebram ipſam, primo, vt aiunt, è limine ſalutarent.

HORVM mihi laborem leuandi labor incumbit in præſentia, nec moleſtus, licet grauis, nec ſi eius fructus exiſtat, iniucundus. Quod & diuina ope præſtare pro meis viribus enitar. Omnia proinde, quæ ad Algebram ſpectant, ea methodo tradere, difficultatúmque moles omnes explanare conabor, vt quiuis mediocriter tantum in Arithmeticæ præceptis verſatus, quàm fieri poſſit, minimum in ea addiſcenda laboris experiatur. In quo tamen præſtando, ſicut diligentiam non patiar deſiderari meam, ita eorum à me opinionem alienam puto, ſi qui ſunt, qui vſquequaque perfectam & numeris omnibus abſolutam Algebræ tractationem à me requirant.

NON adeò me amo, vt me tantopere cæteris omnibus, qui ad hanc diem eam deſcripſerunt, præferendum putem, vt quod ipſi non effecerunt, pręſtare me poſſe profitear.

ÆQVATIONES eſſe plurimas inter tres, pluréſve numeros diuerſis nominibus appellatos, probè ſcio, quæ in quæſtionibus Algebræ beneficio diſſoluendis interdum, licet non ita frequenter, incidunt, nec tamen ſatis adhuc compertum apud omnes eſt, qua arte ab ipſis radices ſint educendæ, quarum ego æquationum & eas, quę adhuc cognitæ exploratæque ſunt, & eas, quæ nondum ſuis è tenebris emerſerunt, cap. 12. enumerabo. Meum igitur hoc opus eſt, ea vna cura, vt quę inuolutè alij, ego explicatius exponam, apertius, quæ illi obſcurius, proferre quæ latent, ardua explanare, facem pręferre, ſingula, quoad mea induſtria feret, dilucidè & enucleatè tradere atque docere. Poſtremo non tam de Algebræ dignitate & exiſtimatione detrahere illæ æquationes debent, ex quibus radices inuenire nondum didicimus, quam eam quęſtiones infinitę propemodum commendare, quę æquationibus inuentis ſoluuntur, certámque, vt ſuis locis conſtabit, ſcientiæ rationem habent. Verum qui ſuos labores non omnino otioſos in Algebræ ſcientia poſuiſſe optat, eum in vulgaribus Arithmeticæ pręceptis ſe ſe aliquando exercuiſſe oportebit, nec eorum omnino rudem ad huius cognitionem inſtitutionémque accedere, cuiuſmodi illa ſunt, quę quaſi fundamẽta ſunt tyronibus facienda; Additio numerorum, ſubtractio, multiplicatio, atque diuiſio, non integrorum modò, ſed & fractorum. His adde proportionum regulam, quæ à pleriſque regula trium nuncupatur, atque his ſimilia non pauca: Proportiones præterea, progreſſionéſque numerorum tum Arithmeticas, tum Geometricas

Intentio auctoris.

calluiſſe debet. Tertio noſſe debet radicum omnium extractiones ex quocunque numero, qui proponatur, ſiue integer is fuerit, ſiue fractus. Demum & Geometria, & diſciplinis aliis excultum, nec leuiter expolitum eſſe præſtabit.

Algorithmus quid

STVDII præterea plurimum in Algorithmo addiſcendo collocandum erit, quem habet hæc facultas à cæteris peculiarem. Algorithmum verò dicimus tractationem, quæ additionem, ſubtractionem, & alias operationes numerornm complectitur. Eum inquam Algorithmum numerorum quorundam, quos in vulgari Arithmetica explicari in vſu non eſt. Eorum porro numerorum triplex omnino genus numeratur. Primum quidem eorũ, quos Coſſicos plerique, vel Denominatos dixerunt, iique in aliqua Geometrica progreſſione, quæ ab vnitate ducit initium, reperiuntur, cuiuſmodi ſunt Radices, Quadrati, Cubi, & quæ eiuſdem generis ſunt non pauca, de quibus mox dicere inſtituam. In altero genere inſunt numeri, qui radicales appellantur, vt radix quadrata, cubica, & huiuſmodi cuiuſcunque numeri, ſiue is eam habeat radicem, ſiue non habeat, atque de his differemus, cum ad caput 16. peruenerimus. Tertij denique generis ſunt numeri radicales numerorum eius generis, quod primo loco poſitum eſt à nobis, quales ſunt radix quadrata, vel cubica, & ſimiles, quotcunque quadratorum, cuborum, vel radicum, &c. de quibus poſtremus nobis erit labor. Et quoniam eorum numerorum Algorithmus, quos in ſecundo ac tertio genere collocauimus, difficultatem non minimam, & obſcuritatem habet non contemnendam, de induſtria eum in finem regulæ Algebræ reiici placuit. Nam etiamſi quæſtionum ſatis multæ cum Geometricarum, tum Arithmeticarum per hanc Algebræ regulam enodari ac ſolui nequeant ſine illo Algorithmo; nulla tamen inter Algebræ ſcientiam, & eum Algorithmum cognatio tanta eſt, vt hæc ab illo, tanquam nexu quodam adhæreſcant ſibi, aut nunquam diuelli queat, aut aliquo modo ab eodem pendere dicenda ſit. Primum igitur Algorithmus Coſſicorum, ſiue eorum, qui Denominati dicuntur, numerorum explicandus nobis eſt, qui ad hanc ſcientiam penitus cognoſcendam omnino cenſetur neceſſarius. Tum ipſam Algebræ regulam, eáque omnia perſequemur, quæ ad eiuſdem regulæ plenam cognitionem faciunt, quibus abſolutis, à cap. 16. initium facientes, totóque 26. numerorum radicalium, & abſolutorum & Denominatorum, ſiue Coſſicorum Algorithmum trademus. Extremas partes Ænigmata agent, quibus propoſitis, & tandem explicatis, planior ac perfectior totius regulæ Algebræ ſenſus fiet, & fructus vberior.

Tria genera numerorum in Algebra vſitatorũ.

DE

DE NVMERIS COSSICIS, ſiue Denominatis.

Cap. II.

NVMERI Coſſici, ſiue Denominati ſunt omnes numeri cuiuſcunque progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis. Propoſita namque progreſſione qualibet Geometrica ab vnitate initium ſumente, Primus terminus, id eſt, vnitas numerum abſolutum, & ſimplicem repræſentat: Secundus verò terminus vnitatem ſequens vocatur radix omnium ſequentium, cum ex eius multiplicatione in ſeipſum procreetur tertius, & ex multiplicatione eiuſdem ſecundi termini in tertium producatur quartus, & ſic deinceps, vt in ſcholio propoſ. 10. lib. 8. Eucl. demonſtrauimus. Tertius deinde terminus, quia producitur, vt dictum eſt, ex ſecundo in ſeipſum, dicitur Quadratus, ſeu Cenſus, vel Zenſus, vt nonnulli huius artis periti volunt. Quartus poſtea terminus appellatur Cubus, quoniam fit ex multiplicatione radicis, hoc eſt, ſecundi termini in ſuum quadratum, nimirum in tertium terminum, vt diximus. Atque ita deinceps omnes numeri progreſſionis Geometricæ, cuius initium eſt vnitas, denominantur, habita ratione multiplicationis radicis in ſequentes terminos.

Numeri Coſſici qui ſint.

QVIA verò variè huiuſcemodi numeri à variis auctoribus denominantur, delegimus nos ex omnibus modum quendam denominandi illos numeros facilem, & valde accommodatum, vt denominationes has quantumlibet extendere poſſimus, & appoſitis characteribus deſignare; appellantes nimirum numeros progreſſionis Geometricæ, numeros Coſſicos. qua quidem in re nonnullos ſcriptores recentiores ſecuti ſumus. Parum enim refert, ſi hoc nomine, vel alio appellentur numeri progreſſionis Geometricæ, dummodo res ipſa intelligatur. Denominationes autem hæ exprimuntur ſequentibus characteribus.

Cur numeros proportionis Geometricæ dicamus Coſſicos.

N. ℞. ʓ. ce. ʓʓ. ß. ʓce. Bß. ʓʓʓ. cce.
ʓß. Cß. ʓʓce. Dß. ʓBß. ceß. ʓʓʓʓ. Eß. &c.

PRIMVS character N. appellationem habet numeri abſoluti & ſimplicis, ita vt numerus, cui appoſitus fuerit, pro abſoluto & ſimplici habeatur. vt 4. N nihil aliud ſignificant, quàm quatuor vnitates ſimplices ac abſolutas: Plerunque tamen character hic, vel ſignum N, non ſolet numeris apponi, quando pro abſolutis habendi ſunt. Itaque ſiue numerus aliquis gerat hoc ſignum N, ſiue eo careat, accipiendus eſt pro numero abſoluto.

Explicatio characterum Coſſicorum.

Secundus character ℞. habet appellationem Radicis, vel Rei, ita vt vt numerus,cui appoſitus ſit, à radicibus denominetur, vt 4 𝔯. ſignificant quatuor radices, vel res. Vnde ſi progreſſio Geometrica habeat 2. in ſecundo loco,erunt 4 𝔯.octo vnitates: ſi vero 3.duodecim vnitates,& ſic de cęteris.

Tertius character ʒ.repræſentat quadratum, quem zenſum nonnulli dicunt,vt 4 ʒ. ſunt quatuor quadrati vel zenſi.Itaque ſi tertius numerus progreſſionis Geometricæ ſit 4. erunt 4 ʒ. decem & ſex vnitates: Si autem 9. triginta ſex vnitates. &c.

Quartus character ce. denotat cubum. vt 4 ce.ſignificant quatuor cubos, ita vt ſi cubus fuerit 8. 4 ce. ſint 32. vnitates : ſi 27. 4 ce.ſint 108. vnitates. &c.

Idem dicendũ eſt de reliquis characteribus, quorũ ſignificationes hic ſunt ſubſcriptæ , vna cum appellationibus,& ſignis, quibus alij ſcriptores vtuntur. Quemadmodum enim appellationes numerorum Coſſicorum apud ſcriptores varios varię ſunt , vt diximus , ita etiam ſigna ſeu characteres,quibus ipſas exprimunt,ijdem non ſunt.

N. Numerus ſimplex, & abſolutus.

𝔯. Radix. Italis Res, vel Coſa. Vnde hoc modo ab ipſis radix exprimitur.1 co.4 co.20 co.&c. Alij verò ita deſignant,1 R̸.100 R̸.&c.

ʒ. Zenſus , ſiue Quadratus. Alij quadratum exprimunt hoc charactere q.vt 1 q.30 q.8 q.&c. Itali ſic notant. ce. vt 1.ce. 4.ce. 20.ce. &c.

ce. Cubus. Alij artifices ita depingunt.cu.vt 7 cu.8 cu.200 cu.&c.

ʒʒ. Zenzizenſus, ſiue Quadratiquadratus. Nonnulli ita ſignant. qq. vt 3 qq. 10 qq. &c. Itali vero ſic ce.ce. vt 4 ce.ce. 9 ce.ce. 12 ce.ce. &c.

ß. Surdeſolidus. Hunc alij dicunt Surſolidum, vel Superſolidum. Italis dicitur Relatum primum. Vnde ita ſolent exprimere. Rel. P. vt 11 Rel. P. 20 Rel.P. &c.

ʒce. Zenſicubus, ſeu Quadratus cubi,vel Cubizenſus. Quadraticubus.Cubus quadrati. Cubiquadratus. Alij hoc charactere vtuntur. qce. Poſſet quoque hic numerus inuerſis notis ſignari, vt ceʒ.ceq. Itali hoc modo ſignant ce.cu.vel cu.ce.

Bß. Bſurdeſolidus. Secundum quoſdam Biſurdeſolidus, vel Surſolidus , aut Superſolidus ſecundus. Apud Italos vocatur Relatum ſecundum. vnde ita depingunt. Rel.2.

ʒʒʒ. Zenſizenzenſus , ſeu Quadratus quadratiquadrati. Quem ita nonnulli denotant. qqq.Itali verò ſic ce.ce.ce.

Cce. Cubicubus, ſeu Cubus cubi. qui ita à quibuſdam pingitur.cece. Ab Italis autem ſic cu.cu.

ʒß. Zenſurdeſolidus , ſeu quadratus Surdeſolidi , vel Surdeſolidus quadrati. Hunc ita nonnulli deſignant. q ß. Itali verò, quoniam eum vocant cenſum Relati primi, hoc modo notant cc. Rel. P.

Cß. Cſur-

Cß. Cſurdeſolidus.Secundum alios Terſurdeſolidus , vel ſuperſolidus tertius.Italis dicitur Relatum tertium,& ita pingitur.Rel.3.

Eodem modo proportione quadam reliqua ſigna , ſiue characteres Coſſici explicari poterunt,qui quidem in infinitum progrediuntur , vt mox dicemus.

VT autem cognoſcamus , quidnam ſibi velint prędictæ denominationes,& qua ratione originem ducant à terminis cuiuſque progreſſionis Geometricæ ab vnitate initium ſumentis ; conſiderandæ ſunt diligenter ſequentes duæ progreſſiones,vna cum ſupradictis characteribus Coſſicis in medio earum poſitis.

Quomodo ſeries naturalis numerorum numeros Coſſicos progreſſionis Geometricæ exponat.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
N.	𝔯.	ʒ.	ce.	ʒʒ.	ß.	ʒce.	Bß.	ʒʒʒ.	Cce.	ʒß.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	&c.
Cß.	ʒʒce.	Dß.	ʒBß.	ceß.	ʒʒʒʒ.	Eß.	&c.
1048.	4096.	8192.	16384.	32768.	65536.	131072.	&c.

PRIOR progreſſio eſt naturalis numerorum ſeries incipientium ab 0.qui exponunt & ſigna Coſſica ſubſcripta,& terminos poſterioris progreſſionis,quæ Geometrica eſt,ab vnitate initium ducens:appellantúrque numeri ordinis ſuperioris exponentes terminorum progreſſionis Geometricæ, & ſignorum Coſſicorum. Hæc autem expoſitio in hoc conſiſtit.Prima figura 0,habens ſub ſe N, & 1.indicat numerum ſimplicem & abſolutum ex vnitatibus compoſitum,& ob id nullo exponente inſignitur. quamuis improprie hæc figura 0,dici poſſit Exponens numeri abſoluti.Secundus terminus 1.ſupra 2. & 𝔯. oſtendit numerum ſecundum progreſſionis Geometricæ eſſe primam denominationem in numeris Coſſicis,appellarique Radicem. Tertius deinde terminus 2.manifeſtat,tertium numerum Geometricæ progreſſionis eſſe ſecundam denominationem,vocarique Zenſum,ſiue Quadratum. Sic quoque 6. demonſtrat,ſextam denominationem eſſe numerum Zenſicubum,& ſic de cæteris.

DEINDE iidem numeri exponentes progreſſionis naturalis numerorum docent,quot proportiones progreſſionis Geometricæ interiiciantur inter quemlibet numerum eiuſdem Geometricæ progreſſionis atque vnitatem. Vt 1.ſupra 𝔯. & 2.ſignificat inter 2.ſiue radicem progreſſionis Geometricæ,atque vnitatem contineri vnicam proportionem 2. ad 1. At 2.ſupra ʒ.& 4.indicant,inter 4.ſiue ʒ. quadratúmve,atque vnitatem comprehendi duas proportiones 4.ad 2.& 2.ad 1.Item 3.ſupra ce,& 8.monet,inter 8.ſiue ce,& vnitatem cadere tres proportiones 8. ad 4. & 4.ad 2.& 2.ad 1.& ſic de cæteris,vt 6.ſupra ʒce. & 64.monſtrat,inter 64.

Quot proportiones inter vnitatem, & quemlibet numerum progreſſionis Geometricæ intercipiantur.

ſiue ʒce.atque vnitatem intercipi ſex proportiones 64 ad 32.& 32. ad 16. & 16.ad 8.& 8.ad 4.& 4.ad 2. & 2.ad 1.&c.

Cuius characteris exponens gignatur ex mutua multiplicatione, diuiſioneque duorum exponentium.

PRÆTEREA quilibet duo exponentes numeri inter ſe multiplicati producunt exponentem characteris Coſſici, qui ex characteribus aſſumptorum exponentium componitur. Vt ductis 2.in 3.fit 6. exponens characteris ʒce, qui ex ʒ & ce cōponitur. Item ex 3.in 5.fit exponens 15. characteris ceſs.ex ce,& ſs.cōpoſiti.&c. Sic etiam diuiſo quouis numero exponente maiore per minorem quemcunque, indicabit Quotiens, ſi integer numerus eſt, exponentem characteris Coſſici, qui relinquitur, ſi ex charactere numeri exponentis diuiſi, tollatur character numeri exponentis, per quem facta eſt diuiſio. Vt ſi 6 exponens characteris ʒce.diuidatur per 2.exponentem characteris ʒ. fit Quotiens 3.exponens characteris ce.qui relinquitur, ſi ex charactere ʒce, exponentis 6.auferatur character ʒ.exponentis 2. Item ſi numerus 15 exponens characteris ceſs. diuidatur per 5.exponentem characteris ſs.fit Quotiens 3. exponens characteris ce, qui relinquitur, ſi ex ce ſs.tollatur ſs.&c.

RVRSVS hæc figura 2.poſita ſupra 4.& ʒ.docet, quadratum, ſeu ſecundam denominationem produci ex multiplicatione radicis bis poſitæ. Nam ſi radix 2.ponatur bis hoc modo 2. 2. & fiat multiplicatio 2. in 2. procreabitur Quadratus, ſeu Zenſus 4. Eodem pacto figura hæc 3. poſita ſupra 8.& ce.ſignificat, cubum, ſiue tertiam denominationem produci ex radice ter poſita, & multiplicata. Nam ſi radix 2.ter ponatur, vt hic, 2. 2.2.fiatque multiplicatio 2.in 2. & producti numeri in 2. exurget cubus 8.Sic quoque figura 5. monſtrat, numerum Surdeſolidum procreari ex multiplicatione radicis quinquies poſitæ, vt hic 2.2.2. 2.2. Eademque eſt ratio de omnibus aliis.

Definitio vniuſcuiuſque numeri Coſſici.

Ex his facile definientur omnes numeri Coſſici. Si enim petatur, quid ſit v.g.numerus Bſurdeſolidus; dicemus eum eſſe numerum, qui ex aliquo numero ſepties poſito, & multiplicato gignitur, Vt 128. naſcitur ex multiplicatione huius radicis 2.ſepties poſitæ in hunc modum, 2. 2.2.2. 2.2.2. Similiter Zenſizenſus erit numerus, quem numerus aliquis quater poſitus ſua multiplicatione producit, &c. Semper autem numerus, qui aliquoties poſitus multiplicatione ſua numerum aliquem procreat, dicitur radix producti numeri. Vt quoniam 2. poſitus decies hoc modo, 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.& multiplicatus facit hunc numerum 1024. qui eſt ʒß. idcirco 2.dicitur radix Zenſurdeſolida huius numeri 1024. Idemque de aliis dicendum eſt.

VIDES igitur, quàm appoſitè naturalis progreſſio numerorum ab 0.incipientium, & ſupra progreſſionem Geometricam ab vnitate cœptam poſita, dicatur exponere terminos progreſſionis Geometricæ.

CAETERVM non ſolùm ex multiplicatione radicis aliquoties poſitæ producuntur numeri progreſſionis Geometricæ, vt expoſuimus, verum etiam ex multiplicatione numerorum aliorum inter ſe

ſe, vt ſigna eorum Coſſica demonſtrant. Vtlicet hic numerus Zenſurdeſolidus 1024.gignatur ex radice decies poſita, hoc modo, 2.2.2.2.2.2. 2.2.2.2.vt eius exponens 10, indicat: tamen quia eius ſignum Coſſicum ʒß.conſtat ex his duobus ſignis Coſſicis ʒ.& ß.quorum exponentes ſunt 2.& 5.idcirco ſi eadem radix 2. bis ponatur, hoc modo 2.2.propter 2.exponentem ſigni ʒ.& multiplicetur, vt producatur 4. & hic productus quinquies poſitus, hoc modo, 4.4.4.4.4.ob 5.exponentem ſigni ß.multiplicetur, procreabitur idem numerus 1024. Eodem modo, ſi radix 2. quinquies ponatur, propter ſignum ß, atque ita multiplicetur, & productus numerus 32.ponatur bis, propter ſignum ʒ. idem numerus gignetur. Nam radix ita multiplicata 2.2. 2.2.2. facit 32.hic autem numerus ita multiplicatus 32.32.procreat 1024. atque ita de reliquis dicendum eſt, ſi eorum ſigna Coſſica ex pluribus ſignis Coſſicis componantur.

Additio & ſubtractio idem faciunt in ſerie naturali numerorum, quod Multiplicatio & Diuiſio in progreſſione Geometrica.

EST quoque in ſuperioribus progreſſionibus dignum conſideratione, quod additio numerorum progreſſionis Arithmeticæ reſpondet multiplicationi numerorum progreſſionis Geometricæ; & ſubtractio diuiſioni. Sicut enim exempli gratia, 2.& 5.faciunt 7.ſi ſimul addantur, ita quoque ʒ.& ß.quorum 2.& 5.ſunt exponentes, nempe 4.& 32.inter ſe multiplicati producunt 128.id eſt, Bß. cuius exponens eſt 7. Item ſicut 3. & 9.ſimul faciunt 12, ita ce.& cce. nimirum 8.& 512.quorum exponentes ſunt 3.& 9.inter ſe multiplicati gignunt 4096.hoc eſt, ʒʒce. cuius exponens eſt 12.atque eodem modo de reliquis dicendum eſt.

RVRSVS quemadmodum ſubtrahendo 5.à 7.remanent 2.ita diuidendo Bß, nempe 128.cuius exponens eſt 7.per ß, hoc eſt, per 32.cuius exponens eſt 5.prodit numerus 4.nempe ʒ.cuius exponens eſt 2. Similiter ſicut ſubtrahendo 3. ex 12.relinquuntur 9.ita diuidendo ʒʒce. hoc eſt, 4096.cuius exponens eſt 12.per ce, id eſt, per 8.cuius exponens eſt 3.producitur cce, nempe 512.cuius exponens eſt 9. & ſic de cæteris. Demonſtrationem huius rei afferemus in Multiplicatione, & Diuiſione numerorum Coſſicorum.

QVOD autem dictum eſt hactenus de progreſſione Geometrica duplæ proportionis, quæ ab vnitate incipit, idem intelligendum eſt in quauis alia progreſſione Geometrica, cuius initium vnitas eſt: cuiuſmodi ſunt verbi gratia duæ ſequentes progreſſiones Geometricæ, quarum prior continet proportiones quadruplas, poſterior autem ſeptuplas complectitur.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	&c.
N.	℞.	ʒ.	ce.	ʒʒ.	ß.	ʒce.	Bß.	ʒʒʒ.	&c.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.	16384.	65536.	&c.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
N	℞.	ʒ.	ce.	ʒʒ.	ß.	ʒce.	Bß.	&c.
1.	7.	49.	343.	2401.	16807.	117649.	823543.	&c.

Omnia namque quæ dicta ſunt,ad has duas progreſſiones, & ad omnes alias transferri facilè poſſunt.

Quomodo omnes numeri progreſsionis Geometricæ ſint denominandi.

SVPEREST,vt doceamus quanam ratione omnes numeri propoſitæ cuiuſcunque progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis denominandi ſint,aut(quod idem eſt)quænam ſigna Coſſica dictis numeris tribuenda ſint,& aſcribenda.Quod quidem facile præſtabimus,ſi prius denominemus numeros,quorum exponentes ſunt numeri primi, cuiuſmodi ſunt ſequentes.
2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.37.41.43.47.53.59.61.&c. Horum autem characteres,ſiue ſigna,quæ ipſi exponunt,hæc ſunt.ʒ.ce.ß.Bß.Cß.Dß.Eß.Fß.Gß.Hß.Iß.Kß.Lß.Mß.Nß.Oß.Pß.Qß.&c.

Cum enim tertius numerus ab vnitate in progreſſione quauis Geometrica ſit quadratus,vt demonſtratur propoſ.8.lib.9. Eucl.erit eius ſignum ʒ,cuius exponens 2.Rurſus, quia quartus numerus ab vnitate eſt Cubus,vt conſtat ex eadem propoſ.erit eius nota ce,& exponens 3.Deinde quia ſextus ab vnitate numerus, quem exponit numerus primus 5. neque quadratus eſt, neque cubus,niſi quando ſecundus numerus ab vnitate quadratus eſt,vel cubus, vt ex propoſ. 10.lib.9.Eucl.liquido conſtat,tribuerunt ei ſcriptores hoc ſignum ß.ita vt Surdeſolidus appellatus ſit.Quoniam verò idem in reliquis numeris, quorum exponentes ſunt numeri primi,contingit,ita vt neque quadrati ſint,neque cubi, primo ab vnitate non exiſtente quadrato,vel cubo,vt ex eadem propoſ.perſpicuum eſt,appellati ſunt quoque illi numeri progreſſionis Geometricæ, qui exponentes habent numeros primos,Surdeſolidi,ita vt is,quem exponit 7.dicatur ſecundus Surdeſolidus, qui verò exponitur ab 11. Tertius Surdeſolidus,& ſic de ceteris. Sed quia, ſi ſecundus Surdeſolidus ita ſignetur,2ß.& tertius ſic,3ß. &c.facile notæ Arithmeticæ huic ſigno ß. appoſitæ alios numeros confundere & perturbare poſſunt, viſum eſt artificibus loco notarum Arithmeticarum aſciſcere literas Alphabeti, denominaréque ſecundum ß.Bß.à ſecunda litera, & tertium Cß. à tertia litera,&c.Hoc igitur modo formantur ſigna & characteres numerorum Coſſicorum,quorum exponentes ſunt numeri primi,vt hęc formula indicat.

2.	3.	5.	7.	11.	13.	17.	19.	23.	29.	31.	37.	&c.
ʒ.	ce.	ß.	Bß.	Cß.	Dß.	Eß.	Fß.	Gß.	Hß.	Iß.	Kß.	&c.

Ex his inueniemus characteres cæterorum numerorum Coſſicorum, quorum exponentes non ſunt numeri primi,ſed compoſiti,hoc modo. Reſoluatur numerus exponens compoſitus,cuius denominatio, & character deſideratur,in ſuas partes aliquotas incompoſitas, quæ inter ſe ordine multiplicatæ ipſum conſtituant, atque producant. quod in hunc modum fiet.

Numerũ compoſitũ in ſuas partes incompoſitas reſoluere, quæ ipſum producant.

NVMERVS compoſitus datus diuidatur per minimum numerum primum,per quem diuidi poteſt:Similiter quotiens, ſi fuerit numerus compoſitus:Rurſus hic quotiens,ſi fuerit compoſitus,per numerum primum minimum,qui eum numeret,diuidatur:atque ita deinceps continuè fiat diuiſio,donec occurrat quotiens, qui ſit numerus primus, nullam videlicet habens partem aliquotam. Nam ſi omnes diuiſores eiuſmodi, etiamſi aliqui ſæpius repetantur, vnà cum vltimo quotiente ordine ponantur, & inter ſe multiplicentur, producetur præcisè datus numerus compoſitus: atque ipſi diuiſores, vnà cum vltimo quotiente ſunt partes incompoſitæ datum numerum compoſitum per multiplicationem conſtituentes. Vt ſi numerus compoſitus datus ſit 924. Primo diuido eum,quoniam par eſt,per 2.tanquam per eius partem incompoſitam minimam,inuenióque quotientem 462.Reſeruo autem 2.Rurſus quotientem 462.quia par eſt,diuido per 2.efficióque quotientem 231.& reſeruo iterum 2. Deinde quotientem 231. quia impar eſt,diuido per 3. tanquam per minimum numerum primum, reperióq.quotientem 77. (quòd ſi aliquid in diuiſione relictum fuiſſet, expertus fuiſſem diuiſionem per 5.7.& alios numeros primos, donec nihil fuiſſet reſiduum. Et ſi nullum talem diuiſorem, qui nihil relinquat, inuenirem, tunc primi duo diuiſores 2. 2. & vltimus quotiens eſſent partes incompoſitæ datum numerum reſtituentes, & nulla alia dari poſſet,præter vnitatem.) Reſeruo igitur 3. Et rurſus diuido 77.per 3. ſed quoniam aliquid ſupereſt in diuiſione, non reſeruo 3. ſed eundem quotientem 77. partior per 5. ſed quia aliquid ſupereſt in diuiſione, diuido eundem per 7.inuenióq. quotientem 11. numerum primum. Sunt ergo partes incompoſitæ 2.2.3.7.11. numerum datum 924.ſua multiplicatione reſtituentes.

DEINDE omnibus partibus aliquotis incompoſitis inuentis characteres debiti ſubſcribantur.Hac enim ratione proſiliet character integer compoſitus integri numeri exponentis. Exemplum. Inueniendum ſit ſignum Coſſicum numeri trigeſimiprimi Coſſici,cuius exponens eſt numerus hic compoſitus 30. Quotus enim numerus Coſſicus eſt ab vnitate,tot vnitates, minus vna,continet eius exponens, vt ex antedictis progreſſionibus apparere poteſt.Quoniam igitur partes ipſius aliquotæ incompoſitæ ſua multiplicatione ipſum procreantes ſunt 2.3.5. quarum ſigna ſunt ʒ.ce.ß.idcirco numerus dictus trigeſimusprimus hoc ſigno Coſſico decorabitur ʒceß, appellabitúrq. Zenſicubiſurdeſolidus. Eodem modo exponens 24.cuius partes incompoſitæ ſunt 2. 2.2.3. habebit ſignum Coſſicum ʒʒʒce.Ita quoq; exponens 100.cuius partes incõpoſitæ ſunt 2.2.5.5.hoc ſignũ Coſſicũ ſortietur ʒʒßß.& ſic de cæteris.

IDEM conſequemur hac ratione. Accipiantur duo quicunque numeri, qui inter ſe multiplicati producunt exponentem numerum oblatum. Nam eorum ſigna Coſſica component ſignum Coſſicum propoſiti numeri exponentis. vt ſi exponens ſit 12. numeri ſua multiplicatione ipſum producentes ſunt 3. & 4. quorum ſigna Coſſica ſunt ce, & ʒʒ. Signum igitur Coſſicum exponentis 12 eſt ʒʒce.

Semper enim ſigna Coſſica minora præponuntur maioribus. Eodem pacto numeri ſua mutua multiplicatione producentes eundem numerum exponentem 12.ſunt 2.& 6.quorum prior ſignum Coſſicum habet ʒ.poſterior verò ʒce.Signum ergo Coſſicum numeri exponentis 12.eſt ʒʒce.vt prius.Quod ſi aliquando ignoretur alterius numerorum multiplicantium, vel etiam vtriuſque ſignum Coſſicum, ſumendi erunt alij duo numeri ipſum producentes, vt in poſteriori exemplo, ſi nos lateat ſignum Coſſicum huius multiplicantis 6. accipiemus 2. & 3. qui ipſum procreant,quorum ſigna ſunt ʒ.ce. Inuenitur ergo idem ſignum Coſſicum numeri exponentis 12.ʒʒce.&c.

Quem locum progreſſionis Geometricæ occupet quilibet numerus Coſſicus.

IAM verò ſi econtrario ſigni cuiuſlibet Coſſici propoſiti numerus exponens quæratur; ſi quidem fuerit incompoſitum, accipiemus ex ſuperiori progreſſione numerorum primorum numerum primum propoſito ſigno debitum. vt ſi offeratur Coſſicum hoc ſignum Dß. erit eius exponens 13.Si verò ſignum ſit compoſitum, ſumemus exponentes ſignis componentibus debitos, eóſq.inter ſe multiplicabimus.nam productus numerus erit exponens propoſiti ſigni Coſſici. vt ſi detur ſignum Coſſicum ʒʒce. compoſitum ex his tribus ʒ.ʒ.ce. capiemus horum exponentes 2.2.3. ex ſuperiori progreſſione primorum numerorum, eóſque inter ſe multiplicabimus. nam productus numerus 12. eſt exponens dicti ſigni ʒʒce. atque ita de cæteris dicendum eſt.

Quomodo alij numeros progreſſionis Geometricæ denominent.

NON eſt autem prætereundum, quoſdam auctores hac in arte non mediocriter verſatos aliter hos numeros Coſſicos denominare, habita nimirum ratione multiplicationis, qua ex radice producuntur. Quoniam enim tertius numerus ab vnitate progreſſionis Geometricæ, quem nos Quadratum,vel Zenſum diximus, producitur ex multiplicatione radicis bis poſitæ hoc modo,2.2.vel 3.3. vel 4.4. vel 5.5.&c. ita vt vna tantum fiat multiplicatio;propterea numerum hoc modo gentium, id eſt,quadratum, appellant Primam quantitatem:quia prima eſt omnium,quæ ex radice naſcuntur.Cubum deinde,quia gignitur ex radice ter poſita,ita vt fiant duæ multiplicationes, dicunt Secundam quantitatem.Zenſizenſum verò eadem de cauſa vocant Tertiam quantitatem. & ſic de cæteris intelligendum eſt. Sed placet nobis propriis ſignis, & characteribus vti,vt clarius res ipſa percipiatur. Noſtra etenim ſigna,& characteres à literis,ac numeris facilè diſcernuntur, ita vt confuſio nulla poſſit exoriri : quæ in aliorum ſignis, characteribúſq. vitari vix poteſt.

DE

DE NVMERATIONE COSSICORVM *numerorum.*

CAP. III.

FACILIS eſt ex dictis Numeratio numerorum Coſſicorum.Quando enim ſoli ponuntur, vt 5.℞ vel 8 ʒ. vel 20 ce. &c. exprimuntur hoc modo, quinque radices, vel 8. Zenſi,ſiue quadrati, vel 20.cubi, &c. Quando autem coniuncti inter ſe proponuntur, medio hoc ſigno +, vel hoc —.vt 5 ℞ + 8 ʒ. vel 8 ʒ — 5 ℞. vel 20 ce + 8 ʒ — 5. habenda eſt maxima ratio horum ſignorum +.—.quorum illud dicitur ſignum additorum, ſignificátq. plus, vel additionem; hoc verò appellatur ſignum ſubtractorum,denotatque minus, vel diminutionem, aut ſubtractionem. Hinc factum eſt,vt numeri illi, quibus interponitur ſignum +,dicti ſint compoſiti.Quibus verò interiicitur ſignum —. nominati ſint Diminuti. Quibus denique vtrumque ſignum interponitur, appellati ſint mixti.licet omnes dici poſſint compoſiti. Itaq. compoſitus hic 5 ce + 8 ʒ. effertur hoc modo. 5 radices, plus 8 zenſi. Hic verò Diminutus 8 ʒ—5 ce. hoc modo.8 zenſi,minus 5 radices. Mixtus verò iſte, 20 ℞+8 ʒ—5. hoc pacto 20 cubi, plus 8 zenſi, minus 5. vnitates. Nam, vt dictum eſt,numerus,qui poſt ſe non habet characterem aliquem Coſſicum, ſignificat numerum abſolutum ex vnitatibus compoſitum.

Explicatio ſignorum + & —.

Numeri Coſſici compoſiti, Diminuti & mixti qui.

REFERVNTVR autem,vt patet,hæc ſigna+.—.ad numeros, qui ea ſequuntur, nunquam autem ad præcedentes. Item numerus, quem neutrum horum ſignorum præcedit, intelligitur habere ſignum additorum +. Senſus porro numerorum compoſitorum, diminutorum, vel mixtorum facilis eſt. Nam cum dicimus 5 ℞ + 8 ʒ. intelligimus 5. radices vna cum 8.zenſis: hoc eſt, vnitates 42.ſi radix eſt 2. & quadratus, vel zenſus 4. Sic cum dicimus 8 ʒ — 5 ℞. intelligimus ex 8. zenſis detractas eſſe 5 radices. vnde ſi radix eſt 2. atque adeo zenſus 4. continebit numerus propoſitus vnitates 22.Idem dicendum eſt de aliis.

QVONIAM verò in antecedenti capite characteres numerorum Coſſicorum, cuiuſmodi ſunt ℞. ʒ. ce. &c. appellauimus interdum etiam ſigna Coſſica; vt vitemus omnem confuſionem, appellabimus in ſequentibus has notas ℞. ʒ. ce. &c. characteres, has verò +. —. ſigna.

PLERIQVE auctores pro ſigno + ponunt literam P, vt ſignificet plus: pro ſigno vero — ponunt literam M,vt ſignificet minus. Sed placet nobis vti noſtris ſignis,vt à literis diſtinguantur, ne confuſio oriatur.

PRÆTEREA inter recentiores non pauci radices ſurdas, vt

Radices surdæ quo pacto signentur.

vocant, vel irrationales, quæ videlicet numeris exprimi nequeunt, notant hoc signo √. quod statim insequitur character Cossicus ȝ. vel ce, vel ȝȝ. &c. prout radix illa est quadrata, Zensicáve, vel Cubica, vel Zensizensica, siue quadratiquadrata, &c. V.g. radicem quadratam numeri 12. designant hoc modo √ȝ 12. cubicam hoc modo √ce 12. & Zensizensicam hac ratione, √ȝȝ 12. atque hanc ob causam signum hoc √ radicale appellatur. Quo signo nos etiam in sequentibus vtemur: quippe cum minor confusio ex eo oriatur, quam si, quod plerique faciunt, radicem quadratam ita signemus, Rq. Cubicam hoc modo. R cu. Zensizensicam hoc alio, Rqq. &c. Facile enim ex hac designatione, literæ Rq. Rcu. Rqq. cum aliis literis confunduntur. Diligenter ergo hæc signa √ȝ. √ce. √ȝȝ. √ß. &c. addiscenda sunt, vt ea, quæ sequuntur, intelligantur, quando nimirum huiusmodi signa occurrent. Sciendum tamen, quotiescunque nominatur radix alicuius numeri, sine voce, quadrata, cubica, surdesolida, vel zensizensica, &c. vel illi numero præfigitur signum hoc √. sine charactere ȝ, ce, ß. ȝȝ. &c. intelligi radicem quadratam simpliciter apud scriptores. quod à nobis etiam non rarò obseruabitur.

Signum radicale quid.

DE ADDITIONE ET SVBTRACTIONE numerorum Cossicorum.

CAP. IIII.

Additio Cossicorũ numerorũ diuersarũ denominationum.

QVANDO numerus Cossicus additur numero Cossico alterius denominationis, vel characteris, absoluitur additio mediante hoc signo +, fitq. numerus compositus. Vt hi duo numeri 6 ♃. & 8. simul additi faciunt 6 ♃ + 8. Item 6 ♃. & 8 ce. faciunt 6 ♃ + 8 ce. &c.

Additio numerorũ Cossicorũ eiusdẽ appellationis.

QVANDO verò addendus est numerus Cossicus alteri numero Cossico eiusdem appellationis, vel characteris, adduntur simul numeri, & summæ apponitur idem character Cossicus. Vt hi numeri 4 ȝ. & 9 ȝ. simul additi faciunt 13 ȝ. Item 5 ♃, & 4 ♃. faciunt 9 ♃. &c.

Subtractio numerorũ Cossicorum diuersarũ appellationum.

PARI ratione, quando numerus Cossicus subtrahitur à numero Cossico alterius denominationis, absoluitur subtractio mediante hoc signo −, fitq. numerus diminutus. Vt hic numerus 6 ♃ detractus ex 8 ȝ. relinquit 8 ȝ − 6 ♃. Item 12. ex 6. ♃. relinquunt 6 ♃ − 12. & sic de cæteris.

Subtractio numerorũ Cossicorum eiusdẽ denominationis.

QVANDO verò numerus Cossicus subtrahendus est ex altero numero Cossico eiusdem characteris, subtrahitur numerus à numero, & reliquo numero idem character affigitur. Vt 4 ♃. ex 9 ♃. relinquunt 5 ♃. Et 9 ce. ex 20 ce. relinquunt 11 ce. &c.

SED quando Cossici numeri compositi, diminuti, & mixti inter se adduntur, vel alter ab altero subtrahitur, ponendus erit alter sub altero, ita vt numeri eiusdem appellationis inter se respondeant, quemadmodum in fractionibus Astronomicis fieri consueuit. Quod si in alterutro eorum non reperiatur numerus respondens alicui in altero numero, ponenda erit loco eius figura hæc nihili 0. cum signo +. Quibus constitutis, addendi erunt numeri eiusdem appellationis, vel alter ab altero detrahendus, & summæ, vel numeri reliqui propriis in locis subscribendi, vna cum iisdem signis +, vel −, quæ in numeris addendis, vel subtrahendis reperiuntur.

Additio & subtractio Cossicorum numerorum compositorũ &c.

Exempla Additionis.

♃.	N.
6	+ 8.
7	+ 10.
13	+ 18

ȝ.	♃.	N.
7.	+. 8	− 5.
3	+ 9	− 8.
10	+ 17	− 13

ce.	N.	ȝ.
7	+ 8	− 3
4	+ 11	− 5
11	+ 19	− 8

ce.	ȝ.	♃.	N.
4	+ 11	+ 0	− 6
3	+ 0	+ 8	− 4
7	+ 11	+ 8	− 10

ß.	ȝȝ.	♃.	N.	ȝ.
7	+ 0	+ 8	− 5	+ 4
4	+ 9	+ 6	− 9	+ 0
11	+ 9	+ 14	− 14	+ 4

ȝ.	N.
4	− 8
10	− 10
14	− 18

In penultimo exemplo additus est huic numero, 7 ß + 8 ♃ − 5 + 4 ȝ. hic numerus, 4 ß + 9 ȝȝ + 6 ♃ − 9. factáque est hæc summa, 11 ß + 9 ȝȝ + 14 ♃ − 14 + 4 ȝ.

Exempla Subtractionis.

ce.	ȝ.	♃.	N.
7	+ 11.	+ 8	− 10
3	+ 0	+ 8	− 4
4	+ 11	+ 0	− 6

ce.	N.	ȝ.
11	+ 19	− 8
4	+ 11	− 5
7	+ 8	− 3

ß.	ȝȝ.	♃.	N.	ȝ.
11	+ 9	+ 14	− 14	+ 4
7	+ 0	+ 8	− 5	+ 4
4	+ 9	+ 6	− 9	+ 0

ȝ.	♃.	N.
10	+ 17	− 13
7	+ 8	− 5
3	+ 9	− 8

In penultimo exemplo reliquus numerus eſt, 4 ß + 9 ℨℨ + 6 ℞ — 9. Reiicitur enim + 0. quia neque in reliquo numero ſubtractionis, neque in ſumma additionis poni debet figura hæc 0. cum ſit ſupervacanea. Eodem modo reliquus numerus in primo exemplo erit, 4 ce + 11 ℨ — 6

POTEST etiam fieri additio, & ſubtractio, ſi characteres Coſſici ſcribantur poſt numeros, non autem ſupra ipſos numeros. vt ſecundum exemplum Additionis, ita ſtabit.

7 ℨ	+	8 ℞	—	5 N			
3 ℨ	+	9 ℞	—	8 N			
10 ℨ	+	17 ℞	—	13 N			

Secundum item exemplum Subtractionis ita ſtabit

11 ce	+	19 N	—	8 ℨ
4 ce	+	11 N	—	5 ℨ
7 ce	+	8 N	—	3 8

Quod etiam de multiplicatione, diuiſionéque intelligendum eſt. Atque hic modus vt plurimum à nobis obſeruabitur in hoc opere.

Quid agendum, quando vnus numerus habet signũ +, & alter signũ — in additione, & ſubtractione.

QVOD ſi in additione, vel ſubtractione alter numerorum habuerit ſignum +, alter verò —, commutatur ſpecies, ſeu operatio; hoc eſt, in Additione ſubtrahitur minor ex maiore, & reliquo numero tribuitur ſignum maioris numeri, à quo facta eſt ſubtractio, ſiue illud fuerit +, ſiue —.

In Subtractione verò adduntur ſimul numeri, & ſummæ apponitur ſignum ſuperioris numeri, à quo fieri debebat detractio, quodcunque illud fuerit ſiue +, ſiue —.

Exempla Additionis.

ℨce.	ß.	ℨℨ.	ce.	℞.	N.
7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8
7	+ 5	— 11	— 11	+ 0	+ 0
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8

ℨ.	℞.
6	+ 8
2	— 10
8	— 2

Si hi duo numeri 6 ℨ — 8 ℞. & 12 ℞ — 3 ℨ debeant addi, formabimus exemplum hoc modo, vt ſingula ſingulis reſpondeant.

ℨ.	℞.			
+ 6	— 8	Vel	+ 6 ℨ	— 8 ℞
— 3	+ 12	ſic	— 3 ℨ	+ 12 ℞
3	+ 4		3 ℨ	+ 4 ℞

Ratio-

Rationem verò huius operationis pulchrè docent numeri abſoluti, vt hic vides.

8 + 5	8 — 5	8 + 4	8 — 4
10 — 4	10 + 4	10 — 5	10 + 5
18 + 1	18 — 1	18 — 1	18 + 1

Quoniam enim in primo exemplo ad 8 + 5, hoc eſt, ad 13. non adduntur integrè 10. vt fiant 23. ſed ſubductis prius 4. Ideo fit ſumma 19. nempe 18 + 1. Itaq. poſtquam addita ſunt 8. & 10. factaq. ſunt 18. detrahenda ſunt 4. ex 5, vt remaneat 1, cum hoc ſigno +.

Eodem modo in ſecundo exemplo, non adduntur integrè 8, ſed minus 5. ad 10 + 4, hoc eſt, ad 14. propterea poſtquam ex 8. & 10. facta ſunt 18. detrahenda ſunt 5. ex 4. Et quia deeſt vnitas, vt poſſit ſubtrahi, idcirco ponitur 1. cum ſigno —. Eadem ratio eſt in cæteris. Vbi vides in primo exemplo ex 8 + 5. & 10 — 4. id eſt, ex 13. & 6. effici 18 + 1. id eſt, 19. In ſecundo verò ex 8 — 5. & 10 + 4. hoc eſt, ex 3. & 14. fieri 18 — 1. hoc eſt, 17. In tertio quoque ex 8 + 4. & 10 — 5. hoc eſt, ex 12. & 5. conflari 18 — 1. hoc eſt, 17. In quarto denique ex 8 — 4. & 10 + 5. id eſt, ex 4. & 15. confici 18 + 1. id eſt, 19.

Exempla Subtractionis.

ℨce.	ß.	ℨℨ.	ce.	℞.	N.
14	+ 5	— 3	— 11	— 4	+ 8
7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8
7	+ 5	— 11	— 11	— 0	+ 0

ℨ.	℞.
8	— 2
6	+ 8
2	— 10

In priori exemplo, quando detrahuntur — 4 ℞. ex — 4 ℞. poteſt ſignari reliqua figura 0, vel ſigno +. vel ſigno —. Nihil enim intereſt vtrum illorum ponatur, quando reliquus numerus eſt 0. Immò totus reliquus numerus ita ſcribendus erit. 7 ℨce + 5 ß — 11 ℨℨ — 11 ce.

Ratio quoque huiuſce operationis perſpicua eſt in numeris abſolutis, vt ex ſequentibus exemplis apparet.

18 + 5	18 + 4	18 — 5	18 — 4
8 — 4	8 — 5	8 + 4	8 + 5
10 + 9	10 + 9	10 — 9	10 — 9

Quoniam enim in primo exemplo non integrè ſubducuntur 8. ex 18 + 5. hoc eſt ex 23. ſed minus 4. propterea ſubductis 8. ex 18. vt relinquantur 10. addenda ſunt rurſum 4. ad 5. Eadémque eſt ratio in ſecundo exemplo. In tertio verò exemplo, cum 8. deducantur ex 18, ex quibus iam ablata ſunt 5. reſtituenda ſunt 5. ipſis 4. & ſumma per signum —notanda. Quod etiam fit in quarto exemplo. Vbi vides in primo exemplo, si ex 18 + 5. hoc est, ex 23. detrahantur 8—4. hoc est, 4. relinqui 10 + 9. id est, 19. In secundo quoque, si ex 18 + 4. hoc est, ex 22. detrahantur 8 — 5. id est, 3. relinqui 10+9. hoc est, 19. In tertio verò, si ex 18—5. id est, ex 13. detrahantur 8 + 4. id est, 12. remanere 10 — 9. id est, 1. In quarto denique, si ex 18—4. hoc est, ex 14. demantur 8 + 5. id est, 13. remanere quoque 10—9. hoc est, 1.

Quid agendũ in subtractione, quãdo vterq. numerus habet signũ + vel — & numeri præposterè ponuntur.

QVOD si quando contingat, vt idem signum + vel — reperiatur tam in numero subtrahendo, quam in eo, à quo fit subtractio, sed subtrahendus maior sit; subtrahendus erit præpostero ordine superior ab inferiori, sed numero reliquo dandum signum contrarium, ita vt ex signo +, fiat —, & ex —, fiat +. Vt duo exempla, quæ sequuntur, indicant.

ʒ.	℞.	N.
9 +	4 —	5
4 +	7 —	8
5 +	3 —	3

ce.	ʒ.	N.
6 —	5 +	3
7 —	9 +	10
—1 +	4 —	7

In posteriori exemplo, quoniam 6 ce. & 7 ce. intelliguntur habere signum +, idcirco reliquus numerus adeptus est signum —. Vnde ita scribendus erit, 4 ʒ — 1 ce — 7. Non enim rectè primus numerus afficitur signo —. Huius etiam operationis veritas perspicua est in duobus hisce exemplis numerorum absolutorum. Vbi vides, si in priori exemplo

9 + 4 — 5
4 + 7 — 8
5 — 3 + 3

6 — 5 + 3
7 — 9 + 10
—1 + 4 — 7

ex 9 + 4 — 5. id est, ex 8. subtrahantur 4 + 7 — 8, id est, 3. relinqui 5 — 3 + 3. nimirum 5. In posteriori verò, si ex 6 — 5 + 3. subducantur 7 — 9 + 10. hoc est, 8. ex 4. remanere — 1 + 4 — 7. hoc est, — 4: quia nimirum superiori numero desunt 4. vnitates, vt inferior subtrahi possit.

CÆTERVM omnia præcepta hactenus tradita de additione, & subtractione, quod ad signa + & — spectat, comprehenduntur facile his duabus regulis ad memoriam iuuandam.

Duæ regulæ obseruandæ in additione, & subtractione.

I

Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præposterè ponuntur. Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex +, fit —, & ex —, fit +.

2

Diuersa signa mutant speciem operationis; Et in additione ponitur signum maioris numeri; In subtractione verò, superioris, à quo fit subtractio, siue maior

maior is sit, siue minor, aut æqualis. Quæ quidem regulæ, intellectis præceptis traditis, difficiles non sunt.

Probatio additionis & subtractionis.

SVPEREST, vt doceamus, quo modo instituenda sit probatio, siue examen Additionis, & Subtractionis. Duobus igitur modis comprobari potest, an rectè necne in Additione, vel Subtractione operatum sit. Primum enim probari potest Additio per subtractionem, & subtractio per Additionem; quemadmodum in absolutis numeris solet fieri.

Secundo construatur tabula cum aliquibus progressionibus Geometricis ab vnitate incipientibus. vt hic cernis.

N	℞	ʒ	ce	ʒʒ	ß	ʒce	Bß	ʒʒʒ
1	2	4	8	16	32	64	128	256
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{179}$	$\frac{1}{256}$

Deinde resoluantur numeri Cossici addẽdi, iuxta aliquam harum progressionum, in numeros absolutos, ijque simul addantur, vel vnus ab altero detrahatur, ratione signi +, vel —. Post hæc eodem modo resoluantur numeri Cossici summæ collectæ. Si enim rectè facta est additio, erunt numeri summæ collectæ resoluti simul æquales numeris addendis resolutis simul. Vt in hoc exemplo 6. ce. (si probatio instituatur per progressionem, cuius radix est 2.) faciunt 48. & 4 ʒ. faciunt 16. Iungantur simul 48. & 16. propter signum +. fiunt 64. Item 4 ce. faciunt 32. addãtur ad 64. propter signum + (semper enim numerus nullo signo notatus, intelligitur insignitus hoc signo +, vt dictum est.) fiunt 96. Denique 8 ʒ. faciunt 32. quæ ablata ex 96, ob signum —, relinquunt 64. Vide iam, an 10 ce — 4 ʒ, resoluti faciant quoque 64. Perspicuum autem est, 10 ce, facere 80. à quibus si deducantur 4 ʒ, hoc est, 16. propter signum —, relinqui 64. &c.

ce.	ʒ.
6 +	4
4 —	8
10 —	4

NON secus Subtractio comprobabitur, si eius numeri Cossici in absolutos numeros commutentur. Nam numeri subtracti, & reliqui simul æquales debent esse numeris, à quibus facta est subtractio, &c. Vt in hoc proposito exemplo, si probationem instituamus iuxta progressionem, cuius radix est 3. 10 ce. faciunt 270. à quibus si deducantur 4 ʒ, id est 36. propter signum —, remanent 234. Satis autem constat 6 ce + 4 ʒ & 4 ce — 8 ʒ. resolutos ac simul additos facere quoque 234.

ce.	ʒ.
10 —	4
6 +	4
4 —	8

Eodem modo si 6 ce + 4 ʒ. resoluti detrahantur ex 10 — ce 4 ʒ. resolutis, relinquentur 4 ce — 8 ʒ. resoluti. Vel certè si 4 ce — 8 ʒ.

resoluti deducantur ex 10 ce — 4 ʒ. remanebunt 6 ce + 4 ʒ. resoluti.

Idem exemplum examinabitur per progressionem, cuius radix est $\frac{1}{2}$. licet aliquantò laboriosius, hoc modo. 10 ce. faciunt $\frac{10}{8}$ à quibus si tollantur 4 ʒ. nimirum $\frac{4}{4}$. hoc est, $\frac{8}{8}$. remanent $\frac{2}{8}$. Necesse igitur est, vt 6 ce + 4 ʒ. resoluti,& detracti ex $\frac{2}{8}$. relinquant 4 ce — 8 ʒ. resolutos. Et quia 6 ce. faciunt $\frac{6}{8}$.& 4 ʒ. efficiunt $\frac{4}{4}$. id est, $\frac{8}{8}$. quæ cum $\frac{6}{8}$. faciunt $\frac{14}{8}$. quæ ex $\frac{2}{8}$. subtrahendæ sunt. At quoniam numeri præpostere ponuntur, subtrahendæ sunt $\frac{2}{8}$. ex $\frac{14}{1}$.vt remaneant — $\frac{12}{8}$. iuxta primam regulam. Atque tantundem debent conficere 4 ce — 8 ʒ. Sunt autem 4 ce. $\frac{4}{8}$. à quibus vt auferantur 8 ʒ. id est, $\frac{8}{4}$. vel $\frac{16}{8}$. auferendæ sunt $\frac{4}{8}$. ex $\frac{16}{8}$. propterea quod numeri sunt positi præpostere, vt remaneant —. $\frac{12}{8}$ iuxta legem primæ regulæ. quod est propositum.

DE MVLTIPLICATIONE & Diuisione numerorum Cossicorum.

Cap. V.

Multipl. & Diuisio numeri Cossici per absolutum.

CVM numerus Cossicus per numerum absolutum multiplicatur, aut diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) eiusdem denominationis Cossicæ. Vt multiplicatis 4 ℞. vel 8. ʒ, per 3. proueniunt 12. ℞. vel 24. ʒ. &c. Item diuisis 12. ℞. vel 24. ʒ, per 3. producuntur 4. ℞. vel 8. ʒ. &c.

Multipl. & Diuisio numeri Cossici per Cossicum numerum

QVANDO verò numerus Cossicus per numerum Cossicum multiplicatur, vel diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) alterius denominationis Cossicæ, vt autem sciatur, quænam denominatio procreetur, pulchre id commonstrat progressio quælibet Geometrica ab vnitate incipiens, vna cum numeris exponentibus, de quibus in cap. 2. dictum est, & hic apparet.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&c.
N.	℞	ʒ	ce	ʒʒ	ß	ʒce	Bß	ʒʒʒ	cce	&c.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	&c.

Nam in multiplicatione fit exponens numerus denominationis Cossicæ conflatæ ex additione exponentium numerorum, qui videlicet denominationes illas, quæ multiplicantur; exponunt. In diuisione autem reperitur exponens numerus Cossicæ denominationis productæ,

qui relinquitur, si exponens numerus denominationis diuidentis subtrahatur ab exponente numero denominationis diuidendæ. Vt ex multiplicatione. 4 ℞. in 4 ℞. vel 4 ℞. in 7 ℞. fiunt 16 ʒ. vel 28 ʒ. Nam vnitas quæ est exponens huius characteris Cossici ℞. addita ad vnitatem, facit 2. exponentem huius characteris ʒ. Sic etiam ex multiplicatione 4. ℞. in 5. ʒ. fiunt 20 ce. Et ex 4 ʒ. in 6 ß. fiunt 24 Bß. &c. Item ex diuisione 24. Bß. per 4 ʒ. fiunt 6 ß. Et ex diuisione 36 ʒce. per 4 ʒʒ. producũtur 9 ʒ. Et ex diuisione 12 ʒʒ. per 4. ce, fiunt 3 ℞. Et ex 8 ʒ. per 8 ʒ. fit 1 N. quia subductis 2. à 2. relinquitur 0, exponens numeri absoluti. Ita quoque diuisis 12 ʒce. per 4 ß. proueniunt 3 ℞. &c.

Ex his facile intelligitur, quonam modo numerus Cossicus in seipsum multiplicetur quadrate, cubice, &c. Nam 5 ce in se quadrate faciunt 25 ʒce. cum 3. & 3. faciant 6. At 5 ce, in se cubice faciunt 125 cce. Nam primum 5 ce, in se faciunt 25 ʒce. Deinde 25 ʒce. in 5 ce. faciunt 125 cce. &c.

DEMONSTRATIO huius rei facilis est. Repetatur enim progressio characterum Cossicorum numeros progressionis Geometricæ denominantium, vna cum naturali progressione numerorum exponentium, vt hic. *Demonstratio Multiplicationis & Diuisionis numerorũ Cossicorũ.*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
N.	℞.	ʒ.	ce.	ʒʒ.	ß.	ʒce.	Bß.	ʒʒʒ.	cce.	ʒß.	Cß.	&c.

Quoniam igitur, vt in scholio propos. 11. lib. 9. Eucl. docuimus, quilibet numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis seipsum multiplicans producit numerum eiusdem progressionis, qui tantum ab eo distat exclusiuè quantum ipse abest exclusiuè ab vnitate; sit vt ce, seipsum multiplicans producat ʒce. qui tertium locum occupat post ce, exclusiuè quemadmodum & ce, tertium habet locum post N. hoc est, post vnitatem exclusiue. Quare cum exponens huius characteris ce, nempe 3. ad se additus faciat 6. exponentem, qui tertium locum possidet post 3. exclusiue, propterea quod tres vnitates continentur in 3. per quot nimirum interualla denominatio ce. distat à N. seu vnitate exclusiue (Nam exponens cuiusque denominationis Cossicæ tot continet vnitates, quotum locum ipsa denominatio obtinet ab vnitate, siue à N. exclusiue.) perspicuum est, numerum 6. qui fit ex additione 3. ad 3. esse exponentem huius characteris Cossici ʒce. qui producitur ex multiplicatione ce, in se. Eademque ratio est de cæteris characteribus Cossicis, qui seipsos multiplicant.

RVRSVS, quia, vt ex eodem scholio constat, si minor aliquis numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis multiplicet maiorem quempiam eiusdem progressionis, procreatur numerus, qui tantum à maiore distat exclusiue in progressione eadem quantum minor ab vnitate abest exclusiue; efficitur vt ce. multiplicans ʒce, producat cce, qui tertium occupat locum post ʒce, exclusiuè, sicut & ce, tertium possidet locum exclusiuè post N, hoc est, post vnitatem. Quocirca cum exponens 3. characteris ce, additus ad 6. exponentem characteris ʒce. faciat 9. exponentem, qui tertium locum adeptus est post 6. exclusiue, propterea quod in 3. continentur tres vnitates, quotum nimirum locum exclusiue ab vnitate, seu N, occupat character hic ce; manifestum est, numerum 9. qui fit ex additione 3. ad 6. exponentem esse huius characteris Cossici cce. qui gignitur ex multiplicatione ce, in ʒce. Eadem de causa idem character cce, procreatur ex multiplicatione ʒʒ. in ß, & sic de cæteris.

QVONIAM verò, vt Additio Subtractionem, & Subtractio Additionem; ita quoque Multiplicatio Diuisionem, & Diuisio Multiplicationem probat; fit vt quemadmodum ex additione 3. ad 3. fiunt 6. & ex multiplicatione ß, in ce, fit ʒce; ita subtractis 3. ex 6. relinquantur 3. & diuiso ʒce, per ce, proueniat ce. Item sicut ex additione 3. ad 6. fiunt 6. & ex multiplicatione ce, in ʒce, fit cce, sic etiam subtractis 3. ex 9. relinquantur 6. & diuiso cce, per ce, producatur ʒce. eademque ratio est de reliquis.

Ex hac demonstratione perspicuum fit, id quod cap. 2. tradidimus; Additionem videlicet numerorum progressionis Arithmeticæ respondere multiplicationi numerorum progressionis Geometricæ, & Subtractionem Diuisioni. Demonstrauimus enim, quemadmodum ex additione 2. ad 4. fiunt 6. ita ex multiplicatione ʒ, in ʒʒ, fieri ʒce. Item sicut subtractis 2. ex 6. relinquuntur 4. ita diuiso ʒce, per ʒ, fieri ʒʒ, &c.

ITAQVE ex multiplicatione cuiusuis characteris Cossici in alium quemcumque producitur character Cossicus tantum à maiore distans exclusiue, quantum minor ab vnitate, hoc est, ab hoc signo N. recedit exclusiue, vel quantus est exponens minoris characteris Cossici. Vt ex ce, in ʒʒʒ, fit Cß. &c. Ex diuisione verò cuiuslibet characteris Cossici maioris per alium quemuis minorem prouenit character Cossicus tantum à maiore distans exclusiue, retrocedendo tamen, quantum minor ab vnitate, seu charactere N, abest exclusiue, vel quantus est exponens minoris characteris Cossici. vt ex diuisione cce, per ʒʒ, producitur ß. &c.

Multipl. & Diuisio numeri Cossici cōpositi per absolutū vel per Cossicum tam simplicem, quā compositum.

QVANDO autem numerus Cossicus compositus, vel diminutus multiplicatur, aut diuiditur per numerum absolutum, vel Cossicum tam simplicem, quàm compositum, diminutúmve, præter documentum iam traditum habenda est maxima ratio horum signorum +, & —. Nam quando numeri se mutuo multiplicantes, vel diuidentes habuerint idem signum +. vel —. apponitur producto semper hoc signum +. Quando verò alter illorum habuerit signum +, & alter hoc —, afficitur productus numerus perpetuo hoc signo —. Quod alij scriptores docent his verbis. In multiplicatione ac diuisione, Plus per Plus, vel Minus per Minus producit Plus: At Plus per Minus, vel Minus per Plus producit Minus. Hoc autem vnica hac regula memoriæ mandabitur.

Eadem

Eadem signa ponunt signum additorum: Diuersa verò signa ponunt signum subtractorum.

Regula in multipl. & diuisione numerorum Cossicorum obseruando.

Exempla Multiplicationis.

7 ʒ + 4 ℞	7 ʒ — 4 ℞	7 ʒ — 4 ℞
9 N	9	9 ℞
63 ʒ + 36 ℞	63 ʒ — 36 ℞	63 ce — 36 ʒ

8 ʒ + 9	8 ʒ — 9
8 ʒ + 9	8 ʒ — 9
72 ʒ + 81	— 72 ʒ + 81
64 ʒʒ + 72 ʒ	64 ʒʒ — 72 ʒ
64 ʒʒ + 144 ʒ + 81	64 ʒʒ — 144 ʒ + 81

8 ce — 4 ʒ	6 ʒ + 8 ℞ — 6 N
6 ℞	2 ʒ — 4 N
48 ʒʒ — 24 ce	— 24 ʒ — 32 ℞ + 24 N
	12 ʒʒ + 16 ce — 12 ʒ
	12 ʒʒ + 16 ce — 36 ʒ — 32 ℞ + 24 N

9 ʒ + 8 N — 3 ℞
7 ce — 4 ʒʒ — 8 ʒ
— 72 ʒʒ — 64 ʒ + 24 ce
— 36 ʒce — 32 ʒʒ + 12 ß
63 ß + 56 ce — 21 ʒʒ
— 36 ʒce + 75 ß — 125 ʒʒ + 80 ce — 64 ʒ

In hoc vltimo exemplo præcedunt semper in summa maiores denominationes Cossicæ minores denominationes Cossicas. Sed quoniam non rectè in initio ponitur hoc signum —, propterea ita collocanda erit summa producta.

75 ß — 36 ʒce — 125 ʒʒ + 80 ce — 64 ʒ.

Exempla Diuisionis.

1 10 ce per 3 ce (3 1/1 N	1 10 ce per 3 ℞ (3 1/1 ʒ	1 10 ℞ per 3 ℞ (3 1/1 N
1 0 ʒ + 4 ℞ 3 ℞ 3 ℞ (3 ℞ + 1 1/2 N	2 18 ʒʒ — 12 ʒ 4 ℞ 4 ℞ (4 1/2 ce — 3 ℞	

−40
30ℨ − 58℞ + 24N (6℞ − 8N
5℞ − 3N
5℞ − 3N

−12ℨ   0℞
12ℨℨ + 16ce − 36ℨ − 32℞ + 24N (6ℨ + 8℞ − 6N
2ℨ + 0℞ − 4N
2ℨ + 0℞ − 4N
2ℨ + 0℞ − 4N

Quoniam in omni diuiſione numerorum Coſſicorum denominationes debent eſſe continuatæ, idcirco in vltimo exemplo, in quo diuiſor eſt 2ℨ − 4N. interpoſuimus 0℞, cum ſigno +, vt totus diuiſor ſit 2ℨ + 0℞ − 4N. Idem factum eſſe vides in ſequenti exemplo, vbi diuidendus numerus eſt 1ce + 1. & diuiſor 1℞ + 1.

−1ℨ + 1℞
1ce + 0ℨ + 0℞ + 1 (1ℨ − 1℞ + 1N
1℞ + 1
1℞ + 1
1℞ + 1

Quando non poſſit fieri diuiſio. CÆTERVM tria hæc vltima exempla, in quibus diuiſor eſt numerus compoſitus, vel diminutus, arte ſunt excogitata. Nam vt plurimum per huiuſmodi diuiſores diuiſio fieri non poteſt, ſed ſubſcripto diuiſore ipſi diuidendo numero, interiectáque linea, fit fractio, vt hic.

8ß per 2ℨ + 4N || 8ℨ − 9℞ per 4℞ + 3N

Quotientes ſunt

$\frac{8\text{ß}}{2\text{ℨ}+4N}$ || $\frac{8\text{ℨ}-9\text{℞}}{4\text{℞}+3N}$

Quid autem faciendum ſit cum fractionibus huiuſmodi, infra cap. 10. docebimus, cum de reductione æquationum inter minutias inuentarum agemus. Eodem modo fractio conſtituitur, cum numerus Coſſicus ſimplex, vel compoſitus per Coſſicum numerum ſimplicem maioris denominationis diuiditur, vt 8ℨ. per 2ℨce. conſtituunt hanc fractionem $\frac{8\text{ℨ}}{2\text{ℨce}}$. Item diuiſis 9ℨ + 4. per 3℞. fit hæc fractio $\frac{9\text{ℨ}+4}{3\text{℞}}$. &c.

Probatio Multiplicationis & Diuiſionis. SVPEREST, vt tradamus examen Multiplicationis atque Diuiſionis. Hoc autem duplex eſt. Primum Multiplicatio per Diuiſionem, & contra examinari poteſt, vt in numeris abſolutis præcipitur.

DEIN-

DEINDE probatio inſtitui poteſt per reſolutionem Coſſicorum numerorum ſecundum aliquam radicem progreſſionis Geometricæ, vt dictum eſt ad finem cap. 4. Nam numeri Coſſici, qui multiplicantur inter ſe, reſoluti tantum faciant neceſſe eſt, ſi multiplicentur inter ſe, quantum numeri Coſſici producti, ſecundum eandem radicem reſoluti. Et diuidendus numerus Coſſicus reſolutus tantum debet producere diuiſus per diuiſorem reſolutum, quantum Quotiens ſecundum eandem radicem reſolutus, vt hic apparet.

Exemplum Multiplicationis.

Secundum radicem 2. faciunt 6℞ − 8. 4. & 5℞ − 3. faciunt 7. Ex multiplicatione autem 4. per 7. fiunt 28. Tantundem quoque fit ex reſolutione producti numeri ſecundum eandem radicem 2. vt patet.

6℞ − 8
5℞ − 3
− 18℞ + 24
30ℨ − 40℞
30ℨ − 58℞ + 24

Exemplum Diuiſionis.

− 18℞
30ℨ − 58℞ + 24 (5℞ − 3N
6℞ − 8
6℞ − 8

Diuidendus numerus 30ℨ − 58℞ + 24. ſecundum radicem 2. reſolutus facit 28. Diuiſor verò 6℞ − 8. facit 4. Diuiſis autem 28. per 4. producuntur 7. Perſpicuum autem eſt, quotientem hunc 5℞ − 3. ſecundum eandem radicem reſolutum efficere quoque 7.

Quod eadem ſigna producãt ſignum +, Diuerſa autem ſignum −. QVOD autem eadem ſigna + & +, vel − & −, in Multiplicatione & Diuiſione producant ſemper ſignum hoc +. Diuerſa autem ſigna +, & −, vel − & +, faciant ſemper hoc ſignum −; præterquam quod examen Multiplicationis & Diuiſionis abundè id comprobare poſſit: tamen idipſum clare perſpicitur in numeris abſolutis. Vt in hoc exemplo ſequenti, quis non videt, ſi multiplicentur 8 − 2. hoc eſt, 6. per 7 − 3. hoc eſt, per 4. produci 24. nempe 56 − 38 + 6? Nam cum ex 7. in 8. fiunt 56. quoniam non multiplicatur totus hic numerus 7. in hunc 8. ſed in 8, detractis prius 2. propterea numerus hic 56. maior eſt vero producto. Vnde ex multiplicatione poſtea eiuſdem numeri 7. in − 2. fiunt 14. ſignanda hoc ſigno −. atque ita ex + in −, fit −. Rurſus quia non totus hic numerus 7. ſed detractis prius 3. multipli-

8 − 2
7 − 3
56 − 14
− 24 + 6
56 − 38 + 6

catur in 8 — 2,fit vt productus 56 — 14.fit vero producto maior. Quare ex multiplicatione — 3,in 8. fiunt 24. notanda hoc ſigno —, atque ita rurſus ex — in + fit —.Sed quia non totum hoc,quod prouenit ex — 3. in 8. ſed quod producitur ex — 3. in 8, ſubtractis prius 2. idcirco reſtituendum eſt id,quod iniuſte ablatum eſt;atque ita poſtremo ex — 3.in — 2,fiunt 6. notanda ſigno hoc +,quod additionem ſignificat,vt reſtituantur 6.quę ablata fuerant.Eadem ratio eſt in cæteris exemplis Multiplicationis.

IAM vero cum ex multiplicatione 6.in — 4.gignatur hic numerus — 24.vt dictum eſt,neceſſe eſt,vt ex diuiſione — 24 per — 4.producantur 6;& ex diuiſione — 24.per 6.fiant — 4. Quare in diuiſione quoque ex —,in —,fit +,& ex —,in +,vel contra,fit —. Itaque quemadmodum affirmatio affirmationis,& negatio negationis affirmant,ita ſiue Plus in Plus,ſiue Minus in Minus multiplicatum,aut diuiſum producit Plus. Itē ſicut affirmatio negationis,ſiue negatio affirmationis negat,ita ſiue Plus in Minus,ſiue Minus in Plus multiplicatū aut diuiſum producit Minus.

DE NVMERIS FICTIS, SIVE MINORIbus quam nihil.

Cap. VI.

QVEMADMODVM variæ finguntur radices numerorum, qui eas non habent,qualis eſt radix quadrata, vel cubica, vel Zenſizenſica, vel Surdeſolida huius numeri 20. fitque hæc fictio ſumma vtilitate,& commodo eorum,qui in rebus Mathematicis verſantur, vt ſuo loco dicemus:Ita etiam à ſcriptoribus Algebræ finguntur non temere numeri quidam minores quam nihil vt 0 — 4.hoc eſt,nihil detractis prius quatuor vnitatibus.Item 6 — 10.hoc eſt,ſex vnitates minus 10.vnitatibus.Quod vnico exemplo hoc ſubtractionis perſpicuum fiet.Sint ex 8 — 2,deducenda 10 — 5.hoc eſt,5 ex 6.Primo detraho — 5.ex — 2,hoc eſt,quia ſuperior numerus minor eſt,detraho 2,ex 5,& reliquo numero 3,tribuo contrarium ſignum +,iuxta legem ſubtractionis ſupra traditam. Nam re vera hic numerus — 2. intelligitur ſuperare hunc numerum — 5, tribus vnitatibus, cum — 2, cadat infra nihil duabus vnitatibus, at — 5. infra idem nihil deſcendat quinque vnitatibus, hoc eſt, tribus vnitatibus magis, quam — 2,recedat à nihilo. Quod etiam hinc poteſt intelligi, quod huic numero — 2, deſint tantum duæ vnitates, vt æqualis ſit nihilo, at huic — 5, deſint quinque, vt nihilo æquiualeat. Deinde ſubtraho + 10,ex + 8, maiorem numerum ex minore, quod fieri non poteſt. Vnde non inuenio numerum aliquem

Numeri ficti,ſiue minores quā nihil.

8 — 2
10 — 5
———
— 2 + 3

aliquem verum,quem pro relicto reponam,ſi 10.ex 8,ſubducam. Nam ſi ſuperior numerus 8,maior eſſet inferiore 10, remaneret verus numerus ex illa ſubtractione: Et ſi æqualis eſſet ſuperior numerus inferiori, relinqueretur nihil. Nunc vero cum numerus ſubtrahendus 10. maior ſit numero 8,à quo fieri debet ſubtractio,efficitur, vt numerus infra 0, hoc eſt minor nihilo, relinquatur, ille nimirum,qui deeſt ſuperiori, vt ab eo inferior detractus relinquat 0,cuiuſmodi eſt numerus, qui relinquitur ex ſubtractione ſuperioris ab inferiore,notans ſigno —.quod defectum ſignificat, nempe — 2. Vt totus numerus relictus ſit — 2 + 3. Sed quia non recte ad initium numeri præfigitur hoc ſignum —,ita ſtatuendus erit relictus.3 — 2.Eodem modo,quotieſcunque maior numerus aliquis ex minore detrahendus eſt, (quod re vera fieri non poteſt) ponitur in hac ſcientia pro relicto exceſſus,quo inferior numerus ſuperiorem ſuperat,præfixo hoc ſigno —,vt ſubtractis 20,ex 12,relinquuntur — 8.&c.

VIDES igitur,quam pulchre hæc ars pro immenſa copia ſua vtatur & iis,quæ ſunt,& iis,quæ non ſunt,ſed tantum eſſe finguntur.Quod accuratius adhuc ex iis,quæ ſequuntur,iam iam intelliges.

QVEMADMODVM ſupra vnitatem ponuntur numeri integri,& infra vnitatem fractiones vnitatis,vt vnitas media ſit inter numeros integros & fractos;ita ſupra 0,ſeu nihilum,ponitur vnitas cum reliquis numeris veris,& infra 0,fingitur vnitas cum reliquis numeris,præpoſito tamen ſemper ſigno hoc —,ita vt 0,ſeu nihilum, medium ſit inter numeros veros & fictos,ſiue minores nihilo. Quod appoſite ſequentes duę progreſſiones commonſtrant,quarum ſuperior eſt naturalis ſeries numerorum,inferior autem Geometrica, illiúſque numeri numeros huius

&c.	— 7	— 6	— 5	— 4	— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5	6	7	&c.
&c.	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

exponunt, vt cap.2.diximus. Nam & hic ſuperioris progreſſionis numeri idem faciunt additione,& ſubtractione, quod inferioris progreſſionis numeri multiplicatione,atque diuiſione. Vt enim ex multiplicatione $\frac{1}{4}$ in 32,fiunt 8,ita ex additione — 2.ad 5.fiunt 3. Item ſicut ex multiplicatione $\frac{1}{2}$ in 8,fiunt 4,ita ex additione — 1,ad 3,fiunt 2.Rurſus, vt ex diuiſione 8,per $\frac{1}{4}$ prodeunt 32,ſic ex ſubtractione — 2,de 3,relinquuntur 5.Et quemadmodum ex diuiſione 8,per $\frac{1}{2}$,exeunt 16, ita ex ſubtractione — 1,de 3,relinquuntur 4 &c.Vt ex iis,quæ de additione ſubtractionéq; numerorum Coſſicorum diximus,perſpicuum eſt. Immo ex hoc facile conſtat,in additione & ſubtractione diuerſa ſigna mutare ſpeciem operationis,&c.vt docuimus cap. 4. alias non reſponderet additio & ſubtractio in progreſſione naturali numerorum multiplicationi ac diuiſioni in Geometrica progreſſione.

Ex his liquido constat, non frustra excogitari huiusmodi numeros fictos, siue nihilo minores, quandoquidem tam concinne eorum additio ad numeros integros, vel subtractio, respondet multiplicationi, & diuisioni numerorum integrorum progressionis Geometricę per numeros fractos eiusdem progressionis, vt dictum est.

Vnum & eundē numerum habere posse duas radices quadratas inæquales.

Est autem hoc loco obseruatione dignum, dari posse numerum Cossicum, qui habeat duas radices quadratas inæquales, siue (quod idem est) exhiberi posse duos numeros inæquales, quorum vterque in seipsum ductus producat eundem numerum. Nam hi duo numeri, 2 ʒ — 3 ℞. & 3 ℞ — 2 ʒ, si vterque in se multiplicetur, producunt 4 ʒʒ + 9 ʒ 12 ce. vt hic vides.

2 ʒ — 3 ℞	3 ℞ — 2 ʒ
2 ʒ — 3 ℞	3 ℞ — 2 ʒ
— 6 ce + 9 ʒ	— 6 ce + 4 ʒʒ
4 ʒʒ — 6 ce	9 ʒ — 6 ce
4 ʒʒ + 9 ʒ — 12 ce	4 ʒʒ + 9 ʒ — 12 ce

Cum tamen ipsi numeri multiplicati inter se sint valde inæquales. Prior enim 2 ʒ — 3 ℞, si per radicē 2. resoluatur, efficit 8 — 6. hoc est, 2. qui numerus in se ductus procreat 4. qui æqualis est producto 4 ʒʒ + 9 ʒ — 12 ce. cum hic per eandem radicem 2. resolutus efficiat quoque 4. Posterior vero 3 ℞ — 2 ʒ. efficit 6 — 8. id est 0 — 2. qui numerus in se multiplicatus producit quoque 4. si leges multiplicationis seruentur. Itaque tam numerus 2 ʒ — 3 ℞. quam 3 ℞ — 2 ʒ. radix est quadrata numeri 4 ʒʒ + 9 ʒ — 12 ce. quod sanè mirum videri possit, & paradoxum, cùm tamen ita rem sese habere, resolutiones radicum, & producti numeri euidenter comprobent.

Hoc idē cernitur in numeris absolutis. Nam vterq; horum numerorū 4 — 1. & 1 — 4. id est 3. & 0 — 3. in se multiplicatus gignit 9. vt hic cernis.

4 — 1	1 — 4
4 — 1	1 — 4
— 4 + 1	— 4 + 16
16 — 4	1 — 4
9	9

Idemque in infinitis aliis numeris licebit experiri. Quod si ducantur 4 — 1. in 1 — 4. producetur numerus 8 — 17. hoc est, 0 — 9 At ex multiplicatione 2 ʒ — 3 ℞. in 3 ℞ — 2 ʒ. procreabitur numerus 12 ce — 4. ʒʒ — 9 ʒ. qui resolutus per radicem 2. efficit 32. — 36. id est, 0 — 4. cum tamen vterque illorum in se ductus producat 4. Causa autem huius rei in multiplicationem numerorum Cossi-

corum, & signorum + & — reiicienda videtur: & debilitas ingenij humani accusanda, quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit. Neque enim de ratione prædictæ multiplicationis dubitandum est, cum illa per multa exempla sit confirmata.

DE FRACTIONIBVS NVmerorum Cossicorum.

CAPVT VII.

Eædem fere operationes sunt in fractionibus, seu Minutiis Cossicis, quæ in vulgaribus Minutiis, adhibitis tamen iis, quæ de integris Cossicis numeris hactenus tradidimus, quod ad characteres Cossicos, & signa + & — attinet. Nam, vt de Numeratione exempla nonnulla ponamus, hæc fractio $\frac{3 N}{8 ℞}$. significat, tres vnitates diuisas esse per 8 ℞. Et $\frac{7 ʒ}{9}$. denotat 7. Zensos esse diuisos per 9, vnitates. Item $\frac{9 ʒʒ \times 8 ʒ}{6 ce}$ indicat hunc numerum 9 ʒʒ + 8 ʒ. diuisum esse per 6 ce. Et $\frac{9 ʒʒ — 8 ʒ}{6 ce}$ vult numerum hunc 9 ʒʒ — 8 ʒ, esse diuisum per 6 ce. &c.

Numeratio fractionum Cossicarum.

Abbreuiatio duobus modis fieri potest. Aut enim solum abbreuiantur numeri, vt in Minutiis vulgaribus fit, intactis characteribus Cossicis, aut etiam characteres Cossici abbreuiantur. Vt fractio hæc $\frac{8 ʒ}{2 ß ce}$. quod ad numeros attinet, reducitur ad hanc $\frac{4 ʒ}{1 ʒ ce}$. Hæc autem $\frac{9 ʒ \times 36}{81}$. reducitur ad hanc $\frac{1 ʒ \times 4}{9}$. quia maxima mensura communis est 9. Modus autem inueniendi maximam mensuram trium aut plurium numerorum colligitur ex propos. 3 lib. 7. Eucl. Si enim sunt tres numeri, inuenta maxima mensura duorū, si hæc metiatur quoque tertium, erit ipsa maxima mensura omnium; si verò non metiatur tertium, erit maxima mensura illius maximæ mensuræ, & tertij numeri, omnium trium mensura maxima. Eodem modò, datis quatuor numeris, inuenta maxima mensura trium, si hæc metiatur & quartum numerum, erit ipsa maxima omnium quatuor mensura; si verò non metiatur, erit maxima mensura mensurę illius maximæ, & quarti numeri, maxima mensura omnium quatuor. Et sic de reliquis. Similiter hæc minutia $\frac{8 ß}{2 ʒ — 4}$. ad hanc reducitur $\frac{4 ß}{1 ʒ — 2}$. Hæc autem $\frac{18 ʒ — 9 ℞}{6 ℞ \times 3 ʒ}$. reducitur ad hanc $\frac{6 ʒ — 3 ℞}{2 ℞ \times 1 ʒ}$. &c.

Abbreuiatio fractionum Cossicarum.

At verò abbreuiatio characterum Cossicorum fit per subtractionem exponentis minoris characteris ab exponentibus aliorum characterum. Nam si reliquis numeris proprij characteres tribuantur, peracta erit abbreuiatio, quod ad characteres attinet. Hinc perspicuum est, numerum minoris characteris Cossici fieri in hac abbreuiatione Absolutum. Item Minutiam, in quo Absolutus numerus reperitur, non posse abbreuiari, quod ad characteres attinet. Vt hæc Minutia $\frac{7}{14 ʒ ß}$. abbreuiari non potest, quod spectat ad characteres: sed quod ad numeros attinet, reducetur per abbreuiationem ad hanc, $\frac{1}{2\text{ʒ}\beta}$. At verò hæc Minutia $\frac{8\text{ʒ}}{2\text{ʒce}}$. quod ad characteres ſpectat, ad hāc reducitur. $\frac{8}{2\text{ʒʒ}}$. Deinde quod ad numeros attinet, ad hanc $\frac{4}{1\text{ʒʒ}}$. Hęc autem $\frac{1\text{ʒʒ}-9\text{𝓍}}{6\text{𝓍}\times 3\text{ʒ}}$. reducitur ad iſtam, quod ad numeros & characteres attinet $\frac{6\text{𝓍}-3}{2\times 1\text{𝓍}}$.

Demonſtratio abbreuiationis fractionum Coſſicarum. FACILIS autem eſt demonſtratio huiuſce abbreuiationis. Nam quod ſpectat ad numeros, cum Minutiæ propoſitæ numeri diuidantur per eundem numerum, per maximam videlicet eorum menſuram, erit eadem proportio inter quotientes, quæ inter numeros diuiſos. Quare æquales erunt hæ fractiones, $\frac{8\text{ʒ}}{2\text{ʒce}}$. $\frac{4\text{ʒ}}{1\text{ʒce}}$. Quod verò ad characteres attinet, cum ſinguli characteres per eundem exponentem deprimantur, ita vt eadem prorſus ſit diſtantia inter characteres, ad quos facta eſt reductio, quę inter characteres initio propoſitos, habebunt eandem proportionem characteres, ad quos facta eſt reductio, quam priores characteres propoſiti. Æquales itaque erunt hæ Minutiæ, $\frac{4\text{ʒ}}{1\text{ʒce}}$. $\frac{4\,N}{1\text{ʒʒ}}$.[a] Nam eadem proportio eſt 4 ʒ. ad 1 ʒce, quæ 4. ad 1 ʒʒ. cum idem numerus fiat ex multiplicatione 4 ʒ, primi numeri, in 1 ʒʒ numerum quartum, qui ex 4. numero tertio in 1 ʒce, numerum ſecundum. Vtrobique enim producitur hic numerus 4 ʒce. &c. Vel certè, cum & inter ʒ, ac ʒce, & inter N, ac ʒʒ, tres medij termini cadant proportionales, propterea quod ʒ, & ʒce, æqualiter ſunt depreſſi, nempe per 2. exponentem huius characteris minoris ʒ. &c.

a 19.7.

Reductio fractionū Coſſicarum. REDVCTIO fractionum ad eundem denominatorem abſoluitur multiplicando numeratores in denominatores per crucem, & denominatores inter ſe, vt in Minutiis vulgaribus. Vt hę fractiones $\frac{3\text{𝓍}}{4\text{ʒ}}$. ⋈ $\frac{4\text{ce}}{5\text{ʒce}}$. reducuntur ad has, $\frac{15\,B\beta}{20\text{ʒʒʒ}}$. $\frac{16\beta}{20\text{ʒʒʒ}}$.

Demonſtratio reductionis fractionū Coſſicarum. RATIO autem huius reductionis perfacilis eſt. Quoniam enim idem numerus 5 ʒce, multiplicans duos numeros 3 𝓍, & 4 ʒ, produxit 15 Bβ, & 20 ʒʒʒ.[b] eadem proportio erit 15 Bβ, ad 20 ʒʒʒ, quę 3 𝓍, ad 4 ʒ. ac propterea eundem habebunt valorem fractiones hæ $\frac{3\text{𝓍}}{4\text{ʒ}}$ & $\frac{15\,B\beta}{20\text{ʒʒʒ}}$. Eodem modo æquales erunt hæ fractiones $\frac{4\text{ce}}{5\text{ʒce}}$. & $\frac{16\beta}{20\text{ʒʒʒ}}$. Nam hic numerus 4 ʒ, multiplicans duos 4 ce, & 5 ʒce, genuit hos duos 16 β, & 20 ʒʒʒ.

b 17.7.

QVOD ſi numerus aliquis integer, & fractio ad eandem denominationem ſint reducenda, ſupponenda eſt vnitas numero integro pro denominatore, & reliqua peragenda, vt prius. Vt 6. & $\frac{4\text{𝓍}}{7\text{ʒ}}$. hoc modo $\frac{6}{1}$ ⋈ $\frac{4\text{𝓍}}{7\text{ʒ}}$. reducentur ad has fractiones $\frac{42\text{ʒ}}{7\text{ʒ}}$. & $\frac{4\text{ce}}{7\text{ʒ}}$. Et hæ duæ $\frac{5\text{ʒ}}{1}$. $\frac{4\text{ce}}{3\text{ʒ}}$ ad has $\frac{15\text{ʒʒ}}{3\text{ʒ}}$. $\frac{4\text{ce}}{3\text{ʒ}}$. Nam huic numero Coſſico integro 5 ʒ, ſuppoſita eſt vnitas pro denominatore.

SI vero integris adhæreat fractio aliqua, reducenda erunt prius integra ad eam fractionem; quod quidem fit multiplicando integra per denominatorem fractionis, & numerum productum numeratori addendo. Vt ſi 4 ʒ + $\frac{3\text{𝓍}}{1\text{ce}}$ & $\frac{3\text{ʒ}}{1\beta}$ reducere velimus ad eandem denominationem, multiplicabimus prius 4 ʒ, per 1 ce, vt habeamus duas fractiones has $\frac{4\beta\times 3\text{𝓍}}{1\text{ce}}$ $\frac{3\text{ʒ}}{1\beta}$ quas ad has duas reuocabimus. $\frac{4\text{ʒ}\beta\times 3\text{ʒce}}{1\text{ʒʒʒ}}$ $\frac{3\beta}{1\text{ʒʒʒ}}$. & ſic de cæteris.

IAM

Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuiſio fractionū Coſſicarum. IAM verò quatuor reliquæ operationes fractionum Coſſicarum, hoc eſt, Additio, Subtractio, Multiplicatio, atque Diuiſio, non differunt ab iis, quas de Minutiis vulgaribus tradidimus, habita tamen ſemper ratione ſignorum + & —, nec non characterum Coſſicorum, quorum operationes in ſuperioribus præceptis continentur. Itaque ſolum exemplis rem abſoluemus hoc loco.

Exempla Additionis.

$\frac{3\text{𝓍}}{2\,N}$ ⋈ $\frac{4\text{ʒ}}{3\text{ce}}$ faciunt $\frac{9\text{ʒʒ}\times 8\text{ʒ}}{6\text{ce}}$ hoc eſt, $\frac{9\text{ʒ}\times 8\,N}{6\text{𝓍}}$. Item $\frac{48\,N}{7\text{ʒ}}$ ⋈ $\frac{48\,N}{12\text{𝓍}-3\text{ʒ}}$ faciunt $\frac{192\text{ʒ}\times 576\text{𝓍}}{84\text{ce}-21\text{ʒʒ}}$. Item $\frac{9\text{𝓍}\times 2\text{ʒ}}{36\text{ce}}$ ⋈ $\frac{21\text{ʒʒ}-8\text{ʒ}}{36\text{ce}}$ faciunt $\frac{21\text{ʒʒ}-6\text{ʒ}\ \text{ʒʒ𝓍}}{36\text{ce}}$. Quoniam enim in poſteriori exemplo denominatores omnino ſimiles ſunt, propterea ſolum numeratores adduntur inter ſe, & ſummæ idem denominator ſubſcribitur. Hæc autem fractio quod ad numeros, & characteres ſimul ſpectat, reducetur ad hanc $\frac{7\text{ce}-2\text{𝓍}\times 3\,N}{12\text{ʒ}}$.

Exempla Subtractionis.

$\frac{3\text{𝓍}}{2\,N}$ de ⋈ $\frac{9\text{ʒʒ}\times 8\text{ʒ}}{6\text{ce}}$ relinquunt $\frac{16\text{ʒ}}{12\text{ce}}$ hoc eſt, $\frac{4\,N}{3\text{𝓍}}$. Item $\frac{3\,N}{4\text{𝓍}}$ de ⋈ $\frac{313}{20\text{ce}}$ relinquunt $\frac{64\text{ce}}{80\text{ʒ}\ \text{ʒ}}$ hoc eſt, $\frac{4\,N}{5\text{𝓍}}$. Item $\frac{5\text{ʒ}}{6\,N}$ de $\frac{20\text{ʒ}\times 21\text{𝓍}}{24\,N}$ relinquunt $\frac{126\text{𝓍}}{144\,N}$ hoc eſt, $\frac{7\text{𝓍}}{8\,N}$. Item $\frac{9\text{ʒ}\times 8\text{𝓍}}{2\text{ce}-6\,N}$ de $\frac{11\text{ce}\times 16\text{ʒ}\times 8\text{𝓍}}{2\text{ce}-6\,N}$ relinquunt $\frac{11\text{ce}\times 7\text{ʒ}}{2\text{ce}-6\,N}$. Quoniam enim in poſteriori exemplo denominatores omnino ſunt ſimiles, & ijdem, detrahendus eſt numerator à nominatore, & reliquo numero idem denominator ſubſcribendus.

Exempla Multiplicationis.

$\frac{9\text{ʒʒ}\times 8\text{ʒ}}{6\text{ce}}$ per $\frac{3\text{ce}}{2\,N}$ faciunt $\frac{27\beta\times 24\text{ce}}{12\text{ce}}$. Item $\frac{7\text{ʒ}}{8\text{ʒʒ}}$ per 4 𝓍 — 8 N. faciunt $\frac{28\text{ce}-56\text{ʒ}}{8\text{ʒʒ}}$. Hic enim integro numero ſupponitur vnitas pro denominatore, vt exemplum ad Multiplicationem paretur hoc modo. $\frac{7\text{ʒ}}{8\text{ʒʒ}}$ per $\frac{4\text{𝓍}-8\,N}{1}$. Item $\frac{7\text{ʒ}\times 8\text{𝓍}}{5\text{ce}-11\,N}$ per $\frac{4\text{𝓍}}{5\text{ʒ}}$ — 8 N. faciunt $\frac{32\text{ʒ}-280\text{ʒʒ}-292\text{ce}}{25\beta-55\text{ʒ}}$. Prius enim in hoc exemplo facta eſt reductio — 8 N, ad fractionem, cui adhærebant, multiplicando videlicet — 8 N, per 5 ʒ, denominatorem. Quare fractiones multiplicandæ fuerunt hæ $\frac{7\text{ʒ}\times 8\text{ce}}{1\text{ce}-11\,N}$ per $\frac{4\text{𝓍}-40\text{ʒ}}{5\text{ʒ}}$.

Exempla Diuiſionis.

$\frac{27\beta\times 24\text{ce}}{12\text{ce}}$ per $\frac{5\text{𝓍}}{2\,N}$ faciunt $\frac{54\beta\times 45\text{ce}}{36\text{ʒʒ}}$. Item $\frac{8\text{𝓍}}{9\text{ʒ}}$ per $\frac{2\,N}{3\text{𝓍}}$ faciunt $\frac{24\text{ʒ}}{18\text{ʒ}}$ hoc eſt $\frac{4}{3}$ ſiue $1\frac{1}{3}$. Item $\frac{7\text{ce}-14\text{ʒ}}{2\text{ʒʒ}}$ per 4 𝓍 — 8 N. faciunt $\frac{7\text{𝓍}-14\text{ʒ}}{8\beta-16\text{ʒʒ}}$. Item $\frac{7\text{ce}-14\text{ʒ}}{2\text{ʒʒ}}$ per $\frac{7\text{ʒ}}{8\text{ʒʒ}}$ faciunt $\frac{56\,B\beta-112\text{ʒce}}{14\text{ʒce}}$.

QVONIAM verò Additio, & Subtractio, Item Multiplicatio ac

Diuiſio ſe mutuo probant, fit vt ſi ex additione $\frac{3\text{ϰ}}{2\text{N}}$ & $\frac{4\text{ȣ}}{3}$ fiunt $\frac{9\text{ȣȣ}\times 8\text{ȣ}}{6\text{ϰ}}$ hoc eſt, $\frac{9\text{ȣ}\times 8\text{N}}{6\text{ϰ}}$; ſubductis $\frac{3\text{ϰ}}{2\text{N}}$ ex $\frac{9\text{ȣȣ}\times 8\text{ȣ}}{6\text{ce}}$ relinquantur $\frac{4\text{ȣ}}{3\text{ce}}$. Relinquuntur autem iuxta regulam $\frac{16\text{ȣ}}{12\text{ce}}$ hoc eſt, in minimis terminis $\frac{4\text{N}}{3\text{ϰ}}$. Neceſſe eſt igitur; has duas minutias $\frac{4\text{ȣ}}{3\text{ce}}$ & $\frac{4\text{N}}{3\text{ϰ}}$ eſſe æquales, hoc eſt, eandem proportionem eſſe 4 ʒ. ad 3 ce, atque 4 N, ad 3 ℘. Quod quidem verum eſt. Nam ſi Minutiæ dictæ multiplicentur per crucem, producentur ęquales numeri; hoc eſt, tantum fiet ex primo numero in quartum, nimirum ex 4 ʒ, in 3 ℘, quantum ex ſecundo in tertium, nimirum ex 3 ce, in 4 N. Itaque non eſt neceſſe, vt eadem Minutia omnino proueniat, ſed ſatis eſt, vt æqualis Minutia producatur, quæ quidem æqualitas facilè comprobari poteſt ex multiplicatione per crucem. Idem dicendum eſt de exemplis Multiplicationis ac Diuiſionis, vt ex ſuperioribus exemplis apparet.

Compendiariæ quædam operationes Minutiarum ad plurimas quæſtiones ſoluendas perutiles.

I.

Compendia quædam fractionum.

Dati numeri partem quamcumque, vel partes nominatas ad ipſum numerum addere.

SIT datus numerus $\frac{3\text{ϰ}-16\text{N}}{2\text{N}}$ cui volo addere $\frac{3}{4}$ ipſius numeri. Vtor ergo hoc compendio, etiamſi ignorem, quæ ſint $\frac{3}{4}$ ipſius. Addo ad partem, vel partes addendas, vnitatem, (quod breuiter fit, addendo denominatorem numeratori) nimirum ad $\frac{3}{4}$ facio $\frac{7}{4}$. Hanc verò minutiam multiplico per numerum datum, efficióque $\frac{21\text{ϰ}-112\text{N}}{8\text{N}}$ ſummam quæſitam.

Item ſi $\frac{2}{3}$, addendæ ſint ad 12 ʒ. addo vnitatem ad $\frac{2}{3}$, vt fiant $\frac{5}{3}$. Hanc minutiam multiplico per 12. ʒ, facióque ſummam hanc $\frac{60\text{ȣ}}{3\text{N}}$. hoc eſt, 20 ʒ. Similiter ſi ad hanc minutiam $\frac{3}{5}$ addendum ſit eius dimidium; addita vnitate ad $\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{3}{2}$. Multiplico $\frac{3}{2}$ per $\frac{3}{5}$. fit ſumma tota $\frac{9}{10}$. &c.

II.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque ad partem, vel partes quaſcunque eiuſdem numeri addere.

SIT datus numerus $\frac{8\text{ϰ}-12}{7\text{N}}$ ad cuius $\frac{1}{3}$, volo addere $\frac{3}{4}$. eiuſdem dati numeri. Addo partes propoſitas inter ſe, vt $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{4}$, facióque $\frac{13}{12}$. Hanc minutiam multiplico in datum numerum $\frac{8\text{ϰ}-12}{7\text{N}}$ efficióque ſummam $\frac{104\text{ϰ}-156\text{N}}{84\text{N}}$.

Similiter ſi $\frac{2}{5}$ huius numeri 35. ad $\frac{4}{7}$ eiuſdem volo addere. Addo prius $\frac{2}{5}$ & $\frac{4}{7}$. facióque $\frac{34}{35}$. Multiplico $\frac{34}{35}$ per 35. efficióque $\frac{1190}{35}$ hoc eſt, 34. &c.

Dati

III.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque ab ipſo numero ſubtrahere.

SIT datus numerus $\frac{7\text{ȣ}\times 8\text{ϰ}-10}{12\text{ϰ}}$, à quo volo ſubtrahere $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$, hæc eſt $\frac{8}{15}$ (ſunt enim prius in vnam ſummam redigendæ fractiones, ſi plures fuerint. Demo $\frac{8}{15}$ ex vnitate (quod breuiter fit, ſubtrahendo numeratorem à denominatore. Nam reliquus numerus eſt numerator) remanentque $\frac{7}{15}$. Multiplico $\frac{7}{15}$. per datum numerum $\frac{7\text{ȣ}\times 8\text{ϰ}-10}{12\text{ϰ}}$ facióq. reliquum numerum $\frac{49\text{ȣ}\times 56\text{ϰ}-70}{180\text{ϰ}}$.

Similiter volo ſubtrahere $\frac{4}{5}$ huius numeri $\frac{9}{10}$, ab ipſo numero $\frac{9}{10}$ Detraho $\frac{4}{5}$ ex vnitate, manet $\frac{1}{5}$. Multiplico $\frac{1}{5}$ per $\frac{9}{10}$ facióque $\frac{9}{10}$ pro ſumma reliqua, &c.

IIII.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque à parte, vel partibus quibuſcunque eiuſdem numeri ſubtrahere.

SIT datus numerus $\frac{12\text{ϰ}\times 8}{5}$ à cuius $\frac{1}{3}$ volo detrahere $\frac{1}{4}$. Demo prius $\frac{1}{4}$ ex $\frac{1}{3}$, remanet $\frac{1}{12}$. Multiplico $\frac{1}{12}$ per $\frac{12\text{ϰ}\times 8}{5}$ facióque ſummam reliquam $\frac{12\text{ϰ}\times 8}{60}$.

Item volo ſubducere $\frac{3}{4}$. huius numeri 36. ex $\frac{8}{9}$ eiuſdem numeri. Demo $\frac{3}{4}$ ex $\frac{8}{9}$ manent $\frac{5}{36}$. Multiplico $\frac{5}{36}$ per 36. facióque $\frac{180}{36}$ hoc eſt, 5. pro numero reliquo, &c.

V.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque inuenire.

SIT datus numerus $\frac{12\text{ϰ}\times 8}{5}$. Volo ipſius $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, id eſt, $\frac{7}{12}$. (quando enim plures ſunt fractiones, colligendæ ſunt prius in vnam ſummam). Multiplico $\frac{7}{12}$ per datum numerum $\frac{12\text{ϰ}\times 8}{5}$ facióque $\frac{24\text{ϰ}\times 56}{610}$ atque hic numerus conſtituit $\frac{7}{12}$, hoc eſt, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. dati numeri $\frac{12\text{ϰ}\times 8}{5}$.

Similiter volo $\frac{3}{4}$ huius numeri 24. Multiplico $\frac{3}{4}$ in 24. facióque $\frac{72}{4}$ hoc eſt, 18. &c.

VI.

Numerum inuenire, cuius pars nominata data ſit, vel partes. Hoc eſt, numerum inuenire, cuius datus quilibet numerus ſit data quæuis pars, vel partes.

SIT hic numerus $\frac{12x-4}{5}$ duæ tertiæ partes alicuius numeri. Volo reperire illum numerum. Diuido $\frac{12x-4}{5}$ per $\frac{2}{3}$. facióque $\frac{36x-12}{10}$ atque hic eſt numerus, cuius $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{12x-4}{5}$.

Pari ratione volo inuenire numerum, cuius hic numerus 8, ſit $\frac{4}{5}$. Diuido 8 per $\frac{4}{5}$ facióque $\frac{40}{4}$, hoc eſt, 10. atque hic eſt numerus, cuius $\frac{4}{5}$. faciunt 8. &c.

DE REGVLA ALGEBRÆ.

Cap. VIII.

ABSOLVTO Algorithmo numerorum Coſſicorum, ordo iam poſtulat & locus, vt celeberrimam Algebræ regulam exponamus. Occaſione enim huius omnia, quæ hactenus tradita ſunt de numeris Coſſicis, planiora fient, & reliqua, quæ ad perfectiorem huius regulæ cognitionem requiruntur, declaranda erunt. Neque enim omnia, vt debent, explicari poſſunt, niſi occaſione accepta à partibus regulæ Algebræ, vt ſuo loco dicemus. Regula igitur Algebræ, quam alij ſcriptores in plures diſtraxerunt, huiuſmodi eſt.

Regula Algebræ.

Pro numero incognito in quæſtione ponatur radix vna hoc modo, 1. x. (Poſſunt etiam interdum plures radices poni hoc modo 2 x. vel 3 x, &c. vel alius quidam numerus, pro commoditate quæſtionis propoſitæ.) Quæ iuxta quæſtionis tenorem examinetur, donec Æquatio aliqua inueniatur: Hæc reducatur, ſi reductione opus fuerit: Deinde per numerum characteris Coſsici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus. Nam vel Quotiens ipſe erit numerus, qui quærebatur, pretium ſcilicet radicis in principio poſitæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quærebatur, notum reddet. Pulchre autem diuiſor ſuo charactere Coſſico demonſtrabit, quando radix ex Quotiente, & quænam ſit extrahenda.

HABET autem regula hæc quatuor partes. Prima eſt inuentio Æquationis: Secunda, Reductio Æquationis inuentæ: Tertia, Diuiſio alterius numeri Æquationis per numerum maioris characteris Coſſici: Quarta & vltima, Extractio radicis alicuius ex Quotiente.

HARVM duæ ſunt omnino neceſſariæ, nimirum Inuentio Æquationis,

tionis, & Diuiſio. In omni enim quæſtione per hanc regulam ſoluenda inuenienda eſt Aequatio ſiue Aequalitas inter duos numeros, & Diuiſio inſtituenda. Reliquæ duæ, nimirum Reductio Aequationis, & Extractio radicis ex Quotiente, non omnino ſunt neceſſariæ. Neque enim omnis Aequatio inuenta reductionem exigit, neque ſemper ex Quotiente radix extrahenda eſt, vt ex iis, quæ ſequuntur, manifeſtum erit. Quid porrò inter vnicam hanc regulam noſtram, & multiplices aliorum regulas interſit. (Plures enim alij regulas præſcribunt) cap. 13. manifeſtum erit.

SED priuſquam omnes has quatuor partes regulæ ſingulatim pertractemus, rudi quadam Minerua, & obiter regulam ipſam explanabimus, hoc propoſito problemate.

Inuenire numerum, ita vt dimidio ipſius, & tertia parte ab eo ſublatis, reliquus numerus ſit 7.

Primæ pars regulæ Algebræ.

PONO hunc numerum ignotum, qui quæritur, eſſe 1 x. ita vt 1 x, æqualis intelligatur numero abſcondito, quem inquirimus. Cum enim omnis numerus ſiue integer, ſiue fractus, ſiue integer cum fracto obtinere poſſit ſecundum locum alicuius progreſſionis Geometricę ab vnitate incipientis, ita vt ſit radix illius progreſſionis: conſiſtit totum artificium huius regulæ Algebræ in eo, vt inueniat, quamnam progreſſionem Geometricam numerus quæſitus conſtituat; hoc eſt, in quanam progreſſione numerus, qui quæritur, locum vnitati proximum occupet. Iuxta igitur quæſtionis tenorem examino 1 x. hoc eſt, ſumo ipſius $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$ hoc eſt, $\frac{1}{2}x$ & $\frac{1}{3}x$, quæ partes ſimul conſtituunt $\frac{5}{6}x$. Aufero $\frac{5}{6}x$, ex 1 x, remanet $\frac{1}{6}x$. Iam ſic ratiocinor. Quoniam 1 x, poſita eſt æqualis toti numero abſcondito, qui quæritur, erit $\frac{1}{2}x$, æqualis dimidio totius numeri, & $\frac{1}{3}x$, tertiæ parti eiuſdem. Et quoniam dimidio, ac tertia parte ex toto numero ſubtractis, reliquus numerus eſt 7; fit, vt $\frac{1}{2}x$, & $\frac{1}{3}x$, hoc eſt, $\frac{5}{6}x$. detractis ex 1 x, reliquus numerus, nimirum $\frac{1}{6}x$, æqualis ſit reliquo numero 7, quia ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia. Inuenta eſt igitur Aequatio, ſiue Aequalitas inter $\frac{1}{6}x$, & hunc numerum 7. atque ita prima pars regulæ abſoluta eſt, quæ ita habet. [*Pro numero incognito in quæſtione ponatur 1 x, quæ iuxta quæſtionis tenorem examinetur, donec Æquatio aliqua inueniatur.*] Satis autem patet ex propoſito exemplo, qua ratione iuxta tenorem quęſtionis Aequatio inuenienda ſit. Eſt autem Aequatio, vt hic ſumitur, nihil aliud, quam proportio æqualitatis inter duas quantitates, ſiue res variè denominatas. Vt in dato exemplo, proportio æqualitatis eſt inter $\frac{1}{6}x$. & 7. quæ duo variè denominantur. Nam cum duæ res æquales dicuntur, quæ eandem habent denominationem, eſt ea æqualitas, ſiue æquatio vel falſa, vt cum dico æquationem eſſe inter 5, & 7, aut inter $\frac{1}{6}x$, & $\frac{1}{5}x$. vel certè identitas quædam ad regulam Algebræ inutilis prorſus, vt cum dico, æqualitatem eſſe, ſeu æquationem inter 4 x,

In quo conſiſtat artificium regulæ Algebræ.

Æquatio quid.

& 42, aut inter 7. & 7. Necesse est ergo, vt æqualitas ad regulam Algebræ pertinens sit inter duas res diuersorum nominum.

Secunda pars regulæ Algebræ.

Sequitur deinde in regula. [*Hæc reducatur, si reductione opus fuerit.*] Hoc est, Aequatio inuenta reducatur, si res postulauerit. Quando autem & quomodo sit reducenda Aequatio, paulo post docebimus. Nunc certum sit, nostram Aequationem inter $\frac{1}{6}$ ℨ. & 7. non indigere reductione.

Tertia pars regulæ Algebræ.

QVARE subiungit regula. [*Deinde per numerum characteris Cossici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus.*] Quoniam in omni æquatione reperiuntur duo numeri inęqualiter denominati, pręcipit regula Algebræ, vt per numerum maioris characteris Cossici diuidatur reliquus numerus æquationis. Non iubet, vt diuisio fiat per maiorem numerum Cossicum, sed per maioris characteris Cossici numerũ. Nam Diuisor in hac regula, dum diuidit, abiicit characterem suum, alioquin Quotiens semper foret vnitas. Cum enim numerus maioris characteris Cossici, quando à charactere denominatur, æqualis sit reliquo æquationis numero, perspicuum est, si alter per alterum ita diuidatur, produci vnitatem, propterea quod numerus quicunque in altero numero sibi æquali semel duntaxat continetur. Cur autem Diuisor huiusmodi abiiciat suũ signum Cossicum, paulo inferius cap. 11. dicam, vbi hâc diuisionem, quæ in Algebrę regula præcipitur, plenius explanabimus. In nostra Æquatione inuēta inter $\frac{1}{6}$ ℨ, & 7 N, maior character Cossicus est ℨ, hoc est, maiorem exponentem habet, quam N, cum huius exponens sit 0, illius verò 1. Per exponentes enim cognoscimus, vter character Cossicus maior sit vel minor. Itaque diuidendus est hic numerus 7 N, per $\frac{1}{6}$ relicto charactere ℨ. fitque Quotiens 42.

Quarta pars regulæ Algebræ.

ADDITVR autem tandem in regula. [*Nam vel quotiens ipse erit numerus qui quærebatur, pretium scilicet radicis in principio positæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quærebatur, notum reddet, &c.*] Quando, & quæ radix Quotientis manifestet numerũ incognitum, qui quæritur, perpulchre docet maior character Cossicus per cuius numerũ Diuisio instituitur, vt proprio loco docebimus. In proposito nostro exēplo non est extrahenda vlla radix, sed ipse Quotiens offert numerum, qui quærebatur. Itaq; numerus, qui in problemate proponitur inueniendus, est 42. versaturq; propositũ problema in progressione Geometrica ab 1. incipiente, in qua numerus vnitati proximus est 42. qualis est hęc.

1. 42. 1764. 74088. 3111696. &c.

In hac enim sola apparet, veram esse vltimam æquationem inuentam inter $\frac{1}{6}$ ℨ, & numerum 7. Iam vero si huius numeri 42. inuenti sumatur $\frac{1}{2}$. nimirum 21. & $\frac{1}{3}$. videlicet 14. atque hæ partes ex ipso numero 42. detrahantur, fit reliquus numerus 7. id quod in quæstione proposita desiderabatur.

ATQVE hoc modo, inuento numero, qui inquirebatur, & vni radici ponebatur æqualis, institui potest examen, siue probatio, iuxta problematis, vel quæstionis propositæ tenorem. Sed problemate propo-

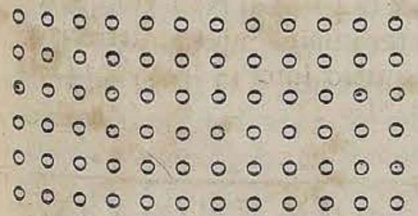
sito, & explicatione regulæ pingui, vt diximus, Minerua, absoluta, declarandæ sunt deinceps singulæ partes regulæ exquisitius, ac clarius, vt facturos nos paulo ante recepimus.

DE ÆQVATIONVM VARIETATE.

CAP. IX.

SATIS constat ex iis, quæ dicta sunt, vt ex positione 1 ℨ, si ea examinetur secundum exempli pronunciationem, æquatio inter duos numeros inuenienda sit: Nunc autem de hac æquatione plura dicenda erunt, vt intelligamus, quotnam modis vna eadémq. ęquatio possit variari. Inuenta enim ęquatione aliqua, poterunt ex ea plurimę aliæ constitui. Vt in superiori exemplo, inuenta est æquatio inter $\frac{1}{6}$ ℨ, & 7. Et quoniam ponebatur 1 ℨ, æqualis toti numero inueniendo, fit vt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, hoc est, $\frac{5}{6}$ ℨ & $\frac{1}{6}$ ℨ, hoc est, 7. æquentur vni radici, ita vt æquatio sit inter $\frac{5}{6}$ ℨ + 7, & 1 ℨ. iuxta hanc communem sententiam. Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis. Sic etiam si $\frac{1}{6}$ ℨ, dematur ex 1 ℨ, & 7, ex toto numero 42, inuenta erit æquatio inter $\frac{5}{6}$ ℨ, & 35 &c.

SED vt accuratius varias ęquationum commutationes cognoscamus, sciendum est, omnem calculum, qui in hac Algebræ regula instituitur, fieri per lineas, superficies, atque corpora, quę progrediuntur secundum proportionem aliquam Geometricam ab vnitate inchoatam, vt supra diximus. Appositè igitur varię æquationes ex hac sequenti figura Geometrica intelligi possunt.



Est enim 1 ℨ, linea quędam partium sub certo quodam numero, seu series quædam rerum quarumcunque sub numero aliquo determinato. Vt in hac figura quadrangulari, sex lineæ longitudinis, quarum quælibet partes habet 12; similitérque duodecim lineæ latitudinis, in quarum qualibet reperiuntur partes 6, videre licet. Vides autem primo, vt 6 ℨ, longitudinis æquentur huic numero 72. quia sex lineæ, seu 6 ℨ, longitudinis complent totam figuram continentem partes 72. Deinde cernis, vt 12 ℨ, latitudinis eidem numero 72, æquales sint. Totam enim figuram habentem partes 72, constituunt 12 ℨ, latitudinis, seu 12 lineæ latitudinis, vt patet. Sed in exemplum sumamus 12 ℨ, latitudinis, vt æquatio sit inter 12 ℨ, & 72. Et quoniam, si ab æqualibus æqualia auferan-

Varia per mutationes æquationum.

tur, quæ remanent, æqualia sunt; si ex vtroque numero æquationis auferamus 4 ℞, remanebit adhuc æquatio inter 8 ℞, & 72 — 4 ℞. Nam 8 ℞, latitudinis in figura superiori continent partes 48. at 4 ℞, faciunt 24. Sublatis autem 24, ex 72. relinquuntur 48. Similiter, quoniam si æqualibus æqualia addantur, quæ fiunt, æqualia sunt; si vtriq; parti huius vltimæ æquationis inter 8 ℞, & 72 — 4 ℞, addamus 10. inueniemus æquationem inter 8 ℞ + 10, & 82 — 4 ℞. Nam 8 ℞ + 10, faciunt 58. & tantundem efficiunt 82 — 4 ℞, vt constat. Quod si rursus vtrique parti huius æquationis inter 8 ℞ + 10, & 82 — 4 ℞, auferamus 4 ℞, remanebit æquatio inter 4 ℞ + 10, & 82 — 8 ℞. Nam ex superiori figura vtraque pars constituit 34. Ita quoque si ex huius æquationis vltimæ parte vtraque detrahamus 10. constituetur æquatio inter 4 ℞, & 72 — 8 ℞. Vtraque enim pars facit 24. Atque hac arte ex vna æquatione inuenta sexcentæ aliæ possunt constitui, non variato valore, seu pretio vnius radicis.

SVMMA autem huius variationis in hoc præcepto consistit.

Præceptũ variandi quamcunque æquationem.

Vtrique termino Æquationis idem commune addatur, aut ab vtroque idem commune subtrahatur; aut certe vterque terminus per eundem numerum multiplicetur, diuidatúrve. Ita enim remanebit illæsa æquatio sub terminis mutatis.

IN qua quidem Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Diuisione in memoriam reuocanda sunt documenta illa, quæ de signis istis +, & —, tradidimus. Variatio superiorum æquationum facta est per additionem, & subtractionem eiusdem numeri ab vtroque termino æquationis. Nunc subiiciemus alterum exemplum multiplicationis, & diuisionis. Sit igitur ex eadem figura superiorum inuenta æquatio inter 3 ℞ + 12, & 72 — 7 ℞. Quod si vtrunque terminum multiplicemus per 2, efficiemus æquationem inter 6 ℞ + 24 & 144 — 14 ℞. Nam vterque terminus facit 60. Sic etiam, si vtrunque terminum huius posterioris æquationis diuidamus per 6, prodibit æquatio inter 1 ℞ + 4, & 24 — $2\frac{1}{3}$ ℞. Vt perspicuum est.

DE REDVCTIONE ÆQVATIONIS.

CAP. X.

QVANDO in solutione alicuius quæstionis ad Aequationem deuentum fuerit, ita vt per numerum, maioris characteris Cossici reliquus Aequationis numerus diuidi non possit, vt regula Algebræ præcipit; reducenda est Aequatio inuenta prius, quam Diuisio instituatur. Tunc autem Diuisio fieri non potest, cum maior character Cossicus, per cuius numerum fieri

fieri debet diuisio, vel non solus ponitur in altera parte æquationis, vel etsi solus ponitur, tamen in reliqua quoque parte idem character reperitur, vt ex his exemplis perspicuum fiet. Sit inuenta æquatio inter 9 ℞ — 12, & 42. Hic vides diuisionem fieri non posse per 9, numerum videlicet maioris characteris Cossici ℞, quia non solum 9 ℞, constituunt alteram æquationis partem, sed 9 ℞ — 12. Sic quoque, si æquatio fuerit inter 9 ℞, & 72 — 3 ℞, non poterit diuisio fieri per 9, numerum scilicet huius characteris ℞, quia licet solus hic numerus 9 ℞, occupet alteram partem æquationis, idem tamen character ℞, in altera quoque parte æquationis reperitur. Similiter inuenta æquatione inter 9 ℞ + 12, & 78 — 2 ℞, diuisio nulla fieri potest, quod in vtraque parte æquationis reperiatur & character hic ℞, & hic N. Idem iudicium de aliis æquationibus huiusmodi habeto, qualis est inter 1 ʒ — 3 ℞, & 108. Item inter 1 ʒ — 48, & 8 ℞. Item inter 108 + 8 ℞, & 2 ʒ — 12 ℞ + 60. &c. Omnes hæ æquationes, in quibus valor radicis est 12. & similes aliæ, reducendæ sunt ad alias, in quibus maior character Cossicus in altera parte æquationis solus statuatur, & in altera parte amplius non repetatur, & in quibus nullus character Cossicus bis ponatur. Fit autem hæc reductio per variationem illam, seu permutationem particularum æquationis, quam in præcedenti cap. descripsimus. Vt æquatio inter 9 ℞ — 12, & 42, reducitur per restaurationem huius diminuti — 12, hoc est, per additionem huius numeri 12, ad vtramque partem, ad hanc inter 9 ℞, & 54. Ita etiam æquatio inter 9 ℞, & 72 — 3 ℞, per restaurationem huius diminuti — 3 ℞, hoc est, per additionem 3 ℞, ad vtramque partem, reuocatur ad æquationem inter 12 ℞, & 72. Pari ratione æquatio inter 9 ℞ + 12, & 78 — 2 ℞, primo per restaurationem diminuti huius — 2 ℞, seu additionem 2 ℞, ad vtramque partem, reducitur ad æquationem inter 11 ℞ + 12, & 78. Secundo hæc per transpositionem huius additi + 12, hoc est, per subtractionem 12, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter 11 ℞, & 66.

Variæ æquationes reducendæ.

Æquationes ita reducendæ sunt, vt maior character solitarie in vna parte ponatur, &c.

Reductiones variarum æquationum.

RVRSVS æquatio inter 1 ʒ — 3 ℞, & 108, reducitur per restaurationem diminuti huius — 3 ℞, ad æquationem inter 1 ʒ, & 3 ℞ + 108. vtrique enim parti additæ sunt 3 ℞. Sic etiam æquatio inter 1 ʒ — 48, & 8 ℞, reducitur per restaurationem huius diminuti — 48, hoc est, per additionem 48. ad vtramque partem, ad istam inter 1 ʒ, & 8 ℞ + 48. Denique æquatio inter 108 + 8 ℞, & 2 ʒ — 12 ℞ + 60, reducitur primo per restaurationem — 12 ℞, ad æquationem inter 108 + 20 ℞, & 2 ʒ + 60. Secundo hæc per transpositionem + 60, id est, per ablationem 60, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter 2 ʒ, & 20 ℞ + 48. Itaq. omnis reductio æquationum, vt expeditior fiat, initium sumere debet à restauratione diminuti, si quod fuerit, hoc est, numerus ille, qui hoc signum — gerit. vtrique parti æquationis addi debet. Deinde transponendus est numerus signum + gestans, ex vna parte in alteram, hoc est, ex vtraque parte est detrahendus. Quæ quidem restauratio, seu additio, & transpositio, seu subtractio, quamuis rectè fiat per regulam additionis,

& subtractionis, vt ex dictis patet, tota tamen ars reductionis continetur in his duobus præceptis, quorum primum est.

Primum præceptũ reductionis. *Quicquid transponitur, mutat signum.* Hoc est, particula ęquationis habens signum —, transposita in alteram partem acquirit signum +, nimirum additur alteri parti. Particula verò gerens signum +, transposita mutat + in —, id est, subtrahitur. Quod quidem in omnibus reductionibus præmissis obseruatum est. Quod si particula illa, quæ transponitur, habuerit similem denominationem in altera parte, in quam est transponenda, vsurpandum erit secundum hoc præceptum.

Secundũ præceptũ reductionis. *Eadem signa subtrahunt, diuersa verò addunt.* Hoc est, si particula ęquationis transponenda gerens signum quodcunque ex his duobus +, —, habuerit in altera parte æquationis numerum maiorem eiusdem denominationis cum eodem signo, subtrahendus est numerus illius particulæ ab hoc numero, relinquendumque est idem signum, quod habet numerus, à quo fit subtractio: Vnde inchoanda erit transpositio à minori numero. Si verò particula transferenda habuerit in altera parte numerum eiusdem denominationis cum opposito signo, addendus est numerus illius particulę huic numero, relinquendumque est idem signum, quod habet numerus, ad quem fit additio. Atque vt vtriusque regulæ vsus melius intelligatur, reducemus adhuc vnam aut alteram ęquationem. Sit æquatio inter 6 ℞ — 10, & 10 ℞ — 34. quoniam igitur numeri 10. & 34. habent idem signum —, propterea, vt minor 10, transferatur, auferendus est numerus 10, ex 34. atque ita remanebit ęquatio inter 6 ℞, & 10 ℞ — 24. Rursus quia numeri 10 ℞, & 6 ℞, idem habent signum +, idcirco minor 6 ℞, à maiori 10 ℞, aufertur, vt maneat ęquatio inter 0 ℞, & 4 ℞ — 24. Denique transponendo — 24, erit ęquatio inter 24 ℞ 4 ℞. Sit rursum æquatio inter 54 + 4 ℞, & 1 ʒ — 6 ℞ + 30. Primum quia + 4 ℞, & — 6 ℞, diuersa signa habent, propterea adduntur 4 ℞, ad 6 ℞, vt fiant — 10 ℞. sitque ęquatio inter 54, & 1 ʒ — 10 ℞ + 30. Deinde quia 54, & + 30, idem signum + habent, ideo subtrahuntur 30, à 54, vt maneat ęquatio inter 24, & 1 ʒ — 10 ℞. Tertio transpono — 10 ℞, vt sit ęquatio inter 1 ʒ, & 10 ℞ + 24. & sic de cęteris.

Summa reductionis. Itaque colligitur ex iis, quæ diximus, totum negotium reductionis in transpositione particularum esse positum; Transpositionem autem istam ex proximè dictis documentis pendere. Oblata enim ęquatione aliqua, in qua numerus characteris maioris Cossici non solus vnam partem ęquationis constituit, sed ei coniunctus est alius numerus Cossicus minoris denominationis, transferendus est hic in alteram partem, iuxta pręceptum quidem primum, si in altera parte, in quam transfertur, non reperiatur numerus eiusdem denominationis: At verò si altera pars æquationis, in quam fieri debet hæc transpositio, habuerit eiusdem denominationis numerum, peragenda

agenda

agenda est hæc translatio iuxta alterum documentum. quæ omnia in superioribus exemplis obseruata esse vides. Deniq; eousque continuanda est æquatio, addendo, auferendo, & transponendo, quoad maioris characteris numerus in vna parte solitarius conspiciatur.

Securior est reductio sine duobus præceptis prædictis. Volo autem studiosum hoc loco esse monitum, hæc duo præcepta solum inuenta esse pro compendio reductionis. Nam qui additionis & subtractionis regula vult esse contentus, potest citra omne incommodum illis carere. Quod etiam nonnullis consulerem, ne hæc præcepta cum præceptis additionis, & subtractionis confundant, id quod sæpe accidere solet, præsertim tyronibus huius artis.

Reductio æquationum inter Minutias & inter numeros Cossicos irrationales, & numeros absolutos inuentam. Sed agamus iam de reductione illarum æquationum, quę inter Minutias reperiuntur. Omnis autem eiusmodi æquatio reducitur ad æquationem integrorum per multiplicationem in crucem. Sit inuenta æquatio inter has Minutias $\frac{3℞+12}{5} \times \frac{36ʒ-198℞}{3℞}$. Multiplicentur in crucem, nempe numerator prioris Minutiæ in denominatorem posterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorem posterioris; eritque facta æquatio inter 9 ʒ + 36 ℞, & 180 ʒ — 990 ℞. Hoc est, per abbreuiationem characterum, inter 9 ℞ + 36, & 180 ℞ — 990. & per abbreuiationem numerorum, inter 1 ℞ + 4, & 20 ℞ — 110. Quod si fiat reductio per transpositionem, vt nuper tradidimus, erit eadem hæc æquatio inter 19 ℞, & 114.

Sic æquatio inter $\frac{4℞+18}{1℞}$ & $\frac{12℞-58}{2}$, reducitur per multiplicationem in crucem ad hanc inter 8 ℞ + 36, & 12 ʒ — 58 ℞. Quæ si per transpositionem reducatur, erit eadem æquatio inter 66 ℞ + 36, & 12. ʒ.

Quod si æquatio inuenta sit inter hanc minutiam $\frac{628}{186+1℞}$ & quamcunque aliam rem, vt libram, vel vntiam, vel horam, vel gradum, vel minutum, &c. sumenda est hæc res tanquam integrum aliquod, & pro ea vnitas constituenda, cui alia vnitas supponatur, vt fiat fractio. Vnde in dato exemplo erit æquatio inter $\frac{628}{186+1℞}$ & $\frac{1}{1}$ quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 628, & 186 + 1 ℞.

Demonstratio reductionis æquationum inter minutias. Demonstratio reductionis æquationum inter Minutias perfacilis est. Quoniam enim duæ Minutiæ ponuntur æquales, erit eadem proportio numeratoris Minutiæ prioris ad denominatorem eiusdem, quæ numeratoris Minutiæ posterioris ad denominatorem eiusdem. Quare si Minutiæ per crucem multiplicentur, hoc est, numerator prioris Minutiæ in denominatorem posterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorē posterioris, nempe primus numerus in quartum, & secundus in tertium, producti erunt numeri æquales: atque adeo Aequatio inuenietur inter illos numeros productos. Quod erat demonstrandum.

Quo pacto autem æquatio inter numerum Cossicum irrationalem, & numerum absolutum, vt inter √ʒ 24 ℞. & 12. vel inter √ʒ 10 ʒ. & 20. reducenda sit, docebimus ad finem cap. 26. vbi de huiusmodi numeris acturi sumus.

Characteres abbreuiãdi sunt, vt habeatur numerus absolutus in vna parte æquationis.

SI occurrat tandem æquatio, in qua nullus sit numerus absolutus, abbreuiandi erunt characteres Cossici, vt cap. 7. docuimus. Vt æquatio inter 2 ʒ, & 12 ♃, reducenda est ad æquationem inter 2 ♃, & 12.

SIMILITER æquatio inter 1 ʒce, & 1 ß + 35156 ʒʒ, reducenda est ad æquationem inter 1 ʒ, & 1 ♃ + 35156.

Item æquatio inter 1 ß, & 1 ʒʒ + 35156 ce, reducenda est ad æquationem inter 1 ʒ. & 1 ♃ + 35156.

Item æquatio inter 1 ʒʒ. & 1 ce + 35156 ʒ, reducenda est ad æquationem inter 1 ʒ. & 1 ♃ + 35156.

Item æquatio inter 1 ce. & 1 ʒ + 35156 ♃, reducenda est ad æquationem inter 1 ʒ. & 1 ♃ + 35156. & sic de aliis huiusmodi.

VERVM hæc abbreuiatio non est omnino necessaria, vt in cap. 12. dicemus ante extractiones radicum numerorum Cossicorum simplicium.

Reducenda est æquatio, per diuisionem, vt numerus maioris characteris solitariè positus sit vnitas.

POSTREMO si facta reductione æquationis, vt maior character Cossicus ponatur solus ex altera parte æquationis, qui maior sit quam ♃, qualis est ʒ, vel ce, vel ʒʒ, &c. diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum illius characteris Cossici maioris, si non est vnitas; ita vt vnitas ab illo charactere Cossico denominata æqualis sit alteri parti æquationis. Vt si æquatio sit inuenta inter 4 ʒ, & 8 ♃ + 96. diuidendi erunt singuli numeri per 4. vt reducatur æquatio ad æquationem inter 1 ʒ. & 2 ♃ + 24.

Item æquatio inter 12 ʒ. & 66 ♃ + 36. reducenda est per diuisionem ad æquationem inter 1 ʒ. & $5\frac{1}{2}$ ♃ + 3. &c.

RATIO huius reductionis obscura non est. Cum enim singuli numeri per eundem numerum diuidantur, nempe per numerum maioris characteris Cossici, habebunt Quotientes eãdem proportionem, quam numeri diuisi. Quam ob rem, quemadmodum inter numeros diuisos, ita & inter Quotientes Aequatio necessario reperietur.

CÆTERVM hæc reductio fiet, si iuxta tenorem regulæ Algebræ diuisio instituatur per numerum maioris characteris, ipso charactere abiecto, retentis tamen characteribus numerorum, qui diuiduntur, vt cap. insequenti dicetur: adeo vt hæc reductio, de qua proximè diximus, superuacanea esse videatur, quandoquidem Diuisio, quæ in regula Algebræ præcipitur, eam nobis exhibeat. Quia tamen alij auctores eam reductionem necessariam esse docent, libuit eam etiam hic explicare, quamuis, vt diximus, eam diuisio iuxta legem regulæ Algebræ, commodissimè quoque offerat.

DE

DE DIVISIONE, QVAM PRÆCIPIT regula Algebræ.

Cap. XI.

Explicatio plenior diuisionis, quam regula Algebræ præcipit.

FACTA reductione æquationis, vbi id res postulat, quemadmodum cap. præcedenti docuimus, præcipit regula Algebræ, vt per numerum maximi characteris Cossici, abiecto charactere, totus reliquus æquationis numerus diuidatur, vna cum characteribus Cossicis. Est autem hæc diuisio compendium quoddam regulæ illius aureæ proportionum, quam trium appellant. Nam si exempli gratia 7 ♃. æquales sint huic numero 42. inquirendum est, cui numero 1 ♃. æqualis sit. Quare iuxta doctrinam regulæ triũ, multiplicantur inter se 42. & 1. ♃, producunturque 42. ♃, quibus diuisis per 7. ♃, prodeunt 6. pro æstimatione vnius radicis. Quando enim Cossicus numerus per numerum Cossicum eiusdem characteris diuiditur, producitur numerus absolutus, vt ex ijs constat, quæ cap. 5. scripsimus; quia nimirum exponentes æquales sunt, ac proinde detracto vno ex altero, remanet 0, exponens numeri absoluti. Hinc est, quod regula Algebræ absolute docet, per numerum maioris characteris Cossici diuidendum esse alterum numerum æquationis. Nam hac ratione idem numerus producitur, qui per proportionum regulam produceretur. Vt ex proposito exemplo constat. Idem enim numerus producitur ex diuisione 42 ♃, per 7 ♃, qui ex diuisione 42, per 7.

SIMILITER si 12 ʒ, æquales sint 66 ♃ + 36. inquirendum est, cui numero æqualis sit 1 ʒ. Quare multiplicantur inter se 66 ♃ + 36. & 1 ʒ, producunturque 66 ce + 36 ʒ: quibus diuisis per 12 ʒ. vt iubet regula trium, proueniunt $5\frac{1}{2}$ ♃ + 3. pro pretio vnius Zensi, seu quadrati. Idem hic numerus producetur, si per 12 ʒ, abiecto prius charactere hoc ʒ, diuidantur 66. ♃ + 36. vt constat: propterea ait regula Algebræ, per numerum maioris characteris Cossici diuidendum esse simpliciter reliquum æquationis numerum, ne longior operatio per regulam trium instituatur. Eodem modo si $\frac{1}{3}$ ʒ. & 6 ♃ + $13\frac{1}{3}$. æquales sint, quærendum est, quanta sit æstimatio vnius Zensi, vel quadrati. Quod quidem fiet, iuxta legem regulæ Algebræ, diuidendo singulos numeros per $\frac{1}{3}$, numerum scilicet maximi characteris. Qua ratione inuenietur æquatio inter 1 ʒ. & 18 ♃ + 40. hoc est, pretium 1 ʒ. erit 18 ♃ + 40.

Item si æquatio inueniatur inter 3 ʒce. & 600 ce + 10368 indagandum est pretium vnius zensicubi. quod per regulam trium fiet, si dicatur. Si 3 ʒce. dant 600 ce + 10368. quid dabit 1 ʒce? Multiplicando enim duos posteriores numeros inter se, producetur numerus 600 cce + 10368 ʒce, quo diuiso per primum numerum, videlicet per 3. ce. fiet Quotiens 200 ce + 3456. eritque æquatio inter 1. ʒce & 200 ce + 3459 quæ facilius inuenitur, si singuli numeri huius æquationis inter 3 ʒce. & 600 ce + 10368. diuidantur per 3. nimirum per numerum maioris characteris, vt ad finem antecedentis cap. scripsimus. Ita enim opus non erit adhibere regulam trium: sed satis erit, vt per numerum maioris characteris, abiecto charactere, singuli numeri alterius partis æquationis vna cum characteribus diuidantur, vt regula Algebræ iubet.

Qvod si diuisor fuerit vnitas denominata à maiore charactere Cossico, non opus est diuisione, quoniam vnitas diuidens nihil noui producit. Vt si 1 ʒ, æqualis sit 3 ℞ + 18 &c. Quare operæ pretium est, vt æquatio reducatur, ita vt numerus maioris characteris sit vnitas, quemadmodum ad finem præcedentis cap. docuimus.

Qvod autem, quando vnitas denominatur à maiore charactere, diuisione non sit opus, liquidò constat ex regula trium. Nam in hac æquatione inter 1 ʒ. & 3 ℞ + 18. si dicatur. Quando 1 ʒ. dat 3 ℞ + 18. quid dabit 1 ʒ? erit identitas, & nugatio. Nam ex multiplicatione 3 ℞ + 18. per 1 ʒ. fit numerus 3 ce + 18 ʒ. qui diuisus per 1 ʒ. facit 3 ℞ + 18. vt ex lege multiplicationis, atque diuisionis liquet.

DE EXTRACTIONE RADICVM, *cuius mentionem facit regula Algebræ.*

CAP. XII.

Quando quotiens indicat pretiũ radicis.

DOcendvm est vltimo loco, quando numerus Quotiens Diuisionis numerum ignotum, qui quæritur, patefaciat, & quando radix aliqua Quotientis, & quænam eundem numerum absconditum indicet. Quando igitur, facta reductione characterũ Cossicorum, maior character Cossicus fuerit ℞, tunc numerus quotiens cõtinuò numerũ, qui quæritur manifestum facit. Vt si 5 ℞ æquales sint 30. facta diuisione 30. per 5. dabit Quotiens, nempe 6, pretium vnius radicis; vt ad initium præcedentis cap. dictum est. Immò quotiescunque numerus Cossicus maioris denominationis æquatur numero Cossico proximè minoris denominationis, diuiso numero minoris denominationis per maioris denominationis numerum, dabit Quotiens valorem vnius radicis, etiamsi non sit facta abbreuiatio characterum: quia huiusmodi æquatio per abbreuiationem characterum reducitur ad æquationem inter ℞ & N. Vt si 5 ß. æquentur 30. ʒʒ. diuisis 30. per 5. fit Quotiens 6. pro pretio vnius radicis. Nam hæc æquatio reducitur ad æquationem inter 5 ℞, & 30. si characteres abbreuientur.

uientur. Quod etiam ex regula trium manifestum est. Nam si dicatur. Si 5 ß. dant 30 ʒʒ. quid dabit 1 ℞? multiplicando 30 ʒʒ. per 1 ℞. fiunt 30 ß. quibus diuisis per 5 ß. fit Quotiens 6. numerus absolutus. Eademque ratio est de cæteris numeris Cossicis collateralibus. Ratio huius rei est, quod in omni progressione Geometrica incipiente ab 1. eadem semper est proportio cuiuscunque numeri ad proximè antecedentem, quæ secundi ad primum, hoc est, radicis ad vnitatem.

Quãdo, & qua radix sit extrahenda, quando alter numerorum æquationis est numerus absolutus.

Si verò maximus character Cossicus æquationis, qui solus ex vna parte æquationis statuitur, maior sit, quam ℞, & numerus absolutus sit in altera parte, extrahenda est ex Quotiente radix quam ipse character significat. Vt si character sit ʒ, extrahenda est radix Zensica, siue quadrata: si ce, cubica: si ʒʒ, Zensizensica: si ß, Surdesolida, &c. Quia in huiusmodi æquationibus ex diuisione inuenitur æstimatio vnius zensi, vel cubi, vel zensizensi, &c. Exempli gratia, si æquatio sit inter 2 ʒ, & 144 — 12 ℞, erit (facta prius diuisione, vt 1 ʒ, æqualis sit 72 — 6 ℞) extrahenda radix quadrata ex 72 — 6 ℞. Similiter, si æquatio sit inter 1 ʒ, & 6 ℞ + 72, vel 72 + 6 ℞, erueda erit quadrata radix ex 6 ℞ + 72, vel ex 72 + 6 ℞. Sic etiã, si æquatio inueniatur inter 5 ʒ, & 720. erit, facta diuisione, quęrẽda radix quadrata ex Quotiente hoc 144. Item si 10 ce, æquales sint 466560, inueniẽda erit, facta diuisione, radix cubica huius Quotiẽtis 46656, & sic de cęteris.

Quanam radix sit extrahenda quãdo duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, quorum neuter est numerus absolutus.

Vt autem generaliter sciatur, quænam radix eruenda sit ex Quotiente, quando duo numeri Cossici non collaterales inter se ęquantur, quorum neuter est numerus absolutus, abbreuiandi sunt characteres, vt æquatio fiat inter N. & numerum Cossicum. Vt si æquatio sit inter 10 ʒce. & 466560 ce. reducetur ea ad ęquationem inter 10 ce & 466560. Facta ergo diuisione, eruenda erit radix cubica ex Quotiente 46656. Et sic de cęteris. Ratio est, quia per diuisionem inuenitur valor vnius cubi, vel alterius numeri Cossici, ad quẽ facta est abbreuiatio per characteres. Nam si dicas. Si 10 ce dant 466560. quid dabit 1 ce? facies ex multiplicatione secundi numeri in tertium, 466560 ce. quibus diuisis per 10 ce. fit Quotiens 46656. valor vnius cubi &c.

Qualis radix sit extrahenda, etiãsi characteres nõ abbreuientur.

Deniqve quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, vt cognoscas, quęnam radix, facta diuisione minoris numeri Cossici per maiorem, ex Quotiente sit eruenda, etiamsi characteres non abbreuientur: vide quot denominationes in progressione Geometrica inter propositos duos numeros Cossicos sint interiectę. Nam si vna tantum est intermedia, extrahenda est radix quadrata: si duæ, cubica: si tres, Zensizensica, &c.

Extractio radicum ex numeris Cossicis simplicibus.

Cætervm qua arte radices ex numeris absolutis sint extrahendę, copiosè satis in Geometria practica exposuimus, nunc verò explicandum est, quonam modo ex numeris Cossicis sint eliciendę.

Si igitur extrahenda est radix aliqua ex numero Cossico simplici sumatur proposita radix illius numeri, relicto charactere, ac si absolutus esset. Deinde exponens characteris eiusdem numeri diuidatur per exponentem characteris, à quo radix extrahenda denominatur, inuenieturque exponens characteris, à quo radix quæsita denominabitur. Vt sit inuenienda radix quadrata huius numeri 144 ȝ. Sumpta radice quadrata ipsius numeri 144. quę est 12. diuidatur exponens huius characteris ȝ, per exponentem characteris ȝ, à quo videlicet radix quadrata, quæ quæritur, denominatur, nimirum 2, per 2. proueniet enim 1, pro exponente characteris ℞. Est ergo 12 ℞. radix quadrata huius numeri 144 ȝ. Nam si hic numerus 12 ℞, in seipsum multiplicetur, producetur numerus propositus 144 ȝ.

RVRSVS sit eruenda radix quadrata ex 144 ȝce. Accepta radice quadrata numeri, nempe 12. diuidatur exponens characteris huius ȝce. nempe 6, per exponentem radicis quadratæ, nimirum per 2. reperieturque exponens 3. cuius character est ce. Igitur 12 ce, radix quadrata est huius numeri 144 ȝce.

SIC quoque radix cubica huius numeri 64 ce, erit 4 ℞. Nam radix cubica numeri huius 64, est 4. & exponente huius characteris ce, nempe 3. diuiso per 3, exponentem scilicet characteris, à quo radix cubica nomē sumit, producitur vnitas, exponens videlicet huius characteris ℞.

Item radix quadrata huius numeri 25 ȝȝ, erit 5 ȝ.
Et radix Zensizensica huius numeri 16 ȝȝȝ, erit 2 ȝ.
Et radix Surdesolida numeri huius 32 ȝß, erit 2 ȝ.
Et radix Zensizensica huius numeri 81 ȝȝ, erit 3 ℞. &c.

QVOD si vel numerus non habeat radicem, quæ inquiritur, vel ex diuisione exponentium non producatur numerus exponens integer, carebit propositus numerus Cossicus radice illa, quæ desideratur. Vt numerus 25 ce non habet radicem quadratam, vel cubicam, quia etiamsi numerus 25. habeat radicem quadratam, nempe 5. tamen ex diuisione 3, exponentis scilicet huius characteris ce, per 2, exponentem quadratæ radicis, prouenit numerus 1½, cui nullus character respondet. Rursus etsi ex diuisione 3, exponentis huius characteris ce, per 3, exponentem radicis cubicæ, proueniat 1, exponens characteris huius ℞. tamen numerus 25. caret radice cubica, &c.

Qui numeri Cossici compositi habeant radices.

QVOD vero atttinet ad extractiones radicum ex numeris Cossicis compositis, & diminutis, sciendum est, tunc solum posse certa via & arte ex eiusmodi numeris extrahi radices, quando tres numeri Cossici æquationis habent exponentes, qui eundem inter se excessum habeant: hoc est, qui sint Arithmeticè proportionales. Quales sunt sequentes æquationes.

1.ȝ.	6 ℞ + 72.	Exponentes sunt.	2. 1. 0.
1.ȝ.	72—6 ℞.	Exponentes sunt.	2. 0. 1.
1.ȝ.	14 ℞—48.	Exponentes sunt.	2. 1. 0.
1.ȝȝ.	18ȝ+648.	Exponentes sunt.	4. 2. 0.
1.ȝȝ.	725—4ȝ.	Exponentes sunt	4. 0. 2.

1. ȝȝ

1.ȝȝ.	433ȝ—41616.	Exponentes sunt.	4. 2. 0.
1.ȝce.	200ce+3456.	Exponentes sunt.	6. 3. 0.
1 ȝce.	5120—16ce	Exponentes sunt.	6. 0. 3.
1 ȝce.	800ce—156751.	Exponentes sunt.	6. 3. 0.
1.ȝȝȝ.	2000ȝȝ+185076881.	Exponentes sunt.	8. 4. 0.
1.ȝȝȝ.	214651701—20ȝȝ.	Exponentes sunt.	8. 0. 4.
1.ȝȝȝ.	20000ȝȝ—7846119.	Exponentes sunt.	8. 4. 0.
1.ȝß.	80ß+39609.	Exponentes sunt.	10. 5. 0.
1.ȝß.	7424—200ß.	Exponentes sunt.	10. 0. 5.
1.ȝß.	2000ß—999424.	Exponentes sunt.	10. 5. 0. &c.

Quando exponentes Arithmeticam progressionem seruantes omnes sunt maiores quam 0. abbreuiandi sunt per subtractionem minimi numeri exponentis. Vt hæ sequentes æquationes.

1.Cß.	725Bß—4cce.	Exponentes sunt.	11. 7. 9.
1.Cß.	200ȝȝ+3456ß.	Exponentes sunt.	11. 8. 5.
1.ȝß.	200ȝce+14336ȝ.	Exponentes sunt.	10. 6. 2.

reducuntur ad has.

1.ȝȝ.	725—4ȝ.	Exponentes sunt.	4. 0. 2.
1.ȝce.	200ce+3456.	Exponentes sunt.	6. 3. 0.
1.ȝȝȝ.	200ȝȝ+14336.	Exponentes sunt.	8. 4. 0.

Et sic de aliis infinitis dicendum est. Ita enim facile cognoscetur, quęnam radix eruenda sit.

Qui numeri Cossici non habeant radices.

QVANDO autem exponentes non seruant Arithmeticam proportionalitatem, hoc est, non habent eundem excessum, vt si æquatio foret inter 1 ce, & 4ȝ+16. vbi exponentes sunt 3. 2. 0. Vel inter 1 ce, & 10 ℞+24. vbi exponentes sunt 3. 1. 0. nondum est inuenta ars, qua huiusmodi radices certò eruantur; quāuis Cardanus, & Nicolaus Tartalea in quibusdā exemplis singularibus inuenerint æstimationem vnius radicis. Raphael autem Bōbellus ex quibusdam etiā æquationibus eiusmodi, & aliis nonnullis putat se inuenisse, quo pacto eruendæ sint radices. Frācifcus quoq; Vieta dicitur demonstrasse regulam generalē pro eiusmodi radicibus extrahendis: quā quia videre hactenus non licuit, & rationes Bombelli obscurę valde sunt, atque æquationes eiusmodi in quibus nimirum plures numeri Cossici quā duo æquantur vni numero Cossico,) qualis est V. g. æquatio inter 1 ce+3ȝ+7 ℞ & 34) numero fere infinitæ existūt, & quę rarò in vsum veniunt, patiūturq., ipso teste, nō paucas exceptiones, cōtenti erimus in hac nostra Algebra ijs, quæ facilem, certam atque exploratam habent scientiam, id est, explicabimus tantummodo extractiones radicum ex numeris Cossicis prioris generis, quando nimirū vnus numerus Cossicus duobus ęquatur, exponentesq. seruāt proportionalitatē,

G

Arithmeticam: quippe cum hæ ſatis ſint ad innumera fere numerorum ænigmata diſſoluenda.

Ac primo quidem agemus de extractione radicum ex iis numeris quorum exponentes ſunt 2. 1. 0. vel 2. 0. 1, quæ omnes quadratæ ſunt. Deinde vero de inuentione radicum illorum numerorum dicemus, quorum exponentes ſunt 4. 2. 0. vel 6. 3. 0. vel 8. 4. 0. vel 10. 5. 0. &c. quę quidem radices ſunt vel Zenſizenſicæ, vel Zenſicubicę, vel Zenſizenzenſicæ, vel Zenſurdeſolidæ, &c. vt maximi characteres æquationum indicant. Hæ enim æquationes omnes exploratam, ac certiſſimam habent ſcientiam, qua earum radices inueniantur.

Extractio radicis quadratæ ex Coſſico numero compoſito vel diminuto.

HAC igitur arte radices quadratæ eruuntur ex compoſitis, ſiue diminutis numeris Coſſicis.

1. *Dimidium numeri radicum ſume.*
2. *Ad huius dimidij quadratum adde, vel ab eodem ſubtrahe numerum abſolutum, prout ſigno + vel — fuerit affectus.*
3. *Ad huius ſummæ, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem ſubtrahe dimidium numeri radicum, prout radicum numerus ſigno + vel — fuerit notatus. Nam vltima hæc ſumma, vel relictum dabit æſtimationem, & pretium vnius radicis quadratæ.*

SIT æquatio inuenta inter 1 ℨ, & 72 — 6 ℞. Facta diuiſione 72 — 6 ℞, per 1, vt iubet regula Algebræ, prodit idem numerus, pretium videlicet vnius Zenſi, cuius radicem ita inueniemus.

Primum ſumo dimidium numeri radicum, nimirum 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo abſolutum numerum 72, propterea quod gerit ſignum +, facioque 81.

Tertio à radice quadrata huius ſummæ 81, nempe a 9, detraho dimidium numeri radicum, puta 3: Nam numerus radicum ſigno — affectus eſt, relinquuntur que 6. pro æſtimatione radicis quæſitæ. Quod ſic probatur. Si 1 ℞, eſt 6, erunt 6 ℞, 36, quibus ſublatis ex 72, remanent 36, quibus æqualis eſt quadratus numerus huius radicis 6.

SIT rurſus æquatio inuenta inter 1 ℨ. & 6 ℞ + 72. Inuenienda eſt radix quadrata huius numeri 6 ℞ + 72.

Primum capio dimidium numeri radicum, puta 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo 72, propter ſignum +, quod gerit numerus abſolutus, facioque 81.

Tertio ad radicem quadratam huius ſummæ 81, nimirum ad 9, adijcio dimidium numeri radicum, nēpe 3; affectus enim eſt numerus radicum ſigno +, efficioque 12, pro pretio radicis. Quod ita confirmatur. Cum 1 ℞, eſt 12, erunt 6 ℞, 72, quibus additis ad 72, fiunt 144, quibus ęqualis eſt numerus quadratus radicis 12.

SIT denique inuenta ęquatio inter 1 ℨ. & 18 ℞ — 72. Quęrenda ergo eſt radix huius quadrati 18 ℞ — 72.

Primum accipio dimidium numeri radicum, nimirum 9.

DEINDE ab huius dimidij quadrato, puta ab 81, deduco 72. propter ſignum —, quod pręponitur numero abſoluto, relinquuntúrque 9.

Tertio ad radicem quadratam huius relicti 9. hoc eſt, ad 3, addo dimidium numeri radicum, vtpote 9. Gerit namque numerus radicum ſignum +. efficióque 12. pro valore radicis. Quod hac ratione patet. 18 ℞, faciunt 216, ſi 1 ℞, eſt 12. ablatis igitur 72, ex 216, remanent 144. quibus æqualis eſt numerus quadratus radicis inuentę 12.

Qui numeri Coſſici habeant duplicem radicem.

SED hoc loco monendus lector eſt, huiuſmodi numeros Coſſicos Diminutos, in quibus numerus abſolutus gerit ſignum —, habere duplicem radicem, quæ ęquationi ſatisfaciat, maiorem ſcilicet & minorem. Maior inuenitur, vt proxime dictum eſt. Minor verò habebitur, ſi radix quadrata illius relicti ex dimidio numeri radicum detrahatur. Vt in dato exemplo poſtremo, ſi 3, radix quadrata huius relicti 9, ſubtrahatur à 9, dimidio numeri radicum, relinquentur 6, pro altera radice, & minore huius numeri Coſſici 18 ℞ — 72. Quod ita conſtat. 18 ℞, faciunt 108, ſi 1 ℞, eſt 6, ablatis igitur 72, remanent 36, quibus æqualis eſt quadratus numerus huius radicis 6.

Quo pacto tum maior, tū minor radix inueniatur.

ITAQVE in huiuſmodi numeris liberum erit, tertio loco ad radicem quadratam inuentam ex relicto illo vel addere dimidium numeri radicum, vel eandem illam radicem inuentam ex dimidio numeri radicum ſubducere. Non tamen ſemper vtraque radix propoſitum problema ſoluet, ſed altera tantum, vt in ænigmate 25. cap. 32. manifeſtum fiet.

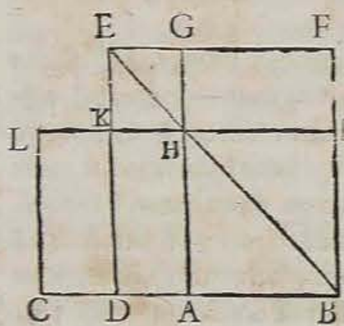
SOLVM numerus ille Coſſicus Diminutus habens numerum abſolutum ſigno — affectum, vnicam habet radicem, cuius numerus abſolutus quadrato dimidij numeri radicum æqualis eſt. Huius enim numeri Coſſici radix eſt dimidium ipſum numeri radicum. Vt ſi æquatio ſit inter 1 ℨ, & 12 ℞ — 36. erit radix huius numeri diminuti 12 ℞ — 36, dimidium numeri radicum, nimirum 6: quia numerus abſolutus 36, æqualis eſt quadrato dimidij numeri radicum. Nam capiatur dimidium numeri radicum, nempe 6; & à quadrato huius dimidij, vt à 36, detrahantur 36, quo facto remanet 0, cuius radix quadrata quoque eſt 0. Siue igitur ad hanc radicem addatur dimidium numeri radicum, puta 6, ſiue ex hoc dimidio radix dicta tollatur, ſemper inuenietur radix eſſe 6, quæ æquationi ſatisfaciat, vt conſtat.

Ex his perſpicuum eſt, triplicem eſſe numerum Coſſicum, cuius radix quæritur. Aut enim compoſitus eſt, cuius tam numerus radicum, quàm numerus abſolutus gerit ſignum +; Aut Diminutus, cuius vel numerus radicum, vel numerus abſolutus ſigno — eſt notatus, vt ex tribus exemplis adductis liquido conſtare poteſt.

Age verò, aperiamus rationem huius extractionis radicum Geometricis demonstrationibus, vt non solum experientia, sed etiam certissima scientia cognoscamus, recte hac arte erui radices quadratas ex numeris Cossicis compositis, diminutisve. Repetamus ergo primũ exemplum, in quo æquatio erat inter ʒ, & N—♃. vel si restauretur diminutum hoc—♃, inter ʒ+♃, & N.

Demõstratio extractionis radicum ex Cossicis numeris compositis diminutisve.

Sit AB. latus Zensi, seu quadrati nobis ignotum, quod quę ritur, quo producto ad partes A, sumatur recta AC, numero radicum æqualis, quæ bifariam secetur in D, vt sit AD, dimidium numeri radicum. Super rectam BD, compositam ex latere quadrati ignoti, & dimidio numeri radicum, describatur quadratum DF, cuius diameter BE. Ducta deinde ipsi DE, parallela AG, quæ diametrum secet in H, ducatur per H, recta IL, ipsi BC, parallela secans DE, in K, occurrénsque rectæ, quæ ex C, ipsi DE, parallela ducitur, in L. Quoniam igitur AI, KG, quadrata sunt ex coroll. propos. 4. lib. 2. Eucl. erit rectangulum CH, contentum sub AC, numero radicum, & AH, latere quadrati, quod quæritur, valor, seu pretium radicum; (Numerus enim radicum multiplicatus in valorem radicis producit omnium radicum valorem. Vt existente vna radice 6, valebunt 5 ♃, 30.) atque adeo DH, dimidium pretij radicum, [a] cum æqualia sint rectangula DH, DL. [b] Cum ergo rectangula DH, HF, æqualia quoque sint, erunt DH, HF, æqualia integro radicum pretio. Et quoniam quadratum AI, æquale ponitur alicui numero absoluto, minus valore radicum: vel quia quadratum AI, vna cum valore radicum, quarum numerus est AC, ponitur æquale alicui numero absoluto, erit gnomon GBK, illi numero absoluto æqualis: qui si addatur ad GK, quadratum dimidij numeri radicum, cognitum erit totum quadratum DF, à cuius latere DB, si auferatur AD, dimidium numeri radicum, vt præcipit regula, notum fiet latus AB. Quod est propositum.

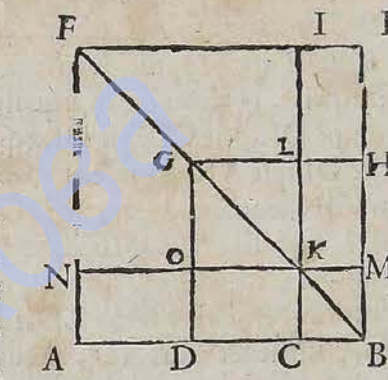


a 36. primi.
b 43. primi.

Sed sumamus iam secundum exemplum, vbi æquatio erat inter ʒ, & ♃+N.

Sit rursus AB, latus quadrati, quod inquiritur. Et quia ponitur 1 ʒ, æqualis ♃ + N, erit numerus radicum minor latere AB. Sit ergo recta AC, numero radicum æqualis, cuius dimidium AD, vel DC. Descripto ex AB, quadrato AE, vna cum diametro BF, ducatur DG, ipsi AF, parallela secans BF, in G, puncto, per quod agatur GH, ipsi AB, parallela. Deinde ducatur CI, parallela ipsi BE, secans BF, in K, & GH, in L. Denique per K, agatur MN, parallela ipsi AB, secans DG, in O. Eruntque DH, OL, CM, quadrata per coroll.

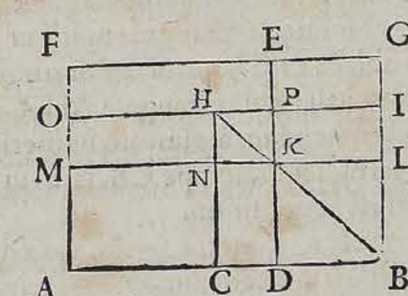
propos. 4. lib. 2. Eucl. Quoniam igitur rectangulum AI, comprehensum sub AF, latere quadrati ignoti, & numero radicum AC, valor est omnium radicum, vt in præcedenti demonstratione dictum est, ponitúrque quadratum AE, æquale valori radicum, vna cum numero aliquo absoluto, erit rectangulum CE, numero illi absoluto æquale. [a] Et quoniam AO, DK, æqualia sunt, [b] necnon & DK, KH; æqualia erunt AO, KH. Addito ergo communi DM, erit rectangulum AM, gnomoni LBO, æquale. Sed AM, ipsi CE, æquale est, hoc est, numero absoluto. [c] (Sunt enim, AK, KE, æqualia, additóque communi CM, æqualia fient AM, CE.) Igitur & gnomon LBO, numero absoluto æqualis erit: qui si addatur ad OL, quadratum dimidij numeri radicum, cognitum erit quadratum DH, cuius lateri DB, si adiiciatur AD, dimidium numeri radicum, vt regula extractionis radicum iubet, notum fiet latus AB. Quod est propositum.



a 36. & 43. primi.
b 43. primi.
c 43. primi.

Svmamvs denique tertium exemplum, in quo posita fuit æquatio inter ʒ, & ♃ — N. vel si restauretur diminutum hoc, —N, inter ʒ + N, & ♃.

Sit numero radicum æqualis recta AB, quæ bifariam secetur in C, & non bifariam in D. Super maiorem partem AD, describatur quadratum ADEF, & perficiatur rectangulum AG. Deinde ex BC, dimidio numeri radicum fiat quadratum BCHI, cuius diameter BH, secet DE, in K, puncto, per quod agatur ipsi AB, parallela LM, secans CH, in N. Producta quoque IH, secet AF, in O, & DE, in P. Eruntque quadrata DL. NP, ex coroll. propos. 4. lib. 2. [d] & rectangulum AH, quadrato CI, æquale. Siue igitur quadratum datum, quod quęritur, sit AE, siue DL, siue CI, semper vera erit æquatio, hoc est, erit ʒ, æqualis radicibus minus aliquo numero absoluto. vel 1 ʒ, cum aliquo numero absoluto æqualis radicibus. Sic enim primum quadratum propositum AE. Erit ergo rectangulum AG, contentum sub latere quadrati AF, & numero radicum AB, valor omnium radicum: Atque adeo cum valori radicum æquale sit quadratum AE, vna cum numero absoluto, vel quadratum AE,



d 36. primi.

æquale ſit valori radicum AG, minus numero abſoluto, ex hypotheſi; erit DG, rectangulum numero abſoluto æquale. Et quoniam rectangulum DG. rectangulo AK, æquale eſt, quod latera DE, DB, lateribus DA DK, æqualia ſint, propter quadrata AE, DL: Eſt autem AK, gnomoni
a 43. primi. PBN. æquale. (a Cum enim æqualia ſint complementa, CK, KI; addito communi DL, erit CL, ipſi DI, æquale: b Sed CL, ipſi AN, æquale eſt; Igitur & DI, ipſi AN, æquale erit; additóque communi CK, fiet AK, gnomoni PBN, æquale.) Igitur & DG, hoc eſt, numerus abſolutus gnomoni PBN, æqualis erit. Qui ſi auferatur, vt præſcribit regula extractionis radicum, ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, relinquetur notum quadratum NP, cuius latus CD, additum ad AC, dimidium numeri radicum, conſtituet latus AD, quadrati AE, notum. Quod eſt propoſitum.

b 36. primi.

SIT iam datum quadratum DL, eodem numero radicum, & numero abſoluto eodem manentibus; Erit ergo rectangulum AL, contentum ſub numero radicum AB, & latere quadrati BL, æſtimatio omnium radicum: Ac proinde, cum quadratum DL, vna cum numero aliquo abſoluto, valori radicum æquale ſit, vel quadratum DL, æquale ſit valori radicum AL, minus aliquo numero abſoluto, ex hypotheſi; erit rectangulum AK, numero abſoluto æquale. quod cũ æquale ſit gnomoni PBN, vt oſtenſum eſt, erit & numerus abſolutus gnomoni PBN, æqualis. quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, notum remanebit quadratũ NP, cuius latus CD, ex CB, dimidio numeri radicum ſubtractum, notum relinquet DB, latus quadrati dati DL. Quod eſt propoſitum.

POSTREMO datum ſit quadratum CI. Erit igitur rectangulum AI, ſub AB, numero radicum, & latere BI, comprehẽſum, pretium radicum propoſitarum, quibus æquale ponitur quadratum CI, vna cum dato numero abſoluto. Vel quibus æquale ponitur quadratum CI, minus numero abſoluto. Rectangulum igitur AH, numero abſoluto æquale erit. Quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, nihil remanebit,
c 36. primi. c cum æqualia ſint rectangula AH, CI; atque adeo nihil addendum erit vel ſubtrahendum à dimidio numeri radicum, ſed ipſummet dimidium numeri radicum, nempe CB, latus erit quadrati dati, vt ante docuimus. Quod eſt propoſitum.

Itaque ſi ʒ. æquetur ℞—N. vel æquatio ſit inter ʒ + N, & ℞. (quod idem eſt) ſi radicem numeri, qui relinquitur, ſubtracto numero abſoluto ex quadrato dimidij numeri radicum, addamus dimidio numeri radicum, inueniemus radicem maiorem æquationi propoſitæ ſatisfacientem: Si verò eandem ex dimidio numeri radicum ſubtrahamus, reperiemus radicem minorem æquationis propoſitæ: Si denique numerus abſolutus æqualis ſit quadrato dimidij numeri radicum, erit ipſum dimidium numeri radicum radix, quæ inquiritur.

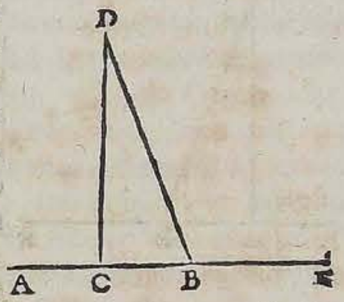
Demonſtratio alia extractionis radicum ex numeris Coſſicis compoſitis diminutiſve.

PETRVS Nonius cap. 4. primæ partis ſuæ Algebræ adducit alias demonſtrationes non minus elegantes, quibus prius inueſtigat Geo-

metricè

metricè, quinam quadratus numerus, vel Zenſus, æqualis ſit cuicunque numero abſoluto, minus quotcunque radicibus, ſiue qui vnà cum quotlibet radicibus æqualis ſit cuicunque numero abſoluto: Vel qui æqualis ſit quotcunque radicibus, vnà cum quouis numero abſoluto: Vel denique qui ſit æqualis quotcunque radicibus, minus quolibet numero abſoluto, ſiue qui vnà cum quocunque numero abſoluto æqualis ſit quotlibet radicibus.

PROPONATVR ergo primum hic numerus Coſſicus 55—6℞. Inueniendum eſt quadratum huic numero æquale, atque adeo demonſtrandum, rectè ex ſuperioribus præceptis, eius radicem quadratam fuiſſe inuentam. Prius reſtituatur ablatum illud—6℞, per tranſpoſitionem, vt ſit Aequatio inter 1ʒ+6℞, & 55. Sit numerus radicum recta AB, quæ biſariam ſecetur in C, & ex C, erigatur perpendicularis CD, ęqualis lateri illius quadrati, quod numero abſoluto eſt æquale. (omnis enim numerus, etiam non quadratus, habet in quantitate continua radicem, ſeu latus, vt propoſ. 22. lib. 6. Geometriæ Practicę docui.) connectatúrque recta BD, cui ex CB, producta æqualis abſcindatur CE. Dico quadratum rectę BE, vna cum radicibus propoſitis, quarum numerus eſt AB, æquale eſſe numero abſoluto, cuius latus quadratum eſt CD; ac proinde idem quadratum rectæ BE, æquale eſſe eidem numero, cuius latus quadratum CD, minus radicibus propoſitis, quarum numerus eſt AB.

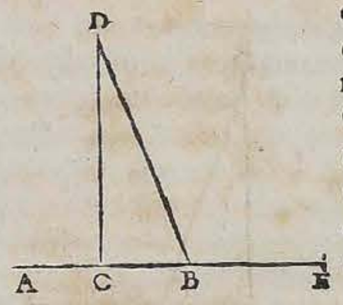


aQuoniam enim quadratum ex BD, æquale eſt quadratis ex CD, CB; eſtque quadratum ex BD, quadrato ex CE, ęquale; a 47. primi.
erit quoque quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, ęquale. bSed quadrato ex CE, æquale eſt rectangulum ſub AE, BE, vna cum quadrato ex CB. b 6. ſecun.
Igitur & rectangulum ſub AE, BE, vna cum quadrato ex CB, æquale erit quadratis ex CD, CB: ablatóque communi quadrato rectæ CB; æquale erit rectangulum ſub AE, BE, quadrato ex CD. c Eſt c 3. ſecun
autem rectangulum ſub AE, BE, æquale quadrato ex BE, & rectangulo ſub AB, BE. Igitur & quadratum ex BE, vna cum rectangulo ſub AB, BE, ęquale erit quadrato ex CD. Cum igitur (poſito quadrato ex BE) rectangulum ſub AB, BE, numero radicum, & latere quadrati comprehenſum ſit valor radicum, liquido conſtat, quadratum rectæ BE, vnà cum radicibus datis, quarum numerus eſt AB, ęquale eſſe numero propoſito abſoluto, cuius latus quadratum eſt CD, ideóque idem quadratum rectæ BE, æquale eſſe numero abſoluto, cuius latus quadratum eſt CD, minus valore radicum, quarum numerus eſt AB. Quod eſt propoſitum.

Ex hac demonſtratione manifeſtum eſt, præceptum ſuperius recte præſcribere modum inueniendi radicem ex numero hoc Coſſico 55—6℞. Nam ſi ad quadratum rectæ CB, dimidij numeri radicum, adiiciatur numerus abſolutus, nempe quadratum ex CD, nota fient duo ſimul quadrata ex CB, CD, a hoc eſt, quadratum ex BD, atque adeo & quadratum ex CE. Si igitur ex hoc latere CE, auferatur CB, dimidium numeri radicum, cognitum erit latus BE, hoc eſt, radix quadrata, quæ quærebatur.

a 47. primi.

Sit rurſum Coſſicus numerus 6℞+55. Exhibendum eſt quadratum illi æquale, demonſtrandúmque recte eius radicem eſſe extractam, iuxta præcepta ſuperiora. Sit rurſus recta AB, ſecta bifariam in C, numerus radicum, & perpendicularis CD, latus quadratum numeri abſoluti, & ductæ rectæ BD, æqualis ſit recta CE. Dico quadratum rectæ AE, æquale eſſe radicibus datis, quarum numerus AB, vna cum numero dato abſoluto, cuius quadratum latus CD. b Quoniam enim quadratum ex BD. atque adeo & quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, æquale eſt; c Eſt autem quadrato ex CE, æquale quadratum ex CB, vna cum rectangulo ſub AE, BE: Erit quoque quadratum ex CB, vna cum rectangulo ſub AE, BE, comprehenſum quadratis ex CD, CB, æquale; ablatóque communi quadrato rectæ CB, æquale erit rectangulum ſub AE, BE, quadrato ex CD, hoc eſt, numero abſoluto propoſito. Quare cum & rectangulum ſub AE, AB, latere quadrati, (poſito quadrato ex AE,) & numero radicum contentum ſit radicum propoſitarum valor, d ſitque quadratum ex AE, duobus rectangulis ſub AE, BE, & ſub AE, AB, æquale; perſpicuum eſt, quadratum rectæ AE, æquale eſſe radicibus, quarum numerus eſt AB, vna cum dato numero abſoluto, cuius latus quadratum CD. Quod eſt propoſitum.



b 47. primi.

c 2. ſecũ.

d 2. ſecun.

Latvs autem AE, ita notum fiet ex ſuperioribus, & hac demonſtratione. Ad quadratum rectæ CB, dimidij numeri radicum, addatur numerus abſolutus, quadratum videlicet rectæ CD; fiéntque nota duo quadrata ſimul rectarum CB, CD, e hoc eſt quadratũ ex BD, ſeu CE. Quod ſi ad latus CE, cognitum apponatur dimidium numeri radicum, nempe recta AC, nota erit tota AE, quæ quærebatur.

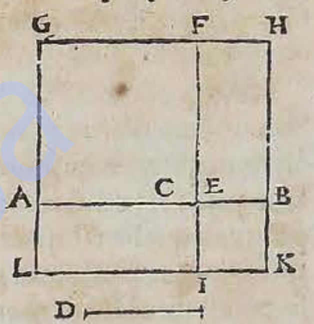
e 47. primi.

Sit denique numerus Coſſicus 18℞—56. cui inueniendum eſt quadratum æquale, & oſtendendum, recte inuentum eſſe eius latus. Sit, vt prius, numerus radicum recta AB, ſecta bifariam in C; & recta D, latus ſit quadratum numeri abſoluti; reſtituatúrque diminutum hoc, —56, vt ſit etiam æquatio inter 1ʒ+56, & 18℞. Sit autem primum recta D, minor dimidio numeri radicum AC, vel CB. Di-

uidatur

uidatur recta AB, in E, ita vt D, ſit medio loco proportionalis inter ſegmenta AE, EB, ex iis, quæ ex Peletario docuimus ad propoſ. 13. lib. 6. Eucl. a Erit igitur rectangulum ſub AE, EB, quadrato ex D, hoc eſt, numero abſoluto propoſito æquale. Dico tam quadratum rectæ AE, quam EB, vna cum dato numero abſoluto æquale eſſe radicibus propoſitis, quarum numerus eſt AB: ideoque tam quadratum rectæ AE, quam EB, æquale eſſe valori radicum propoſitarum, minus numero abſoluto. Deſcribantur enim ex AE, EB, quadrata AF, EK, perficianturque rectangula AH, BL. Eritque tam rectangulum EH, quam EL, contentum ſub AE, EB, numero abſoluto, hoc eſt, quadrato rectæ D, æquale. Poſito igitur latere quadrati AE, erit rectangulum AH, contentum ſub AB, numero radicum, & AE, latere quadrati, valor radicum propoſitarum; Manifeſtum autem eſt, quadratum AF, vna cum EH, numero abſoluto, æquale eſſe valori radicum AH: ac proinde idem quadratum AF, æquale eſſe valori radicum AH, minus abſoluto numero EH. Poſito rurſus EB, latere quadrati, erit pretium omnium radicum rectangulum BL, ſub AB, numero radicum, & latere quadrati EB, comprehenſum. Perſpicuum autem eſt, quadratum etiam BI, vna cum EL, abſoluto numero eſſe valori radicum BL, æquale: ideoq. idem quadratum BI, æquale eſſe valori radicum BL, minus numero abſoluto EL.

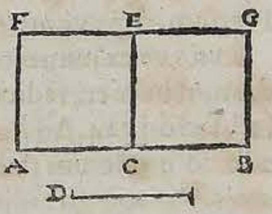
a 17. ſexti.



Vtrumque autem latus AE, EB, ita notum efficietur. b Quoniam rectangulum ſub AE, EB, vna cum quadrato ex CE, æquale eſt quadrato ex AC, vel CB, ſi ex quadrato rectæ AC, vel CB, id eſt, dimidij numeri radicum, auferatur rectangulum ſub AE, EB, nempe numerus abſolutus, relinquetur notum quadratum ex CE. Si igitur latus hoc CE, cognitum addatur ad AC, dimidium numeri radicum, notum fiet latus AE; Si verò idem latus CE, ex CB, dimidio numeri radicum dematur, notum remanebit latus EB.

b 5. ſecun.

Sit deinde recta D, æqualis dimidio numeri radicum AC, vel CB. Dico quadratum ex AC, dimidio numeri radicum, vna cum numero abſoluto dato æquale eſſe radicibus propoſitis. Deſcribatur enim ex AC, quadratum AE, compleatúrque rectangulum AG. eritque CG, quoque quadratum. Quoniam igitur recta D, æqualis ponitur rectæ AC, vel CB, erit quadratum CG, æquale numero abſoluto; poſitoque AC, latere quadrati æquationis, erit rectangulum AG, ſub latere AC,



H

& numero radicum AB, contentum, æſtimatio, ſiue pretium radicum. Liquido autem conſtat, quadratum AE, vna cum CG. numero abſoluto, æquale eſſe radicibus AG: ideoque quadratum idem AE, eſſe æquale valori radicum AG, minus numero abſoluto CG.

ITAQ. cum recta D, minor eſt dimidio numeri radicum AC, vel CB, hoc eſt, cum numerus abſolutus æquationis minor eſt quadrato dimidij numeri radicum, inuenitur duplex radix æquationis. Cum verò recta D, æqualis eſt dimidio numeri radicum, id eſt, numerus abſolutus propoſitus æqualis eſt quadrato dimidij numeri radicum, eſt radix æquationis ipſum dimidium numeri radicum. Neque verò recta D, maior eſſe poteſt dimidio numeri radicum AC, vel CB. Nam falſa eſſet æquatio, cum quadratum ipſius D, nempe numerus abſolutus, ex quadrato dimidij numeri radicum auferri non poſſet, atque adeo radix, ſecundum præceptum traditum, nullo modo inueniri. Accedit etiam, quod D, ſi maior eſſet quam AC, vel CB, non poſſet eſſe medio loco proportionalis inter duo ſegmenta rectę AB, vt patet ex demonſtratione illa, quam ex Peletario appoſuimus ad propoſ. 13. lib. 6. Eucl. Quare inueniri non poſſet quadratum æquationi ſatisfaciens.

POSSVMVS cum eodem Petro Nonio artem hanc extractionis radicum ex numeris Coſſicis compoſitis hoc etiam modo proponere.

Alius modus extrahendi radicē quadratam ex numero Coſsico cōpoſito, vel diminuto.

1. *Ad quadratum numeri radicum adde, vel ab eodem ſubtrahe quadruplum numeri abſoluti, prout ſigno +, vel —, fuerit affectus numerus abſolutus.*
2. *Ad huius ſummæ, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem ſubtrahe numerum radicum, prout radicum numerus ſigno +, vel —, fuerit notatus. Nam vltima hæc ſumma, vel relictum dabit æſtimationem, & pretium duplicatæ radicis quadratæ. Quare dimidium ipſius valor erit vnius radicis.*

SIT enim extrahenda radix ex hoc numero Coſſico, 72 — 6 ℞. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri abſoluti; & ex radice quadrata ſummæ confectæ 324, hoc eſt, ex 18, detraho numerum radicum, nempe 6; remanentq. 12, pro valore duarum radicum Pretium ergo vnius radicis erit 6.

RVRSVS ex numero hoc Coſſico, 6 ℞ + 72, eruenda ſit radix. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri abſoluti, facióq. 324. Ad huius ſummæ deinde radicem quadratam, vt ad 18, adiicio numerum radicum, vtpote 6, facioq. 24, pro pretio duplicatæ radicis. Vnius ergo radicis pretium erit 12.

POSTREMO inuenienda ſit radix huius numeri Coſſici, 18 ℞ + 72.

Ex 324, quadrato numeri radicum, ſubtraho 288, quadruplum abſoluti numeri, relinquuntúrque 36. Ad huius relicti radicem quadratam, nempe ad 6, adiungo 18, numerum radicum, conficióque 24, pro duplicatæ radicis pretio. Vna ergo radix erit 12. Quod ſi radicem quadratam relicti illius, nempe 6, detraham ex 18, numero radicum, remanebunt 12. pro valore duplicatæ radicis minoris, (Huiuſmodi enim numerus Coſſicus duplicem habet radicem, vt dictum eſt) Quare vna radix erit 6.

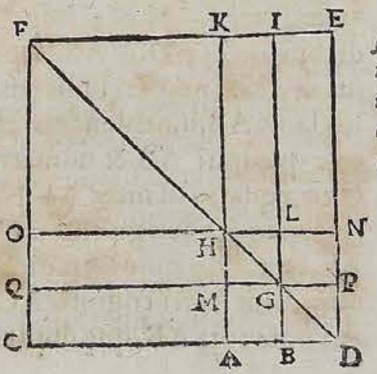
ATQVE hic modus commodiſſimus eſt, quando radicum numerus impar eſt, vel fractus, ne cogamur accipere dimidium illius, quod ſemper eſt numerus fractus, &c. *Commoditas huius poſterioris modi extractionis.*

RATIO verò huius operationis hæc eſt.[a] Quoniam quadratum numeri radicum quadruplum eſt quadrati, quod ex dimidio numeri radicum gignitur, quemadmodum & numerus abſolutus quadruplicatus numeri abſoluti quadruplus eſt, [b] fit vt & ſumma, quæ fit ex quadrato numeri radicum, & quadruplo numeri abſoluti, quadrupla ſit ſummæ, quæ prius in alio modo operationis conficiebatur ex quadrato dimidij numeri radicum, & numero abſoluto: [c] efficitur quoque, vt & relictum, quod fit ex detractione quadrupli numeri abſoluti ex quadrato numeri radicum, quadruplum ſit relicti, quod antea fiebat ex detractione numeri abſoluti ex quadrato dimidij numeri radicum. [d] Quam ob rem radix quadrata huius ſummæ, vel relicti, dupla erit radicis quadratæ prioris ſummæ, vel relicti. quemadmodum & numerus radicum duplus eſt dimidii numeri radicum. Siue igitur ad hanc radicem quadratam adiiciamus numerum radicum, vel ab eadem ſubtrahamus eundem, [e] fiet quoque ſumma, vel relictum duplum ſummæ, vel relicti, quod fit ex additione dimidij numeri radicum ad radicem quadratam in priore operatione inuentam, vel ex detractione dimidij numeri radicum ex priore radice quadrata. Quare dimidium ſummæ huius, vel relicti pretium erit radicis æquationi ſatisfacientis.

[a] Schol. propoſ. 4. lib. 2.
[b] 1. quinti.
[c] 5. quinti.
[d] Schol. propoſ. 4. lib. 2.
[e] 1. vel 5. quinti.

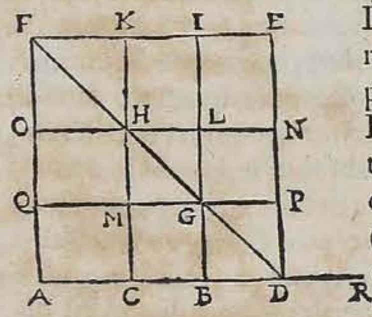
QVAM tamen operationem ita quoque Geometricè confirmabimus cum Petro Nonio. Sit primum æquatio inter ʒ, & N — ℞, hoc eſt, ſi reſtauretur diminutum, inter ʒ + ℞, & N.

Demonſtratio alterius huiuſmodi extractionis.



PONATVR AB, latus quadrati ignotum, quod quæritur, quo producto ad partes A, ſumatur recta AC, numero radicum æqualis. Sumatur quoque ex eadem AB, ad partes B, protracta, recta BD, ipſi AB, æqualis; & ex tota CD, deſcribatur quadratum CDEF, vna cum diametro DF, perficiatúrque figura, vt vides, ita vt ſimilis ſit omnino figuræ propoſ. 8. lib. 2. Euclidis. Erunt igitur, vt in propoſ. 8. lib. 2. Eucl. demonſtratum eſt,BP,ML,AG,GN,OK,quadrata, & gnomon ODK, quadruplus rectanguli CG.Quoniam verò AG,ponitur quadratum, cuius latus AB, quæritur,erit rectangulum CM, contentum ſub numero radicum AC, & latere quadrati AM,valor radicum omnium. Cum ergo æquatio ſit inter ȝ+♃,& N,erit rectangulum CG,æquale numero abſoluto,atque adeo gnomon ODK, quadruplus numeri abſoluti; qui ſi addatur ad OK,quadratum numeri radicum AC,totum quadratum CE,cognitum erit;ex cuius latere CD,cognito,ſi tollatur AC,numerus radicum,relinquetur recta AD, dupla lateris AB, quod quæritur,cognita. Quod eſt propoſitum.

Sit deinde æquatio inter ȝ. & ♃+N. Ponatur AB, latus ignotum quadrati,quod quæritur,& AC,numerus radicum. Producta recta AB, ſumatur BD, ipſi BC, & DR, ipſi AC, æqualis, & ex AD, deſcribatur quadratum ADEF, vna cum diametro DF, perficiatúrque figura,vt prius. Erit rurſum,vt antea,gnomon ODK, quadruplus rectanguli KG, & OK, QI, quadrata. Et quia QI, quadratum ponitur, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum QK, contentum ſub QM, numero radicum, ([a] eſt enim QM,ipſi AC,æqualis) & latere quadrati QF, valor omnium radicum. Quocirca cum ſit æquatio inter ȝ,& ♃+N, erit rectangulum KG, numero abſoluto



a 34. primi.

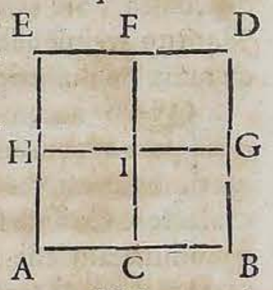
æquale, ac propterea gnomon ODK, numeri abſoluti quadruplus; quo addito ad OK, quadratum numeri radicum, notum fiet totum quadratum AE;ad cuius latus AD, cognitum ſi addatur DR, numerus radicum (poſita enim eſt recta DR, numero radicum AC, æqualis)cognita erit tota recta AR, quæ dupla eſt lateris AB, quod quæritur.Si enim æqualibus BC,BD,æquales rectæ adiiciantur CA, DR,totæ BA,BR,æquales fient,atque adeo AR, dupla erit ipſius AB. Quod eſt propoſitum.

Deniqve ſit æquatio inter ȝ,& ♃—N,hoc eſt,ſi diminutum reſtauretur,inter ȝ+N,& ♃.Repetatur præcedens figura, ſitque numerus radicum recta AD,& AB,latus quadrati,quod quæritur, ſit primum maius dimidio numeri radicum.Quoniam igitur QI,ponitur quadratū,cuius latus AB,inueniendum eſt,erit rectangulum AI, contentum ſub latere quadrati AB,& numero radicum AD,vel AF,valor radicum.Cum ergo æquatio ſit inter ȝ+N,& ♃,erit rectangulum AG,numerus abſolutus,atque adeo gnomon ODK, ipſius quadruplus, vti prius; qui ſi ex AE,quadrato numeri radicum dematur,remanebit quadratum OK,notum,cuius lateri cognito AC,vel DR,ſi adiiciatur numerus radicū AD, fiet nota tota AR,quę dupla eſt lateris quadrati AB,vt prius eſt demonſtratum.

ſtratum.Quod eſt propoſitum.

Sit iam BD, latus quadrati inueniendum dimidio numeri radicum minus.eritque rectangulum AP,contentum ſub latere quadrati DP, & numero radicum AD, valor radicum. Et quia æquatio eſt inter ȝ+N, & ♃,erit rectangulum AG, numerus abſolutus, ac proinde gnomon ODK,ipſius quadruplus; qui ablatus ex AE,quadrato numeri radicum relinquit quadratum OK,eiuſq.latus propterea AC,notum fiet.Quod ſi AC,ex AD numero radicum dematur,remanebit nota recta CD, quæ lateris BD,dupla eſt.Quod eſt propoſitum.

Iam vero ſi quadruplum numeri abſoluti æquale fuerit quadrato numeri radicum,erit dimidium numeri radicum latus quadrati, quod quæritur. Sit enim AB,recta numerus radicum ſecta bifariam in C;deſcriptoq.quadrato AD,ducantur rectæ CF,GH,ſecantes quatuor latera bifariam,& quadratum in quatuor quadrata æqualia.Si igitur AC,dimidium numeri radicum ponatur latus quadrati,erit rectangulum AG,contentum ſub latere quadrati AH, & numero radicum



AB,valor radicum,ac propterea cum æquatio ſit inter ȝ+N,& ♃, erit CG,rectangulum numero abſoluto æquale, & quadruplum eius quadrato AD,ex numero radicum AB,deſcripto æquale. Si igitur quadruplum numeri abſoluti,hoc eſt,quadratum AD,auferatur ex AD, quadrato numeri radicum AB,remanebit o.quod ſiue addatur ad AB, numerum radicum.ſiue ab eo ſubtrahatur,nota fiet recta AB,quę dupla eſt lateris AC. Quod eſt propoſitum.

Extractio radicis Zēſizenſicæ, Zenſicubicæ,&c.

Qvod verò ſpectat ad extractionem radicum Zenſizenſicarum, vel Zenſicubicarum,vel Zenſizenzenſicarū,vel Zenſurdeſolidarum, quando nimirum numeri Coſſici æquationis, abbreuiatis tamen eorum characteribus, habent exponentes,qui progreſſionem Arithmeticam conſtituant vnam ex his. 4.2.0. vel 4.0.2. vel 6.3.0. vel 6.0.3.vel 8.4.0. vel 8.0.4. vel 10.5.0.vel 10.0.5.&c. in quibus maior character ſemper componitur ex ȝ.& alio charactere Coſſico, vt ex numeris exponentibus manifeſtum eſt:extrahenda eſt prius radix quadrata, propter characterem ȝ.iuxta modum hactenus deſcriptum, accommodando omnia ea,quæ de numero radicum præcepimus, illi numero, qui affectus eſt charactere Coſſico in illa parte æquationis,ex qua radix eruenda eſt. perinde ac ſi æquatio foret inter tres numeros Coſſicos characteribus ȝ.♃ & N.affectos.Deinde ex hac radice quadrata inuenta, ſiue ea rationalis ſit,ſiue irrationalis, elicienda eſt radix alia, iuxta reliquam partem characteris Coſſici maioris, relicto hoc charactere ȝ.(eſt enim character maior Coſſicus compoſitus) hoc eſt, eruenda eſt radix denominata à charactere Coſſico, qui in ea parte æquationis cernitur,in qua duo numeri reperiuntur,& qui medius eſt inter maximum charaćterem, & minimum, fiue N. Vt fi æquatio fit inter 1ʒʒ. & 18ʒ—648. extrahenda erit radix quadrata ex hoc numero 18ʒ + 648, propter priorem partem figni Coſſici ʒ. non aliter, ac fi eſſet æquatio inter 1ʒ. & 18℞ + 648. quæ radix eſt 36. ex qua rurſus eruenda eſt radix quadrata, nempe 6. ob reliquam partem characteris Coſſici, nimirum ʒ. qui medium locum obtinet inter ʒʒ. & N. Inter 6. erit radix numeri Coſſici propoſiti.

Eodem modo fi fit æquatio inter 1ʒce, & 5120 — 16ce. ſumenda eſt priùs radix quadrata huius numeri 5120 — 16ce, & ex hac elicienda radix cubica. Sic etiam, fi æquatio habeatur inter 1ʒʒʒ, & 20000ʒʒ — 7846119. accipienda eſt primùm quadrata radix, & ex hac eruenda deinde radix Zenſizenſica. Et ſic de cæteris.

Qvod autem ex huiuſmodi numeris Coſſicis extrahatur radix quadrata eodem artificio, quo ſuperiùs vſi ſumus, perſpicuum eſt. Nam maximus character Coſſicus, cùm ſit oppoſitus ex ʒ. & alio quodam charactere Coſſico ſiue ſimplici, ſiue compoſito, indicat vnitatem ab eo denominatam eſſe zenſum, ſeu quadratum alicuius numeri à reliqua parte maximi characteris Coſſici denominati, ita vt reliqua illa pars ſit tanquam radix prioris partis. Quare cùm hæc reliqua pars reperiatur quoque in altera æquationis parte, cuius radix inueſtigatur, denominari poterit eius numerus à ℞, ſi numerus maximi characteris, nempe vnitas, à ʒ. denominetur: atque adeò iuxta præcepta tradita rectè ex illo numero æquationis radix quadrata inuenietur. Verbi gratia. In æquatione inter ʒce—N. cùm hic character ʒce. ſignificet zenſum vnius cubi, erit vnus cubus radix quadrata illius zenſi, ac proinde numerus cuborum in altera parte æquationis, numerus erit radicum eiuſdem zenſi. Et ſic de cæteris. Inuenta autem hac radice quadrata, extrahenda eſt ex ea radix à reliqua parte maximi characteris Coſſici denominata, quia illa radix quadrata eſt numerus denominatus ab illa reliqua parte, & non abſolutus. Quemadmodum qui vult radicem zenſicubicam huius numeri 64. inuenire priùs debet eius radicem quadratam, nempe 8. Deinde quoniam hæc radix quadrata non eſt numerus abſolutus, ſed cubus, cùm numerus 64. ſit zenſus vnius cubi, ſumenda erit radicis inuentæ 8. radix cubica, nimirũ 2. atq; hic numerus radix erit Zẽſicubica dati numeri 64.

EXEMPLA DVO, IN QVIBVS occurrunt radices ſurdæ.

Sit æquatio inter 1. ʒce. & 800ce—156751. Dimidium cuborum, nimirum 400. quadro, efficióque 160000. Detraho 156751. & reliqui numeri 3249. quadratam radicem 57. ad dimidium numeri cuborum, nimirum ad 400. adijcio, efficióque 457. cuius radix cubica dat radicem Zenſicubicam quæſitam, quæ ſurda eſt. Eius cubus eſt 457. qui ductus in ſe facit Zenſicubum 208849. qui æqualis eſt

eſt 800ce. id eſt, 365600. minus 156751. vt patet. Idem ferè conſtabit, ſi per radicem cubicam numeri 457. in numeris inuentam agemus. Radix enim cubica numeri 457. propinqua eſt $7\frac{7}{10}$. inuenta per appoſitionem duorum ternariorum cifrarum. Eius cubus eſt $\frac{456533}{1000}$. & Zenſicubus 208422. proximè: qui æqualis eſt fermè 800ce, hoc eſt, $\frac{365226400}{1000}$. minus 156751. Nam poſt detractionem reliquus fit numerus $208475\frac{2}{5}$. qui parum differt à 208422. Cauſa huius inæqualitatis eſt, quod propinqua illa radix non eſt vera radix. Felicius ergo æquatio ſuccedit, ſi operatio per ipſammet radicem ſurdam inſtituatur.

Et quoniam numerus 800ce—156751. duplicem radicem habet, vt ſupra diximus, propterea quod numerus abſolutus ſigno — affectus eſt; maior inuenitur, vt dictum eſt, nimirum radix cubica numeri 457. minor verò reperietur, ſi ſuperioris numeri 3249. relicti poſt detractionem numeri abſoluti ex quadrato dimidij numeri cuborum, radicem quadratam 57. ex 400. dimidio numeri cuborum detrahamus, & reliqui numeri 343. radicem cubicam ſumamus 7. Huius enim Zenſicubus eſt 117649. qui æqualis quoque eſt 800ce. id eſt, 274400. minus 156751. vt manifeſtum eſt. Itaque maior radix huius numeri 800ce—156751. ſurda eſt, nimirum radix cubica numeri 457. minor autem rationalis eſt, nimirum 7. radix videlicet cubica cubi 343.

Sit rurſus æquatio inter 1ʒ. & 8℞—5. Dimidium numeri radicum, nimirum 4. quadro, & ex quadrato 16. demo 5. & reliqui numeri 11. propinquam radicẽ quadratam $3\frac{79}{250}$. (quæ inuẽta eſt per appoſitionẽ trium binariorum cifrarum.) addo ad dimidium numeri radicũ, vt ad 4. efficióque radicem propinquam $7\frac{79}{250}$. numeri propoſiti 8℞—5. Eius quadratum eſt $53\frac{32741}{62500}$. quod ferè æquale eſt 8℞—5. quippe cum 8℞—5. efficiant $53\frac{66}{125}$.

Radix minor eiuſdem numeri 8℞—5. (Habet enim duplicẽ radicem, propter ſignum —. quod numerus abſolutus gerit, vt ſupra diximus) eſt $\frac{171}{250}$. quæ habetur, ſi reliqui numeri ſuperioris 11. radix propinqua $3\frac{79}{250}$. ex 4. dimidio numeri radicum detrahatur. Quadratum radicis $\frac{171}{250}$. eſt $\frac{29241}{62500}$. quod ferè æquale eſt 8℞—5. Nam 8℞—5. conficiunt $\frac{59}{125}$. qui numerus illum quadratum ſuperat hoc fracto numero $\frac{259}{62500}$. qui minor eſt, quam $\frac{1}{241}$.

Felicivs quoque æquatio ſuccedet, ſi per radices ſurdas operari velimus. Nam maior radix eſt 4 + √ʒ11. Minor verò 4—√ʒ11. Illius tam quadratum, quam octuplum radicis—5. efficit 27 + √ʒ704. hoc eſt, $53\frac{28}{53}$. proximè. Huius verò tam quadratum, quam octuplum radicis—5. conficit $\frac{25}{53}$. proximè, nimirum 27—√ʒ704. Ratio porrò huius operationis per radices ſurdas intelligetur cap. 23. in algorithmo ſurdorum numerorum.

Multiplicationes ita formantur.

4 + √ȝ 11	4 — √ȝ 11
4 + √ȝ 11	4 — √ȝ 11
+ √ȝ 176 + 11	— √ȝ 176 + 11
16 + √ȝ 176	16 — √ȝ 176
Summa. 27 + √ȝ 704.	Summa. 27 — √ȝ 704.
4 + √ȝ 11	4 — √ȝ 11
8	8
32 + √ȝ 704	32 — √ȝ 704
Demptis 5. remanent	Demptis 5. remanent
27 + √ȝ 704	27 — √ȝ 704

Posui duo hæc exempla, vt videas, non minus veram esse regulam Algebræ à nobis traditam in numeris surdis, quam in rationalibus.

Quando aliquando quæstio aliqua non soluitur, culpa in Arithmeticum, non autem in Algebrã transferenda est.

IAM verò, si quando æquatio occurrat, quam resoluere nescias, culpa transferenda non est in artẽ Algebræ, sed in te potius, qui non omnium æquationum scientiam perdidicisti. Verbi gratia. Si incides in æquationem inter 1 ce. & 3ȝ + 2♃ + 8. & nescias ex hoc numero 3ȝ + 2♃ + 8. extrahere radicem cubicam, culpa erit tua, non autem regulæ Algebræ, quæ docet, si ex illo numero radix cubica extrahatur, quæstioni satisfactum esse. Est autem radix cubica prædicta 4. Nam eius cubus est 64. qui æqualis est tribus quadratis, nimirum 48. & duabus radicibus, id est, 8. & octo vnitatibus. Idem iudicium habeto de æquatione inter 1 ce. & 196ȝ + 147. Item inter 1 ce. & 30 ♃ + 133. Quia enim exponentes denominationum non seruant proportionem Arithmeticam, nondum est inuenta ars, qua resolui possint, cum tamen sint solubiles. Nam in vtraque radix valet 7.

SIC etiam, quando occurrunt radices surdæ, quarum doctrinam non perfectè calles, non erit vitio vertendum scientiæ Algebræ, si quæstio proposita maneat adhuc ignota. Id quod in duobus exemplis superioribus perspicuum esse potest, in quibus, vt æquatio proposita explicaretur, opus fuit, per numeros surdos, siue irrationales, operationem instituere.

SÆPENVMERO etiam accidit, vt in quæstionibus nonnullis explicandis requiratur magna doctrina Geometriæ, vel alterius cuiuspiam sciẽtiæ, vt infra, quando varias quæstiones proponemus dissoluendas, perspicuum fiet. Qui ergo in ea doctrina satis non fuerit exercitatus, frustra se ad quæstionis propositæ explicationem accinget. Nunquam enim ea scientia destitutus illam expediet. quod quidem non culpa Algebræ, sed ipsius accidere, pro certo tenendum est.

QVEMADMODVM si forte in regula illa aurea, quam regulam Trium dicunt, occurrant numeri surdi, ac irrationales, aut numeri fracti, atque is qui per eam regulam ratiocinationem instituit, ignarus sit doctrinæ illorum numerorum, ac proinde quæstionem propositam soluere nequeat; accusanda non est ipsa regula, sed artifex. Cum enim prædicta regula iubeat multiplicare secundum numerum per tertium, ac productum per primum diuidere, vt Quotiens exhibeat quæstionis solutionem, culpa erit artificis, si operari nesciat per numeros surdos, aut fractos, non autem ipsius regulæ. Vt si proponatur hæc quæstio. 2. dant √ȝ 3. quid ergo dabit √ȝ 12? certum est, eum, qui nesciat multiplicare, ac diuidere radices surdas, quæstionem non posse soluere. Secundus enim numerus √ȝ 3. ductus in tertium, id est, in √ȝ 12. facit √ȝ 36. qua diuisa per primum numerum 2. fit Quotiens √ȝ 9. hoc est, numerus 3. Eadem ratione regula Algebræ docet, quid agendum sit in qualibet quæstione proposita, vt ad æquationem aliquam deueniatur: quam etiamsi artifex enodare nesciat, nihil tamen Algebræ regula de sua firmitate, ac robore amittit, sed tota culpa in artificem reijcienda est.

DE MVLTITVDINE REGVLARVM Algebræ, quam alij auctores introducunt.

Cap. XIII.

VIDISTI hactenus, opinor studiose lector, vnicam nostram regulam Algebræ perfectè, planéque nos docere, qua ratione quamlibet quæstionem propositam euoluere debeamus: quippe quę pręcipiat, vt 1 ♃, quę pro numero inuestigando ponitur, vel alium numerum, iuxta quęstionis tenorem examinemus, donec in ęquationem aliquam incidamus duorum numerorum: Deinde, ęquatione huiusmodi inuenta, ac reducta, vt cap. 10. de reductione ęquationis tradidimus, per numerum maioris characteris Cossici reliquum æquationis numerum diuidamus: ac tandem ex Quotiente radicem ęquationi congruentem extrahamus, si opus est. Vt autem te non lateat, quam varias alij scriptores regulas Algebrę tradant, operę pretium duxi, eorum regulas hic proponere, vt illis collatis cum vnica nostra, quid inter nostram, & multiplices aliorum regulas intersit, intelligas.

ALII ergo scriptores æquationes illas potissimum considerant, quę inter primos terminos progressionis Geometricę ab vnitate incipientis, hoc est, inter Numerum, Radicem, atque Quadratum, siue Zensum, reperiuntur. qui quidem tres termini sex possunt modis inter se ęquari. Aut enim ęquatio est inter ȝ. & ♃. aut inter ♃. & N.

Inter quos numeros alij potissimum æquationes obseruent.

Tres simplices æquationes.

aut inter ʒ. & N. quæ tres æquationes ab illis simplices dicuntur, quod solum vnus terminus in ijs vni termino æquetur: Aut inter ʒ + ℞. & N: aut inter ʒ. & ℞ + N: Vel (quod idem est) inter ʒ. & N + ℞. Aut denique inter ʒ + N & ℞; quæ tres æquationes ab eisdem compositæ vocantur, propterea quod in ijs semper duo termini vni termino adæquantur. Pro his sex æquationibus sex regulas præscribunt.

Tres compositæ æquationes.

REGVLA I.

Quãdo æquatio est inter ʒ & ℞.

QVANDO reperitur æquatio inter ʒ. & ℞. diuiso numero signi ℞. per numerum signi ʒ. Quotiens exhibet pretium 1 ℞. Vt si 5 ʒ. æquales sint 30 ℞. diuisis 30. per 5. prodibit Quotiens 6. pro æstimatione vnius radicis. Nam quadratum huius radicis est 36. atque idcirco 5 ʒ. faciunt 180. quãtum nimirum faciunt 30 ℞.

REGVLA II.

Quãdo æquatio est inter ℞ & N.

QVANDO æquatio reperitur inter ℞. & N. diuiso numero absoluto per numerum signi ℞. procreabitur in Quotiente pretium 1 ℞. quemadmodum in 1. regula. Vt si 5 ℞. æquales sint 30. diuisis 30. per 5. exit quotiẽs 6. pro valore 1 ℞. Nam radix 6. quinquies sumpta facit 30.

REGVLA III.

Quando æquatio est inter ʒ. & N.

QVANDO inter ʒ. & N, æquatio deprehenditur, diuiso numero absoluto per numerum signo ʒ. affectum, habebitur in Quotiente valor 1 ʒ. Eius ergo radix quadrata dabit pretium 1 ℞. Vt si æquatio sit inter 4 ʒ. & 144. diuisis 144. per 4. prouenit Quotiens 36. pro valore 1 ʒ. Radix ergo quadrata numeri 36. quæ est 6. offeret pretium 1 ℞. Nam quadratum numeri 6. est 36. quo multiplicato per 4. fit numerus 144.

REGVLA IIII.

Quando æquatio est inter ʒ + ℞. & N.

QVANDO æquatio occurrit inter ʒ + ℞. & N. multiplicanda est semissis numeri radicum in se, productoque numerus absolutus addendus. Nam si ex huius aggregati radice quadrata dematur semissis numeri radicum, reliquum fiet pretium 1 ℞. Vt si æquatio constituatur inter 1 ʒ + 12 ℞. & 85. multiplicabimus 6. semissem videlicet numeri radicum, in se, productoque 36. adiiciemus 85. vt fiant 121. Ab huius enim numeri radice quadrata 11. si subducatur semissis numeri radicum, nimirum 6. remanebunt 5. pro valore 1 ℞. Nam 1 ʒ. est 25. additis autem 12 ℞, videlicet 60. fit numerus absolutus 85. vt proponitur.

REGV-

REGVLA V.

Quando æquatio est inter ʒ & ℞ + N.

QVANDO æquatio instituitur inter ʒ. & ℞ + N, vel inter ʒ. & N + ℞ multiplicanda est semissis numeri radicum in se, & producto numerus absolutus adijciendus. Nam si ad huius aggregati radicem quadratam addatur semissis numeri radicum, cõflabitur æstimatio 1 ℞. Vt si æquatio ponatur inter 1 ʒ. & 6 ℞ + 16. vel inter ʒ. & 16 + 6 ℞. ducemus 3. id est, semissem, numeri ℞. in se, ac producto 9. adiiciemus numerum absolutum 16. vt fiant 25. Ad huius enim numeri radicem quadratam 5. si addatur semissis numeri radicum, nimirum 3. conflabitur numerus 8. pro pretio 1 ℞. Nam eius quadratum est 64. qui numerus æqualis est 6 ℞. id est, 48. vna cum 16. vt patet.

REGVLA VI.

Quando æquatio est inter ʒ + N. & ℞.

QVANDO denique æquatio reperitur inter ʒ + N. & ℞; multiplicanda est semissis numeri radicum in se, & ex producto auferendus numerus absolutus propositus. Nam si ad radicem quadratam reliqui numeri adiicias semissem numeri radicum, vel ex hac semisse eandem radicem detrahas, conficies pretium 1 ℞, ita vt eiusmodi æquatio duplicem habeat radicem, maiorem scilicet ac minorem. Vt si proposita sit æquatio inter 1 ʒ + 21. & 10 ℞. ducemus 5. semissem numeri radicum in se, & ex producto numero 25. auferemus numerum absolutum 21. Nam si ad reliqui numeri 4. radicem quadratam 2. addemus semissem numeri radicum, hoc est, 5. efficiemus 7. valorem maioris radicis: Et si eandem radicem 2. subtrahemus ex 5. nimirum ex semisse numeri radicum, reliqua fient 3. pro valore minoris radicis. Nam maioris radicis 7. quadratum est 49. & additis 21. fit numerus 70. qui æqualis est 10 ℞. At vero minoris radicis 3. quadratum est 9. & additis 21. fit numerus 30. qui æqualis est 10 ℞. vt liquet.

Quãdo in æquatione reperiuntur plures pauciorésve Zensi.

PORRO quando plures, vel pauciores zensi, quam 1. in aliqua æquatione occurrunt, diuidendi erunt omnes nnmeri æqnationis per numerum signo ʒ. affectum, vt æquatio fiat inter 1 ʒ. &c. quod & nos faciendum esse præcepimus. V. g. si æquatio detur inter 3 ʒ + 63, & 30. ℞. diuidendi erunt singuli numeri per 3. vt æquatio fiat inter 1 ʒ + 21. & 10 ℞. ac deinde regula 6. vsurpanda. Sic si detur æquatio inter $\frac{1}{2}$ ʒ. & 3 ℞ + 8. Vel inter $\frac{1}{2}$ ʒ. & 8 + 3 ℞. si numeri singuli diuidantur per $\frac{1}{2}$ inuenietur æquatio inter 1 ʒ. & 6 ℞ + 16. vel inter 1 ʒ. & 16 + 6 ℞. quæ per 5. regulam explicabitur.

Quo pacto aliæ æquationes ad 6. superiores regulas reuocẽtur.

HÆ ergo sunt 6. regulæ ab omnibus fermè auctoribus traditæ. Omnes enim aliæ æquationes inter alios numeros Cossicos, qui diuersi sunt à ʒ. ℞. & N. ad prædictas 6. reducuntur; vt frustra nonnulli scriptores plures regulas præscribant. Nam si huiusmodi æquationes occurrant, in quibus numeri exponentes characterum ſeruant proportionalitatem Arithmeticam, abbreuiandi erunt characteres, vt ſupra dictum eſt, ad eum finem, vt in altera parte æquationis numerus abſolutus reperiatur: Deinde obſeruanda ea, quæ circa finem cap. 12. de extractione radicis Zenſizenſicæ, Zenſicubicæ, &c. ſcripſimus: quando videlicet exponentes ſeruant hanc proportionem Arithmeticam 4.2 0. vel 4.0.2. aut 6.3.0. vel 6.0.3. &c.

Præſtātio rē eſſe vnicam noſtram regulam Algebræ ſex aliorum regulis.

QVOD ſi rem attentius introſpicere velimus, facile deprehendemus vnicam noſtram Algebræ regulam longè eſſe præſtantiorem ſupradictis 6. regulis aliorum: quippe cum in noſtra fiat ſemper reductio æquationis ad 1 ȝ. in vna parte æquationis, ac proinde ſigna + & —. in altera æquationis parte plene, atque abundè nos inſtruant, quando fieri debeat additio, & quando ſubtractio. quod in ſuperioribus 6. regulis non tam clarè apparet.

Æquatio ſimplex & compoſita quæ.

QVEMADMODVM autem ſcriptores Algebræ æquationes priorum trium regularum, ſimplices appellant, trium verò poſteriorum regularum æquationes compoſitas, vt paulo ante diximus: ita quoque non in iis, quæ ſequuntur, æquationem, quæ inter duos numeros duntaxat occurrit, doctrinæ gratia, ſimplicem nominabimus, compoſitam verò eam, quæ inter tres numeros deprehenditur.

QVÆSTIO PROPOSITA VTRVM oſſibilis ſit, necne, an verò inepta, ac nugatoria, quo pacto ex ipſa operatione, quæ per Algebræ regulam fit, cognoſcatur.

Cap. XIIII.

Quo pacto cognoſcatur, num quæſtio ſit poſſibilis an impoſſibilis.

QVONIAM in principio huius lib. diximus, regulam Algebræ hanc habere excellentiam, vt in ipſo opere nos edoceat, num quæſtio, quæ proponitur, ſolui poſſit, necne: docendum iam paucis erit, qua id ratione fiat. Quotieſcunque igitur in diſſoluenda per Algebræ præcepta quæſtione aliqua incidimus in æquationem aliquam impoſſibilem, vel nugatoriam, atque ineptam pronunciabimus quæſtionem ſolui nulla ratione poſſe: vel certè eſſe nugatoriam, & ineptam. quod nonnullis exemplis declarabitur.

1. quæſtio impoſſibilis.

1. *Quæratur numerus, qui ductus in 3. & hic productus in ſe, tantum faciat, quantum ex ipſo numero in ſe multiplicato, & ex hoc producto in 5.*

PONA-

PONATVR quæſitus numerus 1 ♃. quæ ducta in 3. facit 3 ♃. & hic productus in ſe, facit 9 ȝ. qui numerus debet eſſe æqualis ei, qui fit ex 1 ♃ in ſe, & ex producto in 5. Fit autem ex 1 ♃ in ſe, 1 ȝ. & hic numerus in 5. ductus facit 5 ȝ. Inuenta ergo eſt æquatio inter 9 ȝ. & 5 ȝ. quæ eſt impoſſibilis. Quapropter enunciabimus, quæſtionem propoſitam eſſe impoſſibilem.

2. *Diuidatur numerus 12. in tales duas partes, vt $\frac{1}{3}$. vnius cum $\frac{1}{4}$. alterius efficiat 4.* *2. quæſtio impoſſibilis.*

PONATVR pro vna parte 1 ♃. eritque altera 12 — 1 ♃. Tertia pars illius eſt $\frac{1}{3}$ ♃. & quarta pars huius eſt 3 — $\frac{1}{4}$ ♃. quæ ſimul efficiunt 3 + $\frac{1}{12}$ ♃. (Nam ex + $\frac{1}{3}$ ♃. & — $\frac{1}{4}$ ♃. fit $\frac{1}{12}$ ♃. vt ex cap. 4. conſtat) quæ æqualia eſſe debent numero 4. Ablatis vtrinque 3. erit æqualitas inter $\frac{1}{12}$ ♃. & 1. Igitur diuiſa 1. per $\frac{1}{12}$. fiet 1 ♃ 12. atque hæc eſt prima pars numeri 12. & altera pars 0. quod eſt ineptum. Impropriè tamen $\frac{1}{3}$. illius, nimirum 4. cum $\frac{1}{4}$. huius, id eſt, cum 0. facit 4.

QVOD ſi, poſitis eiſdem partibus 1 ♃. & 12 — 1 ♃. accipiamus $\frac{1}{4}$. prioris, nempe $\frac{1}{4}$ ♃. & $\frac{1}{3}$. poſterioris, videlicet 4 — $\frac{1}{3}$ ♃. quæ partes ſimul conficiunt 4 — $\frac{1}{12}$ ♃. (quod $\frac{1}{4}$ ♃. & — $\frac{1}{3}$ ♃. faciant — $\frac{1}{12}$ ♃. vt ex cap. 4. conſtat) quæ æqualia non poſſunt eſſe numero 4. Ergo neque hoc modo quæſtio poſſibilis eſt.

3. *Diuidatur numerus 10. in tales duas partes, vt ex ductu vnius in alteram producantur 26.* *3. quæſtio impoſſibilis.*

PONATVR pro vna parte 1 ♃. eritque altera 10 — 1 ♃. quæ partes inter ſe multiplicatæ faciunt 10 ♃ + 1 ȝ. qui productus æqualis eſſe debet numero 26. Addito 1 ȝ. vtrinque, fiunt 10 ♃. æquales 1 ȝ + 26: ablatiſque 26. vtrinque, erit æqualitas inter 1 ȝ. & 10 ♃ — 26. Ex hoc numero, qui æqualis eſt 1 ȝ. extrahemus radicem quadratam hoc modo, vt ſupra docuimus. Semiſſis radicum eſt 5. huius quadratum 25. ex quo auferri non poſſunt 26. vt vult ſignum —. Igitur dicemus, quæſtionem ſolui non poſſe.

4. *Inueniantur duo numeri, vt ex ductu vnius in alterum fiat numerus triplus ſummæ ipſorum.* *4. quæſtio impoſſibilis.*

PONATVR vnus 1 ♃. & alter 2. vnitates. Ex 1 ♃. in 2. fit numerus 2 ♃. qui triplus eſſe debet ſummæ ipſorum, quæ eſt 1 ♃ + 2. Ergo ſumma hæc triplicata, nimirum 3 ♃ + 6. æqualis debet eſſe 2 ♃. quod falſum eſt. Impoſſibilis igitur eſt quæſtio propoſita, ſi alter numerorum conſtituatur 2. Si pro ſecundo numero poſitæ fuiſſent plures vnitates, quam in denominatore proportionis datæ continentur, nimirum 4. vel 5. vel 6.&c.quæstio solui posset. Nam posito secundo numero 4. inuenire-tur 1 ꝶ.esse 12.atque ita duo numeri quæsiti essent 12. & 4.qui inter se multiplicati efficiunt 48. qui numerus triplus est summæ ipsorum, quæ est 16.

5. quæstio impossibilis. 5. *Quæratur numerus, qui per 3. multiplicatus producat ipsius quadratum, & summa ex ipso numero, & eius quadrato collecta sit.*

PONAMVS numerum esse 1 ꝶ. quæ multiplicata per 3.facit 3 ꝶ. qui numerus æqualis debet esse quadrato ex 1 ꝶ. producto, nimirum 1 ȝ. erítque vnius radicis pretium 3. qui numerus per 3. multiplicatus, hoc est,in se ipsum,procreat eius quadratum 9.Sed quoniam hic quadratus cum sua radice 3.conficit 12.non autem 7.dices quęstionem esse impossibilem.quod etiam ex ipsis ęquationibus constat. Nam 1 ꝶ.cum suo producto 3 ꝶ. facit 4 ꝶ. quæ æquales esse debent 7.atque ita 1 ꝶ. erit $\frac{7}{4}$. Et quia 1 ꝶ. cum suo quadrato, id est, cum 1 ȝ. etiam æqualis debet esse numero 7. erit ęquatio inter 1 ȝ + 1 ꝶ. & 7. hoc est, (ablata 1 ꝶ vtrinque) inter 1 ȝ. & 7 — 1 ꝶ. inuenietúrque 1 ꝶ. esse √ȝ $\frac{29}{4}$ — $\frac{1}{2}$. quæ à priori valde differt. Immo si tam 4 ꝶ. quam 1 ȝ + 1 ꝶ. æquales sunt 7.erunt bis 7.id est,14.æquales 1 ȝ + 5 ꝶ. hoc est, æquatio constituetur inter 1 ȝ. & 14 — 5 ꝶ. erítque 1 ꝶ 2. quæ ab vtraque superiori longè etiam differt. Denique si tam 4 ꝶ. quam 1 ȝ + 1 ꝶ.æquales sunt 7. erit etiam æqualitas inter 4 ꝶ. & 1 ȝ + 1 ꝶ. ablatáque vtrinque 1 ꝶ erunt 3 ꝶ æquales 1 ȝ.Pretium ergo 1 ꝶ.erit 3. Quocirca cum tam variæ æstimationes 1 ꝶ inueniantur, quæstio solui non poterit, præsertim cum per nullam radicum inuentarum quæstioni satisfiat, nisi priori eius parti per radicem 3.

6. quæstio impossibilis. 6. *Quæratur numerus, cuius quadratus cum numero 40. æqualis sit 12. radicibus eiusdem quadrati.*

PONATVR numerus esse 1 ꝶ. Eius quadratus erit 1 ȝ.Igitur 1 ȝ + 40 æqualia sunt 12 ꝶ. hoc est, 1 ȝ. æqualis erit 12 ꝶ — 40. Sumatur semissis numeri radicum,nimirum 6.Et quia ab huius semissis quadrato, id est, ex 36.numerus 40.detrahi non potest,erit quæstio impossibilis.

7. Quæstio possibilis quidē, sed nugatoria 7. IAM verò si quando accidat, æquationem inuentam esse inter duos numeros Cossicos ęquales,eiusdémque denominationis,quæstio solui poterit per quemuis numerum.

Quando quæstio per quemuis numerum solui possit. *Vt si quæratur numerus, quo multiplicato per 2. & producto in seipsum ducto, faciat numerum æqualem ei, qui ex numero in seipsum ducto producitur, & ex producto in 4.*

PONATVR numerus esse 1 ꝶ. Ex 1 ꝶ. in 2. fiunt 2 ꝶ. & ex 2 ꝶ in se fiunt 4 ȝ. Et quia 1 ꝶ ducta in se gignit 1 ȝ. & ex 1 ȝ. in 4. fiunt 4 ȝ. inuenta erit æquatio inter 4 ȝ. & 4 ȝ. quæ nugatoria est & inepta. Quæstio igitur exerceri poterit in omni numero.Nam V.g. ex 10.in 2 fiunt 20.& ex 20. in se fiunt 400.quantum videlicet fit ex 10.in se,&ex producto 100.in 4.

8. *Item numerus 10. diuidendus sit in tales duas partes, vt numerus, qui fit ex vna parte in totum numerum, æqualis sit quadrato eiusdem partis, vna cum numero, qui ex eadem parte in alteram ducta procreatur.*

8. quæstio possibilis, sed nugatoria. PONATVR prima pars esse 1 ꝶ. ideóque altera 10 — 1 ꝶ. Et quia ex priori parte, id est, ex 1 ꝶ. in totum numerum 10. fiunt 10 ꝶ: Ex eadem autem parte in se fit 1 ȝ. & ex 1 ꝶ in 10 — 1 ꝶ fiunt 10 ꝶ — 1 ȝ. quæ addita ad 1 ȝ. fiunt 10 ꝶ. quia vt 1 ȝ addatur ad — 1 ȝ. debet fieri subtractio, vt in additione dictum est. Igitur inuenta est æquatio inter 10 ꝶ. & 10 ꝶ. quæ similiter nugatoria est: fieríque potest, quod proponitur, in quolibet numero, quomodocunque in duas partes distributo, vt demonstratum est ab Eucl.lib.2. propos.3. Quòd si altera pars 10 — 1 ꝶ ducatur in totum numerum 10. fiunt 100 — 10 ꝶ. Si verò eadem pars in se ducatur, fiunt 100 — 20 ꝶ + 1 ȝ. & duæ partes 1 ꝶ. & 10 — 1 ꝶ inter se multiplicatæ faciunt 10 ꝶ & 1 ȝ. quæ cum 100 — 20 ꝶ + 1 ȝ. faciunt 100 — 10 ꝶ. quæ æqualia esse debent 100 — 10 ꝶ. producto scilicet secundæ partis in 10.quæ æquatio nugatoria quoque est.

9. quæstio nugatoria quamuis possibilis. 9. *Sit rursum diuidendus numerus 10. in tales duas partes, vt producti ex toto numero 10. in ipsas partes sint simul æquales quadrato totius numeri.*

PONATVR vna pars 1 ꝶ. ideóque altera 10 — 1 ꝶ. Ex toto numero 10. in 1 ꝶ. & 10 — 1 ꝶ fiunt 10 ꝶ. & 100 — 10 ꝶ.qui numeri simul efficiunt 100. vt ex regula additionis patet. Et quoniam ex 10. in se fiunt quoque 100. erit æquatio inter 100. & 100. quod est ineptum. Quæstio ergo soluitur per quemcunque numerum in quascunque duas partes diuisum, vt ab Eucl.lib.2.propos.2. ostensum est.

LIQVET igitur, ex ipsa operatione cognosci posse, num proposita quæstio solui possit, nec ne: an verò sit vana, ac nugatoria, quæ videlicet in omnem numerum conueniat.

DE SECVNDIS RADICIBVS.

CAP. XV.

Cur excogitatæ sint secundæ radices.

QVÆRVNTVR non rarò duo, vel tres, aut etiam plures numeri sub incerta proportione: idcirco postquam pro primo numero posita est 1 ℞. non videtur commodum pro secundo numero ponere iterum 1 ℞: & pro tertio etiã 1 ℞. &c. quia cum 1 ℞ primo loco posita diuersum plerunque valorem habeat à radice secundo loco posita, itémq. à radice tertio loco posita; facilè eueniret, vt in operatione exempli radices inter se confunderentur, nisi diuersis characteribus designentur. Quam ob rem excogitatæ sunt radices secundæ, quas Cardanus Quantitates surdas, Petrus Nonius, & alij Quantitates simplices, aut absolutas appellant, notantq. hoc modo 1q. 2q. &c. hoc est, vna quantitas, duæ quantitates, &c. Nos cum aliis appellabimus radices secundas, notabimúsque hoc modo, 1 A. hoc est, 1 ℞. secunda distincta ab ea, quæ primo loco posita est. 1 B. id est, 1 ℞ secunda distincta à duabus, quæ primo, & secundo loco positæ sunt. & sic deinceps. Hac enim ratione facilius secundarum radicum algorithmus explicabitur.

IN numeratione, quando numerus duo signa habet, intelligitur numerus cum priore signo ductus in vnitatem posterioris signi. Vt 1 ℞ A, significat 1 ℞, ductam in 1 A. & 3 ℞ A, significat 3 ℞. ductas in 1 A. Sic 1ȝ Aȝ, indicat 1ȝ. ductum in 1 Aȝ. &c.

Additio secundarum radicum.

ADDITIO verò perficitur, si numeri inter se addantur, & character idem secundæ radicis apponatur: quãdo videlicet secundæ radices sunt eiusdem generis. Vt ex 3 A. & 4 A, fiunt 7 A. atque ex 3 B, & 4 B, fiunt 7 B. &c. Quando verò secundæ radices non sunt eiusdem generis, fit additio per signum additorum +. Vt ex 3 A, & 4 B, fiunt 3 A + 4 B. Item ex 3 ℞. & 4 A, fiunt 3 ℞ + 4 A. &c.

Subtractio secundarum radicum.

SVBTRACTIO quoque, quando secundæ radices sunt eiusdem generis, fit, si numerus à numero subtrahatur, & reliquo numero idem character secundæ radicis apponatur. Vt 3 A. ex 7 A. relinquunt 4 A, & 3 B, ex 7 B, relinquunt 4 B, &c. Quando autem secundæ radices sunt diuersæ, fit subtractio per signum subtractorum —. Vt 3 A. ex 4 B, relinquunt 4B — 3A.

Multiplicatio secũdarum radicum.

MVLTIPLICATIONES autem ita fiunt. Quando numerus radicis primæ multiplicandus est cum numero radicis secundæ signatæ solum litera A, vel B, &c. multiplicantur numeri inter se, & eadem signa apponuntur. Vt ex 2 ℞. in 2 A. fiunt 4 ℞ A. id est, 4 ℞ multiplicatæ in 1 A. Similiter ex 2 A, in 2 ℞. fiunt 4 A ℞, hoc est, 4 A, multiplicatæ in 1 ℞. Sic etiam ex 3ȝ in 4 B, fiunt 12 ȝ B. id est, 12 ȝ. multiplicati in 1 B. &c.

12 ȝ. multiplicati in 1 B. &c. Sic etiam ex 1 ℞ in 1 A, fit 1 ℞ A, id est, 1 ℞ multiplicata in 1 A. Et ex 1 ȝ. in 1 Aȝ. fit 1ȝ Aȝ. hoc est, 1ȝ. ductus in 1 Aȝ.

QVANDO numerus absolutus in numerum secundæ radicis ducitur, fit numerus secundæ radicis. Vt ex 6. in 3 C, fiunt 18 C. Et ex 7. in 4. B, fiunt 28 B, &c.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in numerum secundæ radicis diuersæ literæ, ducitur numerus in numerum, productóque eædem literę apponuntur. Vt ex 3 A, in 9 B, fiunt 27 AB, hoc est, 27 A, multiplicatæ in 1 B.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in numerum secundæ radicis eiusdem literæ producitur character ȝ, pręposita tamen eadem litera. Vt ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 A ȝ.

QVANDO numerus secundæ radicis ducitur in se quadratè, vel cubicè, &c. producitur character ȝ, vel ce, &c. pręposita eadem litera. Vt 1 A, in se quadratè, facit 1 Aȝ. hoc est 1. quadratum secundæ radicis. Rursus ex 1 ℞ A, in 1 ℞ A, fit 1ȝ Aȝ. id est 1ȝ primę radicis ductus in 1 ȝ. secundæ radicis. Item 3 B, in se quadratè faciunt 9 Bȝ. Sic 3 B, in se cubicè, faciunt 27 B ce.

QVANDO numerus secundę radicis ducitur in alium numerum eiusdem radicis secundæ, quę etiam habet characterem Cossicum, intelligitur primus numerus habere etiam signum Cossicum ℞. Vt ex 1 A, in 1 Aȝ, fit 1 Ace. Et ex 3 B, in 4 Bce, fiunt 12 Bȝȝ.

QVANDO numerus Cossicus simplex, absque litera secundæ radicis, multiplicatur in numerum signatum litera, & signo Cossico, ducitur numerus in numerum, & producto eadem signa apponuntur. Vt ex 2 ce. in 4Aȝ. fiunt 8ceAȝ. hoc est, 8 ce multiplicati in 1Aȝ. Item ex 1ce in 1℞Aȝ. fit 1ȝȝ Aȝ. id est, 1ȝȝ. ductus in 1Aȝ. Tantum quoque fit ex 1ȝ A, in se quadratè. Nam ex 1ȝ. in se fit 1ȝȝ. & ex 1 A, in se fit 1Aȝ.

QVANDO numerus post literam secundæ radicis signum Cossicum gerens ducitur in numerum, qui post literã secundæ radicis gerit quoq; signum Cossicum, producitur numerus cum charactere Cossico, quem exponentes characterum dant, cui præponenda insuper est litera, vel literę secundę radicis. Vt ex 2Aȝ, in 5 Ace. fiunt 10 Aß. Item ex 3Aȝ. in 4Bce, fiunt 12ABß.

QVANDO numerus post literam secundę radicis characterem Cossicum gerens ducitur in numerum, qui post characterem Cossicum literam quoque secundæ radicis habet, producitur numerus cum posteriore charactere Cossico, quem insequitur litera secũdę radicis, deinde apponitur character Cossicus productus ex priore charactere Cossico in literam secundæ radicis, ac si haberet signum hoc ℞. Vt ex 1Ace in 1ȝA, fit 1ȝ Aȝȝ. Tantundem quoque fit ex 1℞Aȝ. in se quadratè. Item ex 3Aȝ, in 4ceA, fiunt 12 ceAce, id est, 12ce multiplicati in 1 Ace.

Diuisio secũdarum radicum.

IN diuisione secundarum radicum, fit prius reductio signorum Cossicorum, per subtractionem similium signorum. Vt ex diuisione ne 8ce Aʓ, per 4 Aʓ, reductis signis, diuiduntur 8ce, per 4. fitque Quotiens 2 ce. Sic 8ce Aʓ, per 4 ce, fit Quotiens 2 Aʓ.

QVANDO autem diuiditur numerus ♃, per numerum secundarum radicum, fit minutia in Quotiente, Vt 2♃ per 4 A, fit $\frac{2♃}{4A}$.

Extractio radicum ex secundis radicibus.

IN extractione radicum, eruitur radix ex numero, si habet, eique apponitur litera secundę radicis, reiecto charactere Cossico. Vt radix quadrata numeri 25 Aʓ. est 5 A. Item radix cubica numeri 27 Ace. est 3 A. Et radix zensizensica numeri 16Dʓʓ. est 2 D.

QVANDO verò numerus non habet talem radicem, vel character Cossicus non est eiusdem appellationis cum radice extrahenda, præponitur toti numero cum litera, & charactere, signum radicale. Vt radix cubica numeri 3Aʓ. est √ce3Aʓ. Item radix quadrata numeri 4Ace. est √ʓ4Ace.

Examen operationum radicum secũdarum.

PROBANTVR prædictæ multiplicationes, diuisionésq; per progressiones Geometricas ab 1. incipientes. Claritatis autem gratia progressionem duplarum proportionum ascribemus primis radicibus, & progressionem triplarum radicibus secundis. cuiusmodi sunt hæ.

N	♃	ʓ	ce	ʓʓ	ß	ʓce	Bß	ʓʓʓ	cce	ʓß	&c.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	&c.
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	&c.

Itaque vt videas, ex 2 ♃ in 2 A, fieri 4 ♃A, id est, 4♃ ductas in 1 A. resolutæ 2 ♃, faciunt 4. & 2 A, faciunt 6. at 4. in 6. efficiunt 24, quantum videlicet faciunt 4 ♃, id est, 8 ductæ in 1 A, id est, in 3.

DEINDE ex 2 A, in 2♃, diximus fieri 4A♃, hoc est, 4A, ductas in 1 ♃. Et quia 2 A, sunt 6. & 2 ♃, sunt 4. fiunt autem 24 ex 6. in 4. quantum nimirum faciunt 4 A, id est, 12. in 1 ♃, videlicet in 2.

PRÆTEREA ex 1 ♃. in 1 A, producitur 1 ♃ A, quia 1 ♃ est 2. & 1 A, est 3. fiunt autem 6. ex 2. in 3. quantum nimirum fit ex 1 ♃, id est, ex 2. in 1 A, id est, in 3.

SIC etiam ex 1 ʓ. in A ʓ, fit 1ʓ Aʓ, nimirum 1 ʓ, ductus in 1Aʓ. Et quia 1 ʓ, est 4. & 1Aʓ, est 9 fiunt autem 36. ex 4. in 9. quantum nimirum fit ex 1 ʓ. id est, ex 4. in 1Aʓ, id est, in 9.

RVRSVS ex 3 ʓ. in 4 B, facti sunt 12ʓB, hoc est, 12 ʓ. ducti in 1 B. Nam 3ʓ. sunt 12. & 4 B, sunt etiam 12. fiunt autem 144. ex 12. in 12. quantum nimirum fit ex 12 ʓ, id est, ex 48. in 1 B, id est, in 3.

ITEM ex 6. in 3 C, fiunt 18 C, hoc est, ex 6. in 9. fiunt 54. hoc est, 18 C. Sic ex 7. in 4 B, factæ sunt 28 B, nimirum 84. quantum nimirum fit ex 7. in 4 B, id est, in 12.

EX 3 A, in 9 B, procreatæ sunt 27 AB, id est, 27 A, multiplicatæ in 1B. Nam 3 A, sunt 9. & 9 B, sunt 27. Fiunt autem 243. ex 9. in 27. quantum nimirum fit ex 27 A, id est, ex 81. in 1 B, id est, in 3.

ITEM

ITEM ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 Aʓ, hoc est, 12ʓ. secundæ radicis. Nam 3 A, sunt 9. & 4 A, sunt 12. Fiunt autem 108. ex 9. in 12. quantum nimirum faciunt 12 ʓ. secundæ radicis.

PRÆTEREA ex 1 A, in se quadratè fit 1Aʓ. hoc est, 1 ʓ secundę radicis. Item 3 B, in se quadratè faciunt 9Bʓ, id est, 9 ʓ. secundę radicis. Nam 3 B, sunt 9. at ex 9. in 9. fiunt 81. nimirum 9 ʓ. secundę radicis. Item ex 1♃A, in 1♃A, fit 1ʓAʓ, id est, 1 ʓ. primæ radicis ductus in 1 ʓ secundæ radicis. Nam 1 ♃ A, significat 1 ♃. primam ductam in 1 radicem secundam, id est, 2 ducta in 3. hoc est, 6. Fit autem ex 6. in 6. numerus 36. quantum nimirum fit ex 1 ʓ. primę radicis, id est, ex 4. in 1. quadratum secundę radicis, nimirum in 9. Sic 3 B, in se cubicè faciunt 27 Bce, id est, 27 ce secundę radicis. Quia 3 B, sunt 9. & 9. in se cubicè faciunt 729. quantum videlicet faciunt 27 ce secundæ radicis.

POST hæc, ex 1 A, in 1Aʓ, fit 1 Ace, hoc est, cubus secundę radicis, nimirum 27. Nam 1A, valet 3. & 1 ʓ. secundę radicis 9. Liquet autem ex 3. in 9. gigni 27.

ITA quoque ex 3 B, in 4Bce, fiunt 12Bʓʓ. hoc est, 12ʓʓ. secundæ radicis. Nam 3 B, sunt 9. & 4ce secundæ radicis 108. Fiunt autem 972. ex 9. in 108. quantum videlicet faciunt 12 ʓʓ. secundę radicis.

AMPLIVS ex 2 ce, in 4 Aʓ. fiunt 8ceAʓ, hoc est, 8 ce multiplicati in 1 ʓ secundæ radicis. Nam 2 ce sunt 16. & 4 ʓ secundę radicis 36. Fiunt autem 576. ex 16 in 36 quantum nimirum faciunt 8 ce, id est, 64. multiplicati in 1 ʓ. secundę radicis, videlicet in 9. Item ex 1 ce. in 1♃Aʓ. fit 1ʓʓAʓ. id est, 1ʓʓ. ductus in 1 ʓ secundæ radicis. Nam 1ce. est 8. & 1 ♃Aʓ. id est, 1 ♃ ducta in 1ʓ secundæ radicis, est 18. Fiunt autem 144. ex 8. in 18. quantum scilicet facit 1ʓʓ, nimirum 16. ductus in 1 ʓ. secundæ radicis, id est, in 9.

ITEM ex 2Aʓ, in 5 Ace. fiunt 10 Aß. Nam 2ʓ. secundæ radicis sunt 18. & 5ce secundæ radicis sunt 1080. Fiunt autem 2430. ex 18. in 1080. quantum scilicet faciunt 10 ß. secũdæ radicis. Item ex 3Aʓ. in 4Bce, fiunt 12ABß. Nam 3 ʓ secundæ radicis faciunt 27. & 4ce secundæ radicis faciunt 108. Fiunt autem 2916. ex 27. in 108. ac tantundem faciunt 12ß. secundæ radicis.

POSTREMO ex 1Ace. in 1ʓ A, fit 1ʓ Aʓʓ. hoc est, 1 ʓ. ductus in 1ʓʓ secundæ radicis. Nam 1 ce secundæ radicis est 27. & 1 ʓ est 4. Fiunt autem 108. ex 27. in 4. & ex 108. in 1 ♃ secundam, id est, in 3. fiunt 324. ac tantundem fit ex 1ʓ, in 1ʓʓ. secundæ radicis, hoc est, ex 4. in 81. Quòd autem ex 1♃Aʓ, in se quadratè fiat quoque 1ʓAʓʓ. sic perspicuum fiet. Numerus 1♃Aʓ. significat 1 ♃ primam, id est, 2. ductam in 1 ʓ. secundæ radicis, id est, in 9. quæ multiplicatio facit 18. At ex 18. in 18. fit numerus 324. qui æquiualet numero 1ʓAʓʓ. hoc est, numero producto ex 1 ʓ. id est, ex 4. in 1ʓʓ. secundæ radicis, hoc est, in 81. Similiter ex 3 A ʓ, in 4 ce A, fiunt 12ceAce. Nam 3 ʓ secundæ radicis sunt 27. & 4 ce A, (id est, 4 ce ducti in 1 A, vel in radicem secundam, hoc est, ex 32. in 3.) faciunt

96. Fiunt autem 2592. ex 27. in 96. Ac tantũdem faciunt 12ce Ace. hoc eſt, 12ce multiplicati in 1ce ſecundę radicis, nimirum ex 96. in 27.

IAM verò ex diuiſione 8ce Aℨ. per 4Aℨ, produci Quotientem 2ce. eodem modo probabimus. Nam 8ce Aℨ. (id eſt 8ce multiplicati per 1Aℨ, hoc eſt, 64. per 9.) faciunt 576. qui numerus diuiſus per 4ℨ ſecundæ radicis, nimirum per 36. facit Quotientem 16. hoc eſt, 2ce. Item ex diuiſione 8ce Aℨ. per 4ce. gigni Quotientem 2Aℨ. perſpicuum etiam eſt. Nam 8ce Aℨ (id eſt, 8ce. ducti in 1Aℨ, videlicet 64. in 9.) ſunt 576. qui numerus diuiſus per 4ce, id eſt, per 32. facit Quotientem 18. nimirum 2ℨ. ſecundæ radicis.

PARI ratione, numeri 25Aℨ. radicem quadratam eſſe 5 A. manifeſtum quoque eſt. Nam 5 A, ſunt 15. at ex 15. in 15. fit numerus 225. cui æquales ſunt 25ℨ ſecundæ radicis. Non aliter oſtendemus, 3 A, eſſe radicem cubicam numeri 27Ace. Nam 3 A, ſunt 9. at ex 9. in ſe cubicè fiunt 729. videlicet 27ce ſecundæ radicis. Ita quoque numeri 16 Dℨℨ. radix Zenſizenſica erit 2 D. quia 2 D, ſunt 6. & ex 6. in ſe Zenſizenſicè fiunt 1296. nimirum 16ℨℨ ſecundæ radicis.

LIBVIT omnes has operationes ſecundarum radicum examinare per progreſſiones Geometricas, vt earum veritas omnibus conſtaret: quia de illis fortaſſe non nemo dubitare poſſet, cum earum ratio ſit paulo obſcurior, quam illa operationum numerorum Coſſicorum. Vſus porrò ſecundarum radicum explicabitur in ænigmatibus per regulam Algebræ diſſoluendis.

DE NVMERIS IRRATIONALIBVS, ſiue ſurdis.

CAP. XVI.

Irrationales numeri, ſiue ſurdi, qui.

NVMERI irrationales, ſiue ſurdi ſunt radices numerorum, quę exprimi non poſſunt numeris, ac proinde neque audiri, ob quam cauſam radices ſurdę ſunt appellatę, ſignantúrque hoc modo. √ℨ. √ce. √ℨℨ. √ß. √ℨce, &c. vt ad finem cap. 3. declarauimus. Vt √ℨ 10. hoc eſt, radix quadrata numeri 10. dicitur ſurda, vel irrationalis, quia nullus numerus dari poteſt, ſiue integer ſit, ſiue integer cum fracto, qui in ſe quadratè multiplicatus producat 10. De integro manifeſtum eſt. Nam 3. in ſe ductus producit 9. numerum minorem, quam 10. At 4. in ſe multiplicatus gignit 16. numerum maiorem, quam 10. atque idcirco neque 3. neque 4. ideóque neque vllus numerus minor quam 3. neque maior quam 4. radix quadrata eſſe poteſt numeri 10. De integro cum fracto res etiam clara eſt. Radix enim illa deberet eſſe inter 3. & 4. Sed quamuis inter 3. & 4. infiniti ſint fracti, qui cum 3. conſtituant integrum cum fractis, vt $3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{5}$. $3\frac{5}{7}$. $3\frac{8}{11}$. &c. nullus tamen eorum in ſe ductus quadratè producere poteſt 10. numerum integrum, vt in Lemmate ad finem defin. 8. lib. 5. Eucl. demonſtrauimus. Sic etiam √ce 10. irrationalis eſt, & √ℨce 100. &c.

DE hiſce numeris nunc agendum eſt, vt plurimæ quæſtiones, in quibus numeri irrationales interueniunt, queant explicari. Res quidem eſt non paucis difficultatibus inuoluta, ſed quæ tamen planè intelligatur, ſi modo vehemens, ardénſque ſtudium adhibeatur. Quòd ſi quis ad hanc rem perfectè intelligendam minus idoneus reperiatur, is ne deſperet omnino: quippe cum ſine hac cognitione innumerabiles penè quæſtiones per Algebræ regulam enodari queant. Quocirca, omiſſa ad breue tempus tractatione hac numerorum irrationalium, quæ 13 capitib. continetur, conferre ſe poterit ad cap. 29. & 30. vbi innumerabilia penè ænigmata ſcitu iucundiſſima, ſine cognitione numerorum irrationalium, enodata inueniet. Deinde poſtquam ſe aliquandiu in Algebræ quæſtionibus exercuerit, regredi poterit ad tractationem hanc numerorum irrationalium perdiſcendam.

Vtrum radices ſurdæ ſint numeri, necne.

SOLET ante omnia à nonnullis diſputari, an numeri irrationales verè dicendi ſint numeri, necne. Cum enim neque integri numeri ſint, neque fracti, vt paulò ante diximus, neque certam proportionem, quę numeris exprimi poſſit, habeant ad integros numeros, aut fractos. non videntur eſſe numeri dicendi. Quia tamen ſub regulam cadunt, cenſendi erunt aliquo modo eſſe numeri. Nam √ℨ 10. in ſe multiplicata gignit numerum 10. ſicut radix quadrata numeri 9. producit 9. Item √ℨ 3. in √ℨ 12. procreat √ℨ 36. hoc eſt, 6. quemadmodum idem numerus 6. fit ex 2. in 3. vt ex algorithmo numerorum irrationalium, de quo mox agemus, conſtabit. Habent autem numeri irrationales cum numeris fractis quãdam affinitatem. Quemadmodum enim inter quoſuis duos numeros integros cadunt infiniti numeri fracti, vt hic apparet, vbi inter 2. & 3. cadunt omnes hi numeri fracti.

$2\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{3}$. $2\frac{2}{3}$. $2\frac{1}{4}$. $2\frac{3}{4}$. $2\frac{1}{5}$. $2\frac{2}{5}$. $2\frac{3}{5}$. $2\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{6}$. $2\frac{5}{6}$. &c.

ita quoque inter quoſlibet duos numeros integros cadunt infiniti numeri irrationales. Vt inter 2. & 3. cadunt omnes hi.

√ℨ 5. √ℨ 6. √ℨ 7. √ℨ 8. √ce 9. √ce 10. √ce 11. √ce 12. √ce 13. √ce 14. √ce 15.
√ce 16. √ce 17. √ce 18. √ce 19. √ce 20. √ce 21. √ce 22. √ce 23. √ce 24. √ce 25.
√ce 26. √ℨℨ 17. √ℨℨ 18. √ℨℨ 19. √ℨℨ 20. √ℨℨ 21. √ℨℨ 22. √ℨℨ 23. &c.

Tam enim ſinguli illi fracti, quam hi ſurdi ſinguli maiores ſunt quam 2. minores autem quam 3. vt liquet.

Duo genera radicũ ſurdarũ, ſimplex, & compoſita.

AFFERVNTVR ab auctoribus duo genera radicum ſurdarum. Quædam enim ſunt ſimplices, vt √ℨ. alicuius numeri non quadrati. √ce alicuius numeri non cubi. √ℨℨ numeri alicuius non zenſizenſi. √ß alicuius numeri non ſurdeſolidi, atque ita de aliis radicibus numerorum progreſſionis Geometricæ ab 1. incipientis, quorum radices numeris exprimi non possunt, atque has radices simplices vocant nonnulli numeros mediales, propterea quod per illos reperiuntur media proportionalia inter duos numeros, vt cap.21.dicemus. Alię radices surdæ sunt compositæ per interposita signa +,& —, quarum duo item genera ab auctoribus describuntur. In primo continentur illæ, quas dicunt Ligatas, quando nimirum intelligimus summam ex pluribus radicibus; vel ex vna radice, pluribúsve, atque ex numero aliquo, vel ex numero Cossico, aut pluribus collectam. Vt cum per hunc numerum √ȝ9+√ȝ4. intelligimus 5. vnitates, summam videlicet ex 3. radice zensica numeri 9. & ex 2. radice zensica numeri 4. collectam, dicitur numerus ille radix Ligata, quæ æquiualet numero 5. Sic etiam ligata radix erit √ȝ7+√ȝ4+3, quæ æquiualebit huic, √ȝ7+5 Significamus enim ad √ȝ7. additum esse numerum 5. Eodem modo radix Ligata erit, √ȝ3+2℞. Denotamus enim 2 ℞ esse additas ad √ȝ3. Denique Ligata radix erit √ȝ49—√ce27. Item √ce 100 —√ȝ9. In priori namque intelligimus ex √ȝ49. hoc est, ex 7. ablatam esse √ce 27. id est, 3. atque ita pretium eius erit 4. In posteriori autem volumus ex √ce 100. subtrahi √ȝ9. nimirum 3. Sed nos hasce radices Ligatas nominabimus deinceps numeros irrationales compositos, vel diminutos. Immo, vt breuitati consulamus, appellabimus deinceps etiam numeros diminutos, plerunque compositos. Alterum genus compositarum radicum complectitur radices surdas, quæ Vniuersales dicuntur: quando videlicet intelligitur radix alicuius radicis Ligatæ, vel numeri compositi, diminutiuè. Vt huius numeri compositi. 22+√ȝ9. radix Vniuersalis est 5. Est enim sensus, vt ad 22. addatur radix zensica 9. quę est 3. & aggregati 25. radix sumatur, quæ est 5. Eodem pacto, si inuertantur particulæ numeri eiusdem, vt fiat numerus √ȝ9+22. erit eius radix Vniuersalis eadem, nimirum 5. Nos radices has Vniuersales vocabimus simpliciter radices numerorum irrationalium compositorum, aut diminutorum, ac propterea huiusmodi numeris præfigemus signum radicale √ȝ. vel √ce. atq; vt significemus, illud ad totum numerum compositum referri, includemus numerum compositum inter duas parentheses, hoc modo, √ȝ(22+√ȝ9.) vel sic, quod idem est, √ȝ(√ȝ9+22.) Alia exēpla huiusmodi radicum sume hæc, √ȝ(√ȝ5+1℞.) Item √ȝ(4ȝ+1℞.) Item √ȝ(√ȝ9+√ȝ4)+√ȝ(11+√ȝ25.) Est .n. sensus huius posterioris radicis, vt sumatur summa conflata ex √ȝ9. & √ȝ4. nimirum ex 3. & 2. quæ est 5. & ad hanc summam adijciatur radix aggregati ex 11. & √ȝ25. hoc est, aggregati 16. quæ est 4. vt tota summa fiat 9. ciúsque radix 3. Quòd si inuertantur duo illi numeri compositi hoc modo. √ȝ(11+√ȝ25)+√ȝ(√ȝ9+√ȝ4) variabitur sensus, quia signum radicale √ȝ. in principio positum videtur referendum esse ad totum illud, quod sequitur: ita vt 11. sumantur cum 5. radice 25. vt fiant 16. quibus addantur √ȝ9. & √ȝ4. nimirum 5. vt fiat tota summa 21. eiusque radix √ȝ21. quæ multum à priori, quæ erat 3. differt. Denique huius numeri √ȝ(7+√ȝ48) radix erit 2+√ȝ3. Nam hic

Numeri mediales qui.

Radix ligata quæ.

Numerus irrationalis compositus, vel diminutus qui.

Radix vniuersalis quæ

Radix totius numeri compositi diminutive, quæ.

hic numerus in se ductus producit 7+√ȝ48. vt ex sequentibus patebit. Est & aliud genus radicis apud scriptores nonnullos, quam Distinctam dicunt, in qua videlicet particulæ seorsum accipiuntur, non autem earum summa. Vt hæc radix, √ȝ16+√ȝ9. quando particulæ per se sumuntur, vt 4. & 3. non autem coniunctim, vt 7. quia sic esset radix Ligata, quam nos simpliciter numerum irrationalem compositum nominauimus, dicitur radix Distincta: & multum differt à Ligata. Nam si accipiatur, tanquam Ligata, & in se ducatur, fiet numerus 49. At vt Distincta, fient numeri 16. & 9. qui simul efficiunt 25. duntaxat. Verum propriis in locis declarabimus, quisnam sensus sit harum radicum. Variè enim hac de re auctores loquuntur. Et de eisdem plura inuenies in cap.24.

Radix Distincta, quæ.

DE REDVCTIONE RADICVM SIMplicium ad eandem denominationem.

CAP. XVII.

VT radices surdæ simplices inter se possint multiplicari, ac diuidi, necesse est illas, si diuersæ sint denominationis, ad eandem denominationem reducere, quæ reductio eodem fere modo fit, quo minutiæ diuersorum denominatorum ad eundem denominatorem reuocantur. Positis enim signis radicalibus sub numeris, ad quos pertinent, multiplicandi sunt ipsi numeri in signa radicalia per crucem, vt noui numeri procreentur: Deinde signa ipsa inter se addenda, hoc est, eorum exponentes inter se multiplicandi quoque, vt signum commune, vel exponens signi communis producatur. V. g. hæ duæ radices √ȝ5. & √ce4, ita ad idem signum radicale reuocabūtur. Positis numeris, ac signis, vt dictum est, & figura indicat, multiplicandus est numerus 5. cubice, propter signum ce, vt fiat nouus numerus 125. At numerus 4. zensicè, propter signum ȝ, vt gignatur nouus numerus 16. Deinde addendum signum ȝ. ad ce, vt fiat signum ȝce. cuius nimirum exponens est 6. procreatus ex ductu 2. exponentis ȝ in 3. exponentem ce. vt cap.2. docuimus. quod signum productum ȝce, vtrique numero prius producto præfigendum est: ita vt √ȝ5. & √ce4. reducta sint ad √ȝce 125. & √ȝce 16. Quo facto, erit √ȝce 125. æqualis √ȝ5. & √ȝce 16. æqualis √ce4. Nam √ȝ5. est √ȝce numeri 125. propterea quod √ȝ5. in se quadratè efficit 5. & 5. in se cubicè facit 125. Eadem ratione √ce4. est √ȝce numeri 16. propterea quod √ce 4. in se cubicè facit 4. & 4. in se quadratè facit 16. quod etiam inde patet. Quoniam √ce,

125		16
5	X	4
√ȝ		√ce
2	——	3
	6	

Qua ratione diuersæ radices ad eādem denominationem reducantur.

multiplicans √ʒ.& 5.produxit √ʒce.& 125.ᵃerit eadem proportio √ʒce,ad
a 17. septimi. 125.quæ √ʒ,ad 5.Sic quoque,cum √ʒ,multiplicans √ce,& 4.faciat √ʒce,& 16.erit eadem proportio √ʒce,ad 16.quæ √ce.ad 4.ac proinde √ʒ5. æqualis erit √ʒce 125.& √ce4. æqualis √ʒce 16.

Demõstratio reductionis. VERVM prædicto modo rectè reduci radices ad eandem denominationem,hoc est,in dato exemplo, √ʒ5. esse √ʒce 125. & √ce4. æquiualere √ʒce 16. ita quoque Geometricè ostendemus.

C. 2.				F. 3		
A	B	G		D	E	H
1. √ʒ 5.	5.	125	1.	√ce 4.	4.	16.

K. 6.

Sit A,radix Zensica numeri B, cuius radicis exponens sit C. Item D,sit radix cubica numeri E,cuius exponens sit F.Ducatur B,quadratus huius numeri √ʒ5.in se cubicè,propter exponentem F,vel signum ce.(ita enim fiet multiplicatio per crucem)vt fiat numerus 125.ita vt B,sit √ce,numeri producti 125.cuius exponens F. Item ducatur E, cubus huius numeri √ce4.in se quadratè,propter signum ʒ,vel exponentem C, vt fiat numerus 16.ita vt E,sit √ʒ numeri producti 16.cuius exponens C.Postremò ducatur exponens C,in exponentem F,fiatque numerus K.Dico A, esse √ʒce,nimirum a 6.Et D,√ʒce esse numeri H, ab eodem numero K, denominatam.Cum enim A,sit radix ipsius B,denominata à C, erunt inter B,& vnitatem tot proportiones æquales proportioni A,ad vnitatem,quot Vnitates sunt in C,nimirum duæ,vt cap.2. explicatum est, & hic perspicuum est,1.√ʒ5.5.Item,quia B,radix est ipsius G, denominata ab F,erunt eandem ob causam inter G,& vnitatem tot proportiones æquales proportioni B,ad vnitatem,quot sunt vnitates in F, nimirũ tres, vt hic etiam patet.1.5.25.125.hoc est,inter G, & B,erunt duæ proportiones æquales proportioni B,ad vnitatem:quandoquidem inter G,& vnitatem sunt tres proportiones æquales proportioni B,ad vnitatem.Cum ergo inter B, & vnitatem sint duæ proportiones æquales proportioni A,ad vnitatem;erunt sex huiusmodi proportiones inter G,& vnitatem, quot videlicet vnitates sunt in K.qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione duarum proportionum inter B, & vnitatem, in tres proportiones inter G,& vnitatem,hoc est,ex C,in F. ac proinde G, erit zensicubus,cuius exponens est 6.hoc est,A,erit √ʒce.numeri G. non aliter demonstrabimus,D,esse √ʒce. numeri H. Eademq; ratio est de aliis, vt in hoc altero exemplo numerorum rationalium.

C. 3.				F. 4.		
A	B	G		D	E	H
1.	2.	8.	4096	1.	3.	81.	531441

K. 12.

A,est √ce,numeri B,denominata à C. At verò D,est √ʒʒ. numeri E, denominata ab F.Ex B, in se zensizensicè, propter exponentem F, fiat G, ita vt B,sit √ʒʒ.numeri 4096.Item ex E, in se cubicè,propter exponentem C,fiat H,ita vt E,sit √ce.numeri H.Ac tandem ex C,in F,fiat K. Dico A,esse √ʒʒce.numeri G,denominatam à K,id est, à numero 12.Et D, esse √ʒʒce. numeri H,denominatam ab eodem numero 12. Cum enim A,sit radix ipsius B,denominata à C; erunt inter B,& vnitatem tot proportiones æquales proportioni A,ad vnitatem, quot vnitates sunt in C, nimirum tres,vt hic patet,1.2.4.8. Item quia B, radix est ipsius G,denominata ab F; erunt tot proportiones inter G, & vnitatem,quarum quælibet æqualis est proportioni B, ad vnitatem, quot vnitates sunt in F, nimirum quatuor, vt hic patet, 1.8 64.512.4096. hoc est, inter G, & B, erunt tres proportiones æquales proportioni B,ad vnitatem : quandoquidem inter G, & vnitatem sunt quatuor proportiones æquales proportioni B,ad vnitatem.Cùm ergo inter B,& vnitatem sint tres proportiones æquales proportioni A, ad vnitatẽ; erunt inter G,& vnitatẽ duodecim proportiones ęquales proportioni A,ad vnitatem:quot videlicet sunt vnitates in numero K, nimirum 12.qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione trium proportionum inter B, & vnitatem, in quatuor proportiones inter G,& vnitatem, hoc est,ex C, in F:ac proinde G,erit ʒʒce, cuius exponens est 12.id est, A,erit √ʒʒce.numeri G.Eadémque ratione D,erit √ʒʒce numeri H.

SINT rursus reuocandi duo numeri 6. id est, √o 6. (quod exponens numeri absoluti sit o.) & √ʒʒ 12. Ducantur 6. in se zensizensicè, vt fiant 1296. Sed 12. ducenda non sunt in √o. propter exponentem o.neque 4.exponens ʒʒ.in o,eandem ob causam. Quare 6.& √ʒʒ 12. reducentur ad √ʒʒ1296. & √ʒʒ12.Atque ita,quando proponitur numerus absolutus, & radix aliqua, multiplicandus est tantummodo numerus absolutus in se, prout exigit character radicis.Vt in proximo exemplo numerus absolutus 6.ductus est in se zensizensicè, factáque est reductio ad √ʒʒ 1296.& √ʒʒ 12.

1296		12
6	X	12
√o		√ʒʒ
	4	

Quo pacto numerus absolutus, & radix reducantur ad eãdem denominationẽ

Compendium reductionis. COMPENDIOSE interdum fieri possunt huiusmodi reductiones, per abiectionem signi radicalis, quando nimirum vterque numerus habet radicem,quam signum radicale indicat.Tunc enim extrahitur illa radix, signúmq; eius radicale deletur.Vt si duæ hæ radices,√ce 27.& √ʒʒ 25.reuocandę sint ad eandem denominationem,extraho ex 25. radicem zensicam 5. cui præpono reliquum signum ʒ,hoc modo.√ʒ 5.Deinde ex 27.extraho radicem cubicam 3. quam multiplico zensice, vt fiat √ʒ 9. Erunt ergo datæ duæ radices reductæ ad has √ʒ 9.& √ʒ 5. Si prius extrahetur radix cubica ex 27. nimirũ 3.deleto signo √ce,remanet numerᵘˢ absolutus 3.Extracta deinde

531441		15625
27	X	25
√ce		√ʒʒ

radice zenſica ex 25.quæ eſt 5. præpono ei reliquum ſignum ʒ. hoc modo √ʒ 5. Quia verò prius inuentus eſt numerus abſolutus 3. ducendus eſt in ſe zenſicè,vt fiat √ʒ 9.atque ita rurſus facta eſt reductio ad √ʒ 9.& √ʒ 5.vt prius. Sine compendio reducerentur ad has duas,√ʒʒce 531441.& √ʒʒce 15625.quæ tandem reducentur ad √ʒ 9.& √ʒ 5. hoc modo.Extraho ex 531441. radicem cubicam 81. & ex hac radicem zenſizenſicam 3. cui nullum ſignum radicale præpono, quia numerus habuit √ʒʒce. Deinde ex 15625. eruo radicem cubicam 25. & ex hac radicem zenſicam 5. cui præfigo ſignum ʒ.quod reliquum eſt, hoc modo √ʒ 5. quia numerus 5. non habet √ʒ. Quoniam verò prius inuentus eſt numerus abſolutus 3. ducatur 3.in ſe zenſicè,vt fiat √ʒ 9.atque ita reductio facta erit ad √ʒ 9.& √ʒ 5.vt prius. Sic etiam ſi reducendæ ſint √ʒß 1024. & √ʒce 216.Extraho ex 1024. radicem ſurdeſolidam 4. deletóque charactere ß. manet √ʒ 4. Extracta autem radice zenſica ex 4.habebimus 2.Item ex 216.eruo radicem cubicam 6.cui præpono ſignum ʒ.Sed quia prius habuimus numerum abſolutum 2.ducemus 2.in ſe zenſicè,vt fiat √ʒ 4. Erunt igitur dictæ radices reductæ ad √ʒ 4.& √ʒ 6. Atque hoc modo fit compendium per abiectionem alicuius ſigni radicalis.

Nonnvnqvam fieri etiam poteſt compendium per aſſumptionem alicuius ſigni radicalis. Vt ſi reducendæ ſint √ce 2 & √ʒce 6 duco 2. in ſe zenſicè,propter ſignum ʒ. quod præter ce reperitur in altera radice, facióque 4.cui præpono ʒ.eritque facta reductio ad √ʒce 4.& √ʒce 6,Sine compendio fieret reductio,vt hic vides,ad √ʒcece 64.& √ʒcece 216. Et ſi ex his numeris eruantur radices cubicæ 4.& 6.deleantúrque ſigna ce. ſingula ex ſingulis, facta erit reductio ad √ʒce 4.& √ʒce 6. vt prius. Sic etiam reducẽtur √ce 2.& √ʒce 8.ad √ʒce 4.& √ʒce 8.ſi nimirum 2.ducatur in ſe zenſicè,& producto addatur idẽ ſignum radicale ce,præpoſito inſuper ſigno ʒ.

$$\begin{array}{ccc} \overline{64} & & \overline{216} \\ 2 & \times & 6 \\ \sqrt{\text{ce}} & & \sqrt{\text{ʒce}} \end{array}$$

Regula reductionis quarundam radicum facilis.

Deniqve vt alia adhuc exempla ob oculos ponam, quotieſcunque in vtraque radice idem character reperitur,reducentur illæ radices facilè ad eandem denominationem, ſi numerus minoris denominationis multiplicetur in ſe ſecundum exigentiam alterius characteris, qui in maiore denominatione reperitur, & producto addatur character ille, ſecundum quem facta eſt multiplicatio.Vt √ʒʒ 9. & √ʒ 4.reducentur ad √ʒʒ 9. & √ʒʒ 16. ſi nimirum numerus 4. minoris denominationis ducatur in ſe zenſicè,propter characterem ʒ. qui in maiore denominatione præter ʒ.reperitur.

Item √ʒce 8. & √ʒ 9. reducentur ad √ʒce 8. & √ʒce 729. ſi nimirum numerus 9. minoris denominationis ducatur in ſe cubicè, propter characterem ce, qui præter ʒ. in maiore denominatione continetur.

Sic etiam √ʒʒce 20. & √ʒ 10. reducentur ad √ʒʒce 20. & √ʒʒce 1000000. ſi nimirum numerus 10. minoris denominationis ducatur

ducatur in ſe zenſicubicè,propter characterem ʒce.qui præter ʒ.reperitur in maiore denominatione:hoc eſt,vel prius in ſe zenſicè, & productus 100.in ſe cubicè:vel prius in ſe cubicè,& productus 1000.in ſe zenſicè.Vtroque enim modo producitur numerus 1000000.

Ita quoque 7ʒce 30.& √ce 15.reducentur ad √ʒce 30.& √ʒce 225.ſi videlicet numerus 15. minoris denominationis ducatur in ſe zenſicè, & producto 225.præter characterem ce. apponatur quoque character ʒ. & ſic de aliis.

Itaq.maior character ſemper manet intactus,& ſolum minor mutatur,aſſumendo alium characterem præter illum, quem habet; characterem,inquam,ſecundum cuius exigentiam multiplicatus fuit numerus minoris denominationis,& qui in maiore denominatione reperitur vltra minoris denominationis characterem.

DE MVLTIPLICATIONE, AC Diuiſione radicum ſimplicium.

Cap. XVIII.

Multiplicatio, ac diuiſio radicum ſimplicium, quo pacto fiat.

Vt doctrinæ ordo ſeruetur, agendum erit de multiplicatione, diuiſionéque radicum ſimplicium ante additionem,ſubtractionémque, quia ſine multiplicatione additio, ſubtractióque radicum abſolui non poteſt. Quando ergo duæ radices multiplicandæ,aut diuidendæ ſunt eiuſdem generis, multiplicantur earum numeri inter ſe,aut diuiduntur,& producto numero idem ſignum radicale præponitur.

Vt ex ductu √ʒ 7.in √ʒ 10. fit √ʒ 70.
Ex √ʒ 3. in √ʒ 12. fit √ʒ 36. id eſt,6.
Ex √ʒ $2\frac{1}{4}$. in √ʒ 8. fit √ʒ 18.
Ex √ce 24.in √ce 10.fit √ce 240.
Ex √ce 4.in √ce 16. fit √ce 64. hoc eſt, 4.
Ex √ʒʒ 9. in √ʒʒ 8.fit √ʒʒ 72.
Ex √ß 4. in √ß 8. fit √ß 32. id eſt, 2.
Item ex diuiſione √ʒ 70. per √ʒ 7. fit √ʒ 10.
Ex √ʒ 36. per √ʒ 12. fit √ʒ 3.
Ex √ʒ 18. per √ʒ 8. fit √ʒ $2\frac{1}{4}$. hoc eſt, $1\frac{1}{2}$.
Ex √ce 240. per √ce 24. fit √ce 10.
Ex √ce 64. per √ce 4. fit √ce 16.
Ex √ʒʒ 72. per √ʒʒ. 8. fit √ʒʒ 9.
Ex √ß 32. per √ß 8. fit √ß 4.

QVANDO autem propositæ duæ radices non sunt eiusdem naturæ, reducendæ sunt ad eandem denominationem: deinde multiplicatio, aut diuisio instituenda vt prius.

VT ex ductu √z 8. in 1 $\frac{1}{2}$. fit √z 18. Nam numerus 1 $\frac{1}{2}$ Zensicè in se ductus facit √z 2 $\frac{1}{4}$. hoc est, √z $\frac{9}{4}$. atque ita ex √z 8. in √z $\frac{9}{4}$. fit √z $\frac{72}{4}$. hoc est, √z 18.

Ex √c 2. in √zc 6. fit √zc 24. Duæ namque illę radices reducuntur ad has duas √zc 4. & √zc 6.

Ex √z 5. in √c 4. fit √zc 2000. Nam datæ duæ radices reuocantur ad has, √zc 125. & √zc 16.

ITEM ex diuisione √z 18. per 1 $\frac{1}{2}$. fit √z 8. Numerus enim 1 $\frac{1}{2}$. ductus in se quadratè facit 2 $\frac{1}{4}$. cui præponendum est signum z. vt fiat √z 2 $\frac{1}{4}$. atque ita diuisa √z 18. per √z 2 $\frac{1}{4}$. hoc est, per √z $\frac{9}{4}$. fit Quotiens √z 8.

Ex √zc 24. per √c 2. fit Quotiens √zc 6. Nam duæ illæ radices reducuntur ad has √zc 24. & √zc 4. si nimirum numerus 2. ducatur in se quadratè, & producto 4. præter signum c, apponatur etiam signum z, vt fiat √zc 4. atque ita diuisa √zc 24. per √zc 4. fit Quotiens √zc 6.

Ex √zc 2000. per √z 5. fit Quotiens √c 4. Duæ namque illæ radices reducuntur ad √zzc 4000000: & √zc 15625. Nam 2000. in se quadratè faciunt 4000000. & 5. in se Zensicubicè faciunt 15625. quibus productis præponitur commune signum zzc. cuius exponens 12. gignitur ex 6. exponente signi zc. in 2. exponentem signi z. Atque ita si diuides √zzc 4000000. per √zzc 15625. facies Quotientem √zzc 256. hoc est, √c 4. Nam √zz. numeri 256. est 4. cuius √c, est √c 4.

Ex √z $\frac{3}{4}$. per √z $\frac{7}{8}$. fit Quotiens √z $\frac{24}{28}$. id est, √z $\frac{6}{7}$. Nam ex ductu Quotientis √z $\frac{6}{7}$. in diuisorem √z $\frac{7}{8}$. fit √z $\frac{42}{56}$. hoc est, √z $\frac{3}{4}$. numerus diuisus.

Multiplicatio radicum in se quadratè, cubicè, Zensizensicè, &c.

QVANDO radix aliqua multiplicatur in se quadratè vel cubicè vel secundum exigentiam alterius signi radicalis, quod gerit, sumendus est ipsemet numerus pro numero producto, deleto signo radicali.

Vt √z 4. in se quadratè facit 4. Nam √z 4. in √z 4. facit √z 16. hoc est, 4.

Ex √z 18. in se quadratè facit 18. id est, √z 324 quæ est 18.

Ex √c 4 in se cubicè facit 4. Nam √c 4. in √c 4. facit √c 16. & ex √c 4. in √c 16. facit √c 64. hoc est, 4. atque radix cubica huius producti est √c 4.

SIC √zz 16. in se zensizensicè facit 16. Nam ex √zz 16. in √zz 16. fit √zz 256. & ex √zz 256. in se fit √zz 65536. nimirum 16. quia radix quadrata numeri 65536. est 256. & huius radix quadrata est 16.

AT quando radix aliqua multiplicatur in se secundum exigentiam alterius signi radicalis, ducendus est numerus in se secundum exigentiam alterius huius signi radicalis, ac producto signum radicale

cale numeri multiplicati præponendum.

Vt ex √z 6. in se cubicè fit √z 216. Vnde radix cubica huius producti erit √z 6. Nam ex √z 6. in se fit √z 36. & ex √z 6. in √z 36. fit √z 216.

Ex √c 8. in se quadratè fit √c 64. id est, 4. Vnde radix quadrata numeri √c 64. est √c 8. hoc est 2.

Ex √c 6. in se quadratè fit √c 36. Atq; ita radix quadrata numeri √c 36. est √c 6.

Ex √zc 6. in se quadratè fit √zc 36. hoc est, √c 6. Nam radix Zensica numeri 36. est 6. & huius radix cubica est √c 9. Vnde radix quadrata numeri √zc 36. vel √c 6. est √zc 6.

Ex √zc 6. in se cubicè fit √zc 216. vel √z 6. quia huius numeri 216. radix cubica est 6. & huius radix quadrata est √z 6. Itaque radix cubica numeri √zc 216. vel √z 6. est √zc 6.

Ex √zz 6. in se quadratè fit √zz 36. hoc est, √z 6. quia radix quadrata numeri 36. est 6. & huius radix quadrata est √z 6. Ex quo fit, radicem quadratam numeri √zz 36. vel √z 6 esse √zz 6. Itaque vt habeatur quadratum alicuius radicis zensizensicæ, satis est, amouere vnum signum z. Vt in dato exemplo quadratum √zz 6. fuit √z 6. Sic etiam quadratum √zz 8. est √z 8 & sic de cæteris.

Facilis inuentio quadrati radicis Zensizensica.

ITAQ. si radix quadrata aliqua surda duplanda est, multiplicandus est eius numerus per 4. Producti namq. √z. est dupla radicis datæ. Vt duplum √z 3. erit √z 12. Nam vt √z 3. ducatur in 2. reducendæ sunt numeri √z 3. & 2. ad eandem denominationem √z 3. & √z 4 &c.

Quo modo radix dupletur, vel tripletur, &c.

SIC etiam si duplanda sit √c 10. multiplicanda erit per √c 8. fietq. eius duplum √c 80. Duo namq. numeri √c 10. & 2. reuocandi sunt ad eandem denominationem, √c 10. & √c 8.

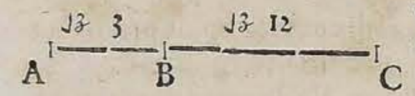
NON aliter radix quæcunque multiplicabitur per 3. 4. 5. &c. si dicti numeri multiplicentur zensicè, vel cubicè, vel zensizensicè, secundum conditionem nimirum radicis multiplicandæ. Vt √ß 9. triplicabitur, si ducatur in √ß 243. vt gignatur √ß 2187. Quadruplicabitur autem si multiplicetur per √ß 1024. vt fiat √ß 9216. quæ quadrupla est √ß 9. &c.

Summa quotuis radicum æqualium.

HINC facilè cognoscemus summam quotcunque radicum surdarum æqualium. Si enim vna illarum radicum multiplicetur per tot vnitates, quot sunt radices propositæ, gignetur earum summa. Vt quinque √z 7. faciunt √z 175. Item quatuor √c 8. faciunt √c 512. hoc est, 8. Sic decem √zc 4. faciunt √zc 4000000. Nam redigere quotlibet numeros æquales in vnam summam, nihil est aliud, nisi vnum illorum numerorum ducere in ipsorum multitudinem. Vt summa trium horum numerorum æqualium 12. 12. 12. æqualis est numero producto ex 12. in 3. &c.

Demōstratio multiplicationis radicum quadratarum.

RECTE autem fieri multiplicationem radicis in radicem, vt diximus, sic demonstrabimus in radicibus quadratis. Sint duæ lineæ, AB, √z 3. & BC. √z 12. Dico √z 36. hoc est, radicem quadratam numeri 36. qui fit ex quadrato 3. lineæ AB, in quadratum



12. lineæ BC, esse numerum productum ex linea AB, id est, ex √ȝ 3. in lineam BC, hoc est, in √ȝ 12. Quoniã enim ex Lemmate propos. 54. lib. 10. Eucl. rectangu-
a 20. sept. lum sub AB, BC, medio loco proportionale est inter quadrata rectarum AB, BC: [a] erit id, quod fit ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC, æquale ei, quod fit ex rectangulo sub AB, BC, in se multiplicato: ideoq. productum ex AB, in BC, radix quadrata erit producti ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC, quod erat demonstrandum.

Demonstratio generalis multiplicationis omniũ radicum.

In aliis autem omnibus radicibus, etiam non quadratis, idem hoc modo demonstrabimus. Sit A, √ȝ. numeri B: & C, √ȝ numeri D: atque ex A, in B, fiat cubus E, vt A, sit √ce numeri E. Et ex C, in D, fiat cubus F, vt C, sit √ce numeri F. Item ex A, in E, fiat zensizensus G, vt A, sit √ȝȝ, numeri A: & ex C, in F, fiat Zensizensus H, vt C, sit √ȝȝ numeri, H. Ac tandem ex A, in C, fiat I: Et ex quadrato B, in quadratum D, fiat quadratus K: Et ex cubo E, in cubum F, fiat cubus L: Et ex Zensizenso G, in Zensizensum H, fiat Zensizensus M. Dico numerum I, productum ex A, √ȝ B, in C, √ȝ D, esse √ȝ numeri K, producti ex ȝ B, in ȝ D. Item eundem numerum I, productum ex A, √ce E, in C, √ce F; esse √ce numeri L, producti ex ce E, in ce F. Denique eundem numerum I, productum ex A, √ȝȝ G, in C, √ȝȝ H, esse √ȝȝ numeri M, producti ex ȝȝ G, in ȝȝ H. Atque ita deinceps, si A, & C, in G, & H, ducantur, vt fiant Surdesolidi; & deinde Zensicubi, &c.

M, 1296.
G 16 H 81
L, 216
E 8 F 27
K, 36
B 4 D 9
I, 6
A 2 C 3

Quoniam enim A, multi-
b 17. sept. plicans A, & C, fecit B, & I; [b] erit B, ad I, vt A, ad C Item quia C, multipli-
c 17. sept. cans A, & C, fecit I, & D; [c] erit quoque I, ad D. vt A, ad C, hoc est, vt B, ad
d 20. sept. I: ac proinde B, I, D, continuè sunt proportionales. [d] Igitur idem numerus fiet ex B, in D, qui ex I, in se. Fit autem K, ex B, in D. Igitur idem K. fiet ex I, in se; hoc est, I, erit √ȝ numeri K.

e 17. sept. Deinde quia B, multiplicans A, & D, fecit E. & K; [e] erit E, ad K, vt A,
f 17. sept. ad D. Item quia C, multiplicans A, & D, fecit I, & F. [f] erit quoque I, ad F, vt A, ad D, hoc est, vt E, ad K: ac proinde quatuor numeri E, K, I, F, pro-
g 19. sept. portionales sunt. [g] Igitur idem numerus fiet ex E, primo in F, quartum qui ex I, tertio in K, secũdum. Factus est autem L, cubus ex E. in F. Idem igitur L, fiet ex I, in K, suum quadratum: ac proinde I, erit √ce numeri L.

h. 17. sept. Rursus quoniam E, multiplicans A, & F, fecit G, & B; [h] erit G, ad L, vt A, ad F. Item quia C, multiplicans A, & F, fecit I, &
i 17. sept. H; [i] erit quoque I, ad H, vt A, ad F, hoc est, vt G, ad L. ac proin-
k 19. sept. de quatuor numeri G, L, I, H, proportionales sunt. [k] Igitur idem numerus fiet ex G, primo in H, quartum, qui ex I, tertio in L, secundum. Factus est autem M, Zensizensus ex G, in H. Idem ergo M, fiet

fiet ex I, in L, suum cubum: ideóque I, erit √ȝȝ numeri M. & sic de cæteris. quod erat demonstrandum.

Quamvis autem in exemplo positi sint numeri rationales, idem tamen verum etiam est in numeris irrationalibus, vt Franciscus Maurolicus in sua Arithmetica speculatiua docuit. quod & in hac formula cernitur, in qua eadem demonstratio locum habet. Nam quemadmodum propositiones lib. 7. Eucl. demonstratæ sunt in numeris fractis, ita eædem ostendentur in numeris surdis. V.g. quia A, multiplicans A, & C, fecit B, & I; erit ex defin. 15. lib. 7. tam B, ad A, quàm I, ad C, vt A, ad vnitatem. quamuis proportio hæc sit irrationalis. Igitur erit B, ad A, vt I, ad C: Et permutando B, ad I, vt A, ad C; ac proinde A, multiplicans duos A, & C, fecit duos B, & I, qui eandem proportionem habent, quam multiplicati A, & C. vt vult propos. 17. lib. 7. Eadémque ratio est de cæteris propositionibus lib. 7. Eucl.

M, 225. vel √ȝ 50625
G, 9. vel √ȝ 81 H, 25. vel √ȝ 625
L, √ȝ 3375
E, √ȝ 27 F, √ȝ 125
K, 15. vel √ȝ 225
B, 3. vel √ȝ 9 D, 5. vel √ȝ 25
I, √ȝ 15
A, √ȝ 3 C, √ȝ 5

Recte etiam diuidi radicem per radicem, si præceptum traditum seruetur, demonstratione non indiget: quippe cùm Quotiens multiplicatus per diuisorem producat numerum diuisum. Vt quia √ȝ 15. diuisa per √ȝ 3. Quotientem facit √ȝ 5. Et √ȝ 5. ducta in √ȝ 3. facit √ȝ 15. vt demonstratum est, dubitandum non est, rectè factam esse diuisionem.

Immo ritè fieri multiplicationem, diuisionémque radicum surdarum eo modo, quem præscripsimus, abundè nos docere possunt radices rationales: quippe quæ eo modo multiplicatæ, atque diuisæ procreent veros numeros productos, ac Quotientes. Nam ex √ȝ 4. in √ȝ 49. fit √ȝ 196. hoc est 14. Et ex diuisione √ȝ 196. per √ȝ 4. fit Quotiens √ȝ 49. id est, 7. Item ex √ce 8. in √ce 27. fit √ce 216. nimirum 6. Et ex diuisione √ce 216. per √ce 8. fit Quotiens √ce 27. nimirum 3. &c.

L E M M A.

Vtrum duæ radices surdæ commensurabiles sint nec ne: & quam proportionem inter se habeant, cognoscere.

Dividatvr vna radix per alteram. Si enim Quotiens fuerit

An duæ radices ſint commenſurabiles, & quam habeat proportionẽ; quo pacto cognoſcatur.

rationalis,ipſæ radices commenſurabiles erunt, proportionémque habebunt inter ſe,quam Quotiens ad vnitatem. Vel ſi Quotiens eſt minutia,quam numerator minutiæ ad denominatorem. Vt quoniam ſi diuidatur √ȝ 12.per √ȝ 3.fit Quotiens √ȝ 4.hoc eſt,2.erunt √ȝ 12.& √ȝ 3.commenſurabiles,habebúntque proportionem duplam, nimirum 2.ad 1.

Sic etiam diuiſa √ȝ 3. per √ȝ 12. fit Quotiens √ȝ $\frac{3}{12}$. vel √ȝ $\frac{1}{4}$.hoc eſt, $\frac{1}{2}$. Sunt ergo √ȝ 3. & √ȝ 12. commenſurabiles, earúmque proportio eadem eſt, quæ $\frac{1}{2}$. ad 1. hoc eſt 1. ad 2. numeratoris ad denominatorem. Nam per propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem eſt proportio numeratoris minutiæ cuiuſuis ad eiuſdem denominatorem, quæ ipſius minutiæ ad vnitatem.

Item √ȝ 18. & √ȝ 8. commenſurabiles erunt, proportionémque habebunt, quam 3.ad 2. nimirum ſeſquialteram. quod maiore diuiſa per minorem, Quotiens fit √ȝ 2$\frac{1}{4}$.vel √ȝ $\frac{9}{4}$.hoc eſt, $\frac{3}{2}$. Diuiſa autem √ȝ 8. per √ȝ 18.fit Quotiens √ȝ $\frac{4}{9}$. hoc eſt $\frac{2}{3}$.Sunt ergo √ȝ 8.& √ȝ 18. commenſurabiles,proportionémque habent,quam 2.ad 3.

Rursus commenſurabiles erunt √ȝ 75. & √ȝ 48. Nam diuiſa illa per hanc,fit Quotiens √ȝ 1$\frac{9}{16}$. vel √ȝ $\frac{25}{16}$.id eſt, $\frac{5}{4}$. proportionem autem habebunt,quam 5.ad 4.

Ita quoque reperientur eſſe commenſurabiles √ȝ 9. & √ȝ 4. proportionémque habere, quam 3.ad 2.

Præterea √c 320. & √c 135. commenſurabiles ſunt: quia illa per hanc diuiſa,fit Quotiens √c 2$\frac{10}{27}$. vel √c $\frac{64}{27}$.id eſt, $\frac{4}{3}$.éſtque earum proportio ſeſquitertia,nimirum 4.ad 3.

Eadem ratione commenſurabiles ſunt √c 162.& √c 2058.habéntque proportionem, quam 7. ad 3.nimirum duplam ſeſquitertium, ſi maior cum minore conferatur. Diuiſa namque maiore per minorem,fit Quotiens √c 12$\frac{19}{27}$. vel √c $\frac{343}{27}$.hoc eſt, $\frac{7}{3}$.

Commensurabiles quoque ſunt √c 6000. & √c 2058. habéntque proportionem,quem 10.ad 7.Diuiſa enim priore per poſteriorem, fit Quotiens √c 2$\frac{314}{343}$. vel √c $\frac{1000}{343}$.hoc eſt, $\frac{10}{7}$.

Non ſecus commenſurabiles erunt √ȝȝ 3888.& √ȝȝ 243.quia ex diuiſione prioris per poſteriorem fit Quotiens √ȝȝ 16.hoc eſt 2. Habent ergo proportionem duplam.

Eodem modo commenſurabiles erunt √ȝȝ 19683. & √ȝȝ 243. habebúntque proportionem triplam. quia ex diuiſione prioris per poſteriorem prodit Quotiens √ȝȝ 81.hoc eſt,3.

Denique commenſurabiles etiam erunt √ȝȝ 19683. & √ȝȝ 3888. proportionémque habebunt ſeſquialteram. quia ex diuiſione fit Quotiens √ȝȝ 5$\frac{1}{16}$. vel √ȝȝ $\frac{81}{16}$. id eſt, $\frac{3}{2}$.

Iam verò ſi ex diuiſione gignatur numerus ſurdus,vel irrationalis,radices incõmẽſurabiles erũt,proportionémq.habebũt irrationalẽ.Cuiuſmodi ſũt √ȝ 48.& √ȝ 8.quia ex diuiſione oritur Quotiẽs √ȝ 6.irrationalis, cũ 6. nõ habeat radicẽ quadratã: habẽt tamẽ proportionẽ,quã √ȝ 6.ad 1.

Incom-

Incommensurabiles quoque erunt √c 32. & √c 18. Nam ex diuiſione gignitur Quotiens √c 1$\frac{7}{9}$. vel √c $\frac{16}{9}$. qui licet habeat radicem quadratam $\frac{4}{3}$. cubicam tamen non habet. Erit autem earum proportio eadem,quæ √c 16. ad √c 9. vel √c $\frac{16}{9}$.ad 1.

Quando radices ſunt diuerſorum generum, reducendæ priùs ſunt ad eandem denominationem. Vt ſi dentur √ȝc 64. & √c 27. Reductis ad eandem denominationem, nimirum ad √ȝc 64. & √ȝc 729. ſi poſterior per priorem diuidatur, fit Quotiens √ȝc 11$\frac{25}{64}$. hoc eſt, √ȝc $\frac{729}{64}$. id eſt, $\frac{3}{2}$. ſunt ergo √ȝc 64. & √c 27.commenſurabiles,habétque poſterior ad priorem proportionem, quam 3. ad 2.

Est Lemma hoc perneceſſarium ad radicum additionem, ſubtra-ctionémque,de qua in duabus propoſitionibus ſequentibus.

DE ADDITIONE RADICVM SIMPLICIVM.

Cap. XIX.

Additio radicum æqualiũ.

Qvando addendæ ſunt inter ſe duæ,vel plures radices æquales, multiplicanda eſt vna earum per 2.vel 3. aut 4. &c. prout radices fuerint 2.vel 3.aut 4. &c. Productus enim numerus erit ſumma illarum radicum,vt cap.præcedenti diximus. Vt ſumma ex √ȝ 6. & √ȝ 6. collecta eſt √ȝ 24. Nam √ȝ 6. duplicata, hoc eſt, multiplicata per √ȝ 4.facit √ȝ 24. Item √c 6. √c 6. √c 6. faciunt √c 162. propterea quòd √c 6.triplicata, id eſt, multiplicata per √c 27. facit √c 162.& ſic de aliis.

Additio radicum commenſurabiliũ

Qvando autem duæ radices inæquales eiuſdem ſpeciei addendæ inter ſe ſunt, experiendum prius eſt, per Lemma præcedens,an ſint commenſurabiles, an verò incommenſurabiles: idémque faciendum eſt, ſi radices ſint diuerſarum denominationum, poſtquam ad eandem denominationem fuerint reuocatę.Et ſiquidem deprehendentur eſſe incommenſurabiles, non poterunt in vnam ſummam colligi,ita vt ex illis vna radix ſimplex conficiatur, ſed addendæ ſunt per interpoſitionem ſigni additorum +.Vt ex √ȝ 6.& √ȝ 11.fit ſumma √ȝ 6 + √ȝ 11. Vel √ȝ 11 + √ȝ 6. Item ex 8. & √ȝ 7. fit ſumma 8 + √ȝ 7. vel √ȝ 7 + 8.Sic ex √c 9.& √c 20. fit ſumma √c 9 + √c 20.

Additio radicum quadratarum per propoſ. 4. li.2.Eucl.

Radices tamen quadratæ incommenſurabiles addi inter ſe poſſunt, hoc etiã modo.Ad ſummã quadratorũ addatur duplum eius,quod fit ex vna radice in aliã.Summæ enim huius collectæ radix quadrata erit ſumma propoſitarum duarum radicum.Sint addendæ √ȝ 6.& √ȝ 11.Quadrati numeri 6.& 11. faciũt 17.Et ex √ȝ 6.in √ȝ 11.fit √ȝ 66.cuius duplũ eſt √ȝ 264. Summa ergo ex √ȝ 6. & √ȝ 11.collecta erit radix quadrata huius aggregati 17 + √ȝ 264.nimirũ √ȝ(17 + √ȝ 264)Ratio huius operationis ex

M

propoſ. 4. lib. 2. Eucl. colligitur. Nam ſi linea aliqua recta diuiſa ſit in √6. & √11. erunt duo quadrata harum partium 6.& 11. quibus ſi addatur productum ex √6 in √11. bis, fiet totum quadratum totius lineæ binomium hoc, 17 + √264. Huius ergo radix quadrata, nimirum √(17 + √264) erit ſumma quæſita, ex √6. & √11. collecta. Quo pacto autem ex binomiis radix quadrata ſit extrahenda, quando res exigit, & ratio poſtulat, cap. 27. dicemus: quæ tamen hîc inuenietur eſſe √11 + √6. quæ non differt à ſumma radicum propoſitarum, ſi per ſignum + copulentur. Hæc autem ratio addendi in numeris rationalibus euidens quoque eſt. Sint enim addendæ √4. & √9. vbi manifeſtum eſt, ſummam collectam eſſe 5. Quadrati 4. & 9. faciunt 13. Et ex √4. in √9. fit √36. cuius duplum eſt √144. Summa ergo ex √4. & √9. collecta erit radix quadrata huius aggregati 13 + √144. nimirum √(13 + √144.) Conſtat autem, 13. cum √144. id eſt, cum 12. conficere 25. cuius radix quadrata eſt 5.

Immo hoc etiam artificio addi poſſunt radices quadratæ commenſurabiles, ſed ſemper producetur radix ſimplex in ſumma. Vt ſi addendæ ſint √3. & √12. Diuiſa hac per illam, fit Quotiens √4. rationalis: ac proinde commenſurabiles ſunt. Ergo ſi earum quadrati 3. & 12. in vnam ſummam colligantur, fit numerus 15. Et ſi vna radix in alteram ducatur, fit numerus √36. cuius duplum √144. cum 15. facit 15 + √144. Huius igitur radix quadrata, nimirum √(15 + √144) hoc eſt, √27. ſumma erit collecta ex √3. & √12.

Additio radicum commenſurabiliũ.

At verò ſi radices cuiuſcunque generis addendæ fuerint inuentæ commenſurabiles, hoc eſt, ſi diuiſa vna per alteram, Quotiens fuerit rationalis ſiue integer, ſiue fractus, aut integer cum fracto, & ſi quidem integer, ſubſcripta vnitate, vt fiat fractio: ita agemus. Quam proportionem multiplicem habet ſumma ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit ſumma propoſitarum radicum ad talem partem minoris radicis, qualis pars eſt 1. minoris numeri fractionis. Quare ſi talis pars ſumatur ex minore radice, eáque multiplicetur per denominatorem proportionis illius multiplicis, procreabitur ſumma propoſitarum radicum. Item quam proportionem multiplicem habet ſumma ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit ſumma propoſitarum radicum ad talem partem maioris radicis, qualis pars eſt 1. maioris numeri fractionis. Quare ſi talis pars ex maiore radice accipiatur, eáque ducatur in denominatorem proportionis illius multiplicis, producetur propoſitarum radicum ſumma.

Vt ſi addendæ ſint √8. & √18. Ex diuiſione maioris per minorem fit Quotiens rationalis √2$\frac{1}{4}$. ſiue √$\frac{9}{4}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$. Quia igitur ſumma numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. nimirum 5. ad 1. ſemiſſem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, habebit quoque quintuplam proportionem ſumma datarum radicum ad ſemiſſem minoris radicis. Eſt autem √2. ſemiſſis minoris radicis √8.

√8. Diuiſa namq. √8. per 2. hoc eſt, per √4. fit Quotiens √2. Quamobrem ſi √2. multiplicetur per 5. denominatorem proportionis quintuplæ, hoc eſt, per √25. gignetur √50. ſumma ex √8. & √18. collecta.

Item quia ſumma numerorum fractionis $\frac{3}{2}$ id eſt, 5. ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis proportionem habet quintuplam, eandem habebit ſumma radicum propoſitarum ad tertiam partem maioris radicis. Eſt autem √2. tertia pars maioris radicis √18. Diuiſa namq. √18. per 3. hoc eſt, per √9. fit Quotiens √2. Si igitur √2. ducatur in 5. denominatorem quintuplæ proportionis, id eſt, in √25. procreabitur eadem ſumma √50.

Eadem ſumma conflabitur, ſi minor radix, √8. diuidatur per maiorem √18. Fiet enim Quotiens √$\frac{4}{9}$. hoc eſt, $\frac{2}{3}$. Ergo rurſus quemadmodum 5. ſumma numerorum fractionis $\frac{2}{3}$. ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis habet proportionem quintuplã, ita quoq; eandem habebit ſumma radicum propoſitarum ad tertiam partem maioris radicis, √18. hoc eſt, ad √2. Item quemadmodum 5. ſumma numerorum fractionis $\frac{2}{3}$. ad 1. ſemiſſem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, ita quoque eandem habebit ſumma radicum √8. & √18. ad ſemiſſem minoris radicis, √8. nimirum ad √2. &c.

Rvrsvs ſint addendæ √3. & √12. Diuiſa maiore per minorem, fit Quotiens √4. hoc eſt 2. Suppoſita ergo vnitate, vt fiat fractio $\frac{2}{1}$. quoniam ſumma 3. numerorum huius fractionis ad 1. proportionem habet triplam, eſtq. 1. æqualis minori numero fractionis 1. habebit quoq; ſumma datarum radicum ad minorem radicem √3. proportionem triplam. Quare ſi √3. minor radix ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, nimirum in √9. fiet ſumma √27.

Item quia prædicta ſumma 3. numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 1. proportionem habet triplam, eſtque 1. ſemiſſis maioris numeri 2. fractionis, habebit quoque ſumma radicum propoſitarum ad ſemiſſem maioris radicis √12. hoc eſt, ad √3. proportionem triplam. Si igitur √3. ſemiſſis videlicet maioris radicis, ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, id eſt, in √9. producetur eadem ſumma √27.

Demõſtratio additionis radicum cõmenſurabilium.

Demonstratio huiuſce rei eſt, quod datis quatuor numeris proportionalibus, ita ſe habeat ſumma priorum duorum ad maiorem vel minorem ipſorum, vt ſumma duorum poſteriorum ad maiorẽ, vel minorem ipſorũ. Itẽ ita ſumma priorũ duorũ ad quamlibet partem maioris, vel minoris, vt ſumma duorum poſteriorum ad ſimilẽ partem maioris, vel minoris. Vt datis numeris 6.4. & 18.12. proportionalibus: erit cõponendo, vt 10. ad 4. ita 30. ad 12. Et per conuerſionem rationis, vt 10. ad 6. ita 30. ad 18. Quia verò eſt quoque vt 4. ad 1. quartam partem, ita 12. ad 3. quartam partem: erit ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Item quia eſt quoque, vt 6. ad 1. ſextam partem, ita 18. ad 3. ſextam partem: erit

M 2

quoque ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Cum ergo ex diuisione vnius radicis per aliam gignatur denominator proportionis vnius ad alteram, ita vt eadem proportio sit vnius ad alteram, quæ numeratoris fractionis ad denominatorem; (supposita 1. quando Quotiens est numerus integer) manifesta euadit ratio additionis radicum. Et sane admiratione dignum est, additionem fieri præcisam in ijs, quæ præcisam, & cognitam quantitatem non habent.

HINC fit, summam quoque ex duabus radicibus commensurabilibus colligi, si per denominatorem proportionis, quam habet summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. nimirum 5. ad maiorem fractionis numerum 3. vel ad minorem 2. hoc est, per $\frac{5}{3}$. vel per $\frac{5}{2}$ multiplicetur maior radix √ȝ 18. vel minor, √ȝ 8. Ita vides ex √ȝ 18. in $\frac{5}{3}$. hoc est, in √ȝ $\frac{25}{9}$. Vel ex √ȝ 8. in $\frac{5}{2}$. id est, in √ȝ $\frac{25}{4}$ gigni √ȝ 50. vt prius.

SINT rursus addendæ √ȝ 72. & √ȝ 18. Diuisa illa per hanc, fit Quotiens √ȝ 4. hoc est, 2. & supposita 1. fit $\frac{2}{1}$. denominator proportionis duplæ. Sicut igitur summa 3. ad 1. habet proportionem triplam, ita quoque summa duarum radicum ad minorem √ȝ 18. tripla erit. Si ergo ducatur √ȝ 18. in 3. id est, in √ȝ 9. fiet √ȝ 162. pro summa radicum √ȝ 72. & √ȝ 18. Item sicut eadem summa 3. numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 2. habet proportionem sesquialteram, cuius denominator est $\frac{3}{2}$. ita quoque summa quæsita erit ad maiorem radicem √ȝ 72. sesquialtera. Si ergo √ȝ 72. ducatur in $\frac{3}{2}$. id est, in √ȝ $\frac{9}{4}$. producetur eadem summa √ȝ 162.

Pulchra ratio addendi radices commensurabiles.

POSSVNT etiam addi radices commensurabiles percommode per regulam auream, & in idem res recidet. Cum enim in primo exemplo sit, vt 5. summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. ad minorem numerum 2. vel ad maiorem 3. ita summa radicum ad radicem minorem, vel maiorem, vt ostendimus: erit conuertendo quoque, vt 2. vel 3. ad summam 5. ita minor radix, vel maior ad radicum summam. Si ergo fiat,

Vt 2. ad 5. ita √ȝ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ȝ 18. ad aliud, procreabitur summa √ȝ 50. vt prius.

In postremo autem exemplo, in quo denominator proportionis fuit $\frac{2}{1}$. si fiat,

Vt 1. ad 3. ita √ȝ 18. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ȝ 72. ad aliud: gignetur summa √ȝ 162. quæ prius.

SINT rursus addendæ √ȝ 2. & √ȝ 8. Ex diuisione √ȝ 8. per √ȝ 2. fit Quotiens rationalis √ȝ 4. id est, 2. & supposita 1. fit $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat,

Vt 1. ad 3 ita √ȝ 2. ad aliud. Vel

Vt 2 ad 3. ita √ȝ 8. ad aliud: colligetur summa √ȝ 18.

Sint quoque addendæ √c 162. & √c 2058. Diuisa maiore radice per minorem, fit Quotiens rationalis √c 12 $\frac{19}{27}$ vel √c $\frac{343}{27}$ hoc est, $\frac{7}{3}$ Si igitur fiat,

Vt 3. ad 10. ita √c 162. ad aliud. Vel

Vt 7. ad 10. ita √c 2058. ad aliud: reperietur summa √c 6000.

ITEM addendæ sint √c 8. & √c 27. qui numeri rationales sunt. Ex diuisione √c 27. per √c 8. fit Quotiens rationalis √c 3 $\frac{3}{8}$. vel √c $\frac{27}{8}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Si ergo fiat,

Vt 2. ad 5. ita √c 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √c 27. ad aliud: prodibit summa √c 125. hoc est 5.

RVRSVS addendæ sint √ȝȝ 243. & √ȝȝ 3888. Proportio est $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat,

Vt 1. ad 3. ita √ȝȝ 243. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ȝȝ 3888. ad aliud: exurget summa √ȝȝ 19683.

POSTREMO sint addendæ √ȝ 4. & √c 27. qui numeri sunt rationales. Reductis hisce radicibus ad eandem denominationem, vt ad √ȝc 64. & √ȝc 729. Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis √ȝc $\frac{729}{64}$. hæc est, $\frac{3}{2}$. Si igitur fiat,

Vt 2. ad 5. ita √ȝc 64. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ȝc 729. ad aliud: procreabitur summa √ȝc 15625 hoc est, 5.

Alia ratio pulchra addendi radices commensurabiles.

ADDI quoque possunt radices commensurabiles hoc modo. Diuisa maiore radice per minorem, addatur Quotienti rationali vnitas. Si namque numerus cõflatus ducatur in minorem radicem, procreabitur summa quæsita. Nam si Quotiens ducatur in minorem radicem, id est, in diuisorem, producetur maior radix, quæ diuisa fuit: Et si vnitas ducatur in eundem diuisorem, id est, in minorem radicem, producetur minor radix: atque adeo duo producti summam duarum radicum cõficient. Cum ergo, per theor. 1. ad propos. 14. lib. 9. Eucl. quod respondet propos. 1. lib. 2. idem numerus fiat ex minore radice in summam ex Quotiente, & vnitate collectam, qui ex eadem radice minore in Quotientem, & in vnitatem fiunt seorsum; producetur quoque summa duarum radicum datarum ex minore radice in summã ex Quotiẽte, & vnitate collectam.

SINT enim addendæ √ȝ 8. & √ȝ 18. Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens rationalis √ȝ 2 $\frac{1}{4}$. id est, $\frac{3}{2}$. & addita 1 fit $\frac{5}{2}$. Et quoniam ex $\frac{5}{2}$. in √ȝ 8. fit √ȝ 50. erit √ȝ 50. summa duarum radicum √ȝ 8. & √ȝ 18.

ITEM sint addendæ √c 162. & √c 2058. Ex diuisione nascetur Quotiẽs rationalis $\frac{7}{3}$. & addita 1. fit numerus $\frac{10}{3}$. qui ductus in √c 162. gignit √c 6000. summam duarum radicum propositarum.

Addere plures radices habentes cõmunem mẽsuram vnam radicem eiusdem generis.

QVANDO duæ radices, vel plures, per vnam aliquam eiusdem generis radicem diuidi possunt, ita vt Quotientes sint rationales, coniungentur in vnam summam, si summa Quotientum ducatur in communem illam radicem diuidentem. Productus enim numerus erit summa quæsita. Nam cum, per theorema proxime citatum, numerus, qui fit ex radice diuidente in Quotientum summam, æqualis sit iis, qui ex eadem diuidente radice fiunt in singulos Quotientes, hoc est, omnibus simul radicibus propositis; liquidò constat, ex radice diuidente in summam

Quotientum gigni summam radicum propositarum.

Vt si addendæ sint √ȝ 8.& √ȝ 18.Si vtraque diuidatur per √ȝ 2.producentur Quotientes rationales √ȝ 4.& √ȝ 9.hoc est 2. & 3.quorum summa 5. si ducatur in communem diuisorem, id est, in √ȝ 2. procreabitur summa √ȝ 50.

ITEM sint addendę √ȝ 8.√ȝ 50.& √ȝ 72.si diuidantur singulæ per √ȝ 2. fient Quotientes rationales, √ȝ 4.√ȝ 25.& √ȝ 36.hoc est, 2. 5. & 6. quorum summa 13. ducta in √ȝ 2. communem diuisorem, producet summam √ȝ 338.

SINT tandem addendæ √ȝ 8.√ȝ 32.& √ȝ 48. Diuidantur singulæ per √ȝ 2.fiunt Quotientes √ȝ 4.√ȝ 16.& √ȝ 24. quorum priores duo sunt rationales,nimirum 2.& 4.at posterior irrationalis. Non ergo hoc modo in vnam colligi summam poterunt,sed solum duæ priores facient summam √ȝ 72.atque ita ex omnibus tribus fiet summa √ȝ 72+√ȝ 48.

DE SVBTRACTIONE RAdicum simplicium.

CAP. XX.

Subtractio radicis ab æquali radice.

QVANDO radix aliqua à radice æquali subtrahitur, nihil relinquitur. Vt √ȝ 12.à √ȝ 12.Item √ce 100.à √ce 100.subtracta relinquit √ȝ 0.vel √ce 0.

Subtractio radicum inæqualium.

QVOD si radices fuerint incommensurabiles, (quando nimirum, diuisa maiore per minorem, Quotiens est irrationalis)non poterit fieri subtractio,nisi per signum subtractorum —. Vt √ȝ 3.ex √ȝ 10.relinquit √ȝ 10—√ȝ 3.Item √ce 20. ex √ce 50. relinquit √ce 50—√ce 20.

Subtractio radicum quadratarũ per propos. 7. libr. 2. Eucl.

QVANDO tamen radices sunt quadratæ,& incommensurabiles,poterit minor à maiore subtrahi hoc etiam modo. A summa quadratorum subducatur,quod ex vna radice in aliam bis fit. Radix enim quadrata eius,quod relinquitur,erit residuum subtractionis.Sit subtrahenda √ȝ 12. à √ȝ 20.Quadrati numeri 12.& 20. faciunt 32. Et ex √ȝ 12. in √ȝ 20. fit √ȝ 240. cuius duplum √ȝ 960. detractum ex summa quadratorum relinquit 32—√ȝ 960. Radix ergo quadrata huius relicti, nimirum √ȝ (32—√ȝ 960.)erit id,quod relinquitur,detracta √ȝ 12.ex √ȝ 20. Huius operationis ratio ex propos. 7.lib.2.Eucl.colligitur. Nam si tota aliqua linea sit √ȝ 20. quæ secetur ita, vt vna pars sit √ȝ 12. erunt duo quadrati numeri 20. & 12. nimirum 32. æquales numero √ȝ 960. qui fit bis ex √ȝ 12. in √ȝ 20. vnà cum quadrato reliquæ partis lineæ. Si ergo numerus, qui fit bis ex √ȝ 12. in √ȝ 20. dematur ex 32. summa quadratorum, reliquum fiet quadratum reliquæ partis lineæ. Igitur quadratum huius partis erit 32—√ȝ 960. Ac proinde residuum, quod relinquitur

tur post subtractionem √ȝ 12.ex √ȝ 20.erit √ȝ (32—√ȝ 960.) Quo pacto autem radix quadrata,quando res exigit,ex Apotomis, siue Residuis sit extrahenda,dicemus cap.27.quæ tamen hic erit √ȝ 20—√ȝ 12. non differens à residuo,si √ȝ 12.à √ȝ 20.subtrahatur per interpositionem signi —. Verum hæc ratio subtrahendi perspicua quoque est in numeris rationalibus.Sit enim auferenda √ȝ 4.à √ȝ 49.vbi liquido constat, residuum esse 5.Quadrati 4.& 49.efficiunt 53. Et ex √ȝ 4.in √ȝ 49. fit √ȝ 196. cuius duplum √ȝ 784. ablatum ex 53. summa quadratorum relinquit 53—√ȝ 784. ac proinde residuum quæsitum erit √ȝ (53—√ȝ 784.) Constat autem,53—√ȝ 784.hoc est,53—28.esse 25.cuius radix quadrata est 5.

IMMO hoc eodem artificio subtrahi poterit radix quadrata à radice quadrata,si fuerint commensurabiles: sed tunc residuum erit radix simplex.Vt si subducenda sit √ȝ 3.à √ȝ 27.Diuisa hac per illam,fit Quotiens √ȝ 9.rationalis, ac proinde commensurabiles sunt. Summa quadratorum 3.& 27.est 30.à qua si dematur √ȝ 324. nimirum duplum eius, quod fit ex √ȝ 3.in √ȝ 27.remanebunt 30—√ȝ 324.Igitur √ȝ (30—√ȝ 324.) hoc est,√ȝ 12.erit residuum subtractionis.

Subtractio radicum commensurabilium.

SI autem radices cuiuscunque generis propositæ fuerint commensurabiles,hoc est,si diuisa maiore per minorem, Quotiens fuerit rationalis,ita tamen, vt si fuerit numerus integer, ei supponatur vnitas, vt fiat fractio,ita agemus.Quam proportionem habet numerus,qui relinquitur,detracto denominatore fractionis ex numeratore,hoc est,quam habet differentia numerorum fractionis ad 1. eam quoque habebit residuum post detractionem minoris radicis ex maiore ad talem partem minoris,qualis pars est 1.denominatoris fractionis: vel eam quoq; proportionem habebit dictum residuum ad talem partem maioris radicis, qualis pars est 1.numeratoris fractionis. Quocirca si talis pars capiatur ex minore radice,vel maiore, eáque per denominatorem proportionis illius multiplicetur,producetur residuum,quod quæritur.

SIT subtrahenda √ȝ 8.ex √ȝ 50. Ex diuisione maioris per minorem, fit Quotiens rationalis √ȝ $\frac{25}{4}$. hoc est, $\frac{5}{2}$. Quia ergo differentia numerorum fractionis $\frac{5}{2}$.est 3.quòd detracto denominatore 2.ex numeratore 5. remaneant 3. quæ differentia ad 1. semissem minoris numeri fractionis, vel quintam partem maioris numeri fractionis, proportionem habet triplam: habebit quoque residuum,quod relinquitur, dempta √ȝ 8. ex √ȝ 50.ad semissem minoris radicis, nimirum ad √ȝ 2, vel ad quintam partem maioris radicis,videlicet ad √ȝ 2.proportionem triplam. Si igitur √ȝ 2.ducatur in 3.hoc est, in √ȝ 9. producetur residuum √ȝ 18. quod desideratur.

IDEM residuum habebitur, si minor radix √ȝ 8. diuidatur per maiorem √ȝ 50. Fiet enim Quotiens √ȝ $\frac{4}{25}$. hoc est, $\frac{2}{5}$. Rursus ergo, quemadmodum 3. differentia numerorum fractionis ad 1. semissem minoris numeri fractionis, vel ad quintam partem maioris numeri fractionis proportionem habet triplam : ita quoque differentia duarum radicum propositarum triplam habebit proportionem ad semissem minoris radicis, vel ad quintam partem maioris, videlicet ad √ʒ 2. Quare triplum √ʒ 2. nimirum √ʒ 18. erit differentia datarum radicum, id est, residuum post detractionem √ʒ 8. ex √ʒ 50. Demonstratio eadem est, quæ supra in additione adducta est.

HINC fit, residuum quoque produci, si per denominatorem proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis, hoc est, reliquus numerus dempto minore fractionis numero ex maiore, ad maiorem numerum fractionis, vel ad minorem, nimirum in proposito exemplo per $\frac{3}{5}$. vel $\frac{3}{2}$. (nam $\frac{3}{5}$. est denominator proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis: ad 5. maiorem numerũ fractionis. At $\frac{3}{2}$. denominator est proportionis, quam eadẽ differentia 3. habet ad minorẽ numerũ fractionis) multiplicetur maior radix, vel minor. Ita vides ex ductu √ʒ 50. in $\frac{3}{5}$. vel ex ductu √ʒ 8. in $\frac{3}{2}$. gigni residuum √ʒ 18. idem, quod prius.

Pulchra ratio subtrahendi radices cõmensurabiles.

SVBTRACTIO quoque radicum commensurabilium commodissimè fieri potest per regulam auream. Cum enim sit, vt differentia numerorum fractionis ad maiorem, vel minorem eiusdem fractionis numerum, ita residuum, quod quæritur, ad radicem maiorem, vel minorem: Et conuertendo, vt maior numerus fractionis, vel minor, ad differentiam numerorum fractionis, ita maior radix, vel minor ad residuum subtractionis; Si in dato exemplo fiat:

Vt 5. ad 3. ita √ʒ 50. ad aliud, Vel

Vt 2. ad 3. ita √ʒ 8. ad aliud, producetur residuum quæsitum √ʒ 18.

SIC etiam si subtrahenda sit √ce 162. ex √ce 6000. Diuisa hac per illam, fit Quotiens rationalis √ce $\frac{1000}{27}$. id est, $\frac{10}{3}$. vbi differentia numerorum fractionis est 7. Si ergo fiat,

Vt 10. ad 7. ita √ce 6000. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 7. ita √ce 162. ad aliud, gignetur residuum desideratum √ce 2058.

Alia ratio pulchra subtrahendi radices cõmensurabiles.

SVBTRAHI etiam potest radix à radice, si sint commensurabiles, hac ratione. Diuisa maiore per minorem, dematur vnitas ex Quotiente rationali. Si namque reliquus numerus in minorem radicem ducatur, prodibit residuum quæsitum. Nam si totus Quotiens in minorem radicem, id est, in diuisorem ducatur, producetur maior radix, quæ diuisa fuit. Cum ergo vnitas in minorem radicem faciat minorem radicem; liquido constat, si Quotiens, dempta prius vnitate, ducatur in minorem radicem, gigni eandem maiorem radicem, minus minore radice, hoc est, differentiam radicum propositarum.

SIT subtrahenda √ʒʒ 3888. à √ʒʒ 19683. Ex diuisione fit Quotiens rationalis √ʒʒ $\frac{81}{16}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Dempta 1. remanet $\frac{1}{2}$. quæ (reuocata prius ad √ʒʒ $\frac{1}{16}$. (ducta in √ʒʒ 3888. facit √ʒʒ 243. differentiam radicum propositarum.

Alia subtrahendi ratio quã do radices proposita habent aliam radicem eiusdem generis cõmunem mensuram.

DENIQVE fieri poterit subtractio hoc alio modo. Diuidatur vtraque radix per communem aliquam radicem eiusdem generis, ita vt Quotientes

Quotientes sint rationales, si fieri potest. Nam subtracto vno Quotiente ex alio, si reliquus numerus ducatur in communem illum diuisorem, procreabitur radix residua. Vt si demenda sit √ʒ 27. a √ʒ 75. Diuisa vtraq. per √ʒ 3. fiunt Quotiẽtes rationales √ʒ 9. & √ʒ 25. hoc est, 3 & 5. Quorum differentia 2. ducta in communem diuisorem √ʒ 3. facit √ʒ 12. pro residuo subtractionis. Ratio huius operationis hæc est. Sint duo numeri 10. & 30. quorum differentia 20. diuidanturq. per communem diuisorem 5. Habebunt ergo Quotientes 6. & 2. eandem proportionem, quam 30. & 10. Ac proinde per conuersionem rationis, erit 30. ad 20. excessum, quo antecedens 30. superat consequentem 10. vt 6. ad 4. excessum, quo antecedens 6. superat consequentem 2. Et permutando erit 30. ad 6. vt 20. ad 4. Habet autem 30. ad 6. proportionem quintuplam, denominatam videlicet à communi diuisore 5. Igitur & 20. ad 4. proportionẽ habebit quintuplam: ideoq. 20. diuisus per 5. faciet Quotientem 4. Ex quo constat, si 4. differentia Quotientum 2. & 6. ducatur in diuisorem communem 5. produci 20. differentiam numerorum 10. & 30.

	20	
10		30
	5	
2		6
	4	

INTER DATOS DVOS NVMEROS
quotlibet medios proportionales constituere.

Cap. XXI.

AGENDVM iam esset de Algorithmo numerorum irrationalium compositorũ, sed libet prius exponere vsum quendã præclarum radicũ simplicium in constituendis quotlibet mediis proportionalibus inter datos duos numeros. qui est eiusmodi. Si constituendus sit vnus medius proportionalis, assumendum erit signum radicale hoc, √ʒ. quod inter quadratum, & vnitatẽ cadat vnus medius proportionalis in qualibet progressione Geometrica, quæ ab 1. incipiat. Si duo medij, accipiendum est signum radicale √ce: si tres, signũ √ʒʒ: si quatuor, signum √ß. si quinque, signum √ʒce. & sic deinceps: quod facile nos docebit progressio Geometrica in cap. 2. posita.

Quotuis medios proportionales inter duos numeros collocare.

DEINDE diuiso maiore numero per minorem, instituenda est progressio Geometrica ab 1. incipiens, & per Quotientem progrediens tot terminorum, duobus amplius, quot medij proportionales desiderantur.

TERTIO cuilibet termino huius progressionis præfigendum signum radicale, quod assumendum esse docuimus, pro ratione numeri mediorum.

Quarto, extractis radicibus, quas signum radicale indicat, quando extrahi possunt, delenda sunt signa radicalia, quorum radices extractæ sunt.

Quinto ac vltimo pro extremis progressionis vltimæ ponendi sunt numeri dati, ac per minorem singuli termini medij multiplicandi.

V. g. si inter 5. & 20. statuendus sit vnus numerus medius, ascifcendum est signum hoc radicale √ʒ.

DEINDE diuiso maiore numero 20. per minorem 5. constituenda progressio hæc trium terminorum 1. 4. 16. per Quotientem 4. progrediens.

Tertio cuilibet termino præfigendum signum √ʒ. hoc modo. √ʒ 1. √ʒ 4. √ʒ 16. eruntque hi termini continuè quoque proportionales, cum sint radices quadratę numerorum 1. 4. 16. continuè proportionalium.

Quarto extractis radicibus quadratis, sic stabit progressio. 1. 2. 4.

Quinto, huius progressionis termini singuli per numerum minorem 5. multiplicandi sunt. Vnde sic stabit progressio 5. 10. 20. inuentusq. erit

a Schol. 18. septimi. medius terminus proportionalis 10.[a] quia 5. 10. 20. easdem habent proportiones, quas 1. 2. 4. cum hos numeros idem numerus 5. multiplicans illos produxerit.

SINT rursus inter 6. & 18. inueniendi quinque medij proportionales. Hic ascifcendum est signum √ʒc.

DEINDE diuiso maiore numero 18. per minorem 6. instituenda est progressio septem terminorum per Quotientem 3. progrediens, hoc modo.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

Tertio cuilibet termino præponendum signum √ʒc. vt hic.

√ʒc 1. √ʒc 3. √ʒc 9. √ʒc 27. √ʒc 81. √ʒc 243. √ʒc 729.

eruntq. hi termini continuè quoque proportionales, cum sint radices Zensicubicæ numerorum 1. 3. 9. &c. continuè proportionalium.

Quarto extractis radicibus, quæ extrahi possunt, & deletis signis, quorum radices extractæ sunt, sic stabit progressio.

1. √ʒc 3. √c 3. √ʒ 3. √c 9. √ʒc 243. 3.

Quinto, ac vltimo, multiplicatis singulis huius progressionis terminis per 6. minorem numerum ex duobus propositis, constitues sequentem progressionem cum quinque mediis terminis proportionalibus.

6. √ʒc 139968. √c 648. √ʒ 108. √c 1944. √ʒc 11337408. 18.

b Schol. 18. septimi. [b] eruntque hi termini continuè proportionales, cum sint producti ex eodem numero 6. in numeros 1. √ʒc 3. √c 3. &c. continuè proportionales.

QVOD autem hi termini sint continuè proportionales, probari experiendo etiam potest. Nam sumptis quibuslibet tribus proximis, tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in se, vt vult

vult propos. 20. lib. 7. Eucl. Vt sumptis hisce tribus √c 648. √ʒ 108. √c 1944. tam ex primo in tertium, quam ex medio in se, gignitur numerus 108. Nam ex √ʒ 108. in se fit numerus 108. & ex √c 648. in √c 1944. fit √c 1259712. hoc est, 108. Item acceptis tribus hisce, 6. √ʒc 139968. √c 648. Ex medio in se quadratè fit √ʒc 19591041024. hoc est, extracta radice quadrata 139968. productus numerus est √c 139968. (quia 139968. radicem cubicam non habet.) qui etiam producitur ex 6. in √c 648. vt liquet.

SCHOLIVM.

SOLET sæpenumero contingere, vt ex numero aliquo extrahenda sit radix quadrata, vel cubica, qui eam non habet. Ne ergo frustra tempus insumatur, traduntur à nonnullis regulæ quædam, quibus facile cognoscuntur numeri non quadrati, & non cubi.

Primum omnes numeri, qui vltimam figuram ad dexteram habent 2. vel 3. vel 7 vel 8. non sunt quadrati: quia in numeris quadratis vltima figura necessariò debet esse vna ex his, 1. 4. 5. 6. 9. 0. Qui numeri non sint quadrati.

Deinde nullus numerus, ex quo reiectis 9. vt in probatione nouenaria fieri consueuit, non superest aliqua harum figurarum 1. 4. 7. 0. quadratus est.

Tertio, numerus vltimam figuram habens 5. nisi eam præcedat figura 2. cum alia figura pari, vel cũ 0. quadratus esse nequit. Vt hi numeri 125. 325. 67525. 89725. 100925. quadrati non sunt.

Quarto, numeri vltimam figuram habentes 1. vel 9. nisi eam antecedat figura par, aut 0. quadrati non sunt. Vt hi numeri 4371. 4379. 67899. 75351. quadrati non sunt.

Quinto, numeri habentes vltimam figuram 4. nisi eam præcedat alia figura par, vel 0. quadrati non sunt. Vt hi numeri 6934. 70014. quadrati esse nequeunt.

Sexto, numeri habentes figuram vltimam 6. nisi eam antecedat figura impar, quadrati non sunt. Vt numeri 5746. 7086. 34526. quadrati non sunt.

Septimo ac vltimo, numerus habens in fine plures figuras 0. sub numero impari, quadratus esse non potest. Vt numeri 460. 678000. 91010. quadrati non sunt.

QVOD verò ad cubos attinet, nullus numerus erit cubus, si reiectis 9. non remanet 1. vel 8. vel 0. Itaque 12000. non erit cubus, cum reiectis 9. remaneant 3. Qui numeri non sint cubi.

Deinde numerus, cuius vltima figura est 2. vel 4. vel 8. si proximè antecedens figura non sit par, vel 0. non potest esse cubus. Vt numeri 34532. 456174. 1100038. non sunt cubi.

Tertio nullus numerus habens in fine 0. vel 00. potest esse cubus. Vt hi numeri 1230. 100. 34600. cubi non sunt.

Quarto & vltimo, numerus habens vltimam figuram 5. nisi proximè ante-

cedens figura sit 2. vel 7. cubus esse non poterit. Vt hi numeri. 361035. 67895. 1120015. cubi non sunt.

Itaq. antequam ad extractionem radicis quadratæ, vel cubicæ aggrediaris, operæpretium feceris, si prius per conditiones prædictas experiaris, an propositus numerus possit esse quadratus, aut cubus.

DE ADDITIONE AC SUBTRACTIONE numerorum irrationalium compositorum.

CAP. XXII.

CONFICITVR Algorithmus numerorum irrationalium compositorum ex radicum simplicium Algorithmo, dummodo pro additione, & subtractione, in memoriam reducantur regulæ illæ duæ, quæ de signis + & — traditę sunt cap. 4. videlicet.

1

Duę regulæ obseruandæ in additione, & subtractione.

Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præpostere ponuntur. Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex + fit —, & ex — fit +.

2

Diuersa signa mutant speciem operationis. Et in additione ponitur signum maioris numeri: In subtractione verò superioris, siue maior is sit, siue minor, aut æqualis.

Quæ quidem duæ regulæ cap. 4. prædicto expositæ sunt, & ex subiectis exemplis intelligi facilè possunt.

Exempla Additionis.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{18} \\ 4+\sqrt{8} \\ \hline 10+\sqrt{50} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{27}+\sqrt{8} \\ \sqrt{12}+\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{75}+\sqrt{18} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{162}-2 \\ \sqrt{200}-3 \\ \hline \sqrt{722}-5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{162} \\ \sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{32} \\ \hline \sqrt[4]{1875}-\sqrt[4]{1250}. \end{array}$$

Exempla

Exempla Subtractionis.

$$\begin{array}{r} \sqrt[4]{1875}+\sqrt[4]{1250} \\ \sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{162} \\ \hline \sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{32} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{50}-5 \\ \sqrt{8}-2 \\ \hline \sqrt{18}-3 \end{array}$$

Exempla exceptionis in subtractione pro prima regula.

$$\begin{array}{r} \sqrt{50}+2 \\ \sqrt{18}+4 \\ \hline \sqrt{8}-2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{50}-2 \\ \sqrt{18}-4 \\ \hline \sqrt{8}+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{50}+6 \\ \sqrt{72}+2 \\ \hline 4-\sqrt{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{72}+2 \\ 6+\sqrt{18} \\ \hline \sqrt{18}-4 \end{array}$$

Exempla exceptionis in additione pro regula secunda.

$$\begin{array}{r} \sqrt{50}+3 \\ \sqrt{32}-5 \\ \hline \sqrt{162}-2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{50}-3 \\ \sqrt{32}+5 \\ \hline \sqrt{162}+2 \end{array}$$

Exempla exceptionis in subtractione pro regula secunda.

$$\begin{array}{r} \sqrt{162}+2 \\ \sqrt{50}-3 \\ \hline \sqrt{32}+5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{162}-2 \\ \sqrt{50}+3 \\ \hline \sqrt{32}-5 \end{array}$$

Alia exempla additionis.

$$\begin{array}{r} 8-\sqrt{50} \\ \sqrt{242}-12 \\ \hline \sqrt{72}-4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{50}+6 \\ 24-\sqrt{242} \\ \hline 30-\sqrt{72} \end{array}$$

Alia exempla subtractionis.

$$\begin{array}{r} \sqrt{72}-4 \\ 8-\sqrt{50} \\ \hline \sqrt{242}-32 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30-\sqrt{72} \\ \sqrt{50}+6 \\ \hline 24-\sqrt{242} \end{array}$$

Alia exempla ſubtractionis.

√ʒ 0 + 16
√ʒ 320 − 8
―――――――
24 − √ʒ 320

√ʒ 180 + 0
√ʒ 320 − 8
―――――――
8 − √ʒ 20

Obſeruanda in nõnullis ſubtractionibus.

Hic in priori exemplo quoniam numerus √ʒ 320. non habet reſpondentem in ſuperiori numero, poſitus eſt numerus √ʒ 0. cum ſigno +. Item quia in poſteriori exemplo numerus 8. in ſuperiori numero non habet reſpondentem, poſitus quoque eſt numerus 0. cum ſigno +. quod ſemper in ſubtractione obſeruandum eſt, vt ſuperiores duæ regulæ locum habeant.

VERVM in huiuſmodi exemplis fiet hoc etiam modo ſubtractio. Poſt numerum, à quo debet fieri ſubtractio, ponatur numerus ſubtrahendus, commutatis tamen ſingulis ſignis eius in ſigna contraria, ponendo − pro +. & contra. Deinde fiat reductio per additionem. Vt ſi ſubtractio fieri debeat √ʒ 320 − 8. à numero 16. ſic ſtabit exemplum.

16 − √ʒ 320 + 8

Si ergo addantur 16. ad 8. fiunt 24. & dempta √ʒ 320. erit reſiduum 24 − √ʒ 320.

Item ſi fiat ſubtractio √ʒ 320 − 8. à √ʒ 180. ſic ſtabit exemplum. √ʒ 180. − √ʒ 320 + 8. Si ergo addantur √ʒ 180. & − √ʒ 320. hoc eſt, mutata ſpecie operationis propter diuerſa ſigna + & −. detracta √ʒ 180. & √ʒ 320. erit reſiduum 8 − √ʒ 20.

Rurſus ſit facienda ſubtractio √ʒ 180 − 8. de √ʒ 320. ſic ſtabit exemplum. √ʒ 320 − √ʒ 180 + 8. Si ergo addantur ſimul √ʒ 320 − √ʒ 180. hoc eſt, mutata ſpecie operationis, propter diuerſa ſigna + & −. dempta √ʒ 180. de √ʒ 320. erit reſiduum 8 + √ʒ 20.

Sit præterea facienda ſubtractio 8 − √ʒ 12. de √ʒ 72 − 4. Sic ſtabit exemplum. √ʒ 72 − 4 − 8 + √ʒ 12. Si ergo addantur inter ſe √ʒ 72. √ʒ 12. & − 4 − 8. erit reſiduum √ʒ 72 + √ʒ 12 − 12. quia radices illæ ſunt incommenſurabiles. Quòd ſi addantur per propoſ. 4. lib. 2. Eucl. facient √ʒ (84 + √ʒ 3456.) atq; adeo reſiduum totum erit √ʒ (84 + √ʒ 3456) − 12.

Hoc autem modo rectè fieri ſubtractionem, liquido conſtat in numeris rationalibus. Sit enim facienda ſubtractio √ʒ 49 − 3. de 8 + √ʒ 9. hoc eſt, 4. de 11. vbi reſiduum eſt 7. Secundum præceptum traditum ſic ſtabit exemplum. 8 + √ʒ 9 − √ʒ 49 + 3. Iam ex 8. & 3. fiunt 11. & ex √ʒ 9. & − √ʒ 49. fit numerus − 4. Ergo reſiduum eſt 11 − 4. hoc eſt, 7. vt ratio poſtulat.

Alia exẽpla additionis, & ſubtractionis.

7 + √ʒ 5
4 + √ʒ 3
―――――――
11 + √ʒ (8 + √ʒ 60)

SED vt totum hoc negotium additionis, ſubtractioniſque planius intelligatur, ſubiungemus alia nonnulla exempla. Sint ergo addenda 7 + √ʒ 5. ad 4 + √ʒ 3.

Ex 7. & 4. fiunt 11. & ex √ʒ 5. ac √ʒ 3. per propoſ. 4. lib. 2. Eucl. fit √ʒ (8 + √ʒ 60.) Igitur ſumma eſt 11 + √ʒ (8 + √ʒ 60.)

RVRSVS ſint addenda √ʒ 5 + 3. ad √ʒ 20 − 4. Ex √ʒ 5. & √ʒ 20. quia commenſurabiles ſunt, fit √ʒ 45. & ex + 3. ac − 4. fit − 1. Tota ergo ſumma eſt √ʒ 45 − 1. Eadem ſumma conflabitur, ſi √ʒ 5. ad √ʒ 20. addantur per propoſ. 4. lib. 2. Eucl. vt ad initium cap. 19. docuimus. Fiet enim √ʒ (25 + √ʒ 400.) hoc eſt, √ʒ 45. atque ita rurſus erit tota ſumma √ʒ 45 − 1.

√ʒ 5 + 3
√ʒ 20 − 4
―――――――
√ʒ 45 − 1

PRÆTEREA ſint addenda √ʒ 5 + 7. ad √ʒ 6 − 7. Ex √ʒ 5. & √ʒ 6. fit √ʒ (11 + √ʒ 120.) & ex + 7. & − 7. fit 0. Summa ergo collecta erit √ʒ (11 + √ʒ 120.)

√ʒ 5 + 7
√ʒ 6 − 7
―――――――
√ʒ (11 + √ʒ 120)

AMPLIVS ſint addenda √ʒ 7 + 3. ad √ʒ 20 − 4. Ex √ʒ 7. & √ʒ 20. fit √ʒ. (27 + √ʒ 560) & ex + 3. & − 4. fit − 1. Tota ergo ſumma erit √ʒ (27 + √ʒ 560) − 1.

√ʒ 7 + 3
√ʒ 20 − 4
―――――――
√ʒ (27 + √ʒ 560)

SINT quoque addenda √ʒ 5 + 7. ad √ʒ 6 − 2. Ex √ʒ 5. & √ʒ 6. fit √ʒ (11 + √ʒ 120.) at ex + 7. & − 2. fit + 5. Tota ergo ſumma erit √ʒ (11 + √ʒ 120) + 5. Vel 5 + √ʒ (11 + √ʒ 120.)

√ʒ 5 + 7
√ʒ 6 − 2
―――――――
√ʒ (11 + √ʒ 120) + 5

ITEM ſint addenda 7 + √ʒ 5. ad 4 − √ʒ 3. Summa erit 11 + √ʒ 5 − √ʒ 3. Vel ſecundùm regulam 2. ſubtrahemus per propoſ. 7. lib. 2. Eucl. √ʒ 3. à √ʒ 5. propter diuerſa ſigna + . & −. hoc modo. Quadrati numeri 5. & 3. faciunt 8. & ex + √ʒ 5. in − √ʒ 3. fit − √ʒ 15. cuius duplum − √ʒ 60. ex aggregato quadratorum 8. auferatur, remanebuntque 8 − √ʒ 60. Radix ergo huius relicti eſt id, quod relinquitur poſt detractionem √ʒ 3. ex √ʒ 5. cui radici præfigendum eſt ſignum +, maioris numeri. Tota ergo ſumma eſt 11 + √ʒ (8 − √ʒ 60.)

7 + √ʒ 5
4 − √ʒ 3
―――――――
11 + √ʒ (5 − √ʒ 3)

ITEM ſint addenda 8 − √ʒ 7. ad 10 − √ʒ 7. Ex 8. & 10. fiunt 18. at ex − √ʒ 7. & − √ʒ 7. fit − √ʒ 28. Tota ergo ſumma erit 18 − √ʒ 28.

8 − √ʒ 7
10 − √ʒ 7
―――――――
18 − √ʒ 28

ITEM ſint addenda 10 + √ʒ 49. ad 7 − √ʒ 4. Vbi manifeſtum eſt, ſummam eſſe 22. ex 10. & 7. fiunt 17. Et ſubtracta √ʒ 4. à √ʒ 49. per propoſ. 7. lib. 2. Eucl. propter ſigna + . & − diuerſa, remanent √ʒ (53 − √ʒ 784.) cui præponendum eſt ſignum + maioris numeri. Tota ergo ſumma eſt 17 + √ʒ (53 − √ʒ 784.) Cùm ergo radix quadrata huius numeri 53 − √ʒ 784. ſit 5.

10 + √ʒ 49
7 − √ʒ 4
―――――――
17 + √ʒ (53 − √ʒ 784)

(Nam 28. radix numeri 784. dempta ex 53. relinquit 25. cuius radix quadrata est 5.) erit tota summa 17 + 5. hoc est, 22.

ITEM sint addenda 10 — √ȝ 49. ad 7 + √ȝ 4. vbi etiam liquet, summam esse 12. Ex 10. & 7. fiunt 17. Et subtracta √ȝ 4. à √ȝ 49. propos. 7. lib. 2. Eucl. propter diuersa signa — & +. remanet √ȝ. (53 — 784) cui præfigendum est signum — maioris numeri. Tota ergo summa collecta est 17 — √ȝ (53 — √ȝ 784.) Cùm ergo radix quadrata huius numeri 53 — √ȝ 784. sit 5. erit tota summa 17 — 5. hoc est, 12.

10	—	√ȝ 49
7	+	√ȝ 4
17	—	√ȝ (53 — √ȝ 784)

ITEM sint addenda 6. ad √ȝ 24. + 3. Fiet summa √ȝ 24 + 9. Vel 9 + √ȝ 24.

√ȝ 24	+	3
√ȝ 0	+	6
√ȝ 24	+	9

ITEM sint addenda 6. ad √ȝ 24 — 3. Fiet summa √ȝ 24 + 3.

√ȝ 24	—	3
√ȝ 0	+	6
√ȝ 24	+	3

ITEM sit addenda √ȝ 6. ad √ȝ 24 + 3. Ex radicibus, quia commensurabiles sunt, fit √ȝ 54. At ex — 3 & + 0. fit — 3. Summa igitur est √ȝ 54 — 3.

√ȝ 24	—	3
√ȝ 6	+	0
√ȝ 54	—	3

ITEM sit addenda √ȝ 8. ad √ȝ 32 + √ȝ 18. Ex √ȝ 8. & √ȝ 32. quia commensurabiles sunt, fit √ȝ 72. Fit ergo summa √ȝ 72 + √ȝ 18. Atque ex his duabus radicibus, cùm commensurabiles sint, fit √ȝ 162. summa quæsita. Vel quia commensurabiles etiam sunt √ȝ 8. & √ȝ 18. fiet ex illis √ȝ 50. ita vt tota summa sit √ȝ 50 + √ȝ 32. Atque ex his duabus radicibus, cùm sint commensurabiles, fit √ȝ 162. summa quæsita, vt priùs. Itaque hi numeri √ȝ 72 + √ȝ 18. & √ȝ 50 + √ȝ 32. æquales sunt, cùm vterque æqualis sit √ȝ 162. vt patuit.

√ȝ 8	+	√ȝ 0
√ȝ 32	+	√ȝ 18
√ȝ 72	+	√ȝ 18

ITEM sit addenda √ce 216 — √ȝȝ 405. ad √ce 64 — √ȝȝ 80. Ex √ce 216. & √ce 64. quia commensurabiles sunt, fit √ce 4000. hoc est, 10. At ex √ȝȝ 405. & √ȝȝ 80. quia commensurabiles quoque sunt, fit √ȝȝ 3125. Tota ergo summa est 10 — √ȝȝ 3125.

√ce 216	—	√ȝȝ 405
√ce 64	—	√ȝȝ 80
10	—	√ȝȝ 3125

ITEM sit addenda √ȝȝ 256 — √ce 27. ad √ȝȝ 81 — √ce 8. Ex √ȝȝ 256. & √ȝȝ 81. fit √ȝȝ 2401. hoc est, 7. At ex — √ce 27. & + √ce 8. fit — √ce 1. hoc est, — 1. Summa ergo tota est 7 — 1. hoc est 6. Quod ita esse, liquet. Nam √ȝȝ 256. est 4. à qua si tollatur √ce 27. hoc est, 3. remanet 1. cui si addatur √ȝȝ 81. id est 3. & insuper √ce 8. id est 2. fiet summa 6. vt priùs.

√ȝȝ 256	—	√ce 27
√ȝȝ 81	+	√ce 8
7	—	1

SINT

SINT denique addendæ √ȝ(5 + √ȝ 6.) & √ȝ(10 — √ȝ 11.) Huiusmodi radices, quas supra appellauimus radices numerorum irrationalium cõpositorum, diminutorúmve, & quas alij radices Vniuersales dicunt, non possunt commodius in vnam summam redigi, quam per signum +, hoc modo. √ȝ(5 + √ȝ 6.) + √ȝ(10 — √ȝ 11.) Sic etiam si prior à posteriori sit subtrahenda, erit residuum √ȝ(10 — √ȝ 11) — √ȝ (5 + √ȝ 6.) Sed de huiusmodi radicibus plura cap. 24. dicemus.

SIT subtrahenda √ȝȝ 256 — √ce 27. à √ȝȝ 2401 — √ce 1. Vbi manifestum est, residuum esse 5. Quoniam √ȝȝ 2401. & √ȝȝ 256. commensurabiles sunt, si hæc ab illa dematur, relinquetur √ȝȝ 81. hoc est, 3. Et si — √ce 27. à — √ce 1. subtrahatur, cum sint etiam commensurabiles, remanebit + √ce 8. hoc est, 2. Liquet autem 3. & 2. efficere 5. vt ratio postulat.

√ȝȝ 2401	—	√ce 1
√ȝȝ 256	—	√ce 27
√ȝȝ 81	+	√ce 8

ITEM sint subtrahenda 9 — √ȝ 50. à √ȝ 72 — 3. Quoniam + √ȝ 72. & — √ȝ 50. habent dissimilia signa, mutabitur species operationis, hoc est, inter se addendæ sunt, fietque earum summa √ȝ 242. Item quia — 3. & + 9. habent signa diuersa, fiet etiam additio, & summa 12. recipiet signum — superioris numeri. Residuum ergo quod quæritur, erit √ȝ 242 — 12.

√ȝ 72	—	3
9	—	√ȝ 50
√ȝ 242	—	12

ITEM sit subtrahendus à √ce 1000 + √ȝȝ 3125. numerus hic √ce 216 — √ȝȝ 405. Quia √ce 1000. & √ce 216. commensurabiles sunt, detracta hac ex illa remanet √ce 64. hoc est, 4. At ex √ȝȝ 3125. & √ȝȝ 405. quæ etiam commensurabiles sunt, fit summa √ȝȝ 20480. Hæ enim inter se addendæ sunt, iuxta 2. regulã, propter signa dissimilia: eiq; summæ præfigendum signum + superioris numeri.

√ce 1000	+	√ȝȝ 3125
√ce 216	—	√ȝȝ 405
4	+	√ȝȝ 20480

DENIQVE sit subtrahenda √ce 216 — √ȝȝ 405. à √ce 1000 — √ȝȝ 3125. Residuum erit id, quod in hac formula descriptum est. Nam √ce 216. detracta ex √ce 1000. reliquam facit √ce 64. hoc est, 4. &c.

√ce 1000	—	√ȝȝ 3125
√ce 216	—	√ȝȝ 405
4	—	√ȝȝ 80

Compẽdiosa additio, subtractioque cõpositorum & diminutorum numerorũ similium.

CAETERVM quando duæ particulæ numeri compositi sunt omnino æquales duabus particulis numeri diminuti, breuissimè vnus numerus ad alterum additur, vel diminutus à composito demitur, hac ratione.

Additio peracta erit, si prior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt ex additione 15 + √ȝ 8. ad 15 — √ȝ 8. fit summa 30. Item ex additione √ȝ 20 + 6. ad √ȝ 20 — 6. fit summa √ȝ 80. Sic etiam ex √ȝ 20 + √ȝ 6. ad √ȝ 20 — √ȝ 6. fit summa √ȝ 80. Ratio est, quod

O

posteriores particulæ se mutuò interimant, propter signa +. & —.

Subtractio vero absoluta erit, si posterior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt 10 — √z 4. ex 10 + √z 4. relinquunt √z 16. id est 4. Item √z 12 — 5. ex √z 12 + 5. relinquunt 10. Item √z 12 — √z 5. ex √z 12 + √z 5. relinquunt √z 20. Ratio est, quod priores particulæ ex subtractione nil relinquant, & posteriores addendæ sint, quemadmodum regula 2. præcipit, propter diuersa signa — & +.

DE MVLTIPLICATIONE, ac Diuisione numerorum irrationalium Compositorum, & Diminutorum.

Cap. XXIII.

Hic etiam in memoriam reuocanda est regula illa, quam cap. 5. de signis + & — præscripsimus. Videlicet.

Regula in multiplicatione ac diuisione, obseruanda.

Eadem signa ponunt signum Additorum: Diuersa verò signa ponunt signum Subtractorum.

Siue igitur plus in plus, siue minus in minus multiplicetur, semper producitur plus. Et siue plus in minus, siue minus in plus ducatur, semper procreatur minus. Posito igitur ex duobus numeris vno sub altero, fit multiplicatio, vt in numeris absolutis, dummodo obserues ea, quæ cap. 18. de multiplicatione radicum simplicium, & cap. 19. de earundem radicum additione, subtractioneq; tradita sunt. id quod exempla infrascripta docebunt. In sequenti exemplo, ex — √z 45. in — √z 20. fit + √z 900. hoc est, + 30. Et ex — √z 45. in + 6, id est, in — √z 36. fit — √z 1620. Et ex — √z 20. in + 8. hoc est, in + √z 64. fit — √z 1280. Ac denique ex + 8. in + 6. fit + 48. Eritque totus numerus productus 48 — √z 1280 — √z 1620 + 30. qui, si fiat reductio per additionem, & subtractionē, erit 78 — √z 5780.

6 — √z 20
8 — √z 45

---

48 — √z 1280 — √z 1620 + 30
Per reductionem erit, 78 — √z 5780.

Nam ex + 48. & + 30. fiunt + 78. Et ex — √z 1280. & — √z 1620. quia commensurabiles sunt, fit — √z 5780.

In hoc altero exemplo, ex — √zz 162. in — √zz 648. fit + √zz 104976. hoc est, + 18. Et ex — √zz 162. in + √zz 288. fit — √zz 46656. hoc est, √z 216. Et ex — √zz 648. in + √zz 128. fit — √zz 82944. id est, — √z 288. ac tādem ex + √zz 128. in + √zz 288. fit + √zz 36864. id est, √z 192. Eritque totus numerus productus √z 192 — √z 288 — √z 216 + 18. Vel, vt maiores semper numeri præcedant. 18 + √z 192 — √z 288 — √z 216. vt in formula vides.

√zz 288 — √zz 648
√zz 128 — √zz 162

Productus. √z 192 — √z 288 — √z 216 + 18

Vel 18 + √z 192 — √z 288 — √z 216

Alia exempla multiplicationis.

√ce 7 + √ß 6
√z 3

√zce 1323 + √zß 8748

√z 7 + √ce 3
√z 2

√z 14 + √zce 72

In priori exemplo reduximus √ß 6. & √z 3. ad eandem denominationem, videlicet ad √zß 36. & √zß 243. atque ita ex multiplicatione facta est √zß 8748. Deinde √z 3. & √ce 7. reductæ sunt ad √zce 27. & √zce 49. eiusdem denominationis, procreatáque est ex multiplicatione √zce 1323.

In exemplo posteriori reductæ sunt √z 2. & √ce 3. ad √zce 8. & √zce 9. & ex multiplicatione facta est √zce 72. atque ex √z 2. in √z 7. facta est √z 14.

Aliud exemplum in numeris rationalibus.

√ß 9 + √ce 27
√z 4

√z 36 + √zce 46656
hoc est, 6 + 6

In hoc exemplo reducuntur √ce 27. & √z 4. ad √zce 729. & √zce 64. quarum multiplicatio facit √zce 46656. hoc est, 6. Deinde ex √z 4. in √z 9. fit √z 36. id est, 6. ita vt totus numerus productus sit 6 + 6. hoc est, 12.

Alia duo exempla.

7 + √z 5
7 + √z 5

---

49 + √z 245 + √z 245 + 5

7 — √z 5
7 — √z 5

---

49 — √z 245 — √z 245 + 5

IN priori exemplo ex numero composito in se fit productus 49 + √z 245 + √z 245 + 5. hoc est, 54 + √z 980. quod ex 49. & + 5 fiant 54. & ex √z 245. & √z 245. hoc est, ex duplo √z 245. fiat √z 980. In posteriori ex numero diminuto in se fit productus 49 — √z 245 — √z 245 + 5, hoc est, 54 — √z 980.

Compendiosa multiplicatio numeri compositi, vel diminuti in se.

IMMO vt ducatur numerus compositus in seipsum, vel in alium æqualem, satis est, vt quadrata particularum simul addantur, & huic summæ adiiciatur duplum eius, quod fit ex vna particula in aliam, vt in duobus proximis exemplis patet. Nam quadrata particularum conficiunt 54. Et ex vna particula in aliam fit in priori exemplo √z 245. in posteriori autem — √z 245. cuius duplum est √z 980. vel — √z 980. Igitur in exemplo priori producetur numerus 54 + √z 980. In posteriori verò hic, 54 — √z 980. veluti prius.

Alia duo exempla in numeris rationalibus.

5 + √z 4	5 — √z 4
5 + √z 4	5 — √z 4
25 + √z 100 + √z 100 + 4	25 — √z 100 — √z 100 + 4

IN priori ducuntur 7. in se, fitque productus 49. In posteriori verò ducuntur 3. in se, fitque productus 9. vt liquet. Quæ multiplicationes per compendium proximè traditum ita fient. Quadrata particularum conficiunt 29. Et ex vna particula in aliam, fit, in priori quidem exemplo, √z 100. in posteriori verò — √z 100. cuius duplum est √z 400. vel — √z 400. In priori ergo exemplo productus numerus erit 29 + √z 400. hoc est, 49. In posteriori verò 29 — √z 400. id est, 9.

Alia duo exempla.

6 + √z 8	√z 10 + √z 2
6 — √z 8	√z 10 — √z 2
36 + √z 288 — √z 288 — 8	10 + √z 20 — √z 20 — 2

Compendiosa multiplicatio numeri compositi quadratarum radicum per similem numerum diminutum.

IN his duobus exemplis radicum quadratarum, ac similibus, in quibus ducitur numerus compositus in similem diminutum, aut contra, perficietur breuissimè multiplicatio, si in alterutro numerorum ex quadrato particulæ prioris dematur quadratum posterioris particulæ, siue posterior particula minor fit priore, siue maior. Vt in priori exemplo, si 8. quadratus numerus posterioris particulæ √z 8. dematur ex 36. numero quadrato prioris particulæ 6. reliquus fiet productus numerus 28. In posteriori autem exemplo, si 2. quadratus numerus posterioris particulæ √z 2. detrahatur à 10. quadrato numero prioris particulæ √z 10. relinquetur productus numerus 8.

ATQVE ita quotiescunque numerus compositus, ac diminutus radicum quadratarũ irrationalis, si similes sint, inter se multiplicantur, producitur semper vnicus numerus, & is rationalis. quod quidem Eucl. lib. 10. propos. 115. demonstrauit. quia huiusmodi numeri sunt Binomium, ac Residuum, vt cap. 27. constabit.

QVANDO posterior particula maior est, producitur numerus diminutus, vt in hoc apposito exemplo apparet. Nam si 16. quadratus numerus posterioris particulæ dematur ex 4. quadrato numero particulæ prioris, remanent 4 — 16.

2 + √z 16
2 — √z 16
4 — 16

Atque hoc ita esse, docet hæc altera formula multiplicationis. Et quoniam 2 + √z 16. faciunt 6. & 2 — √z 16. faciunt 2 — 4. si 2 — 4. ducantur in 6. fit productus numerus 12 — 24. Necesse igitur est, hosce duos numeros 4 — 16. & 12 — 24. esse æquales, vt verè sunt, cum vnus ab altero detractus relinquat 0. vt subscriptæ duæ formulæ subtractionum demonstrant: quia 8 — 8. æquiualent nihilo. quod etiam ex eo patet, quod tam ex 4 ad — 16. quam ex 12. ad — 24. semper summa fiat — 12. iuxta regulam 2. additionis.

	2	+ √z 16	
	2	— √z 16	
	— √z 64	— 16	
4	+ √z 64		
	4	— 16	

2 — 4
6
12 — 24

PORRO de multiplicatione radicum numerorum compositorum, vel diminutorum, quas Vniuersales dicunt, agemus cap. 24. quod sequitur.

4 — 16	12 — 24
12 — 24	4 — 16
— 8 + 8	8 — 8

Exempla Diuisionis.

Diuisio numeri compositi diminutiue per radicem simplicem.

	√ce 28 + √ce 20	(√ce 7 + √ce 5
per	√ce 4 √ce 4	
	6	
	√ce 28 + √ce 20	(√ce 4 + √ce $2\frac{6}{7}$
per	√ce 7 √ce 7	

Alia exempla Diuisionis.

	√z 20 — √ce 10	(√z $2\frac{2}{9}$ — √ce $\frac{10}{27}$
per	3	
	√zz 8 + √ß 3	(√zz 2 + √zß $\frac{9}{12}$
per	√z 2	
		O 3

IN priori exemplo, diuisa $\sqrt{z}$ 20. per 3. id est, per $\sqrt{z}$ 9. fit Quotiens $\sqrt{z}$ 2 $\frac{2}{9}$. Diuisa verò — $\sqrt{ce}$ 10. per + 3. id est, per + $\sqrt{ce}$ 27. fit Quotiens — $\sqrt{ce}$ $\frac{10}{27}$. In posteriori autem exemplo, reducendæ sunt $\sqrt{zz}$ 8. & $\sqrt{z}$ 2. ad $\sqrt{zzz}$ 64. & $\sqrt{zzz}$ 16. eiusdem denominationis, diuisaque illa per hanc, fit Quotiens $\sqrt{zzz}$ 4. hoc est, $\sqrt{zz}$ 2. Eodem modo $\sqrt{\beta}$ 3. & $\sqrt{z}$ 2. reducendæ sunt ad $\sqrt{z\beta}$ 9. & $\sqrt{z\beta}$ 32. diuisaq; illa per hanc, fit Quotiens $\sqrt{z\beta}$ $\frac{9}{32}$. Quoniam autem multiplicatio probat diuisionem, si posterior Quotiens multiplicetur per $\sqrt{z}$ 2. diuisorem, producetur numerus diuisus $\sqrt{zz}$ 8 + $\sqrt{\beta}$ 3. Nam $\sqrt{z\beta}$ $\frac{9}{32}$. & $\sqrt{z}$ 2. reducuntur ad $\sqrt{zz\beta}$ $\frac{81}{1024}$. & $\sqrt{zz\beta}$ 1024. quæ inter se multiplicatæ gignunt $\sqrt{zz\beta}$ $\frac{82944}{1024}$. hoc est, $\sqrt{zz\beta}$ 81. siue $\sqrt{\beta}$ 3. Item $\sqrt{zz}$ 2. & $\sqrt{z}$ 2. reducuntur ad $\sqrt{zzz}$ 4. & $\sqrt{zzz}$ 16. quæ inter se multiplicatæ faciunt $\sqrt{zzz}$ 64. hoc est, $\sqrt{zz}$ 8. Item si sit diuidendus numerus $\sqrt{zz}$ 23328 — $\sqrt{zz}$ 10368. per 6. hoc est, per $\sqrt{zz}$ 1296. fit Quotiens $\sqrt{zz}$ 324 — 9. hoc est, 18 — 9. nimirum 9.

Diuisio per numerum radicum quadratarum vel zensizensicarũ, compositũ, aut diminutum.

a 17. sept.

QVANDO diuisor est numerus radicum quadratarum, vel zensizensicarum cõpositus, aut diminutus, oportet illum multiplicare per numerum similem, mutato signo + in —, & signo — in +. vt gignatur numerus vnicus rationalis, vt paulo ante dictum est, pro diuisore. Deinde per eundem hunc numerum ita transmutatum multiplicandus est numerus diuidendus, vt producatur nouus numerus per diuisorem inuentum diuidendus.a Nam hic numerus diuidendus nouus ad diuisorem nouum inuentum habet eandem proportionem, quam propositus numerus diuidendus ad diuisorem propositum: propterea quod idem numerus ille transmutatus multiplicans vtrumque horum illos produxit: ac proinde idem Quotiens fiet, siue diuidendus propositus per propositum diuisorem, siue nouus diuidendus inuentus per nouum diuisorem diuidatur. Quemadmodum quia ita se habent 12. ad 3. vt 48. ad 12. semper Quotiens 4. procreatur, siue 12. per 3. siue 48. per 12. diuidantur.

SINT diuidenda 42. per $\sqrt{z}$ 25 + $\sqrt{z}$ 4. hoc est, per 7. vbi Quotiens est 6. si multiplicetur diuisor per $\sqrt{z}$ 25 — $\sqrt{z}$ 4. gignetur nouus diuisor 21. qui nimirum remanet, si 4. quadratum posterioris particulæ ex 25. quadrato prioris particulæ dematur, vt paulò ante dictum est. Et si diuidendus numerus 42. hoc est, $\sqrt{z}$ 1764. per eundem numerum $\sqrt{z}$ 25 — 4. multiplicetur, producetur nouus numerus diuidendus $\sqrt{z}$ 44100 — $\sqrt{z}$ 7056 quo diuiso per inuentum diuisorem 21. hoc est, per $\sqrt{z}$ 441. fit Quotiens 6. Nam $\sqrt{z}$ 100. nimirum 10. — $\sqrt{z}$ 16. id est, — 4. facit 6. vt manifestum est.

		~~22~~
		~~304~~
$\sqrt{z}$ ~~441~~00 —	$\sqrt{z}$ ~~7056~~	($\sqrt{z}$ 100 — $\sqrt{z}$ 16
$\sqrt{z}$ ~~441~~	$\sqrt{z}$ ~~4411~~	
	~~44~~	

SINT rursus diuidenda 54. per 2 + $\sqrt{z}$ 16. hoc est, per 6. vbi Quotiens est 9. Si diuisor ducatur in 2 — $\sqrt{z}$ 16. producetur numerus diminutus 4 — 16. quia posterior particula priore maior est. Quare

Quare inuertendæ sunt particulæ diuisoris hoc modo $\sqrt{z}$ 16 + 2. vt ex ductu $\sqrt{z}$ 16 — 2. fiat numerus simplex 12. pro diuisore. Quòd si diuidendus numerus 54. ducatur in eundem numerum $\sqrt{z}$ 16 — 2. fiet nouus diuidendus $\sqrt{z}$ 46656 — 108. quo diuiso per 12. nimirum $\sqrt{z}$ 46656. per $\sqrt{z}$ 144. & — 108. per 12. fit Quotiens $\sqrt{z}$ 324 — 9. hoc est, 18 — 9. nimirum 9.

ITEM sint diuidenda 6. per $\sqrt{z}$ 12 + $\sqrt{z}$ 6. Ducto vtroque numero in $\sqrt{z}$ 12 — $\sqrt{z}$ 6. fiunt $\sqrt{z}$ 432 — $\sqrt{z}$. 216. & 6. Ex diuisione autem $\sqrt{z}$ 432 — $\sqrt{z}$ 216. per 6. hoc est, per $\sqrt{z}$ 36. fit Quotiens $\sqrt{z}$ 12 — $\sqrt{z}$ 6. Probatur. Nam ex Quotiente $\sqrt{z}$ 12 — $\sqrt{z}$ 6. in diuisorem $\sqrt{z}$ 12 + $\sqrt{z}$ 6. fit numerus diuisus 6.

ITEM diuidendus sit numerus 66 — $\sqrt{z}$ 2000. per 8 — $\sqrt{z}$ 45. Si vterque numerus ducatur in 8 + $\sqrt{z}$ 45. fit nouus diuidendus 528 — $\sqrt{z}$ 128000 + $\sqrt{z}$ 196020 — $\sqrt{z}$ 90000. hoc est 228 + $\sqrt{z}$ 7220. (Nam detracta $\sqrt{z}$ 90000. id est, 300. ex 528. reliquus fit numerus 228. & $\sqrt{z}$ 128000. detracta ex $\sqrt{z}$ 196020. cum hi numeri sint commensurabiles, relinquit $\sqrt{z}$ 7220.) atque nouus diuisor 19. Fit autem ex diuisione Quotiens 12 + $\sqrt{z}$ 20. Nam ex hoc Quotiente in diuisorem 8 — $\sqrt{z}$ 45. fit numerus 96 + $\sqrt{z}$ 1280 — $\sqrt{z}$ 6480 — $\sqrt{z}$ 900. qui æqualis est numero diuiso 66 — $\sqrt{z}$ 2000. quia $\sqrt{z}$ 900. hoc est, 30. ex 96. relinquit 66. & — $\sqrt{z}$ 6480. ex + $\sqrt{z}$ 1280. hoc est, ex additione vnius ad alterum propter signa diuersa, cum sint commensurabiles, fit numerus — $\sqrt{z}$ 2000.

SINT quoque diuidenda 20. per $\sqrt{zz}$ 16 + $\sqrt{zz}$ 81, hoc est, per 5. vbi Quotiens est 4. Inuertatur diuisor sic, $\sqrt{zz}$ 81 + $\sqrt{zz}$ 16. vt posterior particula minor sit priore, multiplicetúrque tam diuidendus 20. quam diuisor $\sqrt{zz}$ 81 + $\sqrt{zz}$ 16. per $\sqrt{zz}$ 81 — $\sqrt{zz}$ 16. fietque nouus diuidendus $\sqrt{zz}$ 12960000 — $\sqrt{zz}$ 2560000. & nouus diuisor $\sqrt{zz}$ 6561 — $\sqrt{zz}$ 256. hoc est 9 — 4. videlicet 5. Diuiso ergo illo diuidendo per 5. hoc est, per $\sqrt{zz}$ 625. fit Quotiens $\sqrt{zz}$ 20736 — $\sqrt{zz}$ 4096. hoc est, 12 — 8 nimirum 4. vt par est. Adduxi hoc exemplum in numeris rationalibus, vt intelligeres, eandem esse rationem in radicibus zensizensicis, quæ est in radicibus zensicis.

SINT rursus diuidenda 10. per $\sqrt{zz}$ 5 + $\sqrt{zz}$ 3. Multiplicetur vterque numerus per $\sqrt{zz}$ 5 — $\sqrt{zz}$ 3. fietque nouus diuidendus $\sqrt{zz}$ 50000 — $\sqrt{zz}$ 30000. & nouus diuisor $\sqrt{zz}$ 25 — $\sqrt{zz}$ 9. hoc est, $\sqrt{z}$ 5 — $\sqrt{z}$ 3. Et quoniam hic diuisor non est numerus vnicus rationalis, multiplicabimus tam nouum diuidendum inuentum, quam nouum diuisorem, per $\sqrt{z}$ 5 + $\sqrt{z}$ 3. fietque alius nouus diuidendus $\sqrt{zz}$ 1250000 — $\sqrt{zz}$ 750000 + $\sqrt{zz}$ 450000 — $\sqrt{zz}$ 270000. & alius diuisor nouus 5 — 3. hoc est; 2. Si ergo illum diuidendum per hunc diuisorem diuidemus, id est, per $\sqrt{zz}$ 16. faciemus Quotientẽ $\sqrt{zz}$ 78125 — $\sqrt{zz}$ 46875 + $\sqrt{zz}$ 28125 — $\sqrt{zz}$ 16875. Quod probatur. Si namque hic Quotiens ducatur in diuisorem propositum, nimirum in $\sqrt{zz}$ 5 + $\sqrt{zz}$ 3. producetur numerus diuisus 10. vt hic patet.

√zz 78125 — √zz 46875 + √zz 28125 — √zz 16875
√zz 5 + √zz 3

\+ √zz 234375 — √zz 140625 + √zz 84375 — √zz 50625
√zz 390625 — √zz 234375 + √zz 140625 — √zz 84375

Quoniam enim numeri intermedij, quorum bini æquales sunt & diuersorũ signorum, se mutuo tollunt, relinquetur productus √zz 390625 — √zz 50625. hoc est, 25 — 15. videlicet 10.

Diuisio per numerum radicum quadratarum compositum trium particularum vel pluriũ

PRAETEREA sint diuidenda 100. per √z 3 + √z 5 + 6. Hic quia diuisor habet tres particulas affectas signo +. vt inueniatur diuisor simplex, multiplicandus est diuisor in similem numerum, mutata vltima particula +. in —. vt hic vides. Producetur enim numerus duarum particularum √z 60 + 2. pro nouo diuisore, qui etiam habebitur hoc modo. Priores duæ particulæ inter se multiplicentur. Nam si productus numerus √z 15. duplicetur, proueniet √z 60. pro priore particula. Et si vltimæ particulæ numerus 6. detmatur ex 8. summa numerorum 3. & 5. priorum duarum particularum, remanebit numerus + 2. pro particula posteriore.

√z 3 + √z 5 + √z 6
√z 3 + √z 5 + √z 6

— √z 18 — √z 30 — 6
\+ √z 15 + 5 + √z 30
\+ 3 + √z 15 + √z 18

√z 60 + 2

Quod si numerus diuidendus 100. per eundem numerum √z 3 + √z 5 + √z 6. multiplicetur, gignetur nouus numerus diuidendus √z 30000 + √z 50000 — √z 60000 [a] qui ad nouum diuisorem inuentum eandem proportionem habebit, quam numerus diuidendus propositus 100. ad propositum diuisorem √z 3 + √z 5 + √z 6.

a 17. sept.

SED quoniam inuentus nouus diuisor nondum est simplex, ducemus eum in diminutum similem, nimirum in √z 60 — 2. efficiemúsque 60 — 4. hoc est, 56. pro nouo diuisore. Et si nouus diuidendus √z 30000 + √z 50000 — √z 60000. ducatur in eundem numerum √z 60 — 2. procreabitur nouus numerus diuidendus √z 180000 + √z 300000 + √z 240000 — √z 120000 — √z 200000 — √z 3600000. quo diuiso per diuisorem inuentum 56. prodibit idem Quotiens, qui proueniret, si datus numerus 100. per datum diuisorem √z 3 + √z 5 + √z 6. diuideretur.

QVOD si diuisorem datum √z 3 + √z 5 + √z 6. multiplicaremus per √z 3 — √z 5 + √z 6. (Nam quando omnes tres particulæ habent signum +. poterit quælibet earum mutari in —) produceremus nouum diuisorem √z 72 — 4. & nouum diuidendum √z 30000 — √z 50000 + √z 60000. Et si tam hic diuidendus, quàm ille diuisor √z 72 — 4. ducatur in √z 72 + 4. producetur nouus alius diuidendus, & nouus diuisor simplex 56. [b] ad quem diuidendus nouus eandem proportionem habebit, quam datus numerus diuidendus 100 ad

b 17. sept.

ad datum diuisorem √z 3 + √z 5 + √z 6.

SI verò diuisor habuerit vnam particulam cum signo —. vertendum erit signum — in +. vt fiat multiplicatio.

ATQVE hoc eodem modo, si diuisor habuerit plures particulas radicum quadratarum, quam tres, mutabis semper vnam ex +, in —, vel contra. Nam ex prima multiplicatione gignetur numerus totidem particularum, minus vna, & in secunda totidem quoque, minus duabus, & sic deinceps procedendum erit, donec fiat numerus simplex pro diuisore nouo. Diuidendus quoque numerus ducendus est in primum numerum multiplicantem: Deinde productus numerus in secundum, &c. ita vt tot fiant multiplicationes, quot factæ sunt, vt diuisor simplex inueniretur.

Diuisio per numerum radicum cubicarũ compositũ.

QVANDO diuisor habet duas particulas radicum cubicarum, inueniendus etiam est diuisor simplex, quod ita fiet. Sint V.g. diuidenda 10. per √ce 5 + √ce 3. Per doctrinam propos. 3. lib. 8. Eucl. reperiantur tres numeri continuè proportionales (propter 3. exponentem cubi) in proportione particularum diuisoris, nimirum √ce 5. ad √ce 3. hac methodo. Primum ducatur √ce 5. in se, fietque primus numerus √ce 25. Deinde ducatur √ce 5. in √ce 3. gigneturque secundus numerus √ce 15. Tertio ducatur quoque √ce 3. in se, prouenietque tertius numerus √ce 9. atque ita hi tres numeri producti. √ce 25. & √ce 15. & √ce 9. erunt continuè proportionales in proportione √ce 5. ad √ce 3. vt in dicta propos. 2. lib. 8 ab Euclide demonstratum fuit. Quod etiam experiri licebit per multiplicationem. Nam positis tribus numeris √ce 25. √ce 15. √ce 9. tantum fit ex primo in tertium quantum ex medio in se. Item positis quatuor numeris √ce 5. √ce 3. √ce 25. √ce 15, tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium. quod etiam in his quatuor √ce 5. √ce 3. √ce 15. √ce 9. cernitur. Extremi duo numeri afficiantur signo +, & medius signo —. hoc modo √ce 25 — √ce 15 + √ce 9. Per hunc communem numerum multiplicantem si multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuisor √ce 5 + √ce 3. fiet nouus diuidendus √ce 25000 — √ce 15000 + √ce 9000. & nouus diuisor √ce 125 + √ce 27. id est, 8. vt in subiecta formula liquet. qui diuisor simplex habetur, (vt auctores docent, & quod est obseruatione dignum) si numeri particularum diuisoris 5. & 3. simul addantur, etiã si nulla fiat multiplicatio.

√ce 25 — √ce 15 + √ce 9
√ce 5 + √ce 3

\+ √ce 75 — √ce 45 + √ce 27
\+ √ce 125 — √ce 75 + √ce 45

Summa. √ce 125 + √ce 27

Diuisio per numerum radicũ zẽsizensicarũ, surdesolidarum &c. compositum.

EADEM via tenenda est in diuisore composito duarum radicum zensizensicarum, surdesolidarum, zensicubicarum, &c. dummodo tot numeri continuè proportionales, secundum doctrinam propos. 2. lib. 8. Eucl. reperiantur in proportione particularum diuisoris,

P

quot vnitates ſunt in exponente zz.ß.zce.&c nimirum quatuor in diuiſore radicum zenſizenſicarum,& quinque pro diuiſore radicum ſurdeſolidarum,& ſex pro zenſicubicis,&c. Quibus inuentis, tribuatur primo numero ſignum +. ſecundo ſignum —. tertio iterum ſignum +. & quarto iterum ſignum —. atque ita alternatim procedendo, vt numeri in locis imparibus gerant ſignum +, & in locis paribus ſignum —. Exemplum ponam in diuiſione 10. per √zz 5 + √zz 3. quam ſupra alio modo expediuimus. Quoniam exponens zz. eſt 4. inuenientur hi quatuor numeri proportionales √zz 125. √zz 75. √zz 45. √zz 27. iuxta

√zz 5 + √zz 3
√zz 25. √zz 15. √zz 9.
√zz 125 — √zz 75 + √zz 45 — √zz 27.

doctrinam propoſ. 2. lib. 8. Eucl. vt hic cernis: vbi appoſuimus ſignum + numeris locorum imparium, numeris autem locorũ parium ſignum — vt diximus faciẽdum eſſe. Iam ſi per hũc numerũ quatuor particularum multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuiſor √zz 5 + √zz 3. reperietur nouus numerus diuidendus √zz 1250000 — √zz 750000 + √zz 450000. — √zz 27. & nouus diuiſor √zz 625 — √zz 81. hoc eſt, 2. ijdem omnino, qui ſupra ante diuiſionẽ per numerum radicum quadratarum compoſitum trium particularium. Atque hic diuiſor, ſine multiplicatione, habetur, vt auctores docent, ſi minoris particulæ numerus in diuiſore dematur ex numero particulæ maioris, videlicet 3. ex 5. vt hæ formulę indicant.

Inuentio numeri diuidendi.

10. hoc eſt, √zz 10000
√zz 125 — √zz 75 + √zz 45 — √zz 27

√zz 1250000 — √zz 750000 + √zz 450000 — √zz 270000

Inuentio diuiſoris.

√zz 125 — √zz 75 + √zz 45 — √zz 27
√zz 5 + √zz 3

\+ √zz 375 — √zz 225 + √zz 135 — √zz 81
\+ √zz 625 — √zz 375 + √zz 225 — √zz 135

√zz 625 — √zz 81

EADEM ratio eſt de cæteris, Sed quando numerus exponens radicum

dicum eſt par, vt √z. √zz. &c. diuiſor ſimplex habetur, ſi (vt auctores docent) numerus particulæ minoris in dato diuiſore ex numero maioris particulæ ſubducatur: at verò, quando exponens numerus eſt impar, vt √ce. √ß. &c. ſimplex diuiſor habetur, ſi numeri particularum diuiſoris dati in vnam colligantur ſummam. id quod in ſuperioribus obſeruatum eſſe vides.

SED neque hoc omittendum eſt, quando diuiſor eſt duarum radicum diuerſarum, eas ad eandem denominationem eſſe reducendas, antequam operationem auſpiceris. *Diuiſio per numerum compoſitum diuerſarum radicum.*

DENIQVE quando diuiſor eſt plurium particularum, ac diuerſarum radicum, ita vt non facilè reduci poſſit ad ſimplicem diuiſorem, conſtituenda erit fractio, cuius numerator ſit numerus diuidendus, & denominator ipſemet diuiſor: non ſecus ac in numeris abſolutis fieri ſolet, quando minor numerus per maiorem diuidendus proponitur, vt 3. per 4. Fit enim fractio ¾. Verbi gratia, ſi numerus √z 48 + √ce 3. diuidendus ſit per √z 15 + √ce 6. — √z 3. fiet hæc fractio

Numerator. √z 48 + √ce 3

Denominator. √z 15 + √ce 6 — √z 3

SCHOLIVM.

ACCIDIT *non rarò, vt inter duos numeros irrationales compoſitos ambigatur, vter eorum maior ſit, quæ ambiguitas ita tollitur. Sint propoſiti duo numeri,* 4 + √z 7. *&* 20 — √z 180. *Auferatur vtrobique numerus* 4. *remanebítque ex vna parte,* √z 7. *& ex altera,* 16 — √z 180. *Certum autem eſt, ſi duo numeri dati ſint æquales, reſidua hæc etiam æqualia eſſe: Et ſi inæquales, reſidua eodem modo eſſe inæqualia. Quadretur vtrumque reſiduum, erítque prioris reſidui quadratum* 7. *poſterioris verò,* 436 — √z 184320. *Certum quoque eſt, ſi reſidua ſint æqualia, eorum quadrata quoque æqualia eſſe: Et ſi illa ſint inæqualia, hæc etiam eſſe inæqualia. Addatur vtrique quadrato diminutum hoc* — √z 184320. *fientque numeri* 7 + √z 184320. *&* 436. *Auferantur vtrinque* 7. *erúntque reliqui numeri* √z 184320. *&* 429. *qui quadrentur, vt fiant* 184320. *&* 184041. *Et quia illud quadratum maius eſt, quàm hoc, pronunciabis numerum* 4 — √z 7. *maiorem eſſe numero* 20 — √z 180. *Eodem pacto cum aliis numeris procedes. Hoc etiam per extractiones radicum conſtat. Nam radix propinqua numeri* 7. *eſt* $2\frac{3}{5}$. *quæ cum* 4. *facit* $6\frac{3}{5}$. *At radix propinqua numeri* 180. *eſt* $13\frac{11}{27}$. *quæ dempta ex* 20. *relinquit* $6\frac{16}{27}$. *Conſtat autem* $\frac{3}{5}$. *eſſe numerum maiorem, quàm* $\frac{16}{27}$. *Atque ita habes aliam rationem tollendi ambiguitatem. Sed prior ratio eſt magis accurata.* Vterduorum numerorũ compoſitorum maior ſit.

DE RADICIBVS NVMERORVM IRRAtionalium compositorum, vel diminutorum: quas alij Vniuersales dicunt: Et de earundem Algorithmo.

Cap. XXIIII.

HÆ radices oriuntur plerunque ex additione, ac subtractione radicum irrationalium simplicium incommensurabilium, vt in cap. 19. ac 20. patuit: quas hoc loco paulò diligentiùs explicare proponimus. quod exequemur, expositis varijs radicibus numerorum compositorum, vnà cum eorum Algorithmo. Si igitur ex hoc numero composito, 10 + √z 7. extrahenda sit radix quadrata, erit ea √z (0 + √z 7.) cuius sensus est, vt radice quadrata numeri 7. si haberi posset, addita ad 10. totius numeri radix quadrata sumatur. In hac verò altera radice. √ce (10 + √z 7.) intelligimus radicem cubicam numeri ex 10. & √z 7. compositi. Et vt res planiùs percipiatur, proferemus exempla in numeris rationalibus. Vt √z (10 + √z 16 + 3 + √z 64) nihil aliud significat, quàm 5. Nam √z 16. est 4. quæ addita ad 3. facit 7. & 7. cum √z 64. id est, cum 8. faciunt 15. quibus si addantur 10. fiunt 25. pretium totius numeri compositi, cuius radix quadrata est 5. Item √ce(√z 25 + √z 9) erit 2. Est enim sensus, vt sumptis radicibus quadratis numerorum 25. & 9. quæ sunt 5. & 3. efficientes 8. extrahatur ex hac summa radix cubica, quæ est 2. Hæc verò radix, √z (10 + √z 36) + √z (70 + √z 121.) valebit 13. Significatur enim radicem quadratam compositi 10 + √z 36. quod est 16. nimirum √z 16. quæ est 4. addi ad 9. radicem quadratam compositi 70 + √z 121. quod est 81.

Variæ radices numerorum compositorum.

QVEMADMODVM autem quadratum radicis quadratæ cuiusuis surdæ simplicis est ipse numerus, deleto signo radicali √z. Et cubus radicis cubicæ simplicis, ipse numerus, deleto signo radicali √ce. Vt quadratum √z 5. est 5. & quadratum √z 25. est 25. Cubus verò √ce 12. est 12. & cubus √ce 27. est 27. propterea quòd radix quælibet quadrata ducta in se quadratè producit eius radicis quadratum, ducta verò in se cubicè gignit cubum eiusdem radicis: Ita quoque quadratum radicis quadratæ numeri cuiuslibet compositi est ipsemet numerus compositus, deleto signo √z. Et cubus radicis cubicæ numeri compositi cuiusuis est ipsemet numerus, deleto signo √ce. Vt quadratum √z (11 + √z 9 + √z 4.) est 11 + √z 9 + √z 4. hoc est, 16. ita vt illa radix valeat 4.

Quadrata & cubi radicũ numerorum compositorũ.

Qua-

Quadratum √z (√z 49 + √z 36 — √z 16) est √z 49 + √z 36 — √z 16. hoc est, 9. ita vt radix illa valeat 3.

Quadratum √z(√z 64 + √z 49 + √z 36 —5) est √z 64 + √z 49 + √z 36—5. hoc est, 16 ita vt valor illius radicis sit 4.

Quadratum √z (√z 216 + √ce 27) est √ce 216 + √ce 27. hoc est, 9. pretiúmque eius radicis est 3.

Quadratum √z(√ce 216— √ce 27.) est √ce 216 — √ce 27. hoc est, 3. valórque eius radicis est √z 3.

Cubus √ce (√z 25 + √z 9) est √z 25 + √z 9. hoc est, 8. ita vt radix illa valeat 2.

Cubus √ce(√z 25 — √z 9) est √z 25 — √z 9. id est, 2. pretiúmque radicis illius est √ce 2.

Cubus √ce(√ce 64 + √ce 27.) est √ce 64 + √ce 27. id est, 7. ita vt radix illa sit √ce 7. Idémque iudicium facies de zensizensis, ac surdesolidis, &c. radicum zensizensicarum, & surdesolidarum numerorum compositorum. Proposui autem exempla in numeris rationalibus, vt res fieret clarior. Atque hoc modo multiplicatur radix cuiuslibet numeri compositi in se; hoc est, producitur eius quadratum, vel cubus, &c.

Multiplicatio radicis numeri compositi in se.

AT verò radix numeri compositi in radicem simplicem, vel in numerum compositum, vel in numerum absolutum, vel denique in aliam radicem numeri compositi, multiplicabitur hac ratione. Vterque numerus tam multiplicandus, quam multiplicans, reducatur ad quadratum, vel cubum. Deinde fiat multiplicatio, vt supra traditum est. Nam radix totius producti erit numerus procreatus ex multiplicatione. quemadmodum ex √z 5. in √z 12. fit √z 60. radix nimirum zensica numeri 60. ex multiplicatione quadratorum 5. & 12. producti. Item sicut ex √ce 9. in √ce 10. fit √ce 90. videlicet radix cubica numeri 90. qui ex multiplicatione cubi 9. in cubum 10. gignitur; vt cap. præcedenti traditum est. Hoc autem clarius ex sequentibus exemplis disces. Sit enim multiplicanda √z (7 + √z 3) per 2. Quadrata sunt 7 + √z 3. & 4. Si ergo ducantur 4. in 7. fiunt 28. Et si ducatur √z 3. in 4. hoc est, in √z 16. fit √z 48. Totus ergo numerus productus est √z (28 + √z 48.) Ritè autem hoc modo fieri multiplicationem, disces ex hoc altero exemplo numerorum rationalium. Sit ducenda, √z (7 + √z 4.) hoc est, 3. (nam 7. cum √z 4. faciunt 9. cuius √z est 3.) per 2. Vbi manifestum est, numerum genitum fore 6. Quadrata sunt 7 + √z 4. & 4. Si igitur ducantur 4. in 7. fiunt 28. Et si √z 4. ducatur in 4. hoc est, in √z 16. fit √z 64. erítque totus numerus productus √z (28 + √z 64.) hoc est, √z 36. nimirum 6. vt conuenit.

Multiplicatio radicum numerorum compositorum.

$$\begin{array}{rcr} 7 & + & \sqrt{z}\ 3 \\ & & 4 \\ \hline 28 & + & \sqrt{z}\ 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 7 & + & \sqrt{z}\ 4 \\ & & 4 \\ \hline 28 & + & \sqrt{z}\ 64 \end{array}$$

SIT rursus multiplicanda √z (7 + √z 4) per 3. hoc est 3. per 3. vbi productus numerus est 9. Quadrata sunt 7 + √z 4. & 9. Ex 9. in 7. fiunt 63. &

$$\begin{array}{rcr} 7 & + & \sqrt{z}\ 4 \\ & & 9 \\ \hline 63 & + & \sqrt{z}\ 324 \end{array}$$

P 3

63.& ex √z 4.in 9.hoc eſt,in √z 81.fit √z 324.Productus ergo numerus erit √z (63 + √z 324)hoc eſt, √z 81.nimirum 9.

ITEM ſit multiplicanda √z (√z 25 + √z 16) hoc eſt, √z 9. ſiue 3.per 3, vbi etiam conſtat, productum numerum fore 9.Quadrata ſunt √z 25 + √z 16. & 9. Ex √z 25.in 9.hoc eſt,in √z 81.fit √z 2025. Et ex √z 16. in 9.id eſt,in √z 81.fit √z 1296. Procreatus ergo numerus erit √z (√z 2025 + √z 1296.) hoc eſt, √z(45 + 36.) ſiue √z 81. hoc eſt,9.

√z 25 + √z 16
9
√z 2025 + √z 1296

SIT multiplicanda √ce(√ce 64 + √ce 27)hoc eſt, √ce 7.per 2.vbi productus erit √ce 56. Cubi numerorum ſunt √ce 64+ √ce 27.& 8.Ex √ce 64.in 8.hoc eſt, in √ce 512. fit √ce 32768. & ex √ce 27. in 8. hoc eſt, in √ce 512. fit √ce 13824. Cum ergo √ce 32768.ſit 32.Et √ce 13824.ſit 24.erit productus numerus √ce (32 + 24)id eſt, √ce 56.

√ce 64 + √ce 27
8
√ce 32768 + √ce 13824

SIT multiplicanda √ce (64 + √ce 27.)per 2. Cubi numerorum ſunt 64 + √ce 27. & 8. Ex 64. in 8. fiunt 512. Et ex √ce 27.in 8. id eſt,in √ce 512.fit √ce 13824. quæ eſt 24. additáque ad 512. facit 536.Eſt ergo productus numerus √ce 536 atque ita eſt.Nam √ce(64 + √ce 27) hoc eſt, √ce 67. ducta in 2. hoc eſt,in √ce 8.facit √ce 536.

64 + √ce 27
8
512 + √ce 13824

SIT ducenda √ce(√ce 64 + √z 36 + 3.)in 5. Cubi numerorum ſunt √ce 64 + √z 36 + 3.& 125. Ex √ce 64. in 125. id eſt, in √ce 1953125. fit √ce 125000000. At ex √z 36.in 125. id eſt, in √z 15625. fit √z 562500. Et ex 3. in 125. fiunt 375. Cum ergo √ce 125000000.ſit 500.& √z 562500.ſit 750.erit procreatus numerus √ce 1625 vt ratio poſtulat.Nam √ce(√ce 64 + √z 36 + 3.)hoc eſt, √ce 13. ducta in 5. hoc eſt,in √ce 125 .facit √ce 1625.

√ce 64 + √z 36 + 3
125
√ce 12500000 + √z 562500 + 375

SI numerus per 5. multiplicandus, fuiſſet √ce (√ce 64 + √z 36 − 3.) productus fuiſſet numerus √ce (√ce 125000000 + √z 562500 − 375.) hoc eſt, √ce(500 + 750 − 375.)hoc eſt, √ce 875.quod verum eſt.Nam √ce (√ce 64 + √z 36 − 3.) eſt √ce 7. quæ ducta in 5. hoc eſt , in √ce 125. facit √ce 875.

SIT multiplicanda √z(12 + √z 6)per 6. Quadrata numerorum ſunt 12 + √z 6 & 36 Ex 12 .in 36.fiunt 432. Et ex √z 6.in 36 hoc eſt,in √z 1296.fit √z 7776.Productus igitur ex multiplicatione numerus eſt √z (432 + √z 7776.)

12 + √z 6
36
432 + √z 7776

SIT

SIT ducenda √z(13 + √z 144)hoc eſt, √z 25.id eſt, 5. per 6. vbi certum eſt, gigni 30.Quadrata numerorum ſunt 13 + √z 144.& 36.Ex 13.in 36.fiunt 468. Et ex √z 144.in 36.id eſt, in √z 1296. fit √z 186624. Numerus ergo productus eſt √z (468 + √z 186624)hoc eſt, √z 900.id eſt,30.

13 + √z 144
36
468 + √z 186624

SIT multiplicanda √z (13 + √z 9)per √z (5 + √z 16)hoc eſt, √z 16. id eſt,4.per √z 9.id eſt,per 3.vbi conſtat produci 12. Quadrata numerorum ſunt 13 + √z 9.& 5 + √z 16.Ex √z 9.in √z 16.fit √z 144.Et ex √z 16. in 13.id eſt,in √z 169. fit √z 2704. Deinde ex √z 9. in 5. hoc eſt, in √z 25. fit √z 225. Et ex 5. in 13. fiunt 65. Iam √z 144. id eſt, 12. cum 65.facit 77.quibus ſi addantur √z 2704.& √z 225. nimirum 52.& 15.fiunt 144. Igitur √z 144. id eſt,12.eſt numerus productus,vt dictum eſt.

13 + √z 9
5 + √z 16
√z 2704 + √z 144
65 + √z 225
√z 2704 + √z 225 + 77

SIT rurſus multiplicanda √z(√z 1800 + 30) − √z (√z 450 + 15) per √z (√z 450 + 15.)Scribantur numeri, vt hic vides. Ex √z (√z 450 + 15) in √z (√z 450 + 15) fit eius quadratus √z 450 + 15. præpoſito ſigno −. cum + in − ducatur. Ex √z (√z 1800 + 30) in √z √z (√z 450 + 15) fit √z 810000 + √z 1620000 + 450. ſi nimirum quadrata numerorum inter ſe multiplicentur: hoc eſt,1350 + √z 1620000. quia √z 810000. æquiualet 900.qui numerus additus ad 450.facit 1350. & præpoſito ſigno √z. erit productus numerus √z (1350 + √z 1620000.) Eſt autem radix huius Binomij 1350 + √z 1620000. numerus √z 900 + √z 450. vt ex cap.28.conſtabit: hoc eſt,30 + √z 450. ex qua ſi dematur prior productus − √z 450 + 15.factus ex √z (√z 450 + 15) in ſe, relinquetur numerus 15. vt in hac formula cernis. qui quidem gignitur ex multiplicatione √z (√z 1800 + 30) − √z (√z 450 + 15) in √z (√z 450 + 15)

√z (√z 1800 + 30) − √z(√z 450 + 15)
√z (√z 450 + 15) √z(√z 450 + 15)
+ √z 4050000 + 450 − √z 450 + 15
√z 810000 + √z 4050000
√z 810000 + √z 1620000 + 450

30 + √z 450
15 − √z 450
15

HAC ratione ritè fieri multiplicationem, perſpicuum fiet, hoc altero exemplo propoſito. vbi fit multiplicatio 1. in 3. productúſque numerus eſt 5. Nam ex √z (√z 9 + 6) in √z

√z (√z 4 + 14) − √z(√z 9 + 6)
√z (√z 9 + 6) √z(√z 9 + 6)
+ √z 144 + 84 − √z 9 + 6
√z 36 + √z 1764
√z 144 − 9

(√z 9 + 6)fit eius quadratus √z 9 + 6.præpofito figno —. cum + inducatur. Deinde ex √z(√z 4 + 14)in √z(√z 9 + 6)fit numerus √z 144. id eft,12.vt in præcedenti formula vides. Nam √z 36.eft 6.& √z 144.eft 12. & √z 1764.eft 42. quæ omnes cum 84. faciunt 144. & præpofito figno √z.fit productus √z 144.nimirum 12.à quo fi detrahatur alter productus √z 9 + 6.nimirum 9.fupererunt 3.pro toto numero producto.

Sit quoque multiplicanda √z (6 + √z 9) per numerum compofitum √z 4 + √z 16. Quadratum prioris numeri eft 6 + √z 9. pofterioris autem 20 + √z 256.vt patet, fi √z 4 + √z 16. ducatur in √z 4 + √z 16. Multiplicatione igitur facta, vt hic vides, erit numerus productus √z (√z 9216 + √z 3600 + √z 2304 + 120.) hoc eft, √z 324.nimirum 18.

6 + √z 9
20 + √z 256
√z 9216 + √z 2304
120 + √z 3600
√z 9216 + √z 3600 + √z 2304 + 120

Multiplicetur √z (7 + √z 4)hoc eft, √z 9.nimirum 3.per √z 9. hoc eft, per 3. vbi perfpicuum eft, numerum gigni 9. Quadrata numerorum funt 7 + √z 4.& 9.Ex √z 4.in 9.id eft,in √z 81.fit √z 324. Et ex 7.in 9.fiunt 63. Igitur productus numerus erit √z (63 + √z 324.) hoc eft, √z 81.fiue 9. vt diximus.

7 + √z 4
9
63 + √z 324

Multiplicetur √z (12 + √z 6) per √z 12 + √z 6. Quadrata numerorum funt 12 + √z 6. & 18 + √z 288. vt conftat, fi √z 12 + √z 6. ducatur in fe. (Producitur enim numerus ifte 12 + √z 288 + 6. conftat autem 12.& 6. facere 18.) Ex √z 288. in √z 6. fit √z 1727. Et ex √z 288 in 12. hoc eft, in √z 144. fit √z 41472. Et ex √z 6. in 18. id eft, in √z 324. fit √z 1944. Ac tandem ex 12. in 18.fiunt 216. Itaque totus numerus productus erit √z (216 + √z 1944 + √z 41472 + √z 1728.)

12 + √z 6
18 + √z 288
√z 41472 + √z 1728
216 √z 1944
216 + √z 1944 + √z 41472 + √z 1728

Multiplicatio radicis numeri compofiti, vna cum radice numeri diminuti fimilis, in feipfam.

Cæterum quando radix zenfica numeri compofiti, vna cum radice zenfica numeri diminuti fimilis in feipfam multiplicanda proponitur. quod non rarò in Binomiis, ac Refiduis (de quibus in cap. 27. & 28.) accidit, ita agemus. Sit in fe multiplicanda √z (12 + √z 6) + √z (12 — √z 6.) Scribatur numerus bis, vt in multiplicatione fieri folet. Et quoniam ex propof. 4.lib.2.Eucl. quadrata partium √z (12 + √z 6) & √z (12 — √z 6)vnà cum eo,quod ex vna parte √z (12 — √z 6)bis fit in alteram partem √z (12 + √z 6)æqualia funt ei,qui fit ex numero

numero in fe: Sunt autem quadrata partium 12 + √z 6. & 12 — √z 6. quæ fimul faciunt 24. (Nam + √z 6. & — √z 6. fe mutuo tollunt.) Et ex vna parte in alteram fit √z 138 (quia 6.quadratum √z 6. demptum ex 144. quadrato numeri 12.relinquit 138.cui numero præfigendum eft fignum √z) cuius duplum eft √z 552.

√z (12 + √z 6) + √z (12 — √z 6)
√z (12 + √z 6) + √z (12 — √z 6)
12 + √z 6 + 12 — √z 6
√z 138
√z 138
√z 552
24 + √z 552

Summa ex radice numeri compofiti, & radice numeri diminuti fimilis collectæ.

Productus ergo numerus eft 24 + √z 552. Atque radix huius producti eft etiam fumma duarum radicum √z (12 + √z 6)& √z(12 — √z 6) in vnam fummam collectarum. Nam quando fumma duorum numerorum in fe ducitur, radix quadrata producti numeri eft eorundem duorum numerorum fumma. Ac proinde cum duæ radices propofitæ fimul in fe ductæ faciant 24 + √z 552. erit huius producti radix, nimirum √z (24 + √z 552)illarum duarum radicum fumma.

Alivd exemplum in numeris rationalibus. Sit in fe multiplicanda √z (10 + √z 36) + √z(10 — √z 36)hoc eft,6.in fe: vbi numerus procreatur 36. Quadrata partium funt 10 + √z 36.& 10 — √z 36. quæ fimul additæ faciunt 20. Et ex vna parte in alteram fit √z 64. quæ bis fumpta facit √z 256. id eft,16. atque adeo productus numerus eft 20 + 16.hoc eft, 36. vt par eft. Atque radix huius numeri, nimirum 6. eft fumma quoque ex duabus illis radicibus collecta, vt manifeftum eft.

√z (10 + √z 36) + √z (10 — √z 36)
√z (10 + √z 36) + √z (10 — √z 36)
10 + √z 36 + 10 — √z 36
√z 64
√z 64
√z 256
Productus 20 + √z 256. hoc eft, 36

Prætérea quando multiplicandus eft numerus compofitus ex radice fimplici, & radice compofiti numeri, hoc eft,ex radice fimplici, & radice Vniuerfali,per numerum diminutum fimilem: locum etiam habet compendium cap.23.traditum ante exempla diuifionis,ad finem nimirum exemplorum multiplicationis. Vt fi ducendus fit numerus √z 20 + √z (20 — √z 5) in numerum √z 20 — √z (20 — √z 5) fcribatur vnus numerus fub alio,vt hic vides. Nam fi 20 — √z 5 quadratum pofterioris particulę numeri compofiti,vel diminuti, detrahatur ex 20.quadrato particulæ prioris, reliquus erit numerus 0 + √z 5.vt in hac altera formula cernitur.quia 20. ex 20.nil re-

√z 20 + √z (20 — √z 5)
√z 20 — √z (20 — √z 5)
√z 5

20 + √ʒ 0
20 — √ʒ 5
――――――――
0 + √ʒ 5

linquunt: at — √ʒ 5. ex + √ʒ 0. (quoniam diuersa signa mutant speciem, fitq; additio) remanet + √ʒ 5. vt in Subtractione radicum simplicium diximus. atque ita ex √ʒ 20 + √ʒ (20 — √ʒ 5.) in √ʒ 20 — √ʒ (20 — √ʒ 5) producitur √ʒ 5.

IMMO hoc compendio vti etiam licebit, quando multiplicandus est numerus compositus ex numero Cossico, & radice numeri Cossici compositi vel diminuti, per numerum diminutum similem. Vt si ducendus sit numerus $\frac{1}{2}$ ʒ + √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ + 1 ʒ) in $\frac{1}{2}$ ʒ — √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ + 1 ʒ.) Scripto vno numero sub alio, vt hic cernis, detrahitur quadratum $\frac{1}{4}$ ʒʒ + 1 ʒ, posterioris particulæ ex $\frac{1}{4}$ ʒʒ. quadrato particulæ prioris, vt hæc altera formula ostendit. Nam reliquus numerus 0 — 1 ʒ. erit is, qui producitur ex vno numero in alium.

$\frac{1}{2}$ ʒ + √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ + 1 ʒ)
$\frac{1}{2}$ ʒ — √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ + 1 ʒ)
――――――――
— 1 ʒ

$\frac{1}{4}$ ʒʒ + 0 ʒ
$\frac{1}{4}$ ʒʒ + 1 ʒ
――――――――
0 + 1 ʒ

SIC etiam ex $\frac{1}{2}$ ʒ + √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ — 1 ʒ) in $\frac{1}{2}$ ʒ — √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ — 1 ʒ) gignetur numerus 1 ʒ. vt aliæ duæ hæ appositæ formulæ docent.

$\frac{1}{2}$ ʒ + √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ — 1 ʒ)
$\frac{1}{2}$ ʒ — √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ — 1 ʒ)
――――――――
1 ʒ

$\frac{1}{4}$ ʒʒ + 0 ʒ
$\frac{1}{4}$ ʒʒ — 1 ʒ
――――――――
0 + 1 ʒ

Diuisio radicum numerorũ compositorum.

DIVISIO radicum huiusmodi fit hoc modo. Tam numerus diuidendus, quam diuidens reducatur ad quadratum: Deinde diuisio fiat, vt supra explicatum est. Radix enim producti numeri erit Quotiens, vt exempla probabunt. quemadmodum, vt in cap. præcedenti diximus, ex diuisione √ʒ 12. per √ʒ 3. exit √ʒ 4. radix nimirum zensica numeri 4. qui fit ex diuisione quadrati 12. per quadratum 3. Item sicut ex diuisione √ß 30. per √ß 5. fit Quotiens √ß 6. radix videlicet surdesolida numeri 6. ex diuisione surdesolidi 30. per surdesolidum 5. procreati.

SIT diuidenda √ʒ (13 + √ʒ 7) per √ʒ 5. Quadrata numerorum sunt 13 + √ʒ 7. & 5. Ex diuisione 13. per 5. exeunt 2$\frac{3}{5}$. Et ex √ʒ 7. per 5. id est, per √ʒ 25. exeunt √ʒ $\frac{7}{25}$. Totus ergo Quotiens est √ʒ (2$\frac{3}{5}$ + √ʒ $\frac{7}{25}$.)

~~13~~ + √ʒ 7 (2$\frac{3}{5}$ + √ʒ $\frac{7}{25}$
~~5~~ √ʒ 25

SIT diuidenda √ʒ (432 + √ʒ 7776) per 6. Quadrata numerorum sunt 432 + √ʒ 7776. & 36. Diuisis 432. per 36. exeunt 12. & diuisa √ʒ 7776. per 36. id est, per √ʒ 1296. exit √ʒ 6. Quotiens ergo totus erit √ʒ (12 + √ʒ 6.)

~~1~~
~~17~~ ~~155~~
~~432~~ + √ʒ ~~7776~~ (12 + √ʒ 6.
~~366~~ ~~1296~~
~~3~~

SIT diuidenda √ʒ (588 + √ʒ 34848) per √ʒ (12 + √ʒ 8) Quadrata numerorum sunt 588 + √ʒ 34848. & 12 + √ʒ 8. Quoniam diuisor est numerus compositus, multiplicandus erit per 12 — √ʒ 8. mutato signo + in —. vt supra cap. 23. dictum est: vt fiat nouus diuisor √ʒ 136. Quod si per eundem numerum 12 — √ʒ 8. multiplicetur diuidendus numerus, fiet nouus diuidendus √ʒ (6528 + √ʒ 332928.) Fit enim numerus productus √ʒ (7056 + √ʒ 5018112 — √ʒ 2765952 — √ʒ 278784) qui reducitur ad √ʒ (6528 + √ʒ 332928) quia radix numeri 278784. est 528. quæ detracta ex 7056. relinquit 6528. Et detracta √ʒ 2765952. ex √ʒ 5018112. cum sint commensurabiles in proportione $\frac{128}{147}$. relinquit √ʒ 332928. cui apponendum est signum +. maioris numeri. Itaque si diuidatur nouus diuidendus √ʒ (6528 + √ʒ 332928) per nouum diuisorem 136. fiet Quotiens √ʒ (48 + √ʒ 18.) Diuisis namque 6528. per 136. exeunt 48. Et diuisa √ʒ 332928. per 136. hoc est, per √ʒ 18496. exit √ʒ 18. atque adeo √ʒ (48 + √ʒ 18) Quotiens erit diuisionis propositæ.

HOC exemplum quia pulchrum est, & subobscurum, libet examinare per multiplicationem. Igitur necesse est, numerum diuisum (√ʒ 588 + √ʒ 34848) redire, si Quotiens inuentus √ʒ (48 + √ʒ 18) in diuisorem √ʒ (12 + √ʒ 8) ducatur. Fit autem ex hac multiplicatione numerus √ʒ (576 + √ʒ 2592 + √ʒ 18432 + √ʒ 144) Quòd si √ʒ 144. addatur ad 576. fiet summa 588. Et si simul addantur √ʒ 2592. & √ʒ 18432. quæ commensurabiles sunt in proportione $\frac{8}{3}$. fiet √ʒ 34848.

DIVIDATVR item √ʒ 15. per √ʒ (3 + √ʒ 5) Vt simplex diuisor reperiatur, ducemus √ʒ (3 + √ʒ 5) in √ʒ (3 — √ʒ 5.) fiétque diuisor √ʒ 4. nouus. Quòd si diuidendus numerus √ʒ 15. ducatur quoque in √ʒ (3 — √ʒ 5.) gignemus nouum diuidendum √ʒ (45 — √ʒ 1125) Quadratum huius numeri diuidendi est 45 — √ʒ 1125. Noui verò diuisoris quadratum est 4. Si ergo partiamur 45. per 4. fit Quotiens 11$\frac{1}{4}$. Et si diuidamus — √ʒ 1125. per 4. hoc est, per √ʒ 16. fit Quotiens — √ʒ 70$\frac{5}{16}$. Totus igitur Quotiens est √ʒ (11$\frac{1}{4}$ — √ʒ 70$\frac{5}{16}$.)

DIVIDAMVS 20. per √ʒ (10 — √ʒ 5.) Multiplicetur vterque numerus per √ʒ (10 + √ʒ 5.) vt fiat nouus diuidendus √ʒ (4000 + √ʒ 800000) nouus autem diuisor √ʒ 95. Quadrata horum numerorum sunt 4000 + √ʒ 800000. & 95. Si igitur partiamur 4000. per 95. exibunt 42$\frac{2}{19}$. At ex diuisione √ʒ 800000. per 95. id est, per √ʒ 9025. prodit √ʒ 88$\frac{232}{361}$. Quotiens ergo propositæ diuisionis est √ʒ (42$\frac{2}{19}$ + √ʒ 88$\frac{232}{361}$.)

DIVIDAMVS √ʒ (4 + √ʒ 25) per √ʒ (1 + √ʒ 9) hoc est, √ʒ 9. per √ʒ 4. siue 3. per 2. vbi Quotiens est 1$\frac{1}{2}$. Multiplicetur tam diuidendus, quam diuisor, per √ʒ (1 — √ʒ 9) vt fiat nouus diuidendus

$\sqrt{4+\sqrt{25}-\sqrt{144}-\sqrt{225}.}$ & nouus diuisor $\sqrt{-8}$. Quadrata horum numerorum sunt $4+\sqrt{25}-\sqrt{144}-\sqrt{225}$. & -8. Ex diuisione 4. per -8. fit Quotiens $-\frac{1}{2}$. Et ex diuisione $\sqrt{25}$. per -8. id est, per $\sqrt{-64}$. fit Quotiens $\sqrt{-\frac{25}{64}}$. vel (quod idem est) $-\sqrt{\frac{25}{64}}$. Et ex diuisione $-\sqrt{144}$. per -8. id est, per $-\sqrt{64}$. exit $\sqrt{+2\frac{16}{64}}$. vel (quod idem est) $+\sqrt{2\frac{16}{64}}$. Et ex diuisione $-\sqrt{225}$. per -8. hoc est, per $-\sqrt{64}$. fit Quotiens $+\sqrt{3\frac{33}{64}}$. Quibus Quotientibus in ordinem redactis, erit totus Quotiens $\sqrt{\sqrt{3\frac{33}{64}}+\sqrt{2\frac{16}{64}}-\sqrt{\frac{25}{64}}-\frac{1}{2}}$ qui æquiualet $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ hoc est, $1\frac{1}{2}$. vt diximus. Nam $\sqrt{3\frac{33}{64}}$. hoc est, $\sqrt{\frac{225}{64}}$. est $\frac{15}{8}$. & $\sqrt{2\frac{16}{64}}$. siue $\sqrt{\frac{144}{64}}$. est $\frac{12}{8}$. quæ cum priori $\frac{15}{8}$ facit $\frac{27}{8}$. Deinde $\sqrt{\frac{25}{64}}$. est $\frac{5}{8}$. quæ cum $\frac{1}{2}$. hoc est, cum $\frac{4}{8}$ facit $\frac{9}{8}$. atque $\frac{9}{8}$. ex $\frac{27}{8}$ relinquunt $\frac{18}{8}$. siue $2\frac{1}{4}$. atque radix huius numeri est Quotiens supra inuentus, nimirum $1\frac{1}{2}$.

IMMO ex diuisione $\sqrt{4+\sqrt{25}-\sqrt{144}-\sqrt{225}}$ per $\sqrt{-8}$. prouenire $1\frac{1}{2}$. ita quoque fiet manifestum. Ex 4. & $\sqrt{25}$. fiunt 9. Et ex $-\sqrt{144}-\sqrt{225}$. fiunt -27. Faciunt autem -27. cum $+9$. numerum -18. Igitur numerus diuidendus est $\sqrt{-18}$. & diuisor $\sqrt{-8}$. vbi Quotiens fit $\sqrt{2\frac{1}{4}}$. hoc est, $1\frac{1}{2}$.

HOC exemplum ita quoque proponi potest; vt dicamus, diuidendam esse $\sqrt{4+\sqrt{25}}$ per $\sqrt{\sqrt{9}+1}$ vbi iterum diuiduntur 3. per 2. Et si tam diuidendus, quam diuisor multiplicetur per $\sqrt{\sqrt{9}-1}$ fiet nouus diuidendus numerus $\sqrt{\sqrt{144}+\sqrt{225}-4-\sqrt{25}.}$ & nouus diuisor $\sqrt{8}$. Quadrata horum numerorum sunt $\sqrt{144}+\sqrt{225}-4-\sqrt{25}$. & 8. Ex diuisione autem $\sqrt{144}$. per 8. id est, per $\sqrt{64}$. fit Quotiens $\sqrt{2\frac{16}{64}}$. Et ex diuisione $\sqrt{225}$. per 8. id est, per $\sqrt{64}$. fit Quotiens $\sqrt{3\frac{33}{64}}$. Et ex diuisione -4. per 8. fit Quotiens $-\frac{1}{2}$. Et ex diuisione $-\sqrt{25}$. per 8. id est, per $\sqrt{64}$. fit Quotiens $-\sqrt{\frac{25}{64}}$. ita vt totus Quotiens sit idem omnino, qui prius, nimirum $\sqrt{\sqrt{3\frac{33}{64}}+\sqrt{2\frac{16}{64}}-\sqrt{\frac{25}{64}}-\frac{1}{2}}$. De industria autem interdum longior sum in exemplis expediendis, vt ex iis difficultates, quæ in radicibus numerorum compositorum occurrere solent, discas superare.

DIVIDAMVS quoque $\sqrt[3]{\sqrt[3]{32768}+\sqrt[3]{13824}}$ per 2. Cubi numerorum sunt $\sqrt[3]{32768}+\sqrt[3]{13824}$. & 8. Ex diuisione $\sqrt[3]{32768}$. per 8. hoc est, per $\sqrt[3]{512}$. fit Quotiens $\sqrt{64}$. Et ex diuisione $\sqrt[3]{13824}$. per 8. id est, per $\sqrt[3]{512}$. fit Quotiens $\sqrt[3]{27}$. Totúsque Quotiens erit $\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{27}}$ hoc est, $\sqrt[3]{7}$.

DENIQVE sit diuidenda $\sqrt{33+\sqrt{9}}$ per $\sqrt{3+\sqrt{1}}$ hoc est, 6. per 2. vbi Quotiens est 3. Multiplicetur vterq; numerus per $\sqrt{3-\sqrt{1}}$ vt fiat nouus diuidendus $\sqrt{99+\sqrt{81}-\sqrt{1089}-\sqrt{9}}$ & nouus diuisor $\sqrt{9-1.}$ hoc est, $\sqrt{8}$. Quadrata horum numerorum sunt $99+\sqrt{81}-\sqrt{1089}-\sqrt{9}$. & 8. Ex diuisione 99. per 8. fit Quotiens $12\frac{3}{8}$. Ex diuisione $\sqrt{81}$. per 8. id est, per $\sqrt{64}$. fit Quotiens $\sqrt{1\frac{17}{64}}$. Ex diuisione $-\sqrt{1089}$. per 8. id est, per $\sqrt{64}$. fit Quotiens $-\sqrt{17\frac{1}{64}}$. Ac tandem ex diuisione $-\sqrt{9}$. per 8. hoc est, per $\sqrt{64}$. fit Quotiens $-\sqrt{\frac{9}{64}}$. Erítque totus

tus Quotiens $\sqrt{12\frac{3}{8}+\sqrt{1\frac{17}{64}}-\sqrt{17\frac{1}{64}}-\sqrt{\frac{9}{64}}.}$ hoc est, 3. Nam si ad $12\frac{3}{8}$. addatur $\sqrt{1\frac{17}{64}}$. hoc est, $\frac{9}{8}$. fient $12\frac{12}{8}$. ex quibus si tollantur $\sqrt{17\frac{1}{64}}$. & $\sqrt{\frac{9}{64}}$. hoc est, $\frac{33}{8}$. & $\frac{3}{8}$. relinquentur 9. Est ergo Quotiens $\sqrt{9}$. id est, 3.

Additio radicum numerorum compositorum.

ADDITIO, & subtractio radicum numerorum compositorum commodè plerunque addi non possunt, vel vna ab altera subtrahi, nisi per interpositionem signi + vel −. vt cap. 22. annotauimus. Quando tamen addenda est huiusmodi radicum aliqua ad similem, mutato signo + in −. vel − in +. commodissimè inter se addentur, si illæ radices per signum + connectantur, & totum illud aggregatum in se ducatur, vt paulò ante monstratum est. Nam $\sqrt{}$ huius producti erit summa duarum radicum propositarum. Vt si addendæ sint hæ duæ radices, $\sqrt{12+\sqrt{6}}$ & $\sqrt{12-\sqrt{6}}$ ducemus hoc compositum $\sqrt{12+\sqrt{6}}+\sqrt{12-\sqrt{6}}$ in seipsum, producetúrque numerus $24+\sqrt{552}$. vt supra diximus. Huius ergo radix quadrata, nimirum $\sqrt{24+\sqrt{552}.}$ erit summa duarum radicum propositarum.

Eodem modo supra, harum radicum, $\sqrt{10+\sqrt{36}}$ & $\sqrt{10-\sqrt{36}}$ summa inuenta fuit, $\sqrt{20+\sqrt{256}}$ hoc est, $\sqrt{36}$. id est, 6.

ITEM sint addendæ $\sqrt{8+\sqrt{32}}$ & $\sqrt{8-\sqrt{32}.}$ Sic stabit exemplum ad multiplicationem. Si ergo producto numero præfiges signum $\sqrt{}$. erit summa duarum radicum dictarum, $\sqrt{16+\sqrt{128}.}$

$$\sqrt{8+\sqrt{32}}+\sqrt{8-\sqrt{32}}$$
$$\sqrt{8+\sqrt{32}}+\sqrt{8-\sqrt{32}}$$
$$8+\sqrt{32}\quad+\quad 8-\sqrt{32}$$
$$\sqrt{32}$$
$$\sqrt{32}$$
$$\sqrt{128}$$

Productus. $16+\sqrt{128}$.

ITEM sit addenda $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ad $\sqrt{2-\sqrt{3}.}$ Sic instituetur multiplicatio, fiétque productus, $4+\sqrt{4}$. hoc est, 6. Igitur summa duarum radicum quæsita erit $\sqrt{6}$.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$2+\sqrt{3}\quad+\quad 2-\sqrt{3}$$
$$\sqrt{1}$$
$$\sqrt{1}$$
$$\sqrt{4}$$

Productus. $4+\sqrt{4}$. hoc est, 6.

Huiusmodi radicum additio commodè etiam sic fiet. Multiplicetur quadratum vnius radicis in quadratum alterius. quod breuissimè fiet, si in alterutra radice, quadratum posterioris particulæ dematur ex quadrato particulæ prioris, & residui radix adijciatur ad priorem particulam, summáque hæc duplicetur, id est, per 2. multiplicetur. Radix enim huius producti dabit summam quæsitam. Vt in primo exemplo, summa $\sqrt{12+\sqrt{6}}$ & $\sqrt{12-\sqrt{6}}$ ita fiet. Dempto quadrato 6. posterioris particulæ ex 144. quadrato particulæ prioris, supersunt 138. Si igitur addatur $\sqrt{138}$.

ad 12. priorem particulam, fiet summa 12 + √138. quæ ducta in 1. faciet summam quæsitam √(24 + √552) vt prius.

In secundo autem exemplo, summa √(10 + √36) & √(10 — √36) ita nota fiet. Dempto quadrato 36. posterioris particulæ ex 100. quadrato prioris particulæ, remanent 64. Si ergo √64. addes ad priorem particulam 10. facies 10 + √64. quæ summa ducta in 2. faciet summam desideratam √(20 + √256.) hoc est, √36. hoc est, 6. veluti prius.

In tertio denique exemplo, summam radicum √(2 + √3) & √(2 — √3) sic cognoscemus. Dempto quadrato 3. posterioris particulæ ex 4. quadrato particulæ prioris, reliqua fit 1. Si ergo addemus √1. ad 2. priorem particulam, faciemus 2 + √1. hoc est, 3. Duplum est 6, Ergo √6. est summa optata, eadem quæ prius.

Qvando addendæ sunt duę radices numerorum compositorum dissimilium, quorum videlicet numeri particularum non omnes æquales sunt: addi poterunt nonnunquam per propos. 4. lib. 2. Eucl. tum scilicet, cum numerus ex vna radice in alteram bis multiplicata productus reduci potest ad simplicem numerum, vel ad numerum compositum duarum particularum, hoc scilicet modo. Sit addenda √(10 + √36) ad √(11 + √25) hoc est, 4. ad 4. vbi summa est 8. Quadrata duarum radicum per signum + connexa faciunt 10 + √36 + 11 √25. Productus numerus ex vna radice in alteram, (hoc est, si quadratum vnius in quadratum alterius ducatur, & producto præfigatur signum √. vt in multiplicatione radicum simplicium quadratarum fieri solet) est √(110 + √4356 + √2500 + √900.) vt in subiecta formula apparet. cuius duplum (si nimirum per 2. multiplicetur) √(440 + √69696 + √40000 + √14400) reducitur ad √1024. hoc est, ad 32.

√(10 + √36)
√(11 + √25)
———————
√2500 + √900
110 + √4356
———————
√(110 + √4356 + √2500 + √900.)

Si igitur addantur 32. ad duo superiora quadrata, erit tota summa √(10 + √36 + √11 + √25 + 32.) hoc est, √64. siue 8. vt ratio postulat.

Sit rursum addenda √(12 + √108) ad √(2 + √3) Summa quadratorum est 12 + √108 + 2 + √3. Productus numerus ex vna radice in alteram est √(42 + √1728) quæ radix est √24 + √18. (vt ex cap. 27. patebit.) cuius duplum, nimirum √96 + √72. additum ad prædicta duo quadrata 12 + √108 + 2 + √3. hoc est, ad 14 + √108 + √3. hoc est, ad 14 + √147. (nam √108. & √3. sunt commensurabiles, conficiuntque √147) fiet tota summa √(14 + √147 + √96 + √72.)

Sit quoque addenda √(√2 + 1) ad √(√162 + 9.) Summa quadratorum est √2 + 1 + √162 + 9. Ex vna radice in alteram fit √(27 + √648) quæ radix valet 3 + √18. (quo pacto autem ex hoc quadrato 27 + √648. erui debeat radix, cap. 27. docebimus (cuius duplum 6 + √72. additum ad prædictam quadratorum summam facit √2 + 1 + √162 + 9 + 6 + √72. hoc est √512 + 16. Nam √162. & √2. commensurabiles sunt, faciuntque √200. Item √200. & √27. commensurabiles quoque sunt, faciuntque √512. Summa ergo quæsita erit √(√512 + 16.)

Sed quando productus numerus ex vna radice in alteram non potest reduci ad numerum compositum, quando videlicet radicem, quę sit vel radix simplex, vel numerus compositus, non habet, fieret hoc modo summa magis perplexa, & obscura. Quare commodius fiet tunc addito per signum + interpositum. V.g. si addenda sit √(2 + √3) ad √(√12 + 2) fit ex vna in alteram √(√48 + √36 + 4 + √12) hoc est, √(√108 + 10) propterea quòd √48. & √12. commensurabiles sunt, conficiúntque √108. ac √36. & 4. efficiunt 10. Sed quia numerus quadratus √108 + 10. radicem habet √(√27 + √2) + √(√27 — √2. (vt ex cap. 27. constabit. quæ quidem composita est ex duabus radicibus duorum numerorum compositorum. Efficiunt autem hæ duæ radices summam √(√27 + √2 + √27 — √2 + 10. vt in hac formula apparet. Atque hæc summa reducitur ad hanc, √(√108 + 10) erit hæc summa radix huius numeri √108 + 10. quod patet, quia √(√108 + 10) in se ducta facit √108 + 10. Hæc autem radix √(√108 + 10) duplicata, quod fiet, si eius quadratum √108 + 10. ducatur in 4. quadratum binarij; Hæc, inquam, radix duplicata facit √(1728 + 40) quæ cum duobus quadratis radicum propositarum, nimirum cum 2 + √3. & √12 + 2. faciet radicum summam √(√1728 + 40) + 2 + √3 + √12 + 2) sed quia 2 + √3 + √12 + 2. faciunt 14 + √27. erit summa √(√1728 + 40) + √27 + 14) quæ magis intricata est, quam si summa dicatur esse √(2 + √3) + √(√12 + 2.) Eadem illa summa intricata facilius reperietur, sine inuentione radicis numeri √108 + 10. cuius radix, nimirum √(√108 + 10.) producta fuit ex vna radice proposita in alteram. Nam duplum huius numeri, √(√1728 + 40) cum duobus quadratis radicum propositarum, conficiet ex propos. 4. lib. 2. Eucl. duarum radicum summam eandem √(√1728 + 40) + √27 + 14.

√(√27 + √2) + √(√27 — √2)
√(√27 + √2) + √(√27 — √2)
———————
√27 + √2 + √27 — √2
√25. hoc est, 5
√25. hoc est, 5
———————
√100. id est, 10
———————
√(√27 + √2 + √27 — √2 + 10.

Qvando duæ huiusmodi radices sunt commensurabiles, poterunt inter se addi per regulam trium, veluti radices simplices, Vt si addenda proponatur √(2 + √3) ad √(8 + √48.) Diuisa hac per illam,(inuento videlicet nouo diuiſore √ȝ 1.& nouo diuidendo √ȝ 4.)fit Quotiens √ȝ 4.hoc eſt,2.ſiue 2/1. Habent ergo illæ radices proportionem duplam:ac proinde ſi fiat,Vt 1.ad 3. ita √ȝ(2 + √ȝ 3) ad aliud, inuenietur ſumma √ȝ(18 + √ȝ 243.)

ITEM ſit addenda √ȝ(4 + √ȝ 6)ad √ȝ (8 + √ȝ 24.) Diuiſa hac per illam(inuento diuiſore nouo √ȝ 10.& nouo diuidendo √ȝ 20)fit quotiens √ȝ 2.qui licet irrationalis ſit, ac proinde radices propoſitæ ſint incommenſurabiles,conabimur tamen eius beneficio illas ſimul addere,more radicum commenſurabilium.Eſt ergo proportio vnius radicis ad alteram,quæ √ȝ 2 .ad 1.ita vt denominator proportionis ſit √ȝ2/1. Et denominator 1.huius fractionis additus ad √ȝ 2.denominatorem,facit √ȝ 2 + 1. Quare ſi fiat,Vt 1.ad √ȝ 2 + 1.ita √ȝ(4 + √ȝ 6)ad aliud,fit √ȝ(12+√ȝ 128 +√ȝ 54+√ȝ 48)pro ſumma duarum radicum propoſitarum.Nam vt in regula trium multiplicetur √ȝ 2 + 1. in √ȝ(4 + √ȝ 6)reducenda eſt √ȝ 2 + 1.ad quadratum 3 + √ȝ 8.hoc eſt,ducenda in ſe,atque hoc ducendum in 4 + √ȝ 6. quadratum radicis √ȝ(4+√ȝ 6.) Productoque 12+√ȝ 128 — √ȝ 50 + √ȝ 48.præfigendum ſignum √ȝ.

SIT præterea addenda √ȝ (√ȝ 6 — √ȝ 2)ad √ȝ(√ȝ 96 — √ȝ 32.) Diuiſa hac per illam(inuento ſcilicet nouo diuiſore √ȝ 4. & nouo diuidendo √ȝ 16.fit Quotiens √ȝ 4. hoc eſt,2. eſtque proportio vnius radicis ad alteram dupla,cuius denominator eſt 2/1.Si igitur fiat,Vt 1.ad 3 ita √ȝ(√ȝ 6— √ȝ 2)ad aliud:reperietur ſumma quæſita √ȝ(√ȝ 486 — √ȝ 162.)

Subtractio radicum numerorũ compoſitorum.

IAM verò ſi à radice numeri compoſiti detrahenda ſit alia radix ſimilis numeri diminuti,(quod ſæpe contingit in Binomiis,ac Reſiduis,eorumque radicibus) fiet id hoc modo. Sit ſubtrahenda V. g. √ȝ (12— √ȝ 6) à √ȝ (12+√ȝ 6)Certum eſt, reſiduum eſſe √ȝ (12 + √ȝ 6) — √ȝ (12— √ȝ 6.)Scribatur ergo hoc reſiduum bis,& in ſe multiplicetur, hoc eſt, iuxta propoſ. 4. lib. 2. Eucl. ad quadrata partium, 12 + √ȝ 6.& 12 — √ȝ 6.addatur duplũ numeri — √ȝ 138.qui fit ex vna parte in alterã,videlicet — √ȝ 552.fietq.quadratum 24.— √ȝ 552.quia duo quadrata efficiũt 24.Radix igitur hui⁹ quadrati,nimirũ √ȝ(24—√ȝ 552)erit id,quod relinquitur ex detractione √ȝ(12—√ȝ 6)à √ȝ(12+√ȝ 6.) Detracto enim numero ex alio numero,ſi reliquus numer⁹ ducatur in ſe,erit radix quadrata numeri producti,numerus ille reliquus. Ac proinde cũ in dato exemplo numerus reliquus,√ȝ(12 + √ȝ 6)— √ȝ)12— √ȝ 6)in ſe ductus faciat 24 — √ȝ 552.erit √ȝ (24 — √ȝ 552) numerus,qui relinquitur ex detractione √ȝ (12 — √ȝ 6) à √ȝ (12 + √ȝ 6.)

√ȝ (12 + √ȝ 6) — √ȝ (12 — √ȝ 6)
√ȝ (12 + √ȝ 6) — √ȝ (12 — √ȝ 6)
―――――――――――――――
12 + √ȝ 6 + 12 — √ȝ 6
— √ȝ 138
— √ȝ 138
―――――――――――――――
24 — √ȝ 552

ALIVD exemplum in numeris rationalibus. Sit ſubtrahenda √ȝ

√ȝ (10 — √ȝ 36) ex √ȝ (10 + √ȝ 36)nimirum 2.ex 4. vbi perſpicuum eſt, reliquum numerum eſſe 2.Scripto numero √ȝ(10 + √ȝ 36.) — √ȝ(10— √ȝ 36) qui nimirum relinquitur poſt detractionem √ȝ(10 — √ȝ 36) ex √ȝ (10 + √ȝ 36) atque eodem ducto in ſe, iuxta præſcriptum propoſ. 4 lib. 2. Eucl. fiet productus numerus 20 — √ȝ 256.) Ergo reſiduum quæſitum erit √ȝ(20 — √ȝ 256)hoc eſt,√ȝ 4. ſiue 2.quod eſt propoſitum.

√ȝ (10 + √ȝ 36) — √ȝ (10 — √ȝ 36)
√ȝ (10 + √ȝ 36) — √ȝ (10 — √ȝ 36)
―――――――――――――――
10 + √ȝ 36. & 10 — √ȝ 36
— √ȝ 64
— √ȝ 64
―――――――――――――――
20 — √ȝ 256

QVANDO propoſitæ radices huiuſmodi ſunt diuerſæ , poterit minor à maiore ſubtrahi,ex præſcripto propoſ.7.lib.2.Eucl. quando videlicet numerus productus ex vna radice in aliam multiplicata bis reduci poteſt ad numerum ſimplicem,vel compoſitum duarum particularum,hac ſcilicet ratione.Sit ſubtrahenda √ȝ (8 — √ȝ 32) ex √ȝ (8 + √ȝ 32.) Quadrata duarum particularum ſunt 8 — √ȝ 32. & 8 + √ȝ 32. quæ connexa per ſignum +,faciunt 8 —√ȝ 32 + 8 + √ȝ 32.hoc eſt, 16. Ex vna radice in alteram fit √ȝ 32.cuius duplum √ȝ 128.ablatum ex 16.ſumma quadratorum,relinquit 16 — √ȝ 128. Huius ergo numeri radix quadrata,nimirum √ȝ(16—√ȝ 128) eſt reſiduum deſideratum.

√ȝ (8 + √ȝ 32)
√ȝ (8 — √ȝ 32)
―――――――――――――――
√ȝ 32

SIT rurſus auferenda √ȝ(2 + √ȝ 3)ex √ȝ (12 + √ȝ 108.) Summa quadratorum eſt 2 + √ȝ 3 + 12 + √ȝ 108.hoc eſt,14 + √ȝ 147. Nam √ȝ 108. & √ȝ 3.commenſurabiles ſunt,efficiúntque √ȝ 147. Ex vna radice in alteram fit √ȝ (42+ √ȝ 1728)quæ radix,vt ex cap.28. conſtabit, eſt √ȝ 24 + √ȝ 18. cuius duplum √ȝ 96 + √ȝ 72.demptum ex prædicta quadratorum ſumma 14+√ȝ 147. relinquit 14 + √ȝ 147 — √ȝ 96.&—√ȝ 72.& præpoſito ſigno √ȝ.erit reſiduum ſubtractionis √ȝ (14 + √ȝ 147 — √ȝ 96.&— √ȝ 72.)quod idem eſt, ac 14 + √ȝ 147 — √ȝ 96 + √ȝ 72. quia ſenſus eſt, ex 14 + √ȝ 147.detrahi aggregatum ex √ȝ 96.& √ȝ 72. vt rectè dictum ſit, reſiduum eſſe 14 + √ȝ 147—√ȝ 96.&—√ȝ 72.Eſt enim ſenſus , non ſolum ſubtrahi √ȝ 96.ſed inſuper √ȝ 72. ſubduci.Hoc autem perſpicuè cernitur,ſi numerus rationalis detrahendus ſit,vt √ȝ 100 + √ȝ 4.ex 14 + √ȝ 147.vbi certum eſt,ſubtrahi 10 + 2.hoc eſt,12. reſiduúmque eſſe 2 + √ȝ 147.quod æquiualet huic,14 + √ȝ 147 — √ȝ 100 + √ȝ 4.ſiue huic,14 + √ȝ 147—√ȝ 100.& — √ȝ 4,vt perſpicuum eſt.

12 + √ȝ 108
2 + √ȝ 3
―――――――――――――――
+ √ 432 + √ȝ 324
24 + √ 432
―――――――――――――――
√ȝ (42 + √ȝ 1728)

QVOD ſi productus numerus ex vna radice in alteram non habeat radicem, numerum compositum duarum particularum, facienda est subtractio per signum —. Vt si subtrahenda sit √ʒ(2 + √ʒ 3) ex √ʒ(√ʒ 12 + 2.) Ex ductu vnius radicis in alteram fit √ʒ(√ʒ 108 + 10) quæ, vt ex cap. 28. patebit, æquiualet huic, √ʒ(√ʒ 27 + √ʒ 2) + √ʒ(√ʒ 27 — √ʒ 2.) Quare commodius dicetur residuum subtractionis esse √ʒ(√ʒ 12 + 2) — √ʒ(2 — √ʒ 3.)

Qvando denique huiusmodi radices sunt commensurabiles, subtrahetur vna ab altera per regulam trium, vt de radicibus simplicibus diximus. Sit enim subtrahenda √ʒ(2 + √ʒ 3.) ex √ʒ(8 + √ʒ 48.) Diuisa hac per illam, (inuento nimirum nouo diuisore √ʒ 1. & nouo diuidēdo √ʒ 4) fit Quotiens √ʒ 4. hoc est 2. ita vt proportio earum sit dupla, cuius denominator $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat, vt 1. ad 1. ita √ʒ(2 + √ʒ 3) ad aliud. producetur √ʒ(2 + √ʒ 3) pro residuo subtractionis.

Item sit auferenda √ʒ(4 + √ʒ 6) ex √ʒ(8 + √ʒ 24.) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet nouo diuisore √ʒ 10. & nouo diuidendo √ʒ 20.) fit Quotiens √ʒ 2. ita vt denominator proportionis maioris ad minorē sit $\frac{√ʒ\,2}{1}$. Si ergo fiat, vt 1. ad √ʒ 2 — 1. ita √ʒ(4 + √ʒ 6) ad aliud, prodibit residuum subtractionis √ʒ(12 + √ʒ 54 — √ʒ 128 — √ʒ 48.) Nam vt in regula trium multiplicetur √ʒ(4 + √ʒ 6) per √ʒ 2 — 1. reducendus est prius hic numerus ad quadratum 3 — √ʒ 8 &c.

Postremo sit subducenda √ʒ(√ʒ 6 — √ʒ 2 à √ʒ(√ʒ 486 — √ʒ 162.) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet diuisore nouo √ʒ 4. nouóque diuidendo √ʒ 36) fit Quotiens √ʒ 9. hoc est, 3. ita vt radices propositæ habeāt proportionem triplam, cuius denominator $\frac{3}{1}$. Si igitur fiat, vt 1. ad 2. ita √ʒ(√ʒ 6 — √ʒ 2) ad aliud, prodibit residuum quæsitum √ʒ(√ʒ 96 — √ʒ 32) Vt enim in regula trium secundus numerus in tertium multiplicetur reducendi sunt ambo ad quadrata 4. & √ʒ 6 — √ʒ 2. & vnum in alterum ducendum, vt hic factum esse vides, & producto præfigendum signum √ʒ. vt residuum fiat √ʒ(√ʒ 96 — √ʒ 32.) Idem residuum reperietur, si fiat, vt 3. ad 2. ita √ʒ(√ʒ 486 — √ʒ 162) ad aliud. Nam reuocato secundo numero regulæ trium 2. & tertio √ʒ(√ʒ 486 — √ʒ 162) ad quadrata 4. & √ʒ 486 — √ʒ 162. si inter se multiplicentur, gignetur numerus √ʒ 7776 — √ʒ 2592. qui vt per 3. primum numerum regulæ trium diuidatur, reducendus erit ad quadratum 9. Si ergo √ʒ 7776. diuidatur per 9. id est, per √ʒ 81. fiet Quotiens √ʒ 96. Et si — √ʒ 2592. diuidatur per 9. hoc est, per √ʒ 81. fiet Quotiens — √ʒ 32. &c.

√ʒ 6 — √ʒ 2
4
√ʒ 96 — √ʒ 32

√ʒ 486 — √ʒ 162
4
√ʒ 7776 — √ʒ 2592

DE

DE MINVTIIS NVMERORVM Irrationalium, ac de earundem Algorithmo.

CAP. XXV.

Numeratio minutiarum irrationalium.

Nvmeratio harum minutiarum facilis est. Quando enim signum radicale ponitur ante medium minutiæ, refertur signum illud ad vtrumque terminum, tam scilicet ad numeratorem, quam ad denominatorem. Vt hæc minutia √ʒ $\frac{9}{16}$. significat √ʒ 9. diuisam esse per √ʒ 16. æquiualétque $\frac{3}{4}$. Sic √ce $\frac{8}{27}$. significat √ce 8. diuisam esse per √ce 27. æquiualétque $\frac{2}{3}$. Ita quoque √ʒ $\frac{6}{8}$ denotat, √ʒ 6. esse diuisam per √ʒ 8.

Qvando signum radicale ponitur ante numerum integrum cum fractione, reducendus est totus numerus ad vnicam fractionem, vt eius valor exprimi possit. Vt √ce 1 $\frac{67}{125}$. reducitur ad √ce $\frac{192}{125}$. significátque √ce 192. diuisam esse per √ce 125. hoc est, per 5. potéstq; ita repręsentari $\frac{√ce\,192}{5}$. ita vt significet, √ce 192. esse diuisam per 5. Quòd si termini huius minutiæ √ce $\frac{192}{125}$. multiplicentur per eundem aliquem numerum, nimirum per √ce 192. producetur minutia √ce $\frac{36864}{24000}$ æquiualens minutiæ $\frac{192}{125}$. Et si rursus termini productæ minutiæ ducantur in eandem √ce 192. fiet minutia æquiualens √ce $\frac{7077888}{4608000}$. hoc est, $\frac{192}{√ce\,4608000}$. significátque cubum 192. (qui videlicet producitur ex ce 192. ducta in se cubicè) diuisũ esse per √ce 4608000. quia radix cubica numeratoris 7077888. est 192. Rursus minutia √ʒ $\frac{16}{64}$. significat √ʒ 16. nimirum 4. diuisam esse per √ʒ 64. nimirum per 8. æquiualétque minutiæ $\frac{1}{2}$. At minutia $\frac{√ʒ\,16}{64}$. significat √ʒ 16. id est, 4. diuisam esse per 64. æquiualétque minutiæ $\frac{4}{64}$. vel $\frac{1}{16}$. Sic minutia $\frac{16}{√ʒ\,64}$. significat numerum 16 diuisum esse per √ʒ 64. id est, per 8. æquiualétque numero 2.

Qvando eadem est proportio numeratorum ad denominatores, minutiæ æquales sunt, quemadmodum in minutiis vulgaribus. Itaque omnes hæ minutiæ $\frac{√ʒ\,64}{2}$. √ʒ $\frac{64}{4}$. $\frac{64}{√ʒ\,256}$. eiusdem sunt valoris: quia in omnibus numerator ad denominatorem proportionem seruat quadruplam, vt constat, si numeratores singuli per singulos denominatores diuidantur.

Abbreuiatio minutiarum irrationalium.

Minvtiæ irrationales reducuntur ad minimos terminos, quando reduci possunt, vt reduci solent minutiæ vulgares. Vt hæc minutia √ʒce $\frac{4}{8}$. reducitur ad hanc √ʒce $\frac{1}{2}$. & √ʒ $\frac{144}{36}$. ad √ʒ $\frac{4}{1}$. Possunt quoque nonnunquam reduci ad minora signa radicalia. Vt √ʒce $\frac{4}{8}$. reducitur ad $\frac{√ce\,2}{√ʒ\,2}$. quia numerator 4. habet radicem quadratam 2. sed hæc non habet cubicam: At denominator 8. habet radicem cubicam 2. sed hæc quadratam non habet. Esse autem has minutias

$\sqrt{zc}\,\frac{4}{8}$. & $\frac{\sqrt{c}\,2}{\sqrt{z}\,2}$. æquales, probari poteſt ex multiplicatione in crucem.

Additio & ſubtractio minutiarum irrationalium.

ADDITIO, atque ſubtractio fit in hunc modum. Si denominator eſt idem, adduntur denominatores, vt ſupra traditum eſt, vel vnus ab altero ſubtrahitur, & ſummæ, vel reſiduo communis denominator ſupponitur. Vt ex additione $\frac{\sqrt{z}\,4}{7}$. ad $\sqrt{z}\,\frac{9}{7}$. fit ſumma $\frac{\sqrt{z}\,25}{7}$. hoc eſt, $\frac{5}{7}$. At ſubtracta $\frac{\sqrt{z}\,4}{7}$. ex $\frac{\sqrt{z}\,9}{7}$ relinquitur $\frac{\sqrt{z}\,1}{7}$. id eſt $\frac{1}{7}$.

Additio

$$\frac{\sqrt{z}\,4}{7}.\quad \frac{\sqrt{z}\,9}{7}.\qquad \frac{\sqrt{z}\,25}{7}.\ \text{vel}\ \frac{5}{7}.$$

Subtractio

$$\frac{\sqrt{z}\,4}{7}.\quad \frac{\sqrt{z}\,9}{7}.\qquad \frac{\sqrt{z}\,1}{7}.\ \text{vel}\ \frac{1}{7}.$$

QVANDO autem denominatores ſunt diuerſi, fit reductio ad eundem denominatorem per multiplicationem in crucem, quemadmodum in minutiis vulgaribus fieri conſueuit. Deinde eodem modo numeratores adduntur inter ſe, vel vnus ab altero ſubtrahitur, & ſummæ, vel reliquo numero idem denominator communis ſubſcribitur. Vt ſi addi debent $\sqrt{z}\,\frac{16}{49}$. ad $\sqrt{z}\,\frac{4}{9}$. vel illa ex hac auferenda, reducentur, vt formula appoſita monſtrat, ad $\frac{\sqrt{z}\,144}{\sqrt{z}\,441}$. & $\frac{\sqrt{z}\,196}{\sqrt{z}\,441}$.

Reductio

$$\frac{\sqrt{z}\,144}{\dfrac{\sqrt{z}\,16}{\sqrt{z}\,49}}.\quad \frac{\sqrt{z}\,196}{\dfrac{\sqrt{z}\,4}{\sqrt{z}\,9}}.\qquad \sqrt{z}\ 441$$

Additio

$$\frac{\sqrt{z}\,144}{\sqrt{z}\,441}.\quad \frac{\sqrt{z}\,196}{\sqrt{z}\,441}.\qquad \frac{26}{21}$$

fit autem ex additione ſumma $\frac{26}{21}$. hoc eſt, $1\frac{5}{21}$. Nam numeratores commenſurabiles ſunt in proportione $\frac{7}{6}$. efficiúntque ſummam $\sqrt{z}$ 676. cui ſupponitur denominator communis $\sqrt{z}$ 441. vt fiat ſumma $\frac{\sqrt{z}\,676}{\sqrt{z}\,441}$. hoc eſt, $\frac{26}{21}$. id eſt, $1\frac{5}{21}$. At ſubtracta $\frac{\sqrt{z}\,16}{\sqrt{z}\,49}$. ex $\frac{\sqrt{z}\,4}{\sqrt{z}\,9}$. remanent $\frac{2}{21}$. Nam numerator $\sqrt{z}$ 144. ſubtractus à numeratore $\sqrt{z}$ 196. relinquit $\frac{\sqrt{z}\,4}{\sqrt{z}\,441}$. hoc eſt, $\frac{2}{21}$.

Eodem modo, ſi addendæ ſunt $\frac{\sqrt{z}\,50 \times \sqrt{c}\,24}{5}$. & $\frac{\sqrt{c}\,24 \times \sqrt{z}\,8}{2}$. reduco eas prius ad eandem denominationem, videlicet ad $\frac{\sqrt{z}\,200 \times \sqrt{c}\,192}{10}$. & $\frac{\sqrt{c}\,3000 \times \sqrt{z}\,200}{10}$. Additis deinde numeratoribus, ac ſuppoſito eodem denominatore 10. fit ſumma $\frac{\sqrt{z}\,800 \times \sqrt{c}\,8232}{10}$. At verò ex ſubtractione minoris minutiæ ex maiore relinquitur $\frac{\sqrt{c}\,648}{10}$. quia $\sqrt{z}$ 200. ex $\sqrt{z}$ 200. nihil relinquit.

ITEM ſi addendæ ſunt $\frac{\sqrt{z}\,4}{9}$. & $\frac{\sqrt{z}\,49}{9}$. vel illa minutia ex hac detrahenda, non eſt opus reductione ad eandem denominationem. Fit autem ex numeratoribus ſumma $\sqrt{z}$ 81. & ſuppoſito denominatore 9. fit ſumma ex duabus propoſitis minutiis $\frac{\sqrt{z}\,81}{9}$. hoc eſt, 1. At detracto numeratore $\sqrt{z}$ 4. ex numeratore $\sqrt{z}$ 49. relinquitur $\sqrt{z}$ 25. Eſt ergo reſiduum $\frac{\sqrt{z}\,25}{9}$. hoc eſt, $\frac{5}{9}$.

QVANDO numeratores ſunt incommenſurabiles, additio eorum fit per interpoſitionem ſigni $+$, ſubtractio autem per interiectionem ſigni $-$. Vt ſumma ex $\sqrt{z}\,\frac{7}{8}$. & $\sqrt{z}\,\frac{5}{8}$. fit ſumma $\sqrt{z}\,\frac{7}{8} + \sqrt{z}\,\frac{5}{8}$. Et $\sqrt{z}\,\frac{5}{8}$. dempta ex $\sqrt{z}\,\frac{7}{8}$. reliquam facit $\sqrt{z}\,\frac{7}{8} - \sqrt{z}\,\frac{5}{8}$.

Multiplicatio ac diuiſio minutiarum irrationalium.

IN multiplicatione, ac diuiſione minutiarum irrationalium ſolum opus eſt reductione ad eadem ſigna radicalia. Reliqua enim perficiuntur, vt in minutiis vulgaribus traditum eſt. Vt ſi ducenda ſit $\frac{\sqrt{z}\,3}{4}$ per $\frac{\sqrt{z}\,6}{7}$. fit $\frac{\sqrt{z}\,18}{28}$. At ſi prior per poſteriorem diuidenda ſit, inuerſis terminis diuiſoris, ſtabit exemplum, vt vides.

Multiplicatio

$$\frac{\sqrt{z}\,3}{4}.\ \text{per}\ \frac{\sqrt{z}\,6}{7}.$$

Diuiſio

$$\frac{\sqrt{z}\,3}{4}.\ \text{per}\ \frac{7}{\sqrt{z}\,6}.$$

Fit autem Quotiens $\frac{\sqrt{z}\,147}{\sqrt{z}\,96}$. hoc eſt $\sqrt{z}\,1\frac{51}{96}$. Nam ex $\sqrt{z}$ 3. in 7. fit $\sqrt{z}$ 147. & ex 4. in $\sqrt{z}$ 6. fit $\sqrt{z}$ 96. In diuiſione tamen fieri poteſt reductio ad eandem denominationem, ſed tunc, relicto denominatore, facienda eſt diuiſio numeratoris per numeratorem. Vt in dato exemplo, minutiæ $\frac{\sqrt{z}\,3}{4}$. & $\frac{\sqrt{z}\,6}{7}$. reducentur ad $\frac{\sqrt{z}\,147}{28}$. & $\frac{\sqrt{z}\,96}{28}$. Diuiſo autem numeratore $\sqrt{z}$ 147. per numeratorem $\sqrt{z}$ 96. fit Quotiens $\sqrt{z}\,1\frac{51}{96}$. vt prius.

SINT quoque multiplicanda inter ſe $\frac{\sqrt{z}\,800 \times \sqrt{c}\,5184}{10}$ & $\frac{\sqrt{c}\,1536}{10}$. Primùm reducenda ſunt ad eadem ſigna radicalia, retento eodem denominatore communi 10. Numeratores ergo $\sqrt{z}$ 800. & $\sqrt{c}$ 5184. reducentur ad $\sqrt{zc}$ 512000000. & $\sqrt{zc}$ 26873856. Deinde ſi numerator $\sqrt{zc}$ 1536. multiplicetur Zenſicè, reducetur ad $\sqrt{zc}$ 2359296. Itaque ſic ſtabunt minutiæ reductæ. Et $\sqrt{zc}$ 2359296. in

$$\frac{\sqrt{zc}\,512000000 \times \sqrt{zc}\,26873856}{10}.\qquad \frac{\sqrt{zc}\,2359296}{10}.$$

$\sqrt{zc}$ 512000000. hoc eſt, in $\sqrt{zc}$ 512. (Nam $\sqrt{zc}$ 512. & $\frac{\sqrt{zc}\,512000000}{10}$. idem prorſus ſunt, cum idem numerus fiat ex $\sqrt{zc}$ 512. in 10. hoc eſt, in $\sqrt{zc}$ 1000000. qui ex 1. in $\sqrt{zc}$ 512000000) producitur $\sqrt{zc}$ 1207959552. Et ex $\sqrt{zc}$ 2359296. in $\sqrt{zc}$ 26873856. fit $\sqrt{zc}$ 63403380965376. hoc eſt, $\sqrt{c}$ 7962624. cum hic numerus ſit illius producti radix zenſica. Et quoniam denominatores multiplicati faciunt 100. erit productus numerus

$$\frac{\sqrt{zc}\,1207959552 \times \sqrt{c}\,7962624}{100}.$$

AD extremum ſit diuidenda $\frac{\sqrt{zc}\,512000000 \times \sqrt{zc}\,26873856}{10}$. per $\frac{\sqrt{zc}\,2359296}{10}$. Quoniam eundem habent denominatorem, ſatis eſt, diuidere numeratores. Ex diuiſione $\sqrt{zc}$ 512000000. per $\sqrt{zc}$ 2359296. fit Quotiens $\sqrt{zc}\ 217\frac{1}{72}$. nimirum $\sqrt{zc}\,\frac{15625}{72}$. hoc eſt, $\frac{5}{\sqrt{zc}\,72}$. propterea quod numerator $\sqrt{zc}$ 15625. æquiualet numero 5. cum numeri 15625. radix Zenſica ſit 125. & huius radix cubica 5. Vel (quod idem eſt) quod numeri 15625. radix cubica ſit 25. & huius radix Zenſica 5. At ex diuiſione $\sqrt{zc}$ 26873856. per $\sqrt{zc}$ 2359296. fit Quotiens $\sqrt{zc}\ 11\frac{921600}{2359296}$. ſiue $\sqrt{zc}\ 11\frac{25}{64}$. vel $\sqrt{zc}\,\frac{729}{64}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$. ſiue $1\frac{1}{2}$. Ex diuiſione ergo propoſita fit Quotiens $\sqrt{zc}\ 217\frac{1}{72} + 1\frac{1}{2}$. Vel $\frac{5}{\sqrt{zc}\,72} + 1\frac{1}{2}$.

DE NVMERIS IRRATIONALIBVS *Coßicis, ſiue denominatis, vna cum eorum Algorithmo.*

CAP. XXVI.

Numeri Coſſici irrationales, qui.

NVMERI Coſſici, ſiue denominati fiunt irrationales, quando illis præfigitur ſignum aliquod radicale. Vt 20 ℞. fit irrationalis √ʒ 20 ℞. Item √ce 20 ℞. √ʒʒ 20 ℞. &c. Senſus autem eſt, vt ſumatur radix zenſica, vel cubica, vel zenſizenſica 20. radicum, quæ mille modis variari poteſt, pro varietate valoris vnius radicis, potéſtque aliquando eſſe rationalis, & aliquando, vt plurimum, irrationalis. Nam ſi 1 ℞. eſt 5. erunt 20 ℞. numerus 100. cuius √ʒ. eſt 10. atque ita √ʒ 20 ℞. eſt numerus rationalis, æquiualens 10. At √ce 20 ℞. erit irrationalis, cum 100. non habeant radicem cubicam. Sic etiam √ʒʒ 20 ℞. erit irrationalis, quod 100. non habeant radicem zenſizenſicam: æquiualet tamen √ʒ 10. quippe cum radix zenſica 100. ſit 10. & radix zenſica 10. ſit √ʒ 10. Quòd ſi 1 ℞. ſit 50. erit valor 20 ℞. 1000. quæ habent radicem cubicam 10. Erit igitur √ce 20 ℞. rationalis, æquiualens 10. At √ʒ 20 ℞. erit irrationalis, ſicut & √ʒʒ 20 ℞. cum 1000. neque habeant radicem zenſicam, neque zenſizenſicam. Vides ergo, non poſſe iudicari, an huiuſmodi numeri ſint rationales, vel irrationales, niſi prius conſtet æſtimatio vnius radicis. Immo fieri poteſt, vt numerus aliquis Coſſicus, ſine ſigno radicali, inueniatur interdum eſſe irrationalis. Vt ſi æquatio reperiatur inter 1 ʒ. & 20 ℞. & vnius zenſi pretium ſit 18. neceſſario numerus 20 ℞. erit irrationalis, æquiualens √ʒ 7200. Nam quadrati 18. radix eſt √ʒ 18. atque adeo 20 ℞. erunt √ʒ 7200. qui numerus irrationalis eſt, cum 7200. careant radice quadrata.

Additio, & Subtractio numerorū Coſſicorum irrationalium.

ALGORITHMVS horum numerorum ex triplici Algorithmo conficitur, ſignorum radicalium, numerorum abſolutorum, & ſignorum Coſſicorum; neque admodum difficilis eſt, cum ipſa ſigna ſatis nos inſtruant, quid agere debeamus. Additio enim vt plurimum fit per interpoſitionem ſigni +. Subtractio verò per ſignum —. Vt ex additione √ʒ 36 ℞. ad √ʒ 12 ʒ. fit ſumma √ʒ 36 ℞ + √ʒ 12 ʒ. Vel √ʒ 12 ʒ + √ʒ 36 ℞. At demptis 36. ex √ʒ 36 ℞. fit reliquus numerus √ʒ 36 ℞ — 36. & ſic de aliis.

QVANDO ſigna Coſſica ſunt eadem, & numeri irrationales, ſemotis ſignis Coſſicis, ſunt commenſurabiles, tunc ſigna Coſſica operationem non impediunt, ſed numeri irrationales adduntur, ac ſubtrahuntur, quemadmodum radices ſurdæ, vt cap. 19. & 20. monſtratum

ſtratum eſt, ac poſt operationem idem ſignum Coſſicum apponitur. Vt ex √ʒ 8 ℞. ad √ʒ 18 ℞. fit ſumma √ʒ 50 ℞. quia √ʒ 8. & √ʒ 18. commenſurabiles ſunt, efficiúntque √ʒ 50. quod conſtat ita eſſe, ſi 1 ℞ ſtatuatur 2. Erunt enim 8 ℞. 16. cuius numeri radix eſt 4. Et 18 ℞. facient 36. cuius numeri radix eſt 6. Fiunt autem 10. ex 4. & 6. Liquet autem √ʒ 50 ℞. facere etiam 10. cum 50 ℞ faciant 100. cuius numeri radix eſt 10.

SIC ex √ʒ 8 ℞. ad √ʒ 32 ℞. fit √ʒ 72 ℞. quod per reſolutionem probari poteſt, poſita 1 ℞ 2. Nam √ʒ 8 ℞. erit 4. & √ʒ 32 ℞. erit 8. fit autem ex 4. & 8. ſumma 12. Vide iam, an ſumma collecta √ʒ 72 ℞. faciat etiam 12. Certum autem eſt, 72 ℞. facere 144. cuius radix eſt 12.

ITEM ex √ʒ 8 ʒ. ad √ʒ 32 ʒ. fit ſumma √ʒ 72 ʒ. Et ex √ʒ 16 ʒ. ad √ʒ 4 ʒ. fit √ʒ 36 ʒ. Nam ſi 1 ℞. ſtatuatur 2. vt 1 ʒ ſit 4. erunt 16 ʒ. 64. cuius numeri radix eſt 8. At 4 ʒ. erunt 16. cuius numeri radix eſt 4. Fiunt autem 12. ex 8. & 4. quantum nimirum valet √ʒ 36 ʒ. quippe cum 36 ʒ. ſint 144. cuius numeri radix eſt 12.

PRÆTEREA ex √ʒ 8 ʒ. ad √ʒ 18 ʒ. fit √ʒ 50 ʒ. quod etiam perbellè examini quadrat, poſita 1 ℞ 2. vt 1 ʒ. ſit 4. Erunt enim 8 ʒ. 32. cuius numeri radix eſt √ʒ 32. Et 18 ʒ. ſunt 72. cuius radix eſt √ʒ 72. Fit autem ex √ʒ 32. & √ʒ 72. ſumma √ʒ 200. Ac tantundem facit √ʒ 50 ʒ. quippe cum 50 ʒ. ſint 200. cuius numeri radix eſt √ʒ 200.

EADEM ratione, dempta √ʒ 8 ℞. ex √ʒ 18 ℞. ſupereſt √ʒ 2 ℞. Atque ſubtracta √ʒ 8 ʒ. à √ʒ 18 ʒ. reliqua fit √ʒ 2 ʒ. Vtrumque exemplum per radicem 2. ſic examinabimus. 8 ℞ faciunt 16. cuius numeri radix eſt 4. Et 18 ℞ faciunt 36. cuius numeri radix eſt 6. Demptis autem 4. ex 6. remanent 2. Ac tantundem facit √ʒ 2 ℞. cum 2. ℞ faciant 4. cuius numeri radix eſt 2. Ruſus 8 ʒ. faciunt 32. cuius numeri radix eſt √ʒ 32. Et 18 ʒ. faciunt 72. cuius numeri radix eſt √ʒ 72. Subtracta verò √ʒ 32. ex √ʒ 72. remanet √ʒ 8. quantum nimirum facit √ʒ 2 ʒ. propterea quod 2 ʒ. faciunt 8. cuius numeri radix eſt √ʒ 8.

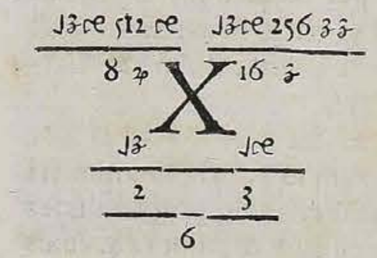
Reductio ſignorum radicaliū in numeris Coſſicis irrationalibus.

VT autem numeri Coſſici irrationales inter ſe multiplicentur, aut diuidantur, reducenda prius ſunt ſigna radicalia ad idem ſignum, vt cap. 18. docuimus: ſi nimirum multiplicatio fiat in crucem. Vt √ce 4 ℞. & √ʒ 8 ℞. reducuntur ad √ʒce 16 ʒ. & √ʒce 512 ce. vt ex ſubiecta formula patet. Nam 4 ℞ ductæ in ſe zenſicè, faciunt 16 ʒ. & 8 ℞ multiplicatæ in ſe cubicè faciunt 512 ce. Exponentes verò ſignorum radicalium inter ſe multiplicati faciunt 6. exponentem ſigni √ʒce. Reductionem autem eſſe ritè peractam, hoc eſt, √ʒce 16 ʒ. æqualem eſſe √ce 4 ℞. & √ʒce 512 ce. æquiualere √ʒ 8 ℞. perſpicuum eſt. Nam poſita 1 ℞ 2. erunt 4 ℞ 8. cu-

√ʒce 16 ʒ	√ʒce 512 ce
4 ℞	8 ℞
√ce	√ʒ
3	2
6	

ius numeri radix cubica est 2. Ac tantundem facit √ʒ𝔠 16 ʒ. ad quam reducta est √𝔠 4 ℞. Nam 16 ʒ. faciunt 64. cuius numeri radix zensicubica est 2. Item 8 ℞. erunt 16. cuius numeri radix zensica est 4. Atque tantundem quoque facit √ʒ𝔠 512 𝔠. ad quam √ʒ 8 ℞. reuocata est. Nam 512 𝔠. faciunt 4096. cuius numeri radix zensicubica est.

Eodem modo √ʒ 8 ℞. & √𝔠 16 ʒ. reducentur ad √ʒ𝔠 512 𝔠. & √ʒ𝔠 256 ʒʒ. vt hæc altera formula docet. Esse autem √ʒ𝔠 512 𝔠. æqualem √ʒ 8 ℞. & √ʒ𝔠 256 ʒʒ. æquiualere √𝔠 16 ʒ. facile probabimus. Nimirum √ʒ 8 ℞. hoc est, √ʒ 16. est 4. quantum videlicet facit √ʒ𝔠 512 𝔠. quippe cum 512 𝔠. faciant 4096. cuius numeri √ʒ𝔠 est 4. Item √𝔠 16 ʒ. est quoque 4. quantum nimirum facit √ʒ𝔠 256 ʒʒ. cum 256 ʒʒ. faciant 4096. qui numerus radicem zensicubicam habet 4. Ex quo constat, tam √ʒ 8 ℞. & √𝔠 16 ʒ. inter se, quam √ʒ𝔠 512 𝔠. & √ʒ𝔠 256 ʒʒ. inter se esse æquales.



Multiplicatio ac diuisio numerorum Cossicorũ irrationalium.

FACTA reductione, vt præcepimus, institui potest & multiplicatio, & diuisio. In priori ergo exemplo, ex multiplicatione √ʒ𝔠 512 𝔠. in √ʒ𝔠 16 ʒ fit √ʒ𝔠 8192 ß. quod ita probatur, √ʒ𝔠 512 𝔠. facit 4. Et √ʒ𝔠 16 ʒ. facit 2. Atque ex 4. in 2 fiunt 8. quantum nimirum facit √ʒ𝔠 8192 ß. Quoniam videlicet 8192 ß. faciunt 262144. cuius √ʒ𝔠 est 8. Item ante reductionem √𝔠 4 ℞. est 2. & √ʒ 8 ℞. est 4. vbi rursum vides, ex 2. in 4. gigni 8.

Item ex diuisione √ʒ𝔠 512 𝔠. per √ʒ𝔠 16 ʒ. fit Quotiens √ʒ𝔠 32 ℞. hoc est, 2 cum 32 ℞ faciant 64. cuius numeri √ʒ𝔠 est 2. quod probatur. Nam √ʒ𝔠 512 𝔠. est 4. & √ʒ𝔠 16 ʒ. est 2. vbi cernis, ex diuisione 4. per 2. Quotientem fieri 2. quod etiam ante reductionem manifestum est: quippe cum √ʒ 8 ℞. fit 4. & √𝔠 4 ℞. fit 2. vbi iterum ex diuisione 4. per 2. fit Quotiens 2.

IN posteriori verò exemplo, ex multiplicatione √ʒ𝔠 512 𝔠, in √ʒ𝔠 256 ʒʒ. fit √ʒ𝔠 131072 Bß. hoc est 16. propterea quod 131072 Bß. faciunt 16777216. qui numerus radicem zensicubicam habet 16. Atque hoc ita esse, liquet. Nam tam √ʒ𝔠 512 𝔠. quam √ʒ𝔠 256 ʒʒ. est 4. Manifestum autem est, ex 4. in 4. fieri 16. quod etiam patet ante reductionem, cum tam √ʒ 8 ℞. quam √𝔠 16 ʒ. fit 4. posita 1 ℞ 2. &c.

Item ex diuisione √ʒ𝔠 256 ʒʒ. per √ʒ𝔠 512 𝔠. fit Quotiens √ʒ𝔠 ½ ℞. hoc est, √ʒ𝔠 1. cum ½ ℞ fit 1. posita 1 ℞ 2. ac proinde cum √ʒ𝔠 1. fit 1. erit Quotiens 1. vt ratio postulat. Cum enim √ʒ𝔠 256 ʒʒ. & √ʒ𝔠. 512 𝔠. æquales sint, quod quælibet earum sit 4. vt dictum est, fiet ex diuisione vnius per alteram Quotiens 1. Pari ratione ex diuisione √ʒ𝔠 131072 Bß. per √ʒ𝔠 512 𝔠. fit Quotiens √ʒ𝔠 256 ʒʒ. vt probare potes.

SIC

SIC etiam, vt 1 ℞ ducatur in √ʒ 4. quadranda erit 1 ℞. & quadrato 1 ʒ, præponendum signum radicale √ʒ. vt fiat √ʒ 1 ʒ. atque ita ex √ʒ 1 ʒ in √ʒ 4. fit numerus √ʒ 4 ʒ. quod probatur, si 1 ℞. sit 2. Nam ex 2. in √ʒ 4. id est, in 2. fiunt 4. radix nimirum 4 ʒ. id est, numeri 16.

ITA quoque vt 3 ℞ ducantur in √ʒ 16. quadrandus erit numerus 3 ℞ vt fiant 9 ʒ. Deinde √ʒ 9 ʒ ducenda in √ʒ 16. gigneturque numerus √ʒ 144 ʒ. quod eodem modo probabitur, sumpto binario pro 1. radice. Nam 3 ℞ facient 6. & √ʒ 16. facit 4. Fiunt autem 24. ex 6. in 4. Ac radix ʒ 144 ʒ. facit similiter 24. cum 144 ʒ faciant 576. cuius numeri radix est 24. &c.

Hi porrò numeri producti √ʒ 4 ʒ. & √ʒ 144 ʒ. dicuntur numeri radicum, vt in ænigmate 12. & 28. cap. 32. constabit: quia videlicet prior productus est ex 1 ℞. in √ʒ 4. posterior autem ex 3 ℞. in √ʒ 16. quemadmodum numerus 4. productus ex 1. aureo in 4. Item numerus 48. productus ex 3. aureis in 16. dicitur numerus aureorum. Id quod diligenter obseruandum est.

Atque hoc perinde est, ac si ducatur 1. in √ʒ 4. vel 3. in √ʒ 16. Producti enim numeri √ʒ 4. & √ʒ 144. sunt numeri vnitatum, quæ multiplicatæ sunt. Itaq. ex 1 ℞. in √ʒ 4. fit numerus radicum √ʒ 4 ʒ. nimirum √ʒ 4. zensorum. Et ex 3 ℞. in √ʒ 16. fit numerus radicũ √ʒ 144 ʒ. id est, √ʒ 144. zensorum, atq; ita de cæteris. quandoquidem in huiusmodi multiplicationib. seruata est regula multiplicationis radicum surdarum, quæ in ca. 18. tradita est. Verum hoc melius percipietur ex solutione ænigmatis 12. & 28. cap. 32.

Quando post reductionem signa Cossica abbreuiari possint, & quando non.

OBSERVANDVM autem hic est, rem non succedere, si signa Cossica, vt cap. 7. docui, abbreuientur. Nam in priori exemplo, in quo √𝔠 4 ℞. & √ʒ 8 ℞ reductæ sunt ad √ʒ𝔠 16 ʒ. & √ʒ𝔠 512 𝔠. vbi ex multiplicatione procreatus est numerus 8. si signa Cossica abbreuientur, stabit reductio in his terminis √ʒ𝔠 16. & √ʒ𝔠 512 ℞. Sed ex multiplicatione vnius in alteram fit √ʒ𝔠 8192 ℞. quæ valet √𝔠 128. propterea quod 8192 ℞. faciunt 16384. cuius numeri √ʒ. est 128. & huius √𝔠. est √𝔠 128. quæ æqualis non est priori numero producto 8. Solum quando huiusmodi numeri reducti æquales sunt, abbreuiari poterunt signa Cossica. Tunc enim manet adhuc æqualitas, vt cap. 12. diximus. Vt quia √ʒ𝔠 512 𝔠. & √ʒ𝔠 256 ʒʒ. æquales sunt, cum quælibet valeat 4. si abbreuientur signa Cossica, cernetur adhuc æqualitas inter √ʒ𝔠 512. & √ʒ𝔠 256 ℞. quippe cum 256 ℞ faciant 512. Constat autem √ʒ𝔠 512. & √ʒ𝔠 512. æquales esse. hoc te monere volui, ne signa Cossica abbreuies, etiam post reductionem factam, nisi constet numerorum æqualitas.

DE minutiis porro horum numerorum nõ attinet quidquam dicere, cum suorum integrorum præcepta sequantur in omnibus.

Æquatio inter numerum

CÆTERVM si occurrat æquatio inter numerum Cossicum Irrationalem, & numerum absolutum, reducetur ea æquatio hoc mo-

S

Cossicum Irrationalem & numerũ absolutum.

do. quod quidem prope finem cap. 10. polliciti sumus, nos hoc loco docturos. Sit V. g. æquatio inter √z 24 ℞. & 12. Quo posito, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 24 ℞ & 144. Diuisis ergo 144. per 24. prodibit in Quotiente vnius radicis pretium 6 quod patet. quia 24 ℞ facient 144. cuius numeri radix quadrata est 12.

Item si sit æquatio inter √z 10 ʒ. & 20. erit etiam æquatio inter eorum quadrata 10 ʒ. & 400. Diuisis igitur 400. per 10. reperietur 1 ʒ. valere 40 atque idcirco 1 ℞. valebit √z 40. Nam 10. ʒ. erunt 400. cuius numeri radix quadrata est 20.

Denique si æquatio inueniatur inter √c 12 ʒ. & 30. erit etiam æquatio inter eorum cubos 12 ʒ. & 27000. Diuisis ergo 27000. per 12 prodibit pretium 1 ʒ. 2250. ac propterea 12 ʒ. facient 27000. cuius numeri radix cubica est 30.

Quando huiusmodi æquatio impossibilis sit.

Quòd si quis proponat æquationem inter √c 8. & 3. erit etiam æquatio inter eorum cubos 8. & 27. quod est impossibile. Itaq. in hisce æquationibus, necesse est, numerum absolutum esse radicem numeri, qui gerit signum radicale. qualis est æquatio inter √c 8. & 2. Item inter √c 64 & 4. Item inter √z 81. & 9. &c. Alioquin impossibilis erit æquatio.

DE BINOMIIS, ATQVE APOTOMIS, *Residuisve.*

Cap. XXVII.

Binomium & Residuum: itẽ Trinomiũ Quatrinomium apud scriptores quid.

SCRIPTORES Algebræ fermè omnes, duos numeros quosuis copulatos per signum +, Binomium appellare solent, vt √z 12 + √z 3. & √z 18 + √z 8. & 6 + √z 9. Copulatos verò per signũ — Residuum, vel Apotomen, vt √z 12 — √z 3. & √z 18 — √z 8. & 6 — √z 9. Plures autem numeros ita copulatos, dicere consueuerunt, trinomium, quatrinomium, &c. vt √z 17 + √z 10 + √z 3. vel √z 17 — √z 10 + √z 3. dicunt Trinomium: At √z 17 + √z 10 + √z 3 + √z 2. Vel √z 17 — √z 10 + √z 3 + √z 2. Quatrinomium, &c. Euclides autẽ in lib. 10. propo. 37. & 74. tũc solũ numeros binos copulatos per signum +. vel —, vocat Binomia, vel Residua, quãdo duo illi numeri copulati sunt Rationales solũ potẽtia cõmensurabiles, quãuis alter eorũ sit radix surda, vel vterq;. Vt 6 + √z 20. Item √z 18 + 4. Itẽ √z 24 + √z 18. vocat Binomia: At 6 — √z 20. Et √z 1 ʒ — 4. Et √z 24 — √z 18. appellat Residua, vel Apotomas. Nam quilibet duo numeri copulati sunt Rationales potentia tantum commensurabiles; cum eorum quadrata cõmensurabilia sint quadrato cuiusuis numeri Rationalis. Itaque neque √zz 10 + √zz 8. Binomium erit, neque √zz 10 — √zz 8. Residuum. quia eorum particulæ sunt numeri Irrationales: quippe cum eorum quadrata √z 10. & √z 8. sint incommensurabilia habentia proportionem, quam √z $\frac{5}{4}$. ad 1. vt ex Lemmate cap. 18. patet. Eadem ratione neque 6 + √z 9. neque 20 + 6 Binomia erunt, neque 6 — √z 9. neque 20 — 6. Residua: propterea quod bini quilibet numeri efficiunt vnum solum numerum rationalem, non autem duos. Nam 6 + √z 9. æquiualent 9. & 20 + 6. æquiualent 26. Item 6 — √z 9. æquiualent 3. Et 20 — 6. æquiualent 14. Ratio autem est, quod bini quilibet sunt Rationales longitudine commensurabiles, & non potentia tantum: quippe cum proportio inter quoslibet duos sit rationalis; Proportio enim 6. ad √z 9. dupla est: si namque per √z 9. diuidantur 6. hoc est, √z 36. exibit in Quotiente √z 4. hoc est, 2. denominator proportionis. Si verò diuidantur 20. per 6. fiet Quotiens $3\frac{1}{3}$. ita vt 20. ad 6. habeant proportionem triplam sesquitertiam. Eadem ratione neque √z 12 + √z 3. Binomium erit, neque √z 12 — √z 3. Residuum, licet vterque numerus sit radix surda. quia numeri proportionem habent duplam, & priores duo efficiunt summam √z 27. videlicet vnicum numerum: posteriores verò duo æquiualẽt √z 3. vnico etiam numero. Eandẽq; ob causam neque √z 18 + √z 8. Binomium erit censendum, neque √z 18 — √z 8. Residuum, quamuis vterque numer[us] radix surda sit. quia numeri proportionem habent sesquialterã, cuius denominator est $1\frac{1}{2}$. ac priores duo conficiunt summam √z 50. vnicum numerũ: posteriores verò duo huic vnico numero √z 8. æquiualent. Deniq; propositis duobus numeris rationalibus, hoc est, quorum quadrata cõmensurabilia sunt quadrato cuiusuis numeri rationalis, ita tamen, vt diuiso vno per alterum, Quotiens fiat rationalis, id est, numerus, qui radicem habeat, non cõstituetur ex illis Binomium, aut Residuum: quia eiusmodi numeri nõ sunt potentia tantum commensurabiles, sed etiam longitudine; ac proinde ex ipsis non fit numerus irrationalis, sed rationalis, licet nonnunquam efficiatur radix surda. Vt ex 3. & √z 16. fit summa √z 49. hoc est, 7. numerus rationalis qui surdus nõ est: At ex √z 8. & √z 18. fit summa √z 50. numerus rationalis surdus. Atque in hoc decipiuntur non pauci, putantes omnem numerum, qui gerit signum √z. & radicem non habet, esse irrationalem. quod verũ non est, atque Euclidi manifestè repugnat. Solum quando numerus gerẽs signum √z. refert superficiem aliquam, vel quadratũ, numerus ille irrationalis est a. qualis est superficies rectãgula producta ex multiplicatione mutua duorum numerorum rationalium potentia tantum commensurabilium. Vt si √z 3. ducatur in √z 10. producitur superficies √z 30. irrationalis, quæ Media dicitur. Radix autem eius quadrata est √zz 30. quæ vocatur linea Media. cum hæc in se quadratè ducta faciat √zz 900. hoc est, √z 30. propterea quod radix zensica numeri 900. est 30. & huius radix zensica est √z 30. Itaque quando in superioribus numeros habentes præfixum signum √z. vocauimus irrationales, id impropriè dictum accipiendum est, quando numeri illi rationales sunt.

Binomiũ & Residuum secundum Euclidem quid.

Non omnem numerũ, qui gerit signũ √z. esse irrationalẽ.

a 22. decimi.

Superficies, & linea Media.

Potest quidem omnis numerus gerens signum $\sqrt{}$. dici numerus irrationalis, si sumatur pro superficie Media, producta ex $\sqrt{1}$. in ipsum numerum. Vt $\sqrt{3}$. erit superficies Media, & irrationalis, si capiatur pro producto ex $\sqrt{1}$. in $\sqrt{3}$. ciúsque radix quadrata erit $\sqrt{\sqrt{3}}$. Nam hæc ducta in se zensicè facit $\sqrt{\sqrt{9}}$. hoc est $\sqrt{3}$. quippe cum radix zensica numeri 9. sit 3. & huius radix zensica $\sqrt{3}$. & sic de aliis.

Sex Binomia, ac Residua.

CONSTITVIT Euclides sex genera Binomiorum, totidémque Residuorum. Aut enim maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Item vel maius nomen commensurabile est longitudine numero rationali exposito, vel minus, vel neutrum. Vtrumque enim nomen exposito numero rationali longitudine commensurabile esse nequit a. quia & ipsa nomina essent numeri rationales longitudine commensurabiles. quod est absurdum, cum ponantur potentia tantum commensurabiles. Quibus positis, fient sex genera Binomiorum, quæ sic definiuntur.

a 11. decimi.

Binomiũ primum.

Binomium primum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis, ipsúmque maius nomen exposito numero rationali est commensurabile longitudine. Vt $6 + \sqrt{27}$. quia quadratum maioris nominis 6. nimirum 36. superat 27. quadratum minoris nominis, quadrato 9. cuius radix 3. longitudine commensurabilis est maiori nomini 6. atque ipsum quoque maius nomen 6. commensurabile est longitudine exposito cuiuis numero rationali.

Binomiũ secundum

Binomium secundum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis, ipsúmque minus nomen exposito numero rationali est longitudine commensurabile. Vt $\sqrt{48} + 6$. quia quadratum maioris nominis, nimirum 48. superat 36. quadratum minoris nominis, quadrato 12. cuius radix, videlicet $\sqrt{12}$. commensurabilis est longitudine maiori nomini; cum $\sqrt{48}$. ad $\sqrt{12}$. habeat proportionẽ duplam; propterea quod illa per hanc diuisa, fiat Quotiens $\sqrt{4}$. hoc est, 2. Item minus nomen exposito cuilibet numero rationali commensurabile est longitudine.

Binomiũ tertium.

Binomium tertium est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis, sed neutrum nomen exposito numero rationali longitudine commensurabile existit. Vt $\sqrt{24} + \sqrt{18}$. quia maioris nominis quadratum 24. superat 18. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix, nimirum $\sqrt{6}$. commensurabilis est longitudine maiori nomini: cum $\sqrt{24}$. ad $\sqrt{6}$. proportionem habeat duplam: quippe cum illa diuisa per hanc, Quotiens fiat $\sqrt{4}$. hoc est, 2. At neutrum nomen longitudine commensurabile est exposito numero rationali.

Binomiũ quartum.

Binomium quartum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine incommensurabilis, ipsum verò maius nomen exposito numero rationali commensurabile est longitudine. Vt $4 + \sqrt{10}$. quia maioris nominis quadratum 16. superat 10. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix, nimirum $\sqrt{6}$. longitudine incommensurabilis est maiori nomini 4. quippe cum maioris nominis quadratum 16. ad 6. quadratum $\sqrt{6}$. proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum a: ac propterea eorum latera longitudine sint incommensurabili a. At maius nomen 4. longitudine commensurabile est numero exposito rationali.

a 9. decimi.

Binomiũ quintum.

Binomium quintum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini incommensurabilis est longitudine, nomen verò minus exposito numero rationali longitudine est commensurabile. Vt $\sqrt{5} + 2$. quia quadratum 5. maioris nominis superat 4 quadratum minoris nominis, quadrato 2. cuius radix, nimirum $\sqrt{1}$. longitudine incommensurabilis est maiori nomini: quippe cum maioris nominis quadratum ad 1. quadratum $\sqrt{1}$. proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad numerum quadratum b: ac propterea latera eorum sint longitudine incommensurabilia. Est tamen minus nomen 2. longitudine commensurabile exposito numero rationali cuicunque.

b 9. decimi.

Binomiũ sextum.

Binomium denique sextum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini incommensurabilis est longitudine, sed neutrum nomen exposito numero rationali commensurabile longitudine. Vt $\sqrt{80} + \sqrt{50}$. quia quadratum 80. maioris nominis superat 50. quadratum minoris nominis, quadrato 30. cuius radix, nimirum $\sqrt{30}$. longitudine incommensurabilis est maiori nomini. quippe cum quadratum 80. maioris nominis, & quadratum 30. proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum c; ideóque eorum latera longitudine sint incommensurabilia longitudine. Neutrum quoque nomen longitudine commensurabile est exposito numero rationali.

c 9. decimi.

SEX autem Residua, vel Apotome eodem modo se habent; cum ex quolibet Binomio oriatur Apotome respondens, interposito signo — pro signo +. Nam ex Euclide Apotome nil aliud est, quam id, quod relinquitur, si duobus numeris rationalibus potentia tantum commensurabilibus positis, minor de maiore detrahatur. quod quidem fit per interpositionem signi —.

Sex genera Apotomarum.

Itaque ex primo Binomio $6 + \sqrt{27}$. fit prima Apotome $6 - \sqrt{27}$.

Ex secundo Binomio $\sqrt{48} + 6$. fit Apotome secunda $\sqrt{48} - 6$.

Ex tertio Binomio $\sqrt{24} + \sqrt{18}$. fit Apotome tertia $\sqrt{24} - \sqrt{18}$.

Ex quarto Binomio $4 + \sqrt{10}$. fit quarta Apotome $4 - \sqrt{10}$.

Ex quinto Binomio $\sqrt{5} + 2$. fit quinta Apotome $\sqrt{5} - 2$.

Ex sexto denique Binomio $\sqrt{80} + \sqrt{50}$. fit sexta Apotome $\sqrt{}$

80 — √ȝ 50. quæ omnia perſpicua ſunt ex definitionibus Apotomarum ab Euclide traditis.

QVONIAM verò intelligentia decimi libri potiſſimum in cognitione Binomiorum, ac Reſiduorum conſiſtit, libet paulò diutius in eorum tractatione immorari. Primo autē loco docebimus, qua ratione quoduis Binomium optatum, ac proinde & Reſiduum (cum hoc ſolum ſigno — ab illo differat) reperiatur: Deinde, qua arte ex quouis Binomio, aut Reſiduo radix quadrata eliciatur, & quamnam lineam Irrationalem, vel numerum compoſitum, diminutúmve radix illa conſtituat: inſiſtentes ſemper iis, quæ ab Euclide demonſtrata ſunt.

Binomij primi, & Apotomæ primæ inuentio.

SIT ergo inueniendum primum Binomium, primúmque Reſiduum. Quadratus quilibet numerus A B, nimirum 9. diuidatur in B C, quadratum numerum 4. & in A C, numerum non quadratum 5. aſſumatúrque numerus rationalis quicunque 6. pro primo nomine. Et fiat, vt numerus 9. A B, ad numerum 5. A C, ita 36. quadratus numerus aſſumpti numeri 6. ad aliud: inuenietúrque quadratus 20. Ergo 6 + √ȝ 20. erit primum Binomium. Et 6 — √ȝ 20. erit prima Apotome, vt conſtat ex propoſ. 49. & 86. lib. 10. Eucl.

5 4
A..... C.... B

6 + √ȝ 20
6 — √ȝ 20

Binomij ſecundi, & ſecūdæ Apotomæ inuentio.

Binomium verò ſecundum, atque Apotome ſecunda hoc modo reperietur. Diuiſo quocunque numero quadrato A B, nimirum 9. in B C, quadratum 4. & in A C, non quadratum 5. aſſumatur ad libitum numerus rationalis 5. pro ſecundo nomine: Fiat, vt numerus 5. A C, ad quadratum numerum 9. A B, ita 25. quadratus numerus numeri aſſumpti 5. ad aliud; inuenietúrque quadratus 45. Ergo Binomium ſecundum eſt √ȝ 45 + 5. Et √ȝ 45 — 5. Apotome ſecunda, vt manifeſtum eſt ex propoſ. 50. & 87. lib. 10. Eucl.

5 4
A..... C.... B

√ȝ 45 + 5
√ȝ 45 — 5

Binomij tertij, & tertiæ Apotomæ inuentio.

Binomium tertium, & Apotomam tertiam inueniemus ſic. Diuiſo quolibet numero quadrato A B, videlicet 9. in B C, quadratum 4. & in A C, non quadratum 5. ſumatur alius numerus D, nimirum 6. non quadratus proxime maior, quam A C, 5. differétque D, ab A C, vel ſola vnitate, vel binario. Vnitate quidem, quando A C, numerus talis fuerit, vt ei vnitas addita non faciat quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad A C, facit quadratum. Vt ſi A C, ſit 8. erit proxime maior non quadratus differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. efficit quadratum 9. At ſi A C, ſit 5 vt in noſtro exemplo, erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non conficit quadratum. Sumpto deinde

5 4
A..... C.... B
D.....
12
√ȝ 216 + √ȝ 120
√ȝ 216 √ȝ — 120

de quocunque numero rationali 12. Fiat vt numerus D, 6. ad quadratum numerum A B, 9. ita 144. quadratus numerus aſſumpti numeri rationalis 12. ad aliud, inuenietúrque quadratus 216. cuius radix, videlicet √ȝ 216. erit maius nomen. Quod ſi rurſus fiat, vt 9. quadratus A B, ad numerum A C, 5. ita quadratus 216. inuentus ad aliud, reperietur quadratus 120. cuius radix, nimirum √ȝ 120 erit minus nomen. Binomium ergo tertium inuentum eſt √ȝ 216 + √ȝ 120. Et Apotome tertia √ȝ 216 — √ȝ 120. vt ex propoſ. 51. & 88. lib. 10 Eucl. liquet.

Binomij quarti, & quartæ Apotomæ inuentio.

Binomium quartum, & Apotomam quartam inueniemus in hunc modum. Diuiſo quocunque quadrato numero A B, nimirum 9. in duos non quadratos A C, C B, vtpote in 6. & 3. ſumptóque numero quolibet rationali 6. pro maiori nomine: Fiat, vt quadratus numerus A B, videlicet 9. ad A C, 6. non quadratum, ita 36 quadratus numerus aſſumpti numeri rationalis 6. ad aliud; reperietúrque quadratus 24. cuius radix, nimirum √ȝ 24. erit minus nomen. Eſt ergo quartum Binomium 6 + √ȝ 24. Et quarta Apotome 6 — √ȝ 24. vt ex propoſ. 52. & 89. lib. 10. Eucl. colligitur.

6 3
A..... C... B

6 + √ȝ 24
6 — √ȝ 24

Binomij quinti, & Apotomæ quintæ inuentio.

Binomium quintum, & Apotomam quintam ita explorabimus. Diuiſo quolibet numero quadrato A B, nimirum 9. in duos A C, C B, non quadratos, vt in 6. & 3. ſumptóque numero quouis rationali 2. pro minori nomine: Fiat, vt A C, numerus 6. ad quadratum A B, nimirum ad 9. ita 4. quadratus aſſumpti numeri rationalis 2. ad aliud. inuenietúrque quadratus 6. cuius radix, nimirum √ȝ 6. erit maius nomen. Erit ergo binomium quintum √ȝ 6 + 2. & Apotome quinta √ȝ 6 — 2. vt Euclides propoſ. 53. & 90. lib. 10. concludit.

6 3
A...... C... B

√ȝ 6 + 2
√ȝ 6 — 2

Binomij ſexti, & Apotomæ ſextæ inuentio.

Binomium denique ſextum, & Apotomam ſextam indagabimus hac arte. Diuiſo quolibet numero 12. non quadrato A B, in duos non quadratos A C, C B, vt in 7. & 5. ſumatur alius quadratus, D, quicunque, nimirum 9. & inſuper quilibet numerus rationalis 12. Deinde fiat, vt numerus quadratus D, nimirum 9. ad numerum 12. non quadratum A B, ita 144. quadratus numerus aſſumpti numeri rationalis 12. ad aliud. Reperietur enim quadratus 192, cuius radix, nimirum √ȝ 192. erit maius nomen Binomij. Et ſi rurſus fiat, vt numerus 12. A B, non quadratus ad 7. numerum A C, ita quadratus proximè inuentus 192. ad aliud, reperietur quadratus numerus 112. cuius radix, nimirum √ȝ 112. erit minus nomen: ita vt Binomium ſextum ſit √ȝ 192 + √ȝ 112. Apotome autem ſexta

7 5
A...... C..... B
D........
12
√ȝ 192 + √ȝ 112
√ȝ 192 — √ȝ 112

$\sqrt{192} - \sqrt{112}$. vt ex propos.54.& 91.lib.10. Eucl.constat.

Inuentio Binomij, vel Apotomæ cuiusuis speciei, ex dato Binomio, vel Apotoma eiusdem speciei.

IAM verò, dato quouis Binomio, vel Apotoma,inueniemus ex eo, sine magno labore,quotuis alia Binomia,& Apotomas eiusdem speciei. Nam pro primo, ac quarto Binomio, si fiat, vt maius nomen ad minus, ita quiuis numerus rationalis assumptus pro maiori nomine noui Binomij ad aliud,producetur minus nomen noui Binomij primi vel quarti.Pro secundo verò,ac quinto,si fiat,vt minus nomen ad maius,ita quiuis numerus rationalis pro minori nomine noui Binomij assumptus ad aliud,procreabitur maius nomen noui Binomij secundi,vel quinti. Pro tertio denique ac sexto, si fiat, vt maius nomen ad minus, (quorum vtrumque numerus surdus est)ita quiuis numerus surdus pro maiori nomine noui Binomij assumptus ad aliud, proueniet minus nomen noui Binomij tertij, vel sexti. Rationem huius rei, si quis desideret,sciat petendam esse ex propos.15. lib.10.Eucl. Cùm enim per constructionem eadem sit proportio inter nomina dati Binomij,quæ inter nomina producti Binomij: si maius nomen dati Binomij plus potest,quàm minus, quadrato radicis sibi commensurabilis longitudine [a]; poterit quoque maius nomen noui Binomij plus, quàm minus, quadrato radicis longitudine sibi commensurabilis : Et si maius nomen illius plus potest, quàm minus,quadrato radicis sibi longitudine incommensurabilis; poterit quoque maius nomen huius plus, quàm minus, quadrato radicis sibi incommensurabilis longitudine. Nam nomina Binomiorum sunt instar linearũ. Atq. idcirco duo illa Binomia erunt eiusdẽ generis,nimirum vtrumque erit vel primũ,vel secundũ,vel tertium,&c. quippe cùm vel maius nomẽ in vtroque,vel minus numerus sit rationalis,vel surdus.

a 15.decimi.

Inuento porrò Binomio nouo,iam nosti,fieri ex eo Residuum,vel Apotomam,si signum +.in — commutetur.

Exempli causa,ex Binomio primo $6 + \sqrt{27}$. fiet simile Binomium, cuius maius nomen sit 400.si fiat,vt 6.ad $\sqrt{27}$.ita 400.ad aliud.hoc est, si multiplicetur $\sqrt{27}$.in 400. id est,in $\sqrt{160000}$. & productus numerus $\sqrt{4320000}$. per 6.id est, per $\sqrt{36}$. diuidatur. Producetur enim $\sqrt{120000}$.Eritque nouum Binomium primum $400 + \sqrt{120000}$.Et noua Apotome prima $400 - \sqrt{120000}$. Quadratum enim 160000. maioris nominis superat quadratum 120000. minoris nominis quadrato 40000. cuius radix 200. longitudine commensurabilis est maiori nomini,&c.Eadémque ratio est de cæteris.

RVRSVS si vtrumq.nomen dati binomij per eundẽ quemuis numerũ multiplicetur,aut diuidatur, producentur [b] eadem de causa duo nomina alterius Binomij eiusdẽ speciei : quæ etiam nomina erunt alterius Apotomæ eiusdem speciei [c] : propterea quòd duo numeri procreati eandem inter se proportionẽ habent, quã duo nomina propositi Binomij. V.g. Dato Binomio secũdo $\sqrt{48} + 6$. si vtrumq. nomẽ per 3.multiplicetur, fiet alterum Binomiũ secundũ $\sqrt{432} + 18$. & alia Apotome $\sqrt{432} - 18$.Et si vtrũq. nomẽ eiusdẽ dati Binomij secũdi $\sqrt{48} + 6$.diuidatur per numerum quemuis eundem 3. fiet iterum aliud Binomium secundum $\sqrt{5\frac{1}{3}} + 2$. & alia Apotome secunda $\sqrt{5\frac{1}{3}} - 2$. Quod si diuisio fiat per 2. gignetur nouum Binomium secundum $\sqrt{12} + 3$. & noua Apotome secunda $\sqrt{12} - 3$. & sic de aliis.

b 15. decimi.
c 15. septimi.

Binomiũ, vel Residuũ propositum quodnam sit ex 6. speciebus, iudicare.

QVOD si quando iudicandum sit de aliquo Binomio,vel Residuo pro
posito, quodnam sit ex prædictis sex speciebus, non erit id magni labo-
ris Nam si maius nomen fuerit numerus rationalis absolutus,erit Bino-
mium vel primum,vel quartum.Et si quidem, diuiso quadrato maioris
nominis per excessum, quo illud quadratum superat quadratum nomi-
nis minoris,Quotiens fiat numerus quadratus,Binomium erit primum:
Si verò Quotiens sit numerus non quadratus, Binomium erit quartum.

Si autem minus nomen fuerit absolutus numerus rationalis, erit Bi-
nomium vel secundum,vel quintum.Et si quidem,diuiso quadrato ma-
ioris nominis per excessum, quo illud quadratum superat quadra-
tum minoris nominis, Quotiens gignatur numerus quadratus, Bino-
mium erit secundum : Si verò Quotiens fiat numerus non quadra-
tus, Binomium erit quintum.

Si denique neutrum nominum fuerit absolutus numerus rationalis,
sed surdus,erit Binomium vel tertium, vel sextum; Tertium quidem,
quando diuiso maioris nominis quadrato per excessum, quo illud qua-
dratum superat quadratum minoris nominis, Quotiens proueniat nu-
merus quadratus : si vero Quotiens gignatur numerus non quadratus,
Binomium erit sextum. Idemque dices de Apotoma quacunque.

Qua ratione in circulo omnia 6. Binomia, & Apotomæ reperiantur.

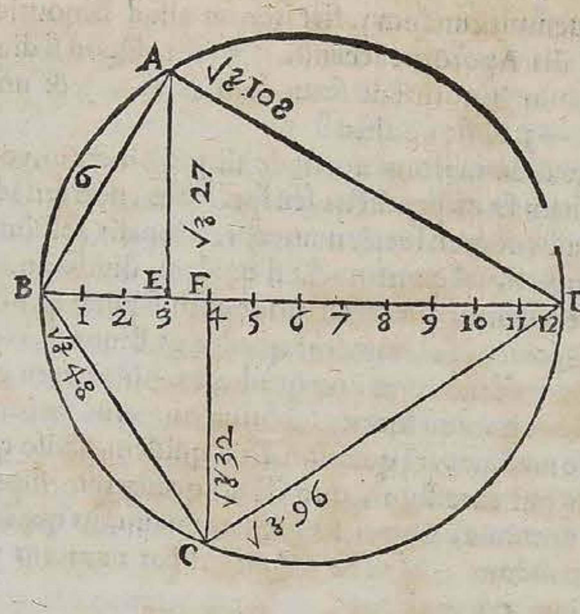
POSTREMO est etiam scitu non iniucundum, omnia sex Binomia, ac
proinde & Residua, vel Apotomas, reperiri in paucis lineis certo quo-
dam artificio intra circulum quemlibet descriptis.Sit enim circulus AB
CD,cuius diameter BD,in tot æquales partes distribuatur,vt earum nu-
merus tertiam, & quartam partem habeat, nimirum in 12. Ex quarta
parte diametri E, comprehendente scilicet B E, tres duodecimas dia-
metri; atque ex tertia parte diametri F,complectente videlicet BF,qua-
tuor duodecimas diametri, erigantur ad diametrum perpendiculares
E A,F C,in diuersas partes; iunganturq. rectæ A B,B C,C D,D A.Ha-
rum omnium rectarum quantitates hoc modo cognoscentur [a]. Quo-
niam A E,inter D E, E B, media est proportionalis; & C F, inter D F,
F B [b]:erit tam quadratum ex A E, rectangulo sub D E,E B, quam qua-
dratum ex C F,rectangulo sub D F,F B,æquale.Est autem rectangulum
sub D E,E B, hoc est, ex 9. in 3. productum 27. Igitur & quadratum ex
A E,erit 27.ideoq. recta A E, $\sqrt{27}$. Rectangulum autem sub D F,F B,
id est,ex 8.in 4.procreatum est 32.Igitur & quadratum ex C F, erit 32. &
recta C F, $\sqrt{32}$.

a coroll. 13. sexti.
b 17.sexti.

Deinde quia quadrata ex B E, E A, nimirum 9. & 27. conficiunt 36. [c]
quibus æquale est quadratum ex A B; erit quadratum ex A B,36.& recta
ipsa A B, $\sqrt{36}$. hoc est, 6.

c 47. primi.

Rursus quia quadrata ex B F, F C, nimirum 16. & 32. efficiunt



d 47.primi. 48.d quibus æquale eſt quadratum ex BC:erit hoc quadratum 48.& recta ipſa BC, √ȝ 48.

e 47.primi. Item quia quadrata ex DF, FC, nimirum 64.& 32.conficiunt 96.e quibus quadratum ex CD, æquale eſt:erit hoc quadratum 96. & recta ipſa CD, √ȝ 96.

f 47.primi. Denique quia quadrata ex D E, E A, nimirum 81. & 27.efficiunt 108. f quibus quadratum ex DA, æquale eſt;erit hoc quadratum 108.& recta ipſa DA, √ȝ 108.

Iam rectæ AB, AE, conſtituunt Binomium primum 6 + √ȝ 27.& Apotomam primam 6 — √ȝ 27.

Rectæ AD, DE, conſtituunt Binomium ſecundum √ȝ 108 + 9.& ſecundam Apotomam √ȝ 108 — 9.

Rectæ AD, DC, conſtituunt Binomium tertium √ȝ 108 + √ȝ 96.& Apotomam tertiam √ȝ 108 — √ȝ 96.

Rectæ BD, DC, conſtituunt Binomium quartum 12 + √ȝ 96.& quartam Apotomam 12 — √ȝ 96.

Rectæ DC, DF, conſtituunt Binomium quintum √ȝ 96 + 8. & quintam Apotomam √ȝ 96 — 8.

Rectæ denique BC, CF, conſtituunt ſextum Binomium √ȝ 48 + √ȝ 32.& Apotomam ſextam √ȝ 48 — √ȝ 32.

Esse autem hæc 6. Binomia, ac Reſidua illa, quæ ab Euclide definita ſunt, examinare poteris per earum definitiones. Nam in prioribus tribus, ſi maiora nomina diuidantur per exceſſus, quibus eorum quadrata ſuperant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri quadrati, ac proinde maiora nomina plus poſſunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longi-

longitudine ſunt commenſurabiles. Si verò in poſterioribus tribus maiora nomina diuidantur per exceſſus, quibus eorum quadrata ſuperant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri non quadrati: ac proinde maiora nomina plus poſſunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longitudine ſunt incommenſurabiles. Cætera ex ſe manifeſta ſunt.

Qvod ſi diametrum B D, diuiſeris in alias partes, quarum numerus habeat partem tertiam, & quartam, vt in 24. vel 36. vel 48. vel 60. vel 240. vel 360. vel 480. vel 600. &c. inuenies eodem ordine alia 6. Binomia, & Apotomas.

DE EXTRACTIONE RADICVM ex Binomiis, & Apotomis. Vbi obiter de aliis lineis Irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. diſputat.

CAP. XXVIII.

Cur nonnulli dicant, non omnia Binomia habere radices.

Svnt nonnulli, qui affirmant, ex ſolis prioribus tribus Binomiis, atque Apotomis radices quadratas elici poſſe, quod verum non eſt, & Euclidi omnino repugnat, vt mox oſtendemus: neque ſcio, quo modo excuſari poſſint, niſi dicatur, propterea eos poſteriora tria Binomia, atq; Apotomas radicibus quadratis priuare, quod horum radices ſint valde perplexæ, & obſcuriores, quã ipſamet Binomia, atque Apotomæ: quippe cum ſint radices numerorum compoſitorum, quas Vniuerſales vocant, vt in exemplis patebit.

Omnia Binomia ſecundum Eucl. habere radices.

Habere aut omnia Binomia, atque Apotomas radices quadratas, quæ in ſe ductæ ipſa Binomia, atque Apotomas producant, euidenter ex propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. Item ex propoſ. 92. 93. 94. 95. 96. & 97. lib. 10. Eucl. colligitur. In prioribus enim 6. propoſitionibus demõſtrat Euclides, quinam numeri in ſe multiplicati producant Binomia: (vocamus lineas Irrationales, numeros Irrationales.) in poſterioribus autem 6. propoſitionibus oſtendit, quinam numeri in ſe ducti Apotomas procreent. quod ita manifeſtum fiet. In propoſ. 55. ait, Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur. Quis autem neſcit, ſi Rationalis illa ſit vnitas, ſpatium illud comprehenſum, eſſe Binomium primum; quippe cum vnitas multiplicans Binomium primum, producat ipſummet Binomium primum? Numerus ergo potens Binomium primum, hoc eſt, radix Binomij primi, eſt Binomium, ex ſententia Eucl. Eadem ratione ex ſequentibus quinque propoſ. in-

Radices 6. Binomiorum, quales lineæ, vel *numeri Irrationales sint.*

fertur, radicem Binomij secundi esse lineam Irrationalem, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Radicem autem Binomij tertij esse lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Et radicem quarti Binomij lineam Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Ac radicem quinti Binomij esse lineam Irrationalem, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Radicem denique sexti Binomij esse irrationalem lineam, quæ bina Media potens nominatur. Non aliter ex propos. 92. & sequentibus quinque colligemus, radicem primæ Apotomæ esse Apotomen. Radicem verò Apotomæ secundæ esse Mediæ Apotomen primam. Radicem deinde tertiæ Apotomæ esse Mediæ Apotomen secundam. Et radicem Apotomæ quartæ esse lineam Irrationalem, quæ appellatur Minor. Radicem autem Apotomæ quintæ esse lineam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Denique radicem sextæ Apotomæ lineam esse Irrationalem, quæ cum Medio Medium totum efficit. Non est igitur dubitandum, ex Euclidis sententia omnia Binomia, omnesque Apotomas habere radices: cum tam perspicuè doceat, quo pacto cuiusque Binomij, atque Apotomæ radix appelletur. Quod vt planius fiat, explicandæ sunt obiter illæ lineæ Irrationales, quas demonstrat radices esse Binomiorum, atque Apotomarum. Hactenus enim solum Binomium eiusque sex species, solamq. Apotomen, eiusq. sex genera, Item lineam Mediam, superiori cap. exposuimus.

Radices 6. Apotomarum, quales lineæ Irrationales, vel numeri sint.

a 37. decimi. b 38. decimi. *Ex binis Medijs prima.*

QVEMADMODVM ergo [a] Binomium apud Eucl. est linea Irrationalis ex duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus composita [b]: ita si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componatur, quæ Rationale contineant, (Has lineas docuit inuenire propos. 28.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima vocatur. Hanc nobis exhibebit radix Binomij secundi.

c 39. decimi. *Ex binis Medijs secunda.*

Et [c] si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; (quæ quo pacto reperiantur, docuit propos. 29.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Eamq. nobis præbebit radix tertij Binomij.

d 40. decimi. *Linea Maior.*

Et [d] si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quę faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: (quas inuenire docet propos. 34.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Maior vocatur. quam nobis offeret radix Binomij quarti.

e 41. decimi. *Rationale, ac Medium potens.*

Et [e] si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (quæ inueniuntur propos. 35.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Rationale ac Medium potens nominatur. Hanc nobis demonstrabit radix Binomij quinti.

f 42. decimi.

[f] Si denique duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq. composito ex quadratis ipsarum, (qua ratione huiusmodi lineæ reperiantur,

riantur, docuit propos. 36.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ vocatur bina Media potens. Eámque nobis indicabit radix Binomij sexti.

Bina Media potens

a 74. decimi. b 75. decimi. *Mediæ Apotome prima.*

ITEM quemadmodum [a] Apotome apud Eucl. est linea Irrationalis, quæ reliqua est, si à Rationali auferatur Rationalis potentia tantū commensurabilis existens toti [b]: Ita si à Media auferatur Media, potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; (quas quidem lineas propos. 28. reperit.) Reliqua linea Irrationalis est, quę Mediæ Apotome prima vocatur. Quam quidem profert radix Apotomæ secundæ.

c 76. decimi. *Mediæ Apotome secunda.*

Et [c] si à Media auferatur Media, potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; (quæ lineæ propos. 29. inueniuntur.) Reliqua linea Irrationalis est, quæ Mediæ Apotome secunda appellatur. Hæc autem apparebit in radice Apotomæ tertiæ.

d 77. decimi. *Linea Minor.*

Et [d] si à recta linea, auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium; (quas lineas propos. 34. reperit.) Recta linea reliqua irrationalis est, quæ Minor nominatur. Quæ quidem radix est Apotomæ quartæ.

e 78. decimi. *Reliqua cum Rationali Medium totū efficiens.*

Et [e] si à recta linea auferatur recta, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (quas lineas inuenit propos. 35. Reliqua linea irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficiens dicitur. Qualis est radix Apotomæ quintæ.

f 79. decimi. *Reliqua cum Medio Mediū totum efficiens.*

Et [f] si tandem à recta detrahatur recta, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabiléque composito ex ipsarum quadratis; (quæ lineę propos. 36. inueniuntur.) Reliqua linea Irrationalis est, quæ cum Medio Medium totum efficiens appellatur. Quam nobis exhibet radix sextæ Apotomæ.

HAS porrò lineas Irrationales, vel potius numeros Irrationales (quas enim Euclides lineas nominat, nos numeros dicimus) plenius perfectiusque declarabimus in radicibus Binomiorum, & Apotomarum.

Habes igitur ex Euclide tredecim numero lineas Irrationales inter se differentes, de quibus potissimum in lib. 10. agitur. Sunt autem hæ.

1. *Media.*
2. *Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.*
3. *Ex binis Medijs prima.*
4. *Ex binis Medijs secunda.*
5. *Maior.*
6. *Rationale ac Medium potens.*
7. *Bina Media potens.*
8. *Apotome, cuius etiam species sex sunt inuentæ.*

9 Mediæ Apotome prima.
10. *Mediæ Apotome secunda.*
11. *Minor.*
12. *Cum Rationali Medium totum efficiens.*
13. *Cum Medio Mediũ totũ efficiens.*

Lineæ irrationales 23. apud Euclidem

QVOD si pro linea ex binis nominibus, sex Binomia; & pro Apotoma sex Apotomas accipias; habebis in vniuersum 23. lineas Irrationales apud Euclidem.

SED iam artem præscribamus, quia ex Binomiis, & Apotomis radices quadratæ eruantur: in quibus quidem naturæ prędictarum linearum Irrationalium planius percipientur.

Extractio radicis ex dato Binomio, aut Residuo tribus vijs

PROPOSITO ergo Binomio, vel Residuo, cape differentiam quadratorum vtriusque nominis. Deinde radicem quadratam huius differentiæ tum maiori nomini adijce, tum ab eodem aufer. Tertio radicem quadratam semissis illius summæ connecte cum radice quadrata semissis illius relicti, per signum +. si propositum est Binomium, vel per signum —, si Residuum. Ita enim procreata erit Radix Binomij, aut Residui.

ALII regulam hanc ita proponunt. Sume differentiam quadratorum semissium vtriusque nominis. Huius differentiæ radicem quadratam tum semissi maioris nominis adiice, tum ab eadem semisse subtrahe. Nam radix quadrata illius summæ connexa per signum +. vel — cum radice quadrata illius relicti, dabit radicem Binomij, vel Residui quæsitam.

ALII deniq; eandem ita proponunt. Ex quarta parte differentiæ quadratorum vtriusque nominis erue radicem quadratam. Hanc enim si semissi maioris nominis adijcies, & ex summa radicem erues, procreabis priorem particulam quæsitę radicis. Et si eandem hanc summam ex maiori nomine detrahes, dabit relicti radix quadrata posteriorem radicis quæsitæ particulam. Vtrisque igitur particulis per signum +, aut — copulatis, totam radicem desideratam habebis.

Atque ita habes triplicem regulam pro eruenda radice ex dato Binomio, aut Residuo. quæ variis iam exemplis elucidanda erit.

Sit Binomiũ primũ 23 + $\surd z$ 448. ex quo per primam regulam radicẽ eliciemus hoc modo. Differentia quadratorum 529. & 448. vtriusq; nominis est 81. cuius radicem 9. si maiori nomini 23. adiiciemus, & ab eodem subtrahemus; faciemus summam 32. & reliquum numerum 14. Semisses summæ, & relicti numeri sunt 16. & 7. è quibus erutæ radices 4. & $\surd z$ 7. copulatæ per signum +. dabunt radicem 4 + $\surd z$ 7. propositi Binomij primi: ac proinde 4 — $\surd z$ 7. radix erit Residui primi 23 — $\surd z$ 448 quarum illa est Binomium, hæc autem Residuum, vt Euclides lib. 10. propos. 55. & 92. demonstrauit. Esse porrò 4 + $\surd z$ 7. veram radicem Binomij primi 23 + $\surd z$ 448. & 4 — $\surd z$ 7. veram radicem Residui primi 23 — $\surd z$ 448. probari potest ex vtriusque radicis multiplicatione in se, vt hic patet.

Radix Binomij primi est Binomium & radix Residui primi est Residuum

4 +

$$\begin{array}{r} 4 + \surd z\ 7 \\ 4 + \surd z\ 7 \\ \hline + \surd z\ 112 + 7 \\ + 16 + \surd z\ 112 \quad \\ \hline \text{Summa}\quad 23 + \surd z\ 448 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 - \surd z\ 7 \\ 4 - \surd z\ 7 \\ \hline - \surd z\ 112 + 7 \\ + 16 - \surd z\ 112 \quad \\ \hline \text{Summma}\quad 23 - \surd z\ 448 \end{array}$$

Sit Binomium secundum $\surd z$ 448 + 14. ex quo per secundam regulam radix sic eruetur. Semisses nominum sunt $\surd z$ 112. & 7. quarum quadrata 112. 49. differentiam habent 63. cuius radix $\surd z$ 63. addita semissi $\surd z$ 112. maioris nominis, facit $\surd z$ 343. Detracta autem ab eadem semisse $\surd z$ 112. relinquit $\surd z$ 7. Ergo $\surd zz$ 343 + $\surd zz$ 7. erit radix Binomij secundi propositi. Et $\surd zz$ 343 — $\surd zz$ 7. radix erit Residui secundi $\surd z$ 448 — 14. Illa ex propos. 56. lib. 10. linea est Irrationalis ex binis Mediis prima. Hæc autem ex propos. 93. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ Mediæ Apotome prima dicitur. Itaque $\surd zz$ 343. & $\surd zz$ 7. sunt duæ lineæ Mediæ, Rationale continentes, vt volunt propos. 38. & 75. lib. 10. Nam Irrationales sunt, quæ Mediæ dicuntur. Multiplicatæ verò inter se producunt $\surd zz$ 2401. cuius radix zensizensica est 7. numerus Rationalis.

Radix Binomij secundi est linea ex binis Mediis prima: Et radix Residui secundi est Media Apotome prima.

Examen radicis inuentæ.

$$\begin{array}{r} \surd zz\ 343 + \surd zz\ 7 \\ \surd zz\ 343 + \surd zz\ 7 \\ \hline + \surd zz\ 2401 + \surd z\ 7 \\ + \surd z\ 343 + \surd zz\ 2401 \qquad \\ \hline \text{Summa}\quad \surd z\ 448 + 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \surd zz\ 343 - \surd zz\ 7 \\ \surd zz\ 343 - \surd zz\ 7 \\ \hline - \surd zz\ 2401 + \surd z\ 7 \\ + \surd z\ 343 - \surd zz\ 2401 \qquad \\ \hline \text{Summa}\quad \surd zz\ 448 - 14 \end{array}$$

Sit Binomium tertium $\surd z$ 448 + $\surd z$ 336. ex quo per regulam tertiam radix elicietur, hoc modo. Quarta pars differentiæ quadratorum 448. 336. est 28. cuius radix quadrata $\surd z$ 28. addita ad $\surd z$ 112. semissem maioris nominis facit $\surd z$ 252. ideóque prior particula radicis quæsitæ erit $\surd zz$ 252. Et si eadem summa $\surd z$ 252. dematur ex $\surd z$ 448. maiore nomine, reliqua fit $\surd z$ 28. ac proinde posterior particula quæsitæ radicis erit $\surd zz$ 28. totáque radix Binomij tertij erit $\surd zz$ 252 + $\surd zz$ 28. & radix tertij Residui $\surd z$ 448 — $\surd z$ 336. erit $\surd zz$ 252 — $\surd zz$ 28. Illa ex propos. 57. lib. 10. est linea Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. Hæc autem ex propos. 94. lib. 10. Irrationalis est linea, quæ Mediæ Apotome secunda dicitur. Itaque iuxta doctrinam propos. 39. & 76. lib. 10. Eucl. $\surd zz$ 252. & $\surd zz$ 28. duæ lineæ sunt Mediæ Medium continentes. Nam Irrationales quidem sunt, quæ Mediæ dicuntur; inter se verò multiplicatæ producunt superficiem Mediam $\surd zz$ 7056. hoc est, $\surd z$ 84.

Radix Binomij tertij est linea ex binis Mediis secunda: Et radix Residui tertij est Media Apotome secunda.

Examen radicis inuentæ.

√ȝȝ 252 + √ȝȝ 28
√ȝȝ 252 + √ȝȝ 28
+ √ȝȝ 7056 + √ȝ 28
+ √ȝ 252 + √ȝȝ 7056
Summa √ȝ 448 + √ȝ 336

√ȝȝ 252 — √ȝȝ 28
√ȝȝ 252 — √ȝȝ 28
— √ȝȝ 7056 + √ȝ 28
+ √ȝ 252 — √ȝȝ 7056
Summa √ȝ 448 — √ȝ 336

Sit Binomium quartum 24 + √ȝ 448. ex quo radix extrahetur per primam regulam, hoc pacto. Differentia quadratorum 576. & 448. eſt 128. cuius radicem, nimirum √ȝ 128. maiori nomini 24. adiicio, facióque 24 + √ȝ 128. Eandem √ȝ 128. ab eodem maiore nomine 24. detraho, relinquóque 24 — √ȝ 128. Semiſſis illius ſummæ 24 + √ȝ 128. eſt 12 + √ȝ 32. ſemiſſis verò illius numeri relicti 24 — √ȝ 128. eſt 12 — √ȝ 32. Radix ergo Binomij quarti propoſiti eſt √ȝ (12 + √ȝ 32) + √ȝ (12 — √ȝ 32) Radix verò quarti huius Reſidui 24 — √ȝ 448. eſt √ȝ (12 + √ȝ 32) — √ȝ (12 — √ȝ 32.) Illa iuxta propoſ. 58. lib. 10. linea Irrationalis eſt, quæ Maior dicitur. Hæc verò ex propoſ. 95. lib. 10. Irrationalis linea eſt, quæ appellatur Minor. Itaque ex præcepto propoſ. 40. & 77. lib. 10. √ȝ (12 + √ȝ 32) & √ȝ (12 — √ȝ 32) ſunt duæ lineæ potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale: quod autem ſub ipſis continetur, Medium. Eſſe enim potentia incommenſurabiles, perſpicuum eſt, cum earum quadrata 12 + √ȝ 32. & 12 — √ȝ 32. incommenſurabilia ſint. Quod etiam compoſitum ex hiſce quadratis ſit rationale, patet, cum conficiant ſimul ſumpta numerum 24. Rationalem. Denique quod ſub ipſis continetur, eſſe Medium, liquet, cum ex mutua earum multiplicatione gignatur ſuperficies √ȝ 112. Media: cuius radix eſt √ȝȝ 112. linea Media.

Radix Binomij quarti eſt Linea Maior: Et radix Reſidui quarti eſt Linea Minor.

Vbi obſeruatu dignum eſt, duo incommenſurabilia, qualia ſunt quadrata 12 + √ȝ 32. & 12 — √ȝ 32. ſimul addita efficere ſummam 24. Rationalem.

Duo incōmenſurabilia facere poſſunt ſummam Rationalem.

Examen radicis inuentæ pro Binomio quarto.

√ȝ (12 + √ȝ 32) + √ȝ (12 — √ȝ 32)
√ȝ (12 + √ȝ 32) + √ȝ (12 — √ȝ 32)
12 + √ȝ 32 + 12 — √ȝ 32
√ȝ 112
√ȝ 112
√ȝ 448
Tota ſumma 24 + √ȝ 448. Binomium propoſitum.

Sit Binomium quintum √ȝ 448 + 12. Ex quo per 2. regulam extrahetur radix hac ratione. Semiſſes nominum ſunt √ȝ 112. & 6. quarum quadrata 112. & 36. quorum differentia 76. cuius radix, √ȝ 76. ſemiſſi √ȝ 112. maioris nominis addita facit √ȝ 112 + √ȝ 76. Ab eadem autem ſemiſſe detracta relinquit √ȝ 112 — √ȝ 76. Radix ergo propoſiti Binomij quinti eſt √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76.) Reſidui verò reſpondentis radix erit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) — √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76) Illa per propoſ. 59. lib. 10. linea Irrationalis eſt, quæ Rationale, & Medium potens appellatur. Hæc vero ex doctrina propoſ. 96. lib. 10. linea Irrationalis eſt, quæ cùm Rationali Medium totum efficit. Itaque ex doctrina propoſ. 41. & 78. lib. 10. √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) & √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76.) duæ lineæ ſunt potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur. Rationale. Eſſe enim potentia incommenſurabiles, conſtat, cùm earum quadrata incommenſurabilia ſint. Quod autem compoſitum ex ipſarum quadratis faciat Medium, perſpicuum etiam eſt, cùm earum quadrata √ȝ 112 + √ȝ 76. & √ȝ 112 — √ȝ 76. ſimul ſumpta faciant √ȝ 448. ſuperficiem Mediam, cuius radix eſt √ȝȝ 448. linea Media. Denique ex ipſarum multiplicatione inter ſe gigni Rationale manifeſtum eſt, cùm gignatur √ȝ 36. nimirum 6. Vbi quoque vides, duo incommenſurabilia, videlicet √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76.) & √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76) inter ſe multiplicata producere numerum Rationalem, nimirum √ȝ 36. hoc eſt, 6.

Radix Binomij quinti eſt linea Rationale ac Mediū potēs: Et radix Reſidui quinti eſt linea cum Rationali Medium totum efficiens.

Duo incōmenſurabilia inter ſe multiplicata facere poſſunt numerū Rationalem.

Examen radicis inuentæ pro Reſiduo quinto.

√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) — √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76)
√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) — √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76)
√ȝ 112 + √ȝ 76 — √ȝ 112 — √ȝ 76
— √ȝ 36. id eſt, — 6
— √ȝ 36. id eſt, — 6
— 12
Tota ſumma, √ȝ 448 — 12. Reſiduum quintum.

Sit denique Binomium ſextum √ȝ 448 + √ȝ 352. ex quo per 3. regulam radix eruetur hoc modo. Quadratorum differentia eſt 96. cuius pars quarta 24. Huius radix, videlicet √ȝ 24. addita ad ſemiſſem maioris nominis, nimirum ad √ȝ 112. facit ſummam √ȝ 112 + √ȝ 24. Ergo prior portio radicis quæſitæ eſt √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24.) Et ſi eandem ſummam √ȝ 112 + √ȝ 24. detrahas ex toto maiore nomine √ȝ 448. relinquetur √ȝ 112 — √ȝ 24. Nam √ȝ 112. dempta ex √ȝ 448. relinquit √ȝ 112. ex quo relicto ſi tollatur √ȝ 24. relinquetur √ȝ 112 — √ȝ 24. ideóque poſterior portio radicis quæſitæ eſt √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24.) totáque radix Binomij ſexti propoſiti, erit √ȝ (√ȝ

112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24.) Reſidui verò ſexti reſpondentis radix erit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) — √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24.) Illa, concludente propoſ. 60. lib. 10. Irrationalis linea eſt, quæ bina Media potens nominatur. Hæc vero, vt demonſtrat propoſ. 97. lib. 10. linea Irrationalis eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit. Itaque ex demonſtratione propoſ. 42. & 79. lib. 10. duæ lineæ √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) & √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24) potentia incommenſurabiles ſunt, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabiléque compoſito ex quadratis ipſarum. Quod enim potentia incommenſurabiles ſint, docent earum quadrata, quæ incommenſurabilia ſunt. Quadrata autem ſimul facere Medium, conſtat, cùm ſimul faciant √ȝ 448. ſuperficiem Mediam, cuius radix eſt √ȝȝ 448. Denique ex ductu vnius in alteram procreari etiam Medium, liquidò conſtat, cùm producant √ȝ 88. ſuperficiem Mediam, cuius radix eſt √ȝȝ 88.

Radix Binomij ſexti eſt linea bina Media potēs: Et radix Reſidui ſexti eſt linea cum Medio Medium totum efficiens.

Examen radicis inuentæ pro Binomio ſexto propoſito.

√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24)
√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24)

√ȝ 112 + √ȝ 24 + √ȝ 112 — √ȝ 24
√ȝ 88
√ȝ 88

352

Tota ſumma. √ȝ 448 + √ȝ 352. Binomium propoſitum.

Differentia quadratorum nominum radicis cuiuſlibet Binomij, & Reſidui, quæ.

In quolibet autem Binomio, aut Reſiduo animaduertes, radicem differentiæ quadratorum vtriuſque nominis, eſſe differentiam inter quadrata nominum radicis ipſius Binomij, vel Reſidui. quod mirum cuipiam videri poſſit. quod in proximis 6. Binomiis experiri licet.

In primo Binomio 23 + √ȝ 448. cuius radix inuenta eſt 4 + √ȝ 7. Quadratum numeri 23. nimirum 529. ſuperat quadratum 448. numero 81. cuius radix eſt 9. differentia videlicet inter quadrata nominum radicis, hoc eſt, inter 16. & 7.

In Binomio ſecundo √ȝ 448 + 14. cuius radix inuenta fuit √ȝȝ 343 + √ȝȝ 7. Quadratum 448. ſuperat 196. quadratum numeri 14. numero 252. cuius radix, nimirum √ȝ 252. eſt differentia inter quadrata nominum radicis. Nam ea quadrata ſunt √ȝ 343. & √ȝ 7. vt patet ex multiplicatione nominum √ȝȝ 343. & √ȝȝ 7. in ſe quadratè. Et ſi √ȝ 7. dematur ex √ȝ 343. reliqua fit √ȝ 252.

In tertio Binomio √ȝ 448 + √ȝ 336. cuius radix inuenta fuit √ȝȝ 252 + √ȝȝ 28. Quadratum 448. ſuperat quadratum 336. numero 112. cuius radix, videlicet √ȝ 112. differentia eſt inter quadrata nominum radicis, quæ ſunt √ȝ 252. & √ȝ 28. Conſtat autem √ȝ 28. demptam ex √ȝ 252. relinquere √ȝ 112.

In quarto Binomio 24 + √ȝ 448. cuius radix inuenta fuit √ȝ (12 + √ȝ 32) + √ȝ (12 — √ȝ 32.) Quadratum 576 numeri 24. ſuperat quadratum 448. numero 128. cuius radix, nimirum √ȝ 128. differentia eſt inter quadrata nominum radicis, hoc eſt, inter 12 + √ȝ 32. & 12 — √ȝ 32. vt in hac formula ſubtractionis apparet. Nam 12. ex 12. nihil relinquunt: ſed — √ȝ 32. ex + √ȝ 32. (cum diuerſa ſigna mutent ſpeciem) relinquit √ȝ 128. duplum ſcilicet √ȝ 32. cum ſigno + ſuperioris numeri.

12 + √ȝ 32
12 — √ȝ 32

0 + √ȝ 128

In Binomio quinto √ȝ 448 + 12. cuius radix inuenta fuit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76.) Quadratum 448. ſuperat 144. quadratum numeri 12. numero 304. cuius radix, nimirum √ȝ 304. differentia eſt inter quadrata nominum radicis, hoc eſt, inter √ȝ 112 + √ȝ 76. & √ȝ 112 — √ȝ 76. vt in hac appoſita formula ſubtractionis apparet. Nam √ȝ 112. ex √ȝ 112. nil relinquit. At — √ȝ 76 ex + √ȝ 76. (cum diuerſa ſigna mutent ſpeciem) relinquit √ȝ 304. duplum videlicet √ȝ 76. cum ſigno + ſuperioris numeri.

√ȝ 112 + √ȝ 76
√ȝ 112 — √ȝ 76

0 + √ȝ 304

In Binomio denique ſexto √ȝ 448 + √ȝ 352. cuius radix inuenta fuit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24.) Quadratum 448. ſuperat quadratum 352. numero 96. cuius radix, nimirum √ȝ 96. differentia eſt inter quadrata nominum radicis, hoc eſt, inter √ȝ 112 + √ȝ 24. & √ȝ 112 — √ȝ 24. vt in appoſita formula ſubtractionis manifeſtum eſt. Nam √ȝ 112. ex √ȝ 112. nil relinquit. At — √ȝ 24. ex + √ȝ 24. (cum diuerſa ſigna mutent ſpeciem) relinquit √ȝ 96. duplum videlicet √ȝ 24. cũ ſigno + numeri ſuperioris.

√ȝ 112 + √ȝ 24
√ȝ 112 — √ȝ 24

0 + √ȝ 96

Idem experieris in quouis alio Binomio, vel Reſiduo, & eius radice.

Pulchra ratio multiplicandi Binomij, vel Reſidui in ſe.

Ex hoc colligitur facilis ratio multiplicandi quodcunque Binomium, aut Reſiduum in ſe quadratè, quæ talis eſt. Propoſito Binomio, vel Reſiduo, accipiatur ſumma quadratorum duarum particularum Binomij, vel Reſidui, pro prima portione numeri producti. Deinde à quadrato dictæ ſummæ detrahatur quadratum differentiæ quadratorum earundem particularum Binomij, vel Reſidui. Radix enim reliqui huius numeri erit altera portio producti numeri. Vt Binomium √ȝ 50 + 6. ductum in ſe, facit 86 + √ȝ 7200. Nam duo quadrata 50. & 36. faciunt 86. priorem particulam numeri producti. Et quadratum 7396. numeri inuenti 86. ſuperat 196. quadratum numeri 14 nimirum differentiæ inter quadrata 50. & 36. numero 7200. cuius radix, nimirum √ȝ 7200. dabit poſteriorem particulam numeri producti: adeo vt quadratum Binomij √ȝ 50 + 6. ſit 86 + √ȝ 7200. quandoquidem quadratum 7396. prioris portionis 86. ſuperat 7200. quadratum poſte-

√ȝ 50 + 6

86 + √ȝ 7200

rioris proportionis, numero 196. cuius radix 14. est differentia inter quadrata 50. & 96.

Eadem ratione quadratum Residui √ʒ 50 — 6. erit 86 — √ʒ 7200.

Ita quoque Binomium √ʒ 50 + √ʒ 6. ductum in se faciet 56 + √ʒ 1200. quia quadratum 3136. prioris portionis 56. superat 1200. quadratum 1200. portionis posterioris numero 1936. cuius radix 44. differentia est quadratorum 50. & 6. Atque ita de cæteris.

√ʒ 50 + √ʒ 6
56 + √ʒ 1200

TRADITVR ab auctoribus nonnullis alia ratio facilis eruendæ radicis ex proposito Binomio, vel Residuo, quam visum est hoc loco explicare, si tamen prius Lemma sequens ostenderet.

LEMMA.

Lemma.

DATVM numerum in duas partes secare, vt numerus, qui ex mutua earum multiplicatione producitur, æqualis sit dato numero, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri, qui diuidendus est, vel (quod idem est) quarta parte quadrati totius numeri diuidendi.

SIT V. g. numerus 20. in duas partes secandus, quæ inter se multiplicatæ producant numerum 75. qui minor est quadrato 100 semissis numeri 20. propositi, vel minor, quam 100. quarta pars quadrati 400. dati numeri 20. Ex 100. quadrato semissis numeri diuidendi auferatur datus numerus producendus 75. Et reliqui numeri 25. radix quadrata 5. tum addatur ad semissem numeri propositi, nimirum ad 10. tum ab eadem semisse detrahatur. Nam summa confecta 25. & numerus reliquus 5. erunt quæsitæ partes numeri propositi 20. quæ inter se multiplicatæ procreant datum numerum 75. Huius praxis hæc est demonstratio. Sit numerus 20. AB, propositus diuisus in partes AD, DB, qua multiplicatione producentes datum numerum 75. quæ partes ita fient cognitæ. Diuiso numero AB, bifariam in C; a erit productus ex AB, in DB, vna cum quadrato ex CD, æqualis quadrato 100. semissis CB. Igitur si datus numerus 75. factus ex AD, in DB, dematur ex quadrato 100. semissis CB, reliquus erit quadratus ex CD, 25 cuius radix 5. dabit rectam CD, quæ addita semissi AC, conficiet maiorem partem AD, 15. Et detracta ex semisse CB, reliquum faciet partem minorem DB, 5.

A . . . . C . . . . . D . . . . . B

a 5. secundi.

Sit rursus numerus √ʒ 80. diuidendus in duas partes, ita vt inter se multiplicatæ faciant 1. Semissis dati numeri est √ʒ 20 A quadrato cuius, nimirum à 20. detrahatur numerus 1. producendus. Ac reliqui numeri 19. radix, nimirum √ʒ 19. addatur, & dematur ex semisse √ʒ 20. propositi numeri: fientque partes quæsitæ √ʒ 20 + √ʒ 19. & √ʒ 20 — √ʒ 19. quæ inter se multiplicatæ gignunt 1. vt præcedens formula apparet: detrahendo videlicet quadratum 19. ex quadrato 20. vt cap. 23. ante exempla Diuisionis docuimus.

√ʒ 20 + √ʒ 19
√ʒ 20 — √ʒ 19
1

Item sit numerus √ʒ 80. diuidendus in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant √ʒ 5. Semissis numeri √ʒ 80. est √ʒ 20. à cuius quadrato 20. si subtrahatur √ʒ 5. remanebunt 20 — √ʒ 5. cuius radix, nimirum √ʒ (20 — √ʒ 5) addita ad semissem √ʒ 20. dati numeri √ʒ 80 faciet maiorem partem √ʒ 20 + √ʒ (20 — √ʒ 5) dempta verò ex eadem semisse √ʒ 20. relinquet minorem partem √ʒ 20 — √ʒ (20 — √ʒ 5) quæ partes inter se multiplicatæ faciunt √ʒ 5. vt in hac formula apparet. Nam vt ex cap. 23. patet, multiplicatio fiet, si quadratum 20 — √ʒ 5. posterioris partis ex 20. quadrato prioris partis auferatur. Auferetur autem iuxta hanc alteram formulam. quia 20. ex 20. nihil relinquunt, & vt — √ʒ 5. tollatur ex + √ʒ 0 mutatur species, fitque additio cum signo +. superioris numeri √ʒ 0.

√ʒ 20 + √ʒ (20 — √ʒ 5)
√ʒ 20 — √ʒ (20 — √ʒ 5)
√ʒ 5

20 + √ʒ 0
20 — √ʒ 5
0 + √ʒ 5

Postremo sit 1 ʒ. diuidendus in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciãt 1 ʒ. hoc est, (& in idem recidit) ita vt 1 ʒ sit medio loco proportionalis inter illas duas partes. Semissis 1 ʒ. est ½ ʒ. cuius quadratum est ¼ ʒʒ. ex quo tollemus 1 ʒ. qui produci debet, remanebitque ¼ ʒʒ — 1 ʒ. cuius radix, nimirum √ʒ (¼ ʒʒ — 1 ʒ) addita ad semissem 1 ʒ. id est, ad ½ ʒ faciet vnam partem quæsitam ½ ʒ + √ʒ (¼ ʒʒ — 1 ʒ.) Et ablata ex eadem semisse, reliquam faciet alteram partem ½ ʒ — √ʒ (¼ ʒʒ — 1 ʒ.) quæ partes inter se multiplicatæ faciunt 1 ʒ. vt in hac formula apparet. Nam multiplicatio fiet, vt ex superioribus patet, si ¼ ʒʒ — 1 ʒ. quadratum posterioris portionis detrahatur ex ¼ ʒʒ quadrato portionis prioris. Detrahetur autem iuxta hanc alteram formulam. quia ¼ ʒʒ ex ¼ ʒʒ. nil relinquit. Et vt — 1 ʒ. subtrahatur ex + 0 ʒ. mutatur species operationis, fitque additio, cum signo + superioris numeri 0 ʒ. Hoc Lemma absoluemus etiam per Algebram ænigmate 23. capitis 30.

½ ʒ + √ʒ (¼ ʒʒ — 1 ʒ)
½ ʒ — √ʒ (¼ ʒʒ — 1 ʒ)
1 ʒ

¼ ʒʒ + 0 ʒ
¼ ʒʒ — 1 ʒ
0 + 1 ʒ

DEMONSTRATO, & exemplis illustrato hoc Lemmate, eruemus radicem ex quolibet Binomio, Residuove, hac facili via. Diuidatur per Lemma antecedens maius nomen in duas partes, quæ inter se multiplicatæ procreent numerum æqualem quartæ parti quadrati nominis minoris. Radices namque harum partium copulatæ per signum + pro Binomio, vel per signum — pro Residuo, radicem quæsitam exhibebunt.

Alia via extrahendæ radicis ex dato Binomio, vel Residuo.

Sit enim Binomium primum 20 + √ʒ 300. Secetur maius nomen 20. in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant 75. qui numerus quarta pars est quadrati 300. minoris nominis. Erit vna pars 15. & altera 5. Igitur √ʒ 15 + √ʒ 5. radix est dati Binomij, quæ in se ducta (quod facile fiet ea ratione, quam ante Lemma præcedens explicauimus) producet Binomium datum 20 + √ʒ 300.

Sit rursus Binomium primum 38 + √ʒ 288. Maius nomen 38. secabitur in duas partes sua multiplicatione producentes 72. quartam partem quadrati 288. minoris nominis: hoc modo. Semissis maioris nominis est 19. à cuius quadrato 361. si detrahatur dicta quarta pars 72. reliquus fit numerus 289. cuius radix 17. addita semissi prędictæ 19. & ab eadem subtracta facit partes quæsitas 36. & 2. Ergo √ʒ 36. hoc est, 6 + √ʒ 2. radix est Binomij propositi. quod ex eius ductu in se examinari potest. Quadrata enim 36. & 2. nominum faciunt 38. maius nomen. Et si ex eius quadrato 1444. dematur 1156. quadratum differentiæ quadratorum 36. & 2. nimirum quadratum numeri 34. remanebit numerus 288. Ergo √ʒ 288. erit nomen minus, ita vt Binomium sit 38 + √ʒ 288.

Sit præterea Residuum secundum √ʒ 18 — 4. Maius nomen √ʒ 18. secetur in duas partes, quarum vna in alteram faciat 4. quartam partem quadrati minoris nominis — 4. hoc modo. Semissis maioris nominis est √ʒ 18/2. à cuius quadrato 18/4. si detrahatur dicta quarta pars 4. remanebit 1/4 cuius radix, hoc est, √ʒ 1/2. addita ad √ʒ 18/4 facit √ʒ 8. pro priori parte: ablata verò ex eadem semisse, relinquit √ʒ 2. pro posteriore parte. Est ergo √ʒʒ 8 — √ʒʒ 2. radix Residui propositi. vt hic probatum esse vides, per multiplicationem radicis in se quadratè. Nam in partialibus productis, √ʒ 8. & √ʒ 2. faciunt √ʒ 18. Deinde — √ʒʒ 16. id est, — 2. duplicata facit — 4.

√ʒʒ 8 — √ʒʒ 2
√ʒʒ 8 — √ʒʒ 2

— √ʒʒ 16 + √ʒ 2
+ √ʒ 8 — √ʒʒ 16

√ʒ 18 — 4

Detur quoque Binomium tertium √ʒ 32 + √ʒ 24. Maius nomen √ʒ 32. secabitur in duas partes producentes 6. quartam partem quadrati 24. minoris nominis, hoc modo. Semissis maioris nominis est √ʒ 8. à cuius quadrato 8. detracta dicta quarta pars 6. relinquit 2. cuius radix, nimirum √ʒ 2. addita, & subtracta à semisse prædicta √ʒ 8. facit partes √ʒ 18. & √ʒ 2. Ergo radix Binomij est √ʒʒ 18 + √ʒʒ 2. Hæc enim in se ducta quadratè, vt hic patet, producit Binomium √ʒ 32 + √ʒ 24. Nam in partialibus productis √ʒ 18. & √ʒ 2. faciunt √ʒ 32. & √ʒ 6. duplicata facit √ʒ 24.

√ʒʒ 18 + √ʒʒ 2
√ʒʒ 18 + √ʒʒ 2

+ √ʒ 6 + √ʒ 2
√ʒ 18 + √ʒ 6

√ʒ 32 + √ʒ 24

Sit

Sit rursus Binomium primum 72 + √ʒ 2880: Maius nomen 72. secabitur in duas partes producentes 720. quartam partem quadrati 2880. maioris nominis, hac ratione. Semissis maioris nominis 72. est 36. à cuius quadrato 1296. detracta quarta pars prædicta 720. relinquit 576. cuius radix 24. addita ad semissem nominatam 36. & detracta ab eadem, facit partes quæsitas 60. & 12. Ergo radix Binomij est √ʒ 60 + √ʒ 12. quod hic probatum est per multiplicationē radicis in se quadratè.

√ʒ 60 + √ʒ 12
√ʒ 60 + √ʒ 12

+ √ʒ 720 + 12
60 + √ʒ 720

72 + √ʒ 2880

Sit quoque elicienda radix ex hoc residuo sexto √ʒ 60 — √ʒ 12. Maius nomen √ʒ 60. distribuetur in duas partes producentes 3. quartam partem quadrati 12. minoris nominis, hoc pacto. Semissis maioris nominis √ʒ 60. est √ʒ 15. à cuius quadrato 15. detracta nominata pars quarta 3. relinquit 12. cuius radix √ʒ 12. addita ad semissem √ʒ 15. prędictam, & ab eadem subiata facit partes √ʒ 15 + √ʒ 12. & √ʒ 15 — √ʒ 12. Ergo radix dicti Residui sexti est √ʒ (√ʒ 15 + √ʒ 12) — √ʒ (√ʒ 15 — √ʒ 12) quod hic probatum est.

√ʒ (√ʒ 15 + √ʒ 12) — √ʒ (√ʒ 15 — √ʒ 12)
√ʒ (√ʒ 15 + √ʒ 12) — √ʒ (√ʒ 15 — √ʒ 12)

Quadrata partium. √ʒ 15 + √ʒ 12 & √ʒ 15 — √ʒ 12
— √ʒ 3
— √ʒ 3

Summa. √ʒ 60 — √ʒ 12.

Nam quadrata partium faciunt √ʒ 60. nimirum duplum √ʒ 15. Et ex vna parte √ʒ (√ʒ 15 + √ʒ 12) in alteram — √ʒ (√ʒ 15 — √ʒ 12) fit — √ʒ 3. quippe cum quadratum 12. ex quadrato 15. subductum relinquat 3. cui præponendum est signum √ʒ. cum signo —. propter Residuum. Duplum autem — √ʒ 3. facit — √ʒ 12.

S C H O L I V M.

EMERSIMVS tandem ex numerorum Coßicorum, & Irrationalium multiplici difficultate, & ingens eorum tractationis pelagus, si minus commoda, felici tamen (nisi mea me fallit opinio) velificatione vecti superauimus; & aliquando portum per tot difficultatum æstus ac turbines, per tam multarum rerum maria prolapsi tenemus, quodq; ad diuinam opem est referēdum integri atque incolumes tenemus. Iuuat nunc, veluti in otio & quiete, eorū meminisse, quæ paulò ante ferre pigebat. Alia enim nobis vndarum spatia sunt enauiganda, quorum tamen laborem, si quis erit, præteritorum iucunda commemoratio leuabit, vt spero, maximè. Iuuat, inquam, paululū in eorū numerorum, qui hactenus explicati sunt, Algorithmi iucundißimo æquè, atque vber-

rimo fructu tantisper immorari. Quota enim eius pars, quota præteriti laboris veluti merces periret, nisi in ipsius Algorithmi fructu exigendo operæ aliquid ac temporis poneremus? Primo igitur ænigmata quædam, cap. nimirum 29. quod proximè sequitur, & 30. erunt soluenda, siue mauis, problemata quædam numerorum, quos vocãt abstractos, eorum nimirum, qui ad res materiales, qualia sunt commercia, & mercatorum negotiationes, vel ad alias rerum aliarum quæstiones non contrahuntur. Quod & Alexandrinus Diophantus (egregius in primis scriptor, & de tota Algebræ scientia, quam qui optime meritus) & alij grauissimi scriptores iam ante præstiterunt. Hæc enim siue ænigmata, siue problemata placet appellare, ad speculatiuam Arithmeticam spectant: quæ quidem scientia quantum dignitate præstet inter reliquas, concors omnium vox non obscurè testatur. Nam & theorematum, & problematum numerorum abstractorum, quæ in ea demonstrantur, varietate tam multiplex, multitudine tam copiosa est, vt huiusmodi ænigmatum tractatio maximam addat & dignitatem, & verò perficiat etiam quodammodo eam scientiam, quæ de numeris est. Quam multa enim problemata sunt, quæ ei suppeditat quorum nulla esset cognitio penes nos, neque extrahi è tenebris vnquã possent, nisi Algebræ institutio, veluti lumen, accederet? At enim otiosa sunt, neque vllam habent huiuscemodi problemata vtilitatem. Quid quod non vtilitatem solum, sed & iucunditatem spectare aliquando, sapientis esse putamus, neq; ab honestate alienum. Ista enim si ratio placet, cedo quid est, cur decem Iordani libros de numeris admittamus? Quid, cur theoremata quam plurima, & problemata numerorum ab Euclide lib. 7. 8. & 9. demonstrata probemus, in ijs legendis insistamus, delectemur, eadem summa cum admiratione persequamur? Quis in illis tantus vsus est, quæ tanta, tam spectata vtilitas, quæ non tota insit & nostris? Quantum ista vox non de harum modo splendore ac dignitate, sed de omnium scientiarum honestate, si admittatur, detractura est? Inest enim profectò hoc disciplinis ijs omnibus, quæ quoniam nunquam in vsum exeunt, totæque in veritatis contemplatione occupantur, speculatiuæ dicuntur, vt mentem sua honestate exornent, principem animi facultatem, nempe intelligendi vim augeant, atque perficiant, delectent ipsæ per sese, totúmque, vt ita dicam, hominem mira quadam sui iucunditate perfundant. Verum enimuerò ne illud quidem dissimulãdum est, quod suis locis fiet apertius, existere etiam horum problematum maximos fructus, & vtilitates, non in Geometricis modo, sed in alijs quoq; facultatibus, artibúsque permultis. quamquam non tantam vtilitatis ducendam rationem putamus, vt si hæc desit, nulla continuò sit cuiusque facultatis dignitas, & honestas. Hæc ideo te quam paucißimis monitum volui, amice Lector, vt remota omni suspicionum caligine, expeditos animos afferas ad ea, quæ duobus sequentibus cap. ænigmata proponentur, excussoque procul metu omni, ac mœrore abiecto, faciliorem te, & hilariorem his euoluendis nobis præstes. Post duorum capitum ænigmata, exempla varia cap. 31. subyciemus, in ijs tamen numeris, qui ad materiam contracti sunt, vbi etiam quæstiones nonnullas, quæ ad secundas radices spectant, accipies. Capite demum 32. multiplices de rebus Geometricis quæstiones in medium afferemus. Facile autem ænigmatum multitudi-

Qui ordo seruetur in ænigmatibus per Algebram soluendis.

titudinem sustinebit is, cui, quam tandem ob causam producantur, constabit. Neque enim illud solum laboramus, vt propositæ à nobis quæstiones dissoluantur, sed illud præterea curandum nobis esse duximus, vt alias quoque iis similes ab aliis quocunque tempore dissoluendi modus intelligatur: quem certè modum ex horum ænigmatum solutione quiuis vel nullo negotio colliget. Quare neque illud omisimus, vt ita ænigmata omnia, omnes quæstiones solutas daremus, vt studiosus Lector peculiare in iis enodandis Algebræ artificium facile dignosceret. Singulas enim operationes quasi oculis subiecimus, ne hæsitandum foret in singulis, aut superiora præcepta singulis interuallis repetenda. Quæ ratio est, quare Algebram ita obscuram, & tenebricosam plerique autument, vt ad paucos, aut etiam ad ferè neminem eius intelligendæ vim pertinere confirment. Id enim in plerisque eius scriptoribus desideratum animaduerti, quod mihi maximè curandum fuit, vt quàm aptißimè omnia proferrentur: Neque, vt monuit olim Lyricus poeta, laboro breuis esse, dummodo obscurus ne sim: Et volens libénsque verbosioris notam subire me patiar, cæteris vt apertißima per me omnia fiant. Maior tamen ex ænigmatum sequentium explicatione voluptas vt deriuetur, præstabit ea, veluti sese exercendi causa, ad quæstionũ normã examinare perinde ac nulla eorũ explicatio hactenus fuisset allata; interdum etiam numeros & exempla alia, quàm ea, quæ ibi subyciuntur, eorum loco subrogando. Atque vt plurima ænigmata adscripsimus, quæ omnino, nisi per Algebram nequeunt explicari, ita etiam non pauca de industria inseruisse voluimus, quæ etiam sine Algebra solui posse non inficiamur. Placuit tamen ea cæteris apponere, non vt aliis artibus sublata vellemus, sed vt expeditiorem, celeriorem, iucundiorémque ea indagandi Algebræ methodum agnosceremus. Etenim, quod in aliis fit, vt totidem fermè leges, totidémque præcepta tradantur, quot sunt ænigmata cognoscenda, singulísque ænigmatibus, non nisi singulæ ac suæ leges aptentur, & vna lex vni tantùm ænigmati expediendo respondeat; id longè facilius, aduocata Algebra, dabit effectum. Vna enim eadémque lege, via, ac methodo vniuersa ferè semper soluta præstabit, eámque nobis molestiam eximet, quam multiplex illa regularum varietas noui afferre non potest. Vt vel hac vna laude, si cæteræ (quæ nec paucæ sunt, nec leues) desint, aliis omnibus Arithmeticæ regulis Algebra antecellat. Vix enim quæstione oblata, ipsa etiam ratio eam explicandi in Algebra sese dat in conspectum; & penè ipsa quæstio viam indicat, qua ipsam, veluti diu insecuti, tandem assequamur. Quod quidem, si regulam falsi demus, nullius omnino est aliarum. Habet hoc igitur Algebra præ cæteris singulare, quod multas ipsa sola quæstiones suis legibus soluat, de quibus aliæ vel non laborant, vel si laborent, nihil efficiunt: Et quod eas, quæ ab aliis quoque aliquando longis ambagibus, & veluti in tenebris deprehenduntur, ipsa quasi per compendia, & luce clara perficiat. Cæterum illud te non celabo, studiose Lector, permulta à nobis afferri ænigmata, quibus si alij, atque alij subinde numeri supponantur, eorum haberi solutio non poßit. Non tamen in longum abibis, quin sentias, solui quæ poßint, quæque non poßint. Id te ipsa eadem docebit operatio, quam ad aperiendam quæstionem adhibere oportebit. Vbi enim æquatio inter duos inæquales *omnino inter se numeros incidet, eius quæstionis solutio nulla esse poterit. Quã nos esse rationem diximus, quare Algebræ regula tantopere vniuersis aliis Arithmeticæ præceptionibus præstet. Frequentißimum quippe est, vt huiusmodi aliqua quæstio, quæ inextricabiles omnino nodos habeat, Algebræ imperito obiiciatur, quam ille per summum laborem, summámque & animi, & corporis cõtentionem soluere ne quicquam connitetur: & repetito iterum, iterúmque studio, tempus æquè atque operam omnem suam peßum ire imprudens patietur. A quo certè procul abest Algebræ studiosus, cui ipsa operatio, quæ possint, quæ verò non poßint solui, quæstiones indicabit. Quantũ igitur hoc est, quo Algebræ studiosus gloriari iure potest, vt obfirmato animo, constantiq; sentẽtia, proposita quæstio solui queat, necne, nihil hæsitans, nec dubia voce pronunciet!*

ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM abstractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos tantum numeros occurrit: quæ quidem simplex æquatio dicitur.

CAP. XXIX.

IN hoc cap. afferemus ænigmata, in quibus occurrunt simplices æquationes: In sequenti verò ænigmata proponemus, in quibus compositæ æquationes reperiuntur. Quid porrò sit æquatio simplex, quid composita, ad finem cap. 13. declarauimus. Hinc igitur exordiamur.

1 *Datum numerum quemcumque diuidere in duas partes se mutuo superantes in dato excessu quocunque.*

Sit numerus 100. diuidendus in duas partes, quarum excessus, vel differentia sit 40. Ponatur minor pars 1 ♃. ac proinde maior 100 — 1 ♃. Detracta 1 ♃ ex 100 — 1 ♃. remanent 100 — 2 ♃. vt hic vides. Eritque inuenta æquatio inter 100 — 2 ♃. & 40. quippe cum dempta minore parte ex maiore, relinqui debeant 40. Additis vtrinque 2 ♃. erit æquatio inter 100. & 40 + 2 ♃. Et vtrinque ablatis 40. æquatio erit inter 60. & 2 ♃. Si ergo ex præscripto regulæ Algebræ diuidantur 60. per 2. inuenietur 1 ♃. esse 30. atque hæc est minor pars. Ergo maior erit 70. nimirum 100 — 30. quæ maior pars etiam habebitur, si ad minorem 30. adiiciatur differentia proposita 40. Vides ergo maiorem partem 70. superare minorem 30. numero 40. vt propositum est.

100	— 1	♃
	+ 1	♃
100	— 2	♃

Quòd si statuamus, maiorem partem esse 1 ♃. & minorem 100 — 1 ♃. subtrahemus 100 — 1 ♃. ex 0 + 1 ♃, vt hic vides. remanebúntque

nebuntq; — 100 + 2 ♃. hoc est, 2 ♃ — 100. Nam subtracta + 0. ex + 100. remanent — 100 quod præpostere positi sint numeri, ideoque ex + fiat —. &c. Hic ergo numerus reliquus 2 ♃ — 100. æqualis esse debet dato excessui 40. Additis igitur 100. vtrinque, erit æquatio inter 2 ♃. & 140. Et diuisis 140. (vt præcipit Regula Algebræ) per 2 fiet 1 ♃ 70. quæ maior pars erit, ac propterea minor 30. nimirum 100 — 70.

0	+ 1	♃
100	— 1	♃
— 100	+ 2	♃

SOLVETVR idem hoc ænigma hac alia ratione. Ponatur minor pars 1 ♃. ideoq; maior 1 ♃ + 40. superans nimirum minorem numero 40. Ambæ partes simul efficiunt 2 ♃ + 40. qui numerus æqualis debet esse dato numero 100. Demptis vtrinq; 40. erit æquatio inter 2 ♃. & 60. Diuisis ergo 60. per 2. erit 1 ♃. 30. minor scilicet pars, ideoque maior 70. vt prius.

Quod si maior pars ponatur 1 ♃. ideoque minor 1 ♃ — 40. vt illa hanc excedat numero 40. Ambæ partes simul efficient 2 ♃ — 40. quæ summa æqualis est dato numero 100. Additis 40. vtrinque, erit æqualitas inter 2 ♃. & 140. Diuisísque 140. per 2 fiet 1 ♃. 70. pro maiore parte, ideoque minor erit 30. vt supra.

SCHOLIVM.

VSV interdum venit, vt numerus aliquis Coßicus, nimirum 1 ♃. vel 10 ♃. vel 1 ʒ. vel 6 ʒ. &c. in duas partes diuidendus sit, quæ se dato numero excedant: vt ænigmate 61. manifestum erit. Quæ res sine Algebra (nam per Algebram vix fieri potest) hunc in modum perficietur. Ex dato numero Coßico detrahatur datus numerus per signum —. Semißis namque huius numeri diminuti erit minor pars, cui si per regulam additionis cap. 4. traditam addatur idem numerus datus, habebitur maior pars. Diuiſio numeri Coſſici in duas partes dati exceſſus.

Sit enim 1 ♃ diuidenda in duas partes, quarum maior minorem superet 20. vnitatibus. Deme 20. ex 1 ♃. & ad ½ ♃ — 10. semissem residui 1 ♃ — 20. adde 20. faciesque ½ ♃ + 10. vt in formula apposita vides. Partes sunt ½ ♃ — 10. & ½ ♃ + 10. quarum hæc illam superat numero 20. & ambæ conficiunt 1 ♃.

½ ♃	— 10
	+ 20
½ ♃	+ 10

Sit rursum numerus 10 ♃. diuidendus in duas partes, quarum differentia 20. Deme 20. ex 10 ♃. Nam residui 10 ♃ — 20 semißis 5 ♃ — 10. erit minor pars: ad quam si addes 20. facies 5 + 10. maiorem partem, quarum hæc illam superat 20. vnitatibus, & ambæ efficiunt 10 ♃.

Sit quoque 1 ʒ. diuidendus in duas partes, quarum differentia 150. Deme 150. & residui 1 ʒ + 150. semißis ½ ʒ — 75. erit minor pars, ad quam si adiicies 150. facies maiorem partem ½ + 75. quæ simul faciunt 1 ʒ. & maior minorem superat numero 150.

Sit denique numerus 6 ʒ. diuidendus in duas partes, quarum maior minorem superat 8. vnitatibus. Deme 8. ex 6 ʒ. Nam residui 6 ʒ — 8. semiſ-

ſis 3 ℨ — 4. *erit prima pars: ad quam ſi addes* 8. *fiet maior pars* 3 ℨ + 4. *Atque ita de cæteris.*

Diuiſio numeri abſoluti in duas partes dati exceſſus ſine Algebra.

IMMO hac eadem arte diuidemus propoſitum numerum abſolutum in duas partes dati exceſſus, ſine Algebra: Nam ſi exceſſum datum ex propoſito numero detrahemus, erit reliqui numeri ſemiſſis minor pars, ad quam ſi eundem exceſſum adyciemus, conficiemus partẽ maiorem. Vt ſi numerus 100. *diſtribuendus ſit in duos, quorum differentia* 40. *Deme* 40. *ex* 100. *Reliqui enim numeri* 60. *ſemiſſis* 30. *erit minor pars: ad quam ſi addes* 40. *conflabis maiorem partem* 70.

QVOD ſi Coſsicus numerus diuidendus ita ſit per Algebram, non inuenientur quidem partes numeri Coſsici, ſed pretium radicis reperietur, vel zenſi, cuius partes reſpondebunt partibus per Algebram poſitis, quæſtioniq; ſatisfacient. Vt ſi numerus 2 ℨ *ſecundus ſit in duas partes, quarum maior ſuperet minorem numero* 40. *Ponatur minor pars* ½ ℨ. *(minor ſcilicet numerus, quam ſemiſſis dati numeri* 2 ℨ) *eritque maior pars* ½ ℨ + 40. *ſuperans illam numero* 40. *quæ ſimul efficiunt* 1 ℨ + 40. *qui numerus æqualis debet eſſe dato numero* 2 ℨ. *Dempto* 1 ℨ. *vtrinque, erit æquatio inter* 40. *&* 1 ℨ. *Diuiſiſque* 40. *per* 1. *fiet* 1 ℨ. 40. *&* 2 ℨ. *propoſiti* 80. *qui numerus diuidendus proponitur. Quoniam igitur minor pars propoſita eſt* ½ ℨ. *erit minor pars* 20. *ſemiſſis videlicet vnius zenſi, cuius pretium inuenimus* 40. *ideoque maior pars erit* 60. *nimirum* ½ ℨ + 40. *Vbi vides,* 20. *&* 60. *efficere* 80. *& maiorem partem ſuperare minorem dato numero* 40. *Sic etiam ſi* 2 ℞. *diſtribuendæ ſint in duas partes, quarum differentia* 40. *inuenietur eodem modo* 1 ℞. 40. *ideoque* 2 ℞ 80. *Eritque* ½ ℞ 20. *&* ½ ℞ + 40. *erit* 60. *&c.*

II. 2 *Duos numeros inuenire, quorum exceſſus ſit datus quiuis numerus, & eorum ſumma conficiat quemlibet datum numerum.*

Sit datus exceſſus 40. & ſumma 100. Hoc ænigma à ſuperiori non differt. Nam ſumma 100. diſtribuenda eſt in duas partes, quarum exceſſus ſit 40.

III. 3 *Datum numerum quemlibet in duas partes diuidere, quæ inter ſe multiplicatæ gignant numerum, qui ad quadratum minoris partis habeat datam proportionem quamcunque.*

Sit datus numerus 100. diuidendus in duas partes, vt numerus ex vna in alteram genitus ad quadratum minoris partis proportionem habeat decuplam. Ponatur minor pars 1 ℞. ideoque maior 100 — 1 ℞. Ex vna in alteram procreatur numerus 100 ℞ — 1 ℨ. qui decuplus eſſe debet ad quadratum partis minoris, nimirum ad 1 ℨ. hoc eſt, æqualis 10 ℨ. Eſt ergo æqualitas inter 100 ℞ — 1 ℨ. & 10 ℨ.

Et

Et addito 1 ℨ. vtrinque, inter 100 ℞. & 11. ℨ. Diuiſis ergo 100. per 11. iuxta tenorem regulæ, prodibit 1 ℞. 9 $\frac{1}{11}$. pro minore parte: (quia numeri Coſſici ſunt collaterales.) qua ablata ex 100. reliqua erit maior pars 90 $\frac{10}{11}$. Hæ partes, nimirũ $\frac{100}{11}$. & $\frac{1000}{11}$. inter ſe multiplicatæ faciunt $\frac{100000}{121}$. hoc eſt, 826 $\frac{54}{121}$. qui numerus decuplus eſt ad quadratum minoris partis, videlicet ad $\frac{10000}{121}$. hoc eſt, ad 82 $\frac{78}{121}$. vt perſpicuum eſt.

100	—	1 ℞
	+	1 ℞
100 ℞	—	1 ℨ

S C H O L I V M.

SCIENDVM autem eſt, duas partes numeri dati inuentas, eandem habere proportionem, quam productus numerus ex earum multiplicatione habet ad quadratum minoris partis. Ita vides partes inuentas 9 $\frac{1}{11}$. *&* 90 $\frac{10}{11}$. *vel* $\frac{100}{11}$. *&* $\frac{1000}{11}$. *habere proportionem decuplam, quemadmodum productus numerus* 826 $\frac{54}{121}$. *ad* 82 $\frac{78}{121}$. *quadratum minoris partis, ſiue* $\frac{100000}{21}$ *ad* $\frac{10000}{21}$. *Cuius rei ratio eſt, quod eadem pars minor multiplicet & ſeipſam, vt ſuum quadratum efficiat, & maiorem partem, vt productum numerum gignat. a Hinc enim fit, vt producti eandem proportionem habeant, quam numeri multiplicati.* a 17. ſeptimi.

Itaque ænigma hoc ita proponi poſſet.

Datum numerum in duos partiri in data proportione, qui inter ſe multiplicati gignant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat eandem datam.

Sit enim datus numerus 100. *diuidendus in duos habentes quadruplam proportionem, ita vt numerus ex eorum multiplicatione procreatus habeat quoque ad quadratum minoris proportionem quadruplam. Ponatur minor numerus* 1 ℞. *& maior* 4 ℞. *vt nimirum habeant proportionem quadruplã. Et quia duo hi numeri faciunt* 5 ℞. *erit æquatio inter* 5 ℞ *&* 100. *Diuiſis ergo* 100. *per* 5. *fiet* 1 ℞. 20. *minor ſcilicet numerus. Maior ergo erit* 80. *cum poſitus ſit* 4 ℞. *Vides ergo numerum* 1600. *productum ex* 20. *in* 80. *quadruplum eſſe quadrati* 400. *ex minore* 20. *deſcripti. Item maiorem* 80. *ad minorem* 20. *quadruplam quoque habere proportionem.*

4 *Duos numeros inuenire, qui inter ſe multiplicati producant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat datam: ſimul verò additi conficiant ſummam propoſitam quamcunque.* IIII.

Sit ſumma propoſita 100. *& numerus ex vno numero inuento in alterum* *procreatus ſit decuplus ad quadratum minoris numeri. Hoc etiam ænigma à ſuperiori non differt. Nam ſumma 100. diuidenda eſt in duas partes, quæ inter ſe multiplicatæ producant numerum in proportione decupla ad quadratum numeri minoris.*

V. 5 *Duos numeros inuenire in data proportione, quorum maior ſi ſubtrahatur à dato numero, & minor à minore alio dato numero, reliqui duo fiant duo numeri æquales: quando id fieri poteſt.*

Sint inueniendi duo numeri in proportione tripla, quorũ maiore detracto ex 30. & minore ex 16. reliqui fiant duo numeri æquales. Debent autem duo propoſiti numeri habere proportionem minorem proportione data. Vt in noſtro exemplo minor eſt proportio 30. ad 15. quam tripla.

Ponatur minor 1 ℞. ideóque maior 3 ℞. triplo maior. Si 3 ℞ demantur ex 30. remanent 30 — 3 ℞. Et ſi 1 ℞ dematur ex 16. remanent 16 — 1 ℞. Eſt ergo inuenta æquatio inter 30 — 3 ℞. & 16 — 1 ℞. Addantur vtrinque 3 ℞. eritque æquatio inter 30. & 16 + 2 ℞. propterea quod + 3 ℞. additæ ad — 1 ℞. faciant + 2 ℞. Et ablatis 16. vtrinque, erit æqualitas inter 14. & 2 ℞. Diuiſiſque 14. per 2. prodibit 1 ℞. 7. pro minore numero. Maior ergo erit 21. triplo maior. Perſpicuum autem eſt, ſi 21. ex 30. & 7. ex 16. detrahantur, vtrobique relinqui 9.

+ 3 ℞
— 1 ℞
+ 2 ℞

VI. 6 *Duos numeros in proportione data inuenire, ita vt maiore addito ad datum numerum, & minore ad alium datum minorem, vel ad eundem, efficiantur duo numeri in proportione quacunque data, quando id fieri poteſt.*

Sint inueniẽdi duo numeri in proportione quintupla, quorum maiore addito ad 6. & minore ad 4. efficiantur duo numeri in proportione tripla. Ponatur minor numerus 1 ℞. & maior 5 ℞. quintuplo maior. Ex 5 ℞. & 6. fiunt 5 ℞ + 6. Et ex 1 ℞. & 4. fiunt 1 ℞ + 4. Erúntque 5 ℞ + 6. in tripla proportione ad 1 ℞ + 4. hoc eſt, ſi triplicentur 1 ℞ + 4. æquatio fiet inter 5 ℞ + 6. & 3 ℞ + 12. Et ablatis 3 ℞. vtrinque, inter 2 ℞ + 6. & 12. Et rurſum ablatis vtrinque 6. inter 2 ℞. & 6. Diuiſis ergo 6. per 2. proueniet 1 ℞. 3. pro minore numero, & 15. pro maiore, quintuplus illius. Iam ſi addantur 15. ad 6. & 3. ad 4. fiunt 21. & 7. in tripla proportione.

Si compoſitus numerus 5 ℞ + 6. ad 1 ℞ + 4. debeat habere proportionem quadruplam, erit æqualitas inter 5 ℞ + 6. & 4 ℞ + 16.

Et

Et ablatis 4 ℞. vtrinque, inter 1 ℞ + 6. & 16. Et rurſum ablatis 6. vtrinque. inter 1 ℞. & 10. Diuiſiſque 10. per 1. fiet 1 ℞. 10. minor ſcilicet numerus, ideóque maior 50. illius videlicet quintuplus. Quod ſi 50. addantur ad 6. & 10. ad 4. fient numeri 56. & 14. in proportione quadrupla.

Et ſi compoſitus numerus 5 ℞ + 6. ad 1 ℞ + 4. habere debeat proportionem duplam, erit æquatio inter 5 ℞ + 6. & 2 ℞ + 8. Et ablatis 2 ℞. vtrinque, inter 3 ℞ + 6. & 8. Et ablatis 6. vtrinque, inter 3 ℞ & 2. Diuiſis autem 2. per 3 fiet 1 ℞, $\frac{2}{3}$. minor ſcilicet numerus, & maior $\frac{10}{3}$. illius quintuplus. Et ſi $\frac{10}{3}$. addantur ad 6. id eſt, ad $\frac{12}{3}$. & $\frac{2}{3}$. ad 4. id eſt, ad $\frac{12}{3}$. fient duo numeri $\frac{28}{3}$. & $\frac{14}{3}$. habentes proportionem duplam.

Sed tam maior 5 ℞. quam minor 1 ℞. additus ad 6. efficere debeant duos numeros in proportione tripla. Inuenietur æquatio inter 5 ℞ + 6. & 3 ℞ + 18. & ablatis 3 ℞. vtrinque, inter 2 ℞ + 6. & 18. Et rurſum ablatis 6. vtrobique, inter 2 ℞. & 12. Diuiſis ergo 12. per 2. fiet 1 ℞. 6. minor numerus: maior autem erit 30. Si igitur vterque addatur ad 6. fient numeri 12. & 36. habentes proportionem triplam.

Qvod ſi quis velit, compoſitum numerum 5 ℞ + 6. ad 1 ℞ + 4. habere proportionem etiam quintuplam, vel maiorem, aut ſeſquialteram, euadet ænigma explicabile, ſeu impoſſibile: quia incidemus in æquationem impoſſibilem. Vt ſi proportio inter 5 ℞ + 6. & 1 ℞ + 4. debeat eſſe quintupla, vel ſextupla, erit æquatio inter 5 ℞ + 6. & 5 ℞ + 20. Vel inter 5 ℞ + 6. & 6 ℞ + 24. quarum vtraque impoſſibilis eſt.

At ſi proportio inter 5 ℞ + 6. & 1 ℞ + 4. debeat eſſe ſeſquialtera, erit æquatio inter 5 ℞ + 6. & $1\frac{1}{2}$ ℞ + 6. quæ etiam impoſſibilis eſt. Vbi clarè perſpicis, ex ipſa regula Algebræ cognoſci poſſe, num ænigma propoſitum ſolui poſſit, nec ne. id quod cap. 14. pluribus verbis docuimus.

7 *Numerum inuenire, qui additus ad quoſuis duos numeros datos, faciat duos numeros in quacunque proportione, quæ minor ſit proportione duorum numerorum propoſitorum.* VII.

Sit inueniendus numerus, qui additus ad 100. & 20. faciat duos numeros in proportione tripla. Ponatur numerus quæſitus 1 ℞. Fient ergo numeri 1 ℞ + 100. & 1 ℞ + 20. qui debent habere proportionem triplam. Igitur æquatio erit inter 1 ℞ + 100. & 3 ℞ + 60. Ablata 1 ℞ vtrinque, remanebit æquatio inter 100. & 2 ℞ + 60. Et rurſum demptis 60. vtrinque, inter 40. & 2 ℞. Diuiſis autem 40. per 2. fiet 1 ℞. 20. numerus quæſitus. Numeri ergo compoſiti erunt 120. & 40. in proportione tripla.

Debet autem proportio nominata minor eſſe proportione inter datos duos numeros, vt in nostro exemplo, minor, quam quintupla. Alias occurret nobis æquatio impossibilis. Ratio huiusce rei est, quod addito vno eodémq; numero ad duos inæquales, compositi minorem habeant proportionem, quam duo illi inæquales.

Sint namque duo numeri inæquales AB, maior, & CD, minor, quibus addatur idem numerus, vel duo æquales BE, DF. Dico minorem esse proportionem AE, ad CF, quam AB, ad CD.

A.........B....E
C......D....F

Quoniam enim (vt ad defin. 20. lib. 7.
a schol. 22. septimi. Eucl. declarauimus) maior est proportio maioris numeri AE, ad BE, quam minoris CF, ad eundem BE, vel ad DF: [a] erit per conuersionem rationis, minor proportio AE, ad AB, quam CF, ad CD: Et permutando, minor AE, ad CF, quam AB, ad CD. quod est propositum.

Iisdem positis sit, data proportio super bipartiens quintas. Numeri compositi sunt 1℞ + 100. & 1℞ + 20. qui debent habere proportionem super bipartientem quintas. Si ergo 1℞ + 20. multiplicetur per $1\frac{2}{5}$. denominationem proportionis super bipartientis quintas, id est, per $\frac{7}{5}$. fiet numerus $\frac{7℞ + 140}{5}$. qui æqualis erit numero 1℞ + 100. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem, vt hic vides, reducitur ad æquationem inter 7℞ + 140. & 5℞ + 500.

7℞ + 140 ——— 5℞ + 500

$\frac{7℞ + 140}{5}$ $\qquad$ $\frac{1℞ + 100}{1}$

Et ablatis 140. vtrinque, erit æquatio inter 7℞. & 5℞ + 360. Et rursus ablatis 5℞ vtrinque inter 2℞. & 360. Diuisis ergo 360. per 2. fiet 1℞. 180. numerus quæsitus. Hic enim cum 100. & 20. faciet numeros 280. & 200. qui habent proportionem superbipartientem quintas. Apposui hoc alterum exemplum, vt videas, quo pacto æquationes inter minutias sint reducendæ. quod ad finem cap. 10. docui.

VIII. 8 *Numerum inuenire, qui ablatus ex quibuslibet duobus numeris datis relinquat duos numeros in quacunque proportione, quæ maior sit proportione duorum numerorum propositorum.*

Sit inueniendus numerus, qui ablatus ex 100. & 50. relinquat duos numeros in proportione septupla. Ponatur quæsitus numerus 1℞. Erunt ergo duo numeri reliqui 100 — 1℞. & 50 — 1℞. eritque proportio illius ad hunc septupla. Quare æquatio erit inter 100 — 1℞. & 350 — 7℞. Additaque 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 100. & 350 — 6℞. propterea quod + 1℞. & — 7℞. faciunt — 6℞. vt hic cernis. Et rursum additis vtrinq; 6℞. erit æqualitas inter 100 + 6℞. & 350. Et ablatis vtrinque

+ 1℞
— 7℞
———
— 6℞

100. in-

100. inter 6℞. & 250. Diuisis ergo 250. per 6 erit 1℞. $41\frac{2}{3}$. numerus quæsitus. Reliqui ergo numeri erunt $58\frac{1}{3}$. & $8\frac{1}{3}$. qui proportionem habent septuplam.

Debet autem proportio data esse maior proportione, quam dati duo numeri habent, vt in proposito exemplo maior, quam dupla. Alias incidemus in æquationem impossibilem. Cuius rei ratio est, quod ablato vno eodémque numero ex duobus inæqualibus, reliqui numeri habeant proportionem maiorem, quam duo illi inæquales.

Sint enim inæquales duo numeri AB, maior, & CD, minor, à quibus auferatur idem numerus, vel duo æquales EB, FD. Dico maiorem esse proportionem AE, ad CF, quam AB, ad CD. Quoniam enim (vt ex defin. 20. lib. 7. Eucl. deduximus)

A.........E....B
C......F....D

maior est proportio maioris numeri AB, ad EB, quam minoris CD, ad eundem EB, vel ad FD; [a] erit quoque permutando maior proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD: nimirum totius ad totum, quam ablati ad ablatum: erit quoque maior proportio reliqui AE, ad reliquum CF, quam totius AB, ad totum CD. quod est propositum. a schol. 22. septimi.

9 *Propositum numerum in duos numeros habentes datam proportionem distribuere.* IX.

Sit numerus 100 diuidendus in duos in proportione decupla. Ponatur minor pars 1℞. Eritque maior 10℞. decuplo videlicet maior. Ergo summa harum partium 11℞. æqualis erit 100. Diuisis igitur 100. per 11. fit 1℞. $9\frac{1}{11}$. minor numerus, quo ablato ex 100. remanet maior numerus $90\frac{10}{11}$. qui illius decuplus est.

Aliter. Posita 1℞. pro minore parte, erit maior pars 100 — 1℞. quæ illius decupla esse debet. Igitur 10℞. æquales erunt 100 — 1℞. Additáque 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 11℞. & 100. vt supra. Quòd si statuas maiorem partem esse 1℞. erit minor 100 — 1℞. qua decuplata, erit æqualitas inter 1℞. & 1000 — 10℞. Additísque 10℞ vtrinque, æquatio erit inter 11℞. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11. fiet 1℞. $90\frac{10}{11}$. pro maiore parte. qua ablata ex 100. erit minor pars $9\frac{1}{11}$. vt prius.

10 *Propositum numerum in duas partes secare, vt maior ad minorem habeat datam proportionem, & insuper contineat datum quemcunque numerum.* X.

Sit numerus 100. secandus in duas partes, quarum maior minoris sit tripla, & insuper contineat 20. vnitates. Ponatur 1℞. pro minore parte. Maior ergo erit 3℞ + 20. Summáque 4℞ + 20. æqualis esse debet 100. Ablatis 20. vtrinque, erit æqualitas inter 4℞. & 80. Diuisísque 80.

per 4. fiet 1 ℨ. 20. pro minore parte. qua dempta ex 100. reliqua erit maior pars, 80. quæ triplum numeri 20. continet, nimirum 60. & insuper 20.

Aliter. Posita 1 ℨ. pro minore parte, erit maior 100 — 1 ℨ. à qua si detrahantur 20. debet reliquus numerus 80 — 1 ℨ. triplus esse minoris 1 ℨ. hoc est, æquatio esse debet inter 3 ℨ. & 80 — 1 ℨ. Additáque 1 ℨ. vtrinque, ęqualitas erit inter 4 ℨ. & 80. Igitur vt supra, erit 1 ℨ. 20. minor pars, & maior 80.

XI. 11 *Duos numeros inuenire, quorum excessus datus sit, & proportio data.*

Sit datus excessus 20. & data proportio quintupla. Ponatur minor numerus 1 ℨ. Erit maior 5 ℨ. nimirum illius quintuplus. Excessus eorum est 4 ℨ. Est ergo æquatio inter 4 ℨ. & 20. Diuisisque 20. per 4. fiet 1 ℨ. 5. pro minore numero. Maior autem erit 25. qui ipsius 5. quintuplus est, eundémque excedit numero 20.

SINT rursus inueniendi duo numeri in proportione supertripartiente septimas, quorum excessus sit 21. Ponantur duo numeri 7 ℨ. 10 ℨ in proportione supertripartiente septimas. Horum differentia 3 ℨ æqualis esse debet numero 21. Diuisis ergo 21. per 3. fiet 1 ℨ 7. Igitur 7 ℨ. erunt 49. & 10 ℨ facient 70. Est autem differentia inter 70. & 49. datus numerus 21. habéntque proportionem supertripartientem septimas.

XII. 12 *Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt pars aliquota vnius data cum parte alia aliquota alterius data faciat datum quemuis numerum, qui positus sit inter partes nominatas dati numeri diuidendi.*

Sit numerus 100. diuidendus in duos, ita vt $\frac{1}{3}$. prioris cum $\frac{1}{5}$. posterioris efficiat 30. qui numerus positus est inter $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. dati numeri 100. nimirum inter 33 $\frac{1}{3}$. & 20. hoc est, minor est, quam 33 $\frac{1}{3}$. & maior, quam 20. Ponatur primus numerus 1 ℨ. ideóque secundus 100 — 1 ℨ. Tertia pars primi est $\frac{1}{3}$ ℨ. & quinta secundi 20 — $\frac{1}{5}$ ℨ: quæ partes simul conficiunt 20 — $\frac{2}{15}$ ℨ. quia vt addatur $\frac{1}{3}$ ℨ ad — $\frac{1}{5}$ ℨ. fit subtractio, propter diuisa signa. Eritque æquatio inter 20 + $\frac{2}{15}$ ℨ. & 30. Ablatisque 20. vtrinque, inter $\frac{2}{15}$ ℨ. & 10. Diuisis autem 10. per $\frac{2}{15}$. prouenit 1 ℨ. 75. pro primo numero: atque idcirco secundus erit 25. nimirum 100 — 1 ℨ. Constat autem, tertiam partem prioris, nimirum 25. cum quinta parte posterioris, hoc est, cum 5. efficere 30.

Aliter, vt vitentur fractiones. Ponatur tertia pars primi, 1 ℨ. ideóque totus primus 3 ℨ. Igitur $\frac{1}{5}$ secundi erit 30 — 1 ℨ. vt cum $\frac{1}{3}$. primi,

primi, id est, cum 1 ℨ. conficere possit 30. ideoque totus secundus erit 50 — 5 ℨ. qui cum primo, hoc est, cum 3 ℨ. facere debet 100. Fit autē ex ipsis 150 — 2 ℨ. Igitur æquatio erit inter 150 — 2 ℨ. & 100. Additisque vtrinque 2 ℨ. inter 150. & 100 + 2 ℨ. Ablatisq. 100. vtrinque inter 50. & 2 ℨ. Diuisis ergo 50. per 2. fiet 1 ℨ. 25. Et quia primus positus fuit 3 ℨ. erit primus 75. atque idcirco secundus 25. quemadmodum prius.

QVOD si quis posceret numerum 33 $\frac{1}{3}$. vel maiorem, aut 20. vel minorem, quem partes nominatæ efficere debeant, occurreret æquatio impossibilis, vt experiri poteris.

13 *Datum numerum in duos partiri, ita vt prioris pars aliquota data excedat aliam partem aliquotam posterioris datam numero quouis, qui minor sit parte aliquota totius numeri propositi, eiusdem nominis cum parte aliquota prioris numeri.* XIII.

Sit diuidendus numerus 100. in duos, ita vt prioris pars quinta excedat quartam partem posterioris, numero 11. qui minor est, quinta parte diuidendi numeri 100. Ponatur prior numerus 1 ℨ. ideoq. posterior 100 — 1 ℨ. Pars quinta prioris $\frac{1}{5}$ ℨ. excedere debet quartam partem posterioris, nimirum 25 — $\frac{1}{4}$ ℨ. numero 11. hoc est, æquatio esse debet inter $\frac{1}{5}$ ℨ. & 25 — $\frac{1}{4}$ ℨ + 11. Addita $\frac{1}{4}$ ℨ vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{9}{20}$ ℨ. & 25 + 11. siue 36. Diuisis ergo 36. per $\frac{9}{20}$. inuenietur 1 ℨ. 80. pro priore numero. Ergo posterior erit 20. Et $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 16. superat quartam partem posterioris, videlicet 5. numero 11.

Aliter sine fractionibus. Ponatur $\frac{1}{5}$. prioris numeri 1 ℨ. ideoque totus prior 5 ℨ. Posterioris ergo $\frac{1}{4}$. erit 1 ℨ — 11. vt 1 ℨ superet 1 ℨ — 11. numero 11. totusq. posterior numerus erit 4 ℨ — 44. Erit igitur æqualitas inter 9 ℨ — 44. & 100. quod ambo numeri 5 ℨ. & 4 ℨ — 44. efficere debeant 100. Additis ergo 44. vtrinque, fiet æquatio inter 9 ℨ. & 144. Diuisisq. 144. per 9. reperietur 1 ℨ. 16. Et quia prior numerus positus fuit 5 ℨ. erit numerus prior 80. ac proinde posterior 20. Et quinta pars prioris, nimirum 16. superat 5. quartam partem posterioris numero 11.

QVOD si excessus quintæ partis prioris numeri supra quartam posterioris proponeretur 20. nimirum $\frac{1}{5}$. numeri 100. diuidendi, vel maior, quam 20. res non succederet. quia incideremus in absurdum aliquod. Nam si excessus debeat esse 20. reperies numerum priorem esse 100. ideoque posteriorem 0. quod absurdum est, &c.

14 *Numerum inuenire, à quo si auferantur duo dati numeri: residuum minoris ad maioris residuum datam habeat proportionem.* XIV.

Sint à quæſito numero auferendi numeri 100.& 30. ita vt reſiduum minoris ad reſiduum maioris proportionem habeat triplam. Ponatur numerus quęſitus 1 ꝝ. Eruntq; reſidui 1 ꝝ—100.& 1 ꝝ—30. Debet ergo proportio eſſe tripla 1 ꝝ—30.ad 1 ꝝ—100. hoc eſt, æquatio debet eſſe inter 1 ꝝ—30.&3 ꝝ—300. Additis 30.vtrinq;,erit ęquatio inter 1 ꝝ.&3 ꝝ—270. Et rurſum additis 270.vtrinque,inter 1 ꝝ+270.& 3.ꝝ.& ablata 1 ꝝ.vtrinque, inter 270.& 2 ꝝ. Diuiſis ergo 270. per 2. emerget 1 ꝝ.135. numerus quæſitus. Nam ſi ſubtrahantur 100.& 30.reliqui fiunt 35.& 105. Ac 105.ad 35.triplam proportionem habent.

XV. 15 *Datis duobus numeris, alium inuenire, quo addito ad minorem, & detracto à maiore, ſumma ad reſiduum, vel reſiduum ad ſummam habeat proportionem datam minorem ea, quam numeri dati habent. Item quo addito ad maiorem, & detracto ex minore, ſumma ad reſiduum proportionem habeat datam maiorem ea, quæ inter datos numeros inuenitur.*

Sint dati duo numeri 20. & 100.inuenienduſque ſit primo numerus, quo adddito ad 20 & ſubtracto à 100. ſumma ad reſiduum habeat proportionem quadruplam,quæ minor eſt,quam quintupla,quam habent 100.ad 20.Ponatur ille numerus 1 ꝝ.eritque ſumma 1 ꝝ+20.& reſiduum 100—1 ꝝ.Vt igitur ſumma illa huius reſidui ſit quadrupla; erit æquatio inter 1 ꝝ+20.& 400—4 ꝝ.Et additis 4 ꝝ.vtrinque inter 5 ꝝ+20.& 400. Et ablatis 20.vtrinque,inter 5 ꝝ.& 380. Diuiſis igitur 380. per 5. fiet 1 ꝝ. 76.numerus quæſitus.qui additus ad 20.facit 96. & detractus ex 100.relinquit 24.Perſpicuum autem eſt, quadruplam proportionem eſſe 96. ad 24.

Sit deinde inueniendus numerus,quo addito ad 20.& ſubtracto à 100. reſiduum ad ſummam habeat proportionem quadruplam. Ponatur numerus ille 1 ꝝ.eritq. vt prius,ſumma 1 ꝝ+20. & reſiduum 100—1 ꝝ.Vt igitur reſiduum iſtud illius ſummæ ſit quadruplum, erit æquatio inter 4 ꝝ+80.& 100 1 ꝝ.& addita 1 ꝝ.vtrinque.inter 5 ꝝ+80.& 100. Et ablatis 80.vtrinque,inter 5 ꝝ.& 20.Diuiſis ergo 20.per 5.fiet 1 ꝝ.4. numerus quæſitus.Hic enim additus ad 20.facit 24.Et ablatus ex 100.relinquit 96. qui numerus numeri 24.quadruplus eſt.

Sit denique inueniendus numerus, quo addito ad 100.& dempto ex 20. ſumma illa ad hoc reſiduum proportionem habeat ſeptuplam, quæ maior eſt, quam quintupla inter 100. & 20. Ponatur ille numerus 1 ꝝ. Fietque ſumma 1 ꝝ+100. & reſiduum 20—1 ꝝ. Vt igitur ſumma illa ſit ſeptupla huius reſidui; erit æqualitas inter 1 ꝝ+100. & 140—7 ꝝ. Et additis 7 ꝝ. vtrinque, inter 8 ꝝ+100. & 140. Et ablatis 100. vtrinque, inter 8 ꝝ.& 40. Diuiſis igitur 40. per

per 8.fiet 1 ꝝ.5.numerus quæſitus.Hic enim additus ad 100.facit 105. detractus autem ex 20. relinquit 15. Habentque 105. ad 15. proportionem ſextuplam.

Si proportio data in vltimo exemplo eſſet quadrupla, minor videlicet proportione inter 100. & 20. incideremus in æquationem impoſſibilem. quod experiri licebit.

16 *Datis duobus numeris, alium inuenire, ad quem ſi adijciatur alter datorum, & ab eodem alter detrahatur; ſumma ad reſiduum proportionem habeat datam.* XVI.

Dati numeri ſint 100. & 20. inuenienduſq. primo ſit numerus, ad quem ſi addantur 100. & ab eodem tollantur 20. ſumma illa ſit reſidui huius tripla. Ponatur numerus ille 1 ꝝ. Fietque ſumma 1 ꝝ+100.& reſiduum 1 ꝝ—20. Vt igitur ſumma illa ſit huius reſidui tripla; erit æquatio inter 1 ꝝ+100. & 3 ꝝ—60. Et additis vtrinque 60. inter 1 ꝝ+160.& 3 ꝝ. Et ablata 1 ꝝ vtrinque,inter 160. & 2 ꝝ Diuiſis ergo 160. per 3. reperietur 1 ꝝ. 80. numerus quæſitus. Nam ſi ei addes 100. facies 180. & ſi demas 20. remanent 60. Eſtq. tripla proportio 180. ad 60.

Sit deinde inueniendus numerus, ad quem ſi addantur 20. & ab eodem deducantur 100. ſumma illa reſidui huius ſit tripla. Ponatur ille numerus 1 ꝝ. Fiet ſumma 1 ꝝ+20. & reſiduum 1 ꝝ—100. Vt ergo illa huius ſit tripla; erit æquatio inter 1 ꝝ+20. & 3 ꝝ—300. Et additis 300. vtrinque, inter 1 ꝝ+320 & 3 ꝝ. Et ablata 1 ꝝ vtrinque, inter 320. & 2 ꝝ. Diuiſis igitur 320. per 2. fiet 1 ꝝ. 160. numerus quæſitus. Nam ſi ei addes 20. conficies 180. & ſi demes 100. relinques 60. Eſtque inter 180. & 60. proportio tripla.

17 *Propoſitum numerum in duos diuidere bis, ita vt maior numerus primæ diuiſionis ad minorem ſecundæ diuiſionis habeat datam proportionem: Item maior ſecundæ diuiſionis ad minorem primæ diuiſionis, datam quoque habeat proportionem quamcunque.* XVII.

Propoſitus numerus 100. diuidendus ſit bis in duos numeros, ita vt maior primæ diuiſionis ad minorem ſecundæ diuiſionis habeat proportionem triplam; maior verò ſecundæ diuiſionis ad minorem primæ diuiſionis proportionem decuplam. Ponatur maior pars primæ diuiſionis 3 ꝝ. ideoque minor 100—3 ꝝ. Erit ergo minor pars ſecundæ diuiſionis 1 ꝝ. Eſt enim tripla proportio 3 ꝝ. ad 1 ꝝ. ideoque maior pars ſecundæ diuiſionis erit 100—1 ꝝ. Vt autem 100

— 1 ℞. habeant ad 100 — 3 ℞. proportionem decuplam, necesse est æquationem esse inter 100 — 1 ℞. & 1000 — 30 ℞. Igitur additis 30 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 100 + 29 ℞. & 1000. Ablatísq; 100. vtrinque, erit æqualitas inter 29 ℞. & 900. Diuisis igitur 900. per 29. deprehendetur 1 ℞. $31\frac{1}{29}$. Et quia maior pars primæ diuisionis posita fuit 3 ℞. erit ipsa pars maior $93\frac{3}{29}$. ac proinde minor $6\frac{26}{29}$. Rursus quia minor pars secundæ diuisionis posita fuit 1 ℞. erit ipsa pars minor $31\frac{1}{29}$. ideóque maior $68\frac{28}{29}$. Estque numerus $93\frac{3}{29}$. ad $31\frac{1}{29}$. triplus. Et $68\frac{28}{29}$. ad $6\frac{26}{29}$. decuplus.

$93\frac{3}{29}$	$31\frac{1}{29}$
$6\frac{26}{29}$	$68\frac{28}{29}$

XVIII. 18 *Datum numerum in duos diuidere ter, ita vt maior pars primæ diuisionis ad minorem secundæ datam habeat proportionem: Item maior secundæ diuisionis ad minorem tertiæ: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ.*

Datus numerus 100. sit ter diuidendus in duos, ita vt maior primæ diuisionis ad minorem secundæ proportionem habeat triplam: Maior autem secundæ diuisionis ad minorem tertiæ, proportionem duplam: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ, proportionem quadruplam. Ponatur maior pars primæ diuisionis 3 ℞. ideóque minor 100 — 3 ℞. Erit ergo minor pars secundæ diuisionis 1 ℞. quippe cum tripla sit proportio 3 ℞. ad 1 ℞, ideóque maior pars secundæ diuisionis erit 100 — 1 ℞. quæ vt dupla sit minoris partis diuisionis tertiæ, erit minor pars tertiæ diuisionis 50 — $\frac{1}{2}$ ℞, atque idcirco maior 50 + $\frac{1}{2}$ ℞. Vt autem 50 + $\frac{1}{2}$ ℞. ad 100 — 3 ℞. minorem partem primæ diuisionis proportionem habeat quadruplam, erit æquatio inter 50 + $\frac{1}{2}$ ℞ & 400 — 12 ℞. Additísque 12 ℞. vtrinque, æqualitas erit inter 50 + 12 $\frac{1}{2}$ ℞. & 400. Et ablatis vtrinque 50. inter 12 $\frac{1}{2}$ ℞. & 350. Diuisis igitur 350. per 12 $\frac{1}{2}$. fiet 1 ℞. 28. Maior ergo pars primæ diuisionis, quæ fuit posita 3 ℞. erit 84. & minor 16. At minor pars secundæ diuisionis, quam posuimus 1 ℞. erit 28. ac maior 72. Denique minor pars tertiæ diuisionis, quæ posita est 50 — $\frac{1}{2}$ ℞. erit 36. & maior 64. qui numeri satisfaciunt ænigmati proposito, quod experiri poteris.

3 ℞	1 ℞	50 + $\frac{1}{2}$ ℞
100 — 3 ℞	100 — 1 ℞	50 — $\frac{1}{2}$ ℞

84	28	64
16	72	36

XIX. 19 *Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati procreent numerum in data proportione ad eorum summam.*

Sit productus ex multiplicatione ad summam triplus. Ponatur vnus numerus 1 ℞. alter verò quicunque numerus maior denominatore proportionis, V. g. 20. maior quam 3. Alias res non succedet. Ex 1 ℞. in 20. fiunt 20 ℞. Et summa ex 1 ℞ & 20. collecta est 1 ℞ + 20. Vt ergo ille productus ad hanc summam habeat proportionem triplam, erit æquatio inter 20 ℞. & 3 ℞ + 60. Et ablatis 3 ℞. vtrinque, inter 17 ℞. & 60. Diuisis ergo 60. per 17. fiet 1 ℞. $3\frac{9}{17}$. Sunt ergo duo numeri quæsiti $3\frac{9}{17}$. & 20. Ex ductu vnius in alium fit numerus $70\frac{10}{17}$. qui triplus est ad $23\frac{9}{17}$. eorum summam.

Si vnus numerus ponatur 1 ℞. & alter 4. maior videlicet, quam 3. denominator proportionis triplæ, inuenientur duo numeri 12. & 4. Nam ex 1 ℞. in 4. fit numerus 4 ℞ triplus summæ 1 ℞ + 4. Ergo æquatio erit inter 4 ℞ & 3 ℞ + 12. Ablatisque 3 ℞ vtrinque, inter 1 ℞. & 12. ac proinde 1 ℞ erit 12. vnus numerus, alter autem erit 4. vt posuimus.

20 *Dato numero quolibet, inuenire alium, ita vt ex hoc in illum procreetur numerus in data proportione ad eorum summam: ita tamen, vt denominator proportionis dato numero minor sit.* XX.

Dato numero 20. inueniendus sit alius, qui in illum ductus producat numerum triplum ad summam ex ipsis collectam: cuius proportionis denominator 3. minor est dato numero 20. Alias res non succedet. Non differt hoc ænigma à præcedenti. Nam si numerus quæsitus ponatur 1 ℞. & alter numerus, 20. qui datus est, inuenietur numerus, vt ibi, qui in 20. ductus producat numerum triplum ad summam, &c.

21 *Inuenire duos numeros in data proportione, qui inter se multiplicati faciant numerum in data proportione ad eorum summam.* XXI.

Hoc ænigma à 19. non differt, nisi quod hic datur proportio, quam inuenti numeri habere debent.

Sint ergo inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, vt inter se multiplicati faciant numerum duodecuplum summæ eorum. Ponantur duo numeri 4 ℞. & 6 ℞. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fiunt 24 ʒ. eorumque summa est 10 ℞. Vt ergo 24 ʒ. ad 10 ℞. proportionem habeant duodecuplam; erit æquatio inter 24 ʒ.& 120 ♃.Diuisis ergo 120.per 24.proueniet 1 ♃ 5.quia denominationes Cossicæ ʒ.& ♃. collaterales sunt. Cum ergo primus numerus positus sit 4 ♃ & secundus 6 ♃. erit primus 20.& secundus 30. qui multiplicati inter se faciunt 600. qui numerus duodecuplus est eorum summæ 50.

Si proportio inter numerũ ex multiplicatione factum ad summam debeat esse sesquiquinta. Positis numeris 4 ♃ & 6 ♃ in proportione sesquialtera. Vt numerus 24 ʒ.ex multiplicatione factus ad summam 10 ♃ proportionẽ habeat sesquiquintam: erit æquatio inter 24 ʒ.& 12 ♃ quia 12 ♃ ad 10 ♃ habent etiam proportionem sesquiquintam: qui quidem numerus 12.procreatus est ex 1 $\frac{1}{5}$.denominatore proportionis sesquiquintæ in 10. Diuisis igitur 12.per 24.fiet 1 ♃ $\frac{1}{2}$. atque adeo cum numeri positi sint 4 ♃ & 6 ♃.erunt duo numeri quæsiti 2. & 3.qui multiplicati inter se faciunt 6.numerum ad eorum summam 5.sesquiquintum.

XXII. 22 *Inuenire duos numeros, quorum summa sit datus quilibet numerus, & posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit datus etiam numerus quiuis.*

VEL

Datum numerum in duos partiri, vt posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit quilibet numerus datus.

Sit summa quæsitorum numerorum 100.& Quotiens 10.Sit primum prior numerus 1 ♃,atque idcirco posterior 100 — 1 ♃. Hoc diuiso per 1 ♃.fit Quotiens $\frac{100-1 ♃}{1 ♃}$.æqualis 10.Hæc ęquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 100— 1 ♃.& 10 ♃. Addita 1 ♃ vtrinque,erit æquatio inter 100.& 11 ♃. Diuisis autem 100. per 11.fit 1 ♃ $\frac{100}{11}$. hoc est, 9 $\frac{1}{11}$ prior numerus. Ergo posterior erit 90 $\frac{10}{11}$ siue $\frac{1000}{11}$. Constat autem si 90 $\frac{10}{11}$ per 9 $\frac{1}{11}$ siue $\frac{1000}{11}$ per $\frac{100}{11}$ diuidantur, Quotientem gigni 10.

Sit deinde posterior numerus 1 ♃.ideoque prior 100—1 ♃.Illo per hũc diuiso,fit Quotiens $\frac{1 ♃}{100-1 ♃}$.æqualis 10. Quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1 ♃.& 1000+10 ♃.Et additis 10 ♃ vtrinque,erit æqualitas inter 11 ♃. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11.fiet Quotiens $\frac{1000}{11}$ siue 90 $\frac{10}{11}$.posterior numerus, priorque erit 9 $\frac{1}{11}$.siue $\frac{100}{11}$. vt prius.

IAM si numerus datus 100.secandus sit in duos,vt posteriore per priorem diuiso,Quotiẽs sit 10. soluetur quæstio eodem modo ponendo 1 ♃. pro priore,vel posteriore,& pro altero 100—1 ♃.vt liquet.

DENIQVE sit diuidendus numerus 100. in duas partes, vt posteriore per priorem diuisa, Quotiens sit $\frac{1}{2}$. Ponatur prior pars 1 ♃ & posterior 100 — 1 ♃. Hac diuisa per 1 ♃, fit Quotiens $\frac{100-1 ♃}{1 ♃}$ æqualis $\frac{1}{2}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad

ad hanc inter 1 ♃,& 200 — 2 ♃.Additisque 2 ♃ vtrobique, erit æqualitas inter 3 ♃,& 200.Diuisis ergo 200.per 3 fiet 1 ♃ $\frac{200}{3}$. siue 66 $\frac{2}{3}$. pro priore parte.Posterior autem erit 33 $\frac{1}{3}$.siue $\frac{100}{3}$. Diuisis autem $\frac{100}{3}$. per $\frac{200}{3}$. fit Quotiens $\frac{1}{2}$. vt constat.

23 *DATVM numerum in quinque partes secare,vt secunda primam contineat quotiescunque libuerit, & præterea quotlibet vnitates.Tertia secundam quotiescunque etiam libuerit,ac præterea quotuis vnitates: Quarta tertiæ sit multiplex data,minus quotuis vnitatibus: Ac tandem quinta à multiplici data quartæ deficiat quotlibet etiam vnitatibus:quando id fieri potest.* XXIII.

DATVS numerus sit 100.secandus in quinque partes, ita vt secunda primam contineat bis,& præterea 2. Tertia secundam ter,ac præterea 3.Quarta tertiæ sit dupla minus 4.Ac tandem quinta à dupla quartæ deficiat 13.vnitatibus.Ponatur prima pars 1 ♃.Eritq.secunda 2 ♃+2.Tertia 6 ♃ + 9.Quarta 12.♃ + 14.Et quinta 24 ♃ + 15. Summa omnium partium est 45 ♃+ 40. quæ æqualis debet esse dato numero 100. Ablatis 40.vtrinque,erit æquatio inter 45 ♃.& 60.Diuisisq. 60.per 45. fiet 1 ♃. 1 $\frac{1}{3}$.prima pars.Ergo omnes quinque erunt 1 $\frac{1}{3}$. 4 $\frac{2}{3}$.17.30.47.

Si numerus 100.secandus esset in quinque partes,vt secunda primam contineret ter,& præterea 4.Tertia secundam bis,& præterea 3. Quarta esset quintupla tertiæ,minus 6.Quinta denique esset quadrupla quartæ, minus 5.quæstio foret impossibilis.Nam posita prima parte 1 ♃ esset secunda 3 ♃ + 4.Tertia 6 ♃ + 11.Quarta 30 ♃ + 49.& quinta 120 ♃ + 191. quæ omnes partes faciunt 160 ♃+255. quæ summa æqualis deberet esse dato numero 100.totum parti,quod est absurdum. Propterea diximus in ænigmate[quando id fieri potest.]

24 *Datis duobus numeris,alium inuenire,qui cum minore numerum faciat æqualem ei,quem pars aliquota quæcunque inuenti numeri cum maiore efficit.* XXIV.

Sint dati duo numeri 20. & 30. inueniendusque sit alius, qui cum 20. summam faciat æqualem summæ ex 30. & sexta parte inuenti numeri collectæ. Ponatur numerus quæsitus 6 ♃. (Pono hunc numerum, vt habeat nominatam partem sine fractione. quod tamen opus non est.) Ergo 6 ♃ + 20. æquales sunt 1 ♃ + 30. Ablata 1 ♃ vtrinque, erit æquatio inter 5 ♃ + 20. & 30. Ablatisque rursum 20. vtrinque, inter 5 ♃ & 10. Diuisis ergo 10. per 5. fiet 1 ♃ 2. Igitur

6 ♃ facient 12. numerum quæſitum. Hic enim cum 20. facit 32. & eius $\frac{1}{6}$. nimirum 2. cum 30. facit etiam 32.

XXV. 25 *Inuenire duos numeros in data proportione, vt tantum fiat, minore detracto ex maiore, quantum maiore diuiſo per minorem.*

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1 ♃. & 10 ♃. Detracto minore 1 ♃. ex maiore 10 ♃. ſuperſunt 9 ♃. Et diuiſo maiore 10 ♃ per minorem 1 ♃. fit Quotiens 10. Eſt ergo æquatio inter 9 ♃ & 10. Et diuiſis 10. per 9. fit 1 ♃. 1 $\frac{1}{9}$. ſiue $\frac{10}{9}$. primus numerus. Alter ergo erit $\frac{100}{9}$. ſiue 11 $\frac{1}{9}$. Nam ſi demantur 1 $\frac{1}{9}$. ex 11 $\frac{1}{9}$. remanent 10. Et diuiſis 11 $\frac{1}{9}$. per 1 $\frac{1}{9}$. hoc eſt, $\frac{100}{9}$. per $\frac{10}{9}$. fit Quotiens etiam 10.

XXVI. 26 *Inuenire duos numeros in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero ex eorum multiplicatione inter ſe producto.*

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1 ♃. & 10 ♃. Summa eorum eſt 11 ♃. Et ex vno in alterum fit numerus 10 ʒ. Eritque æqualitas inter 11 ♃. & 10 ʒ. Diuiſis ergo 11. per 10. fiet 1 ♃. 1 $\frac{1}{10}$. primus numerus: propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt. Alter ergo erit 11. Tam enim ſumma eorum, quam numerus ex vno in alterum productus eſt 12 $\frac{1}{10}$.

XXVII. 27 *Duos numeros inuenire in dato exceſſu, ita vt eorum quadrati datum etiam habeant exceſſum, qui tamen maior ſit quadrato dati exceſſus numerorum.*

Sint inueniendi duo numeri, quorũ exceſſus 4. quadratorum verò exceſſus 144. qui maior eſt, quam 16. quadratus exceſſus 4. numerorũ dati. Ponatur minor numerus 1 ♃. ideoq. maior 1 ♃ + 4. quorum exceſſus 4. Quadrati ſunt 1 ʒ. & 1 ʒ + 8 ♃ + 16. Exceſſus eorũ 8 ♃ + 16. qui æqualis debet eſſe numero 144. Ablatis 16. vtrinque, erit æquatio inter 8 ♃. & 128. Diuiſis ergo 128. per 8. erit 1 ♃. 16. minor numerus. Maior ergo erit 20. vt exceſſus ſit 4. Quadrati ſunt 256. & 400. quorum exceſſus 144.

Si datus exceſſus numerorum ſit 1. & quadratorum 31. inuenientur numeri 15. & 16. nimirum duo numeri proximi conficientes datum exceſſum quadratorum. Atque ita, quotieſcunque exceſſus numerorum datur 1. & quadratorum numerus quiuis impar, erunt duo numeri quæſiti, duo proximi conficientes datum exceſſum quadratorum.

Quan-

Quando exceſſus numerorum eſt 5. & quadratorum 30. reperies numeros $\frac{1}{2}$. & 5 $\frac{1}{2}$.

Si numerorum exceſſus ſit 10. & quadratorum 200. inuenies numeros 5. & 15.

Si exceſſus detur 2. inter numeros, & inter quadratos 22. erunt numeri quæſiti 4 $\frac{1}{2}$. & 6 $\frac{1}{2}$.

SCHOLIVM.

HOC problema ſine Algebra ſolui etiam poteſt (quod quidem percommodum interdum erit in numeris Coßicis) hoc modo. Exceſſus datus quadratorum diuidatur per duplum exceſſus dati numerorum. Nam ſi ex Quotiente dematur ſemißis dati exceſſus numerorum, reliquus fiet minor numerus, qui ad datum exceſſum numerorum adiectus faciet numerum maiorem.

Sint enim inueniendi duo numeri, quorum exceſſus 6. & quadratorum exceſſus 1 ♃. Diuidatur 1 ♃. per 12. duplum ſcilicet numerum exceſſus 6. dati numerorum. Et ex Quotiente $\frac{1}{12}$ ♃. dematur numerus 3. ſemißis eiuſdem exceſſus 6. numerorum. Nam reliquus numerus $\frac{1}{12}$ ♃ − 3. erit minor numerus quæſitus: ad quem ſi adiicies datum exceßum 6. facies $\frac{1}{12}$ ♃ + 3. maiorem numerum. Exceſſus enim horum duorum numerorum eſt 6. Et quadrati eorundem ſunt $\frac{1}{144}$ ʒ $\frac{1}{2}$ ♃ + 9. & $\frac{1}{144}$ ʒ + $\frac{1}{2}$ ♃ + 9. quorum exceſſus eſt 1 ♃.

28 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, quorum maior ad minorem datorum additus, tantum faciat, quantum minor ad maiorem adiectus.* XXVIII

Sint dati numeri 9. & 30. inueniendíque duo numeri in proportione quadrupla, &c. Ponatur minor 1 ♃. ideóque maior 4 ♃. Erit igitur æquatio inter 4 ♃ + 9. & 1 ♃ + 30. Ablata 1 ♃. vtrinque, erit æquatio inter 3 ♃ + 9. & 30. Et ablatis 9. vtrinque, inter 3 ♃. & 21. Diuiſis ergo 21. per 3. fiet 1 ♃ 7. minor numerus. Maior ergo erit 28. Et tam ex 28. & 9. quam ex 7. & 30. fiunt 37.

29 *Dato numero, alium inuenire, qui in datum ductus tantum faciat, quantum ad eundem additus.* XXIX.

Datus numerus ſit 30. Pone quæſitum eſſe 1 ♃. qui ductus in 30. facit 30 ♃. additus verò ad 30. facit 1 ♃ + 30. Eritque æquatio inter 30 ♃. & 1 ♃ + 30. Ablata vtrinque 1 ♃. erit æquatio inter 29 ♃. & 30. Diuiſis autem 30. per 29. erit 1 ♃. $\frac{30}{29}$. ſiue 1 $\frac{1}{29}$. Additis enim $1\frac{1}{29}$. ad 30. fiunt $31\frac{1}{29}$. quantum nimirum fit ex $1\frac{1}{29}$. in 30.

XXX. 30 *Dato numero, alium inuenire, vt eius pars aliquota data in datum numerum ducta tantum faciat, quantum totus numerus inuentus ad eundem datum numerum additus.*

Sit datus numerus 60. & data pars aliquota numeri inueniendi $\frac{1}{3}$. Ponatur $\frac{1}{3}$. numeri inueniendi 1 ℞. ac proinde totus numerus 3 ℞. Ex 1 ℞, id eſt, ex $\frac{1}{3}$. numeri quæſiti in 60. fit numerus 60 ℞. At ex 3 ℞. toto ſcilicet numero quæſito, & 60. ſit numerus 3 ℞ + 60. Erítque æquatio inter 60 ℞. & 3 ℞ + 60. Ablatíſque 3 ℞. vtrinque, inter 57 ℞. & 60. Diuiſis ergo 60. per 57. fiet 1 ℞. $1\frac{1}{19}$. tertia pars numeri quæſiti, ac proinde numerus quæſitus $3\frac{3}{19}$. Nam ex $1\frac{1}{19}$. id eſt, ex $\frac{1}{3}$. numeri inuenti, in 60. fit numerus $63\frac{3}{19}$. æqualis ſummæ ex $3\frac{3}{19}$. & 60. collectæ.

XXXI. 31 *Datum numerum in duos partiri, ita vt minor ſit maioris pars aliquota data, vel partes aliquotæ datæ, & contineat inſuper datum alium numerum, ſi placet.*

Sit datus numerus 40. diſtribuendus primùm in duos, vt minor ſit $\frac{1}{7}$. maioris. Ponatur minor 1 ℞. erítque maior 7 ℞. qui æquales eſſe debent numero dato 40. Eſt igitur æquatio inter 8 ℞ & 40. Diuiſiſque 40. per 8. prodibit 1 ℞. 5. minor numerus. maior ergo erit 35. nimirum 7 ℞. Et manifeſtum eſt, 5. eſſe ſeptimam partem numeri 35.

Sit deinde idem numerus 40. ſecandus in duos, vt minor conſtituat $\frac{3}{7}$. maioris. Ponatur minor 3 ℞. ideóque maior 7 ℞. vt ille huius $\frac{3}{7}$ contineat. Summa amborum eſt 10 ℞. æqualis dato numero 40. Diuiſis ergo 40. per 10. reperietur 1 ℞. 4. ac proinde cùm minor numerus poſitus ſit 3 ℞. & maior 7 ℞. erit minor 12. & maior 28. continétque ille $\frac{3}{7}$. huius.

SI datus numerus 84. ſecandus ſit in duos, vt minor maioris contineat $\frac{3}{4}$. & præterea 7. vnitates. ponemus maiorem eſſe 4 ℞. vt continere poſſit $\frac{3}{4}$. ſine fractione. Erítque minor 3 ℞ + 7. Amborum ſumma eſt 7 ℞ + 7. æqualis dato numero 84. Ablatis 7. vtrinque, erit æquatio inter 7 ℞. & 77. Diuiſiſque 77. per 7. exibit 1 ℞. 11. Cùm igitur maiorem poſuerimus 4 ℞. & minorem 3 ℞ + 7. erit maior 44. & minor 40. continétque hic $\frac{3}{4}$. illius, nimirum 33. ac præterea 7.

XXXII. 32 *Duos numeros inuenire, ita vt ſi numerus productus ex*

ex eorum multiplicatione diuidatur per eorundem differentiam, Quotiens fiat datus quicunque numerus.

Inueniendi ſint duo numeri, ita vt numerus ex eorum multiplicatione productus ſi diuidatur per eorum differentiam, Quotientem faciat 30. Ponatur pro minore quilibet numerus minor dato Quotiente 30. nimirum 20. & maior ponatur 20 + 1 ℞. vt differentia eorum ſit 1 ℞. Ex 20. in 20 + 1 ℞. fit numerus 400 + 20 ℞. quo diuiſo per 1 ℞. eorum differentiam, fit Quotiens $\frac{400+20\,℞}{1\,℞}$. æqualis propoſito numero 30. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æqualitatem inter 30 ℞. & 400 + 20 ℞. Ablatis ergo 20. ℞ vtrobique, æquatio erit inter 10 ℞. & 400. Diuiſiſque 400. per 10. fiet 1 ℞. 40. pro differentia numerorum, qui quæruntur. Cum ergo minor ſit 20. erit maior 60. nimirum 20 + 1 ℞. Iam verò ex 20. in 60. fit numerus 1200. quo diuiſo per 40. differentiam numerorum, fit Quotiens 30.

33 *Numerum inuenire, cuius duarum partium datarum quadrati ſummam conficiant, quæ ad aliam partem datam eiuſdem numeri inueniendi proportionem habeat datam quamcunque.* XXXIII

Sit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{6}$. quadratos efficiant, quorum ſumma partis $\frac{1}{4}$. eiuſdem numeri tripla ſit. Ponatur numerus quæſitus 1 ℞. Partes datæ ſunt $\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{6}$ ℞. quarum quadrati $\frac{1}{4}$ ʒ. & $\frac{1}{36}$ ʒ. ſummam conficiunt $\frac{10}{36}$ ʒ. triplam ad $\frac{1}{4}$ ℞. hoc eſt, æqualem $\frac{3}{4}$ ℞. Diuiſis ergo $\frac{3}{4}$. per $\frac{10}{36}$. fiet 1 ℞ $\frac{108}{40}$. id eſt, $\frac{27}{10}$. numerus quæſitus (propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt.) Huius enim $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{6}$ ſunt $\frac{27}{20}$. & $\frac{27}{60}$. quarum quadrati $\frac{729}{400}$. & $\frac{729}{3600}$. faciunt ſummam $\frac{7290}{3600}$. quæ tripla eſt ad $\frac{27}{40}$. hoc eſt, ad $\frac{1}{4}$. inuenti numeri $\frac{27}{10}$.

34 *Numerum inuenire, qui in ſe ductus, & productus numerus in datum quemuis numerum faciat numerum in data proportione ad cubum ex inuento numero procreatum.* XXXIV

Sit datus numerus 20. inueniendúſque ſit alius, qui primum in ſe, deinde productus numerus in datum 20. gignat numerum quintuplum cubi ex inuento numero procreati. Ponatur numerus quæſitus 1 ℞. Ex 1 ℞ in ſe fit 1 ʒ. Et ex 1 ʒ. in 20. fit numerus 20 ʒ. Cubus autem 1 ℞. eſt 1 ce. ad quem 20 ʒ. habere debent quintuplam proportionem. Igitur æquatio eſt inter 20 ʒ. & 5 ce. Diuiſis ergo 20. per 5. fiet 1 ℞. 4. numerus queſitus: quia numeri Coſſici ſunt collaterales. Hic enim numerus 4. ductus in ſe facit 16. Et ex 16. in 20. fit numerus 320. qui quintuplus eſt numeri 64. nimirum cubi ex inuento numero 4. procreati.

XXXV. 35 *Datum numerum in duos diuidere, vt alteruter eorum ductus in alium datum numerum excedat dato numero quolibet numerum productum ex altero numero in quemuis alium datum numerum.*

Datus numerus 10. ſecandus ſit primum in duos, vt productus numerus ex primo in 4. ſuperet numerum productum ex ſecundo in 6. vnitate. Ponatur prima pars 1 ℞. ideóque ſecunda 10 − 1 ℞. Ex 1 ℞ in 4. fiunt 4 ℞. Et ex 10 − 1 ℞ in 6. fiunt 60 − 6 ℞. Debétque hunc productum numerus 4 ℞ excedere Vnitate. Ac propterea æquatio erit inter 4 ℞. & 61 − 6 ℞. Additíſque 6 ℞ vtrinque, inter 10 ℞ & 61. Diuiſis igitur 61. per 10. fiet 1 ℞. $6\frac{1}{10}$. primus numerus. Secundus ergo erit $3\frac{9}{10}$. Ex primo in 4. fiunt $24\frac{4}{10}$. Et ex ſecundo in 6. fiunt $18\frac{54}{10}$. hoc eſt, $23\frac{4}{10}$. qui numerus vnitate ſuperatur à $24\frac{4}{10}$.

Sit deinde idem numerus datus 10. ſecandus in duas partes, vt ſecunda pars ducta in 4. procreet numerum, qui vnitate ſuperet productum ex prima parte in 6. Ponatur rurſum prima pars 1 ℞. & ſecunda 10 − 1 ℞ Ex 10 − 1 ℞ in 4. fit numerus 40 − 4 ℞. Et ex 1 ℞ in 6. fiunt 6 ℞. Hunc numerum ille productus ſuperare debet Vnitate. Igitur æquatio erit inter 40 − 4 ℞. & 6 ℞ + 1. Ablatáque Vnitate vtrinque, inter 39 − 4 ℞. & 6 ℞. Additíſque 4 ℞ vtrinque, inter 39. & 10 ℞. Diuiſis ergo 39. per 10. fiet 1 ℞. $3\frac{9}{10}$. primus numerus. Secundus igitur erit $6\frac{1}{10}$. Ex $6\frac{1}{10}$. in 4. fit numerus $24\frac{4}{10}$. Et ex $3\frac{9}{10}$. in 6. fiunt $18\frac{54}{10}$. ſiue $23\frac{4}{10}$. Manifeſtum autem eſt, numerum $24\frac{4}{10}$. vnitate ſuperare numerum $23\frac{4}{10}$.

Qvod ſi exceſſus debeat eſſe 20. inter productos numeros: Ponatur primus numerus 1 ℞. & ſecundus 10 − 1 ℞. Ex 1 ℞ in 4. fit numerus 4 ℞. & ex 10 − 1 ℞ in 6. fit numerus 60 − 6 ℞. quem primum ille ſuperare debeat numero 20. Erit igitur æquatio inter 4 ℞. & 80 − 6 ℞. Additíſque 6 ℞ vtrinque, inter 10 ℞. & 80. Diuiſis ergo 80. per 10. fiet 1 ℞. 8. primus numerus. Secundus ergo erit 2. Perſpicuum autem eſt, numerum 32. qui fit ex primo 8. in 4 ſuperare numerum 12. qui fit ex ſecundo 2. in 6. numero 20.

Sed iam numerus 40 − 4 ℞. factus ex ſecundo 10 − 1 ℞. in 4. ſuperare debeat numero 20. numerum 6 ℞. factum ex primo 1 ℞. in 6. Erit ergo æquatio inter 40 − 4 ℞. & 6 ℞ + 20. Additíſque 4 ℞ vtrinque, inter 40. & 10 ℞ + 20. Ablatíſque vtrinque 20. inter 20. & 10 ℞. Diuiſis igitur 20. per 10. fiet 1. ℞ 2. primus numerus. Secundus ergo erit 8. Et certum eſt, numerum 32. ex ſecundo 8. in 4. factum, ſuperare numerum 12. factum ex primo 2. in 6. numero 20.

36 *Da-*

36 *Datum numerum partiri in duas partes, quæ cum ipſo progreſſionem Arithmeticam conſtituant.* XXXVI.

Datus numerus 20. diuidendus ſit in duos, qui cum eodem numero 20. conſtituant tres numeros Arithmeticè proportionales. Sit minor pars 1 ℞. & maior 20 − 1 ℞. Vt igitur 1 ℞ 20 − 1 ℞. 20. ſint Arithmeticè proportionales, erit idem exceſſus inter 1 ℞. & 20 − 1 ℞. qui inter 20 − 1 ℞. & 20. Sunt autem exceſſus 20 − 2 ℞. & 1 ℞. vt in hiſce formulis ſubtractionum patet. Ergo æquatio erit inter 20 − 2 ℞. & 1 ℞. Et additis 2 ℞ vtrinque, inter 20. & 3 ℞. Diuiſis ergo 20. per 3. fiet 1 ℞. $6\frac{2}{3}$. prima pars. Altera ergo erit $13\frac{1}{3}$. Conſtituuntq. $6\frac{2}{3}$. $13\frac{1}{3}$. & 20. progreſſionem Arithmeticam, cum eundem exceſſum habeant $6\frac{2}{3}$.

20 − 1 ℞	20 + 0
+ 1 ℞	20 − 1 ℞
20 − 2 ℞	0 + 1 ℞

Aliter. Si 1 ℞. 20 − 1 ℞. 20 ſunt Arithmeticè proportionales, erit (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmeticè proportionalium diximus) ſumma primi & tertij, nimirum 1 ℞ + 20. æqualis duplo medij, nimirum 40 − 2 ℞. Additis ergo 2 ℞ vtrinque, exiſtet æquatio inter 3 ℞ + 20. & 40. Ablatiſq. 20. vtrinque, inter 3 ℞. & 20. Ergo rurſus 1 ℞ erit $6\frac{2}{3}$. vt prius.

37 *Inuenire duos numeros, qui inter ſe multiplicati faciant numerum, qui ad minorem habeat datam proportionem, & ad maiorem quoque proportionem datam, ſed illa minorem.* XXXVII

Proportio producti ad minorem ſit decupla, & ad maiorem ſeſquialtera. Ponatur productus 30 ℞. (Numerus enim 30 ℞ ad 3 ℞. habet proportionem decuplam, & ad 20 ℞. ſeſquialteram.) Erit minor numerus 3 ℞. & maior 20 ℞. qui inter ſe multiplicati debent facere 30 ℞. Faciunt autem 60 ʒ. Eſt ergo æquatio inter 30 ℞. & 60 ʒ. Diuiſiſq. 30. per 60. exibit 1 ℞ $\frac{1}{2}$. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Ergo minor numerus, quem poſuimus 3 ℞. erit $1\frac{1}{2}$. Maior autem qui poſitus eſt 20 ℞. erit 10. Atque ex $1\frac{1}{2}$. hoc eſt, ex $\frac{3}{2}$. in 10. fit numerus $\frac{30}{2}$. ſiue 15. qui ad $1\frac{1}{2}$. vel ad $\frac{3}{2}$. habet proportionem decuplam, & ad 10. ſeſquialteram.

38 *Datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales diuidere, quarum differentia data ſit: quando id fieri poteſt.* XXXVIII

Datus numerus 120. diuidendus ſit in ſex partes, quæ ordine ſeſe excedant binario. Ponatur prima pars 1 ℞. Erit ſecunda 1 ℞ + 2. Tertia 1 ℞ + 4. Quarta 1 ℞ + 6. Quinta 1 ℞ + 8. & ſexta 1 ℞ + 10. quæ omnes ſimul faciunt ſummam 6 ℞ + 30. æqualem dato numero 120. Ablatis ergo 30. vtrinque, erit æquatio inter 6 ℞. & 90. Diuiſiſque 90. per 6. fiet 1 ℞. 15. prima pars. Sunt ergo ſex partes, 15. 17. 19. 21. 23. 25. quæ binario ſe excedunt, & ſummam faciunt 120.

DEBET autem datus númerus maior eſſe ſumma terminorum totidem Arithmeticæ progreſſionis, vno minus, in quot partes datus numerus iubetur diſtribui; quæ quidem à dato exceſſu incipiat. Vt in dato exemplo, maior quàm ſumma 30. quinque terminorum 2. 4. 6. 8. 10. Alias res non ſuccedet, quia incideremus in æquationem inter duos numeros omnino inæquales. Atque idcirco diximus in ænigmate, [quando id fieri poteſt.]

XXXIX 39 *Datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales partiri, quarum prima data ſit: quando id fieri poteſt.*

Sit datus numerus 60. diuidendus in 11. partes Arithmeticam progreſſionem conſtituentes, cuius primus terminus ſit 5. Pone differentiam progreſſionis 1 ℞. Erunt ergo 11 termini hi. 5. 5 + 1 ℞. 5 + 2 ℞. 5 + 3 ℞. 5 + 4 ℞. 5 + 5 ℞. 5 + 6 ℞. 5 + 7 ℞. 5 + 8 ℞. 5 + 9 ℞. 5 + 10 ℞. quorum ſumma 55 ℞ + 55. æqualis eſſe debet dato numero 60. Ablatis ergo vtrinque 55. erit æquatio inter 55 ℞. & 5. Diuiſiſque 5. per 55. fiet 1 ℞. $\frac{1}{11}$. differentia progreſſionis. Erunt ergo 11. partes quæſitæ hæ. 5. $5\frac{1}{11}$. $5\frac{2}{11}$. $5\frac{3}{11}$. $5\frac{4}{11}$. $5\frac{5}{11}$. $5\frac{6}{11}$. $5\frac{7}{11}$. $5\frac{8}{11}$. $5\frac{9}{11}$. $5\frac{10}{11}$. quæ omnes ſimul faciunt 60.

DEBET autem datus numerus maior eſſe numero, qui fit ex numero terminorum in primum terminum datum. Vt in dato exemplo maior, quam 55. qui numerus fit ex numero terminorum, videlicet ex 11. in primum terminum 5. Hanc ob cauſam dictum eſt in ænigmate, [quando id fieri poteſt.]

XL. 40 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt productus ex maiore horum in maiorem illorum faciat numerum, qui dato quolibet numero ſuperet productum ex minore in minorem.*

Dati numeri ſint 5. & 9. oporteatque inuenire duos alios in proportione tripla, quorum maior ductus in 9. faciat numerum, qui ſuperet productum ex minore in 5. numero 110. Ponatur minor 1 ℞. ideoque maior 3 ℞. Ex 3 ℞. in 9. fiunt 27 ℞. Et ex 1 ℞. in 5. fiunt 5 ℞. Superat autem numerus 27 ℞. numerum 5 ℞. numero 22 ℞. qui

qui æqualis debet eſſe numero 110. Diuiſis ergo 110. per 22. fiet 1 ℞ 5. primus numerus: ideóque maior erit 15. Ex 15. in 9. fit numerus 135. qui ſuperat 25. numerum ex 5. in 5. factum numero 110.

41 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt productus ex maiore horum in minorem illorum ſuperet dato numero eum, qui ex minore in maiorem fit. Vel certè hic productus illum dato numero excedat.* XLI.

Sint dati numeri 5. & 9. oporteátque duos alios inuenire in dupla proportione, quorum maior ductus in 5. producat numerum, qui 10. vnitatibus ſuperet productum ex minore in 9. Ponatur minor 1 ℞, ac propterea maior 2 ℞. (Debet autem hic maior in minorem datum producere numerum maiorem eo, qui ex minore in datum maiorem fit, vt nimirum ille hunc ſuperare poſſit. Vnde ſi dati numeri forent 2. & 9. quæſtio eſſet impoſſibilis; quippe cùm ex 2 ℞. in 2. fiat numerus 4 ℞. minor numero 9 ℞. qui fit ex 1 ℞ in 9.) Ex 2 ℞ in 5. fit numerus 10 ℞. Et ex 1 ℞ in 9. fit numerus 9 ℞. quem ille ſuperat 1 ℞. Eſt igitur æquatio inter 1 ℞. & 10. Diuiſíſque 10. per 1. fit 1 ℞. 10. minor numerus, ac proinde maior erit 20. Vides ergo numerum 100. factum ex 20. in 5. ſuperare 90. numerum ex 10. in 9. factum 10. vnitatibus.

42 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt ſumma quadratorum ex ipſis deſcriptorum ad eorum ſummam habeat datam proportionem.*

Sint inueniendi duo numeri in quintupla proportione, ita vt ſumma XLII.
quadratorum ex ipſis deſcriptorum, ad inuentorum numerorum ſum-
mam habeat proportionem decuplam. Ponatur minor numerus 1 ℞.
ideóque maior 5 ℞. quadrati ſunt 1 ʒ. & 25 ʒ. eorúmque ſumma 26 ʒ.
decupla ſummæ eorum, quæ eſt 6 ℞. Erit ergo æquatio inter 26 ʒ. & 60
℞. Diuiſis autem 60 per 26. fiet 1 ℞. $2\frac{4}{13}$. ſiue $\frac{30}{13}$ minor numerus,
(quod numeri Coſſici collaterales ſint.) atque adeo maior $\frac{150}{13}$. ſiue
$11\frac{7}{13}$. Quadrati ſunt $\frac{900}{169}$. & $\frac{22500}{169}$. quorum ſumma $\frac{23400}{169}$ decupla eſt ad
$\frac{180}{13}$ ſummam inuentorum numerorum.

IISDEM poſitis, ſi proportio inuenienda ſit æqualitatis, erit æquatio inter 26 ʒ. & 6 ℞. Diuiſis ergo 6. per 26. fiet 1 ℞. $\frac{3}{13}$. minor numerus. (quia Coſſici numeri ſunt collaterales.) Maior autem erit $\frac{15}{13}$. Quadrati ſunt $\frac{9}{169}$. & $\frac{225}{169}$. eorúmque ſumma $\frac{234}{169}$. æqualis ſummæ $\frac{18}{13}$. ex inuentis numeris collectæ.

Et ſi proportio inuenienda ſit minoris inæqualitatis, vt ſubdupla, erit numerus 26 ʒ. ſubduplus numeri 6 ℞. hoc eſt, hic illius erit duplus. Igitur erit æquatio inter 52 ȝ. & 6 ꝝ. Vel inter 26 ȝ. & 3 ꝝ. Diuiſiſque 6. per 52. vel 3. per 26. fiet 1 ꝝ. $\frac{3}{26}$. minor numerus. Maior ergo erit $\frac{15}{26}$. Quadrati ſunt $\frac{9}{676}$. & $\frac{225}{676}$. eorúmque ſumma $\frac{234}{676}$. ſubdupla ſummæ $\frac{18}{26}$. ex inuentis numeris collectæ: quippe cùm hæc illius ſit dupla.

XLIII. 43 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt maior horum ad maiorem datorum additus faciat numerum in data quacunque proportione ad ſummam ex minoribus collectam. dummodo hæc ſecunda proportio data ſit inter proportionem datorum numerorum, & proportionem alteram datam.*

Sint dati numeri 10. & 12. oporteátque inuenire alios duos in proportione quintupla, vt ſumma ex maiore, & 12. tripla ſit ad ſummam ex minore, & 10. Eſt autem proportio tripla inter proportionem 12. ad 10. & proportionem quintuplam, hoc eſt, maior, quàm illa, & minor, quàm hæc. Ponatur minor numerus 1 ꝝ. ideóque maior 5 ꝝ. Ex 5 ꝝ. & 12. fit numerus 5 ꝝ + 12. Et ex 1 ꝝ & 10 numerus 1 ꝝ + 10. cuius ille triplus eſſe debet. Ergo æquatio erit inter 5 ꝝ + 12. & 3 ꝝ + 30. Ablatíſque vtrinque 12. inter 5 ꝝ & 3 ꝝ + 18. Et rurſum ablatis 3 ꝝ vtrinque, inter 2 ꝝ. & 18. Diuiſis igitur 18. per 2. fiet 1 ꝝ. 9. minor numerus, ideóque maior 45. Ex 45. & 12. fit numerus 57. qui triplus eſt ad numerum ex 9. & 10. collectum, nimirum ad 19.

XLIIII. 44 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt ſubtracto minore horum ex datorum maiore, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex minore, proportionem habeat datam quamcunque.*

Sint dati duo numeri 60. & 100. oporteátque alios duos inuenire in proportione quintupla, vt minore ex 100. ſubtracto, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex 60. proportionem habeat vigecuplam. Ponantur duo numeri in proportione quintupla, 1 ꝝ. 5 ꝝ. Dempta 1 ꝝ ex 100. reliquus numerus eſt 100 — 1 ꝝ. Demptis autem 5 ꝝ ex 60. remanent 60 — 5 ꝝ. erítque numerus 100 — 1 ꝝ. ad 60 — 5 ꝝ. vigecuplus: hoc eſt, æquatio erit inter 100 — 1 ꝝ & 1200 — 100 ꝝ. Additis 100 ꝝ vtrinque, erit æqualitas inter 100 + 99 ꝝ. & 1200. Ablatíſque 100. vtrinque, inter 99 ꝝ. & 1100. Diuiſis ergo 1100. per 99. fiet 1 ꝝ. 11 $\frac{11}{99}$. vel $\frac{1100}{99}$. minor

nor numerus, ac proinde maior $\frac{5500}{99}$. vel 55 $\frac{55}{99}$. Prior ex 100. detractus relinquit 88 $\frac{88}{99}$. Poſterior verò ex 60. ſubtractus relinquit 4 $\frac{44}{99}$. Habéntque 88 $\frac{88}{99}$. hoc eſt $\frac{8800}{99}$. ad 4 $\frac{44}{99}$. ſiue ad $\frac{440}{99}$. proportionem eandem, quam 20. ad 1.

45 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, vt maiore ex maiore detracto, & minore ex minore, numeri remaneant æquales.* XLV.

Sint dati duo numeri 100. & 60. oporteátque inuenire alios duos in ſeptupla proportione, vt maiore detracto ex 100. & minore ex 60. nume ri reliqui ſint æquales. Ponãtur numeri in proportione ſeptupla, 1 ꝝ. 7 ꝝ. erúntque reliqui numeri 100 — 7 ꝝ. & 60 — 1 ꝝ. æquales. Additis ergo v- trinque 7 ꝝ. erit æquatio inter 100 & 60 + 6 ꝝ. Et ablatis 60. vtrinque, inter 40. & 6 ꝝ. Diuiſis autem 40. per 6. erit 1 ꝝ. 6 $\frac{2}{3}$. minor numerus, maior autem huius ſeptuplus, 46 $\frac{2}{3}$. Ablato illo ex 60. & hoc ex 100. reliqui fiunt numeri æquales 53 $\frac{1}{3}$.

46 *Tres numeros in data proportione Geometrica continua inuenire, vt productus ex multiplicatione, quorumcunque duorum inter ſe, æqualis ſit reliquo, vel ad ipſum habeat quamlibet proportionem datam.* XLVI.

Sint inueniendi tres numeri in proportione tripla, ſitque primum productus ex minimo in medium, maximo æqualis. Ponantur tres numeri tripli, 1 ꝝ. 3 ꝝ. 9 ꝝ. Ex 1 ꝝ. in 3 ꝝ. fit numerus 3 ȝ. æqualis 9 ꝝ. Diuiſis ergo 9. per 3. fiet 1 ꝝ. 3. quia numeri Coſſici collaterales ſunt. Tres ergo numeri quæſiti ſunt 3. 9. 27. Atque ex 3. in 9. fit numerus 27. maximo 27. æqualis.

Sit deinde productus ad maximum quadruplus, ita vt productus 3 ȝ. ad 9 ꝝ. proportionem habeat quadruplam, hoc eſt, æquatio ſit inter 3 ȝ. & 36 ꝝ. Diuiſis ergo 36. per 3. fiet 1 ꝝ. 12. erúntque tres numeri tripli, 12. 36. 108. Et ex 12. in 36. fit numerus 432. ad 108. quadruplus.

Sit rurſum productus ad maximum ſubduplus, ita vt productus 3 ȝ. ad 9 ꝝ. proportionem habeat ſubduplam: hoc eſt, æquatio fiat inter 6 ȝ. & 9 ꝝ. Diuiſis ergo 9. per 6. fiet 1 ꝝ $\frac{3}{2}$. ſunt ergo tres numeri tripli $\frac{3}{2}$. $\frac{9}{2}$. $\frac{27}{2}$. Et ex $\frac{3}{2}$. in $\frac{9}{2}$. fit numerus $\frac{27}{4}$. ſubduplus ad $\frac{27}{2}$.

IAM verò ex ſecundo 3 ꝝ. in tertium 9 ꝝ. fiat numerus 27 ȝ. qui æqualis debeat eſſe primo, nimirum 1 ꝝ. Diuiſa 1. per 27. fit 1 ꝝ. $\frac{1}{27}$. Tres ergo numeri tripli ſunt $\frac{1}{27}$. $\frac{3}{27}$. $\frac{9}{27}$. Et ex $\frac{3}{27}$. in $\frac{9}{27}$. fit numerus $\frac{27}{729}$. æqualis primo $\frac{1}{27}$.

At ſi productus 27 ℨ. ex ſecundo in tertium debeat ad primum 1 ℞. habere proportionem triplam, erit æqualitas inter 27 ℨ. & 3 ℞. Diuiſis ergo 3. per 27. fiet 1 ℞. $\frac{1}{9}$. erúntque tres numeri tripli $\frac{1}{9}$. $\frac{3}{9}$. $\frac{9}{9}$. Et ex $\frac{3}{9}$. in $\frac{9}{9}$. hoc eſt, ex $\frac{1}{3}$. in 1. fit $\frac{1}{3}$. qui numerus triplus eſt primi $\frac{1}{9}$.

POSTREMO ex primo 1 ℞. in tertium 9 ℞. produci debeat numerus æqualis ſecundo 3 ℞. hoc eſt, æquatio eſſe debeat inter 9 ℨ. qui numerus fit ex primo in tertium, & 3 ℞. Diuiſis ergo 3. per 9. fiet 1 ℞. $\frac{1}{3}$. Erúntque tres numeri tripli $\frac{1}{3}$. 1. 3. Et ex primo $\frac{1}{3}$ in tertium 3. fit 1. æqualis ſecundo 1.

Si verò productus ex primo 1 ℞. in tertium 9 ℞. id eſt, 9 ℨ. debeat habere ad ſecundum 3 ℞. proportionem ſextuplam, erit æquatio inter 9 ℨ. & 18 ℞. Diuiſis ergo 18. per 9. fiet 1 ℞. 2. Erúntque tres numeri tripli, 2. 6. 18. Atque ex 2. in 18. fit numerus 36. ſextuplus ſecundi numeri 6.

XLVII. 47 *Datum numerum partiri in duas partes, vt maiore diuiſa per minorem, Quotiens ſit datus idem numerus.*

Sit datus numerus 40. & datus Quotiens item 40. Ponatur minor pars 1 ℞. & maior 40 — 1 ℞. Hac per illam diuiſa, fit Quotiens $\frac{40-1℞}{1℞}$. æqualis 40. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 40 — 1 ℞. & 40 ℞. Additáque 1 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 40. & 41 ℞. Diuiſis ergo 40. per 41. fiet 1 ℞ $\frac{40}{41}$. minor pars. Maior proinde erit 39 $\frac{1}{41}$. Qua per illam diuiſa, fit Quotiens 40.

Si maior pars ponatur 1 ℞. & minor 40 — 1 ℞. Diuiſa illa per hanc, fit Quotiens $\frac{1℞}{40-1℞}$. æqualis 40. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1 ℞. & 1600 — 40 ℞. Additíſque 40 ℞ vtrinque, inter 41 ℞. & 1600. Diuiſis igitur 1600. per 41. fit maior pars 39 $\frac{1}{41}$. ac proinde minor $\frac{40}{41}$ vt prius.

XLVIII. 48 *Duos numeros inuenire, vt primus cum quolibet multiplici ſecundi faciat numerum æqualem ei, qui conflatur ex ſecundo & quouis multiplici primi. Vel vt primus cum data parte ſecundi tantum faciat, quantum ſecundus cum data parte primi. Vel denique, vt ſi primus ſumat multiplicem quemcunque ſecundi, & ſecundus quemlibet multiplicem primi: Aut ſi primus accipiat partem datam ſecundi, & ſecundus datam partem primi; fiant duo numeri in data quauis proportione.*

Debeat

Debeat primus cum triplo ſecundi facere tantum; quantum ſecundus cum quintuplo primi. Ponatur primus 1 ℞. & ſecundus quiuis numerus, videlicet 50. Ergo 1 ℞ + 150. & 50 + 5 ℞. æquales ſunt. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 150. & 50 + 4 ℞. Et rurſum ablatis 50. vtrinque, inter 100. & 4 ℞. Diuiſis igitur 100. per 4. fiet 1 ℞. 25. Numeri ergo quæſiti ſunt 25. & 50. Nam primus 25. cum triplo ſecundi, hoc eſt, cũ 150. facit 175. quantum ſecundus 50. cum quintuplo primi, id eſt, cum 125.

DEBEAT deinde primus cum $\frac{1}{7}$. ſecundi, & ſecundus cum $\frac{1}{3}$. primi facere vnum eundémq. numerum. Ponatur primus 3 ℞. vt habeat $\frac{1}{3}$. ſine fractione: Secundus autem quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$. ſine fractione, nimirum 21. Primus igitur cum $\frac{1}{7}$ ſecundi faciet 3 ℞ + 3. Secundus verò cum $\frac{1}{3}$. primi faciet 21 + 1 ℞. Eſt ergo æquatio inter 3 ℞ + 3 & 21 + 1 ℞. Ablataq; 1 ℞ vtrinque, inter 2 ℞ + 3. & 21. Ablatiſq. rurſum 3. vtrinque, inter 2 ℞. & 18. Diuiſis ergo 18. per 2. fiet 1 ℞ 9. Primus igitur poſitus 3 ℞. erit 27. & ſecundus 21. vt poſuimus. Nam & 27. cum $\frac{1}{7}$. numeri 21. & 21. cum $\frac{1}{3}$ numeri 27. facit 30.

SED iam primus cum quadruplo ſecundi, & ſecundus cũ triplo primi facere debeant duos numeros in proportione dupla. Ponatur primus 1 ℞. & ſecundus quiuis numerus, videlicet 6. Primus igitur cũ quadruplo ſecundi faciet 1 ℞ + 24. Secundus verò cũ triplo primi faciet 6 + 3 ℞. Si ergo ſtatues 1 ℞ + 24. maiorem, qui duplus debet eſſe ad 6 + 3 ℞. erit æquatio inter 1 ℞ + 24. & 12 + 6 ℞. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, inter 24. & 12 + 5 ℞. Ablatiſq. rurſum 12. vtrinque, inter 12. & 5 ℞. Diuiſis igitur 12. per 5. fiet 1 ℞. $\frac{12}{5}$. id eſt, 2 $\frac{2}{5}$. primus numerus: ſecundus verò erit 6. vt poſitum fuit. Iam primus cũ quadruplo ſecũdi facit 26 $\frac{2}{5}$. ſecundus aũt cũ triplo primi facit $\frac{66}{5}$. id eſt, 13 $\frac{1}{5}$ habetque numerus 26 $\frac{2}{5}$. ad 13 $\frac{1}{5}$. proportionem duplam.

Si verò ſtatues 6 + 3 ℞ maiorem, qui ad 1 ℞ + 24. duplus debet eſſe, erit æquatio inter 6 + 3 ℞. & 2 ℞ + 48. Et ablatis 2 ℞ vtrinque, inter 6 + 1 ℞ & 48. Ablatisq. rurſum 6. vtrinque, inter 1 ℞. & 42. fietq. 1 ℞ 42. primus numerus, ſecundus autem erit 6. vt poſuimus. Primus cum quadruplo ſecundi facit 66. at verò ſecundus cum triplo primi facit 132. qui numerus ad 66. proportionem habet duplam.

DENIQVE primus cum $\frac{1}{7}$. ſecundi, & ſecundus cum $\frac{1}{3}$. primi facere debeant duos numeros in ſextupla proportione. Ponatur primus 3 ℞. vt habeat $\frac{1}{3}$. ſine fractione, & ſecundus quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$. ſine fractione, nimirum 7. Primus ergo cum $\frac{1}{7}$. ſecundi faciet 3 ℞ + 1. Secundus verò cum $\frac{1}{3}$. primi faciet 7 + 1 ℞. Et quia hi duo numeri debent habere proportionẽ ſextuplã, erit neceſſario 7 + 1 ℞ maior. Nã ſi ducatur in 6. vt fiat æqualis numero 3 ℞ + 1. producetur numerus 42 + 6 ℞. qui numero 3 ℞ + 1. æqualis eſſe nequit. Igitur æquatio erit inter 18 ℞ + 6. & 7 + 1 ℞. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, inter 17. ℞ + 6. & 7. Ablatisq. rurſum 6. vtrinque,

Aa 3

inter 17 ℞.& 1.Diuisa igitur 1.per 17.fiet 1 ℞.$\frac{1}{17}$. Et quia primus numerus positus fuit 3 ℞.erit primus numerus $\frac{3}{17}$.& secundus 7.vt positus fuit.Primus cum $\frac{1}{7}$.secundi facit 1$\frac{3}{17}$.id est,$\frac{20}{17}$.Secundus cum $\frac{1}{3}$. primi facit 7$\frac{1}{17}$. hoc est,$\frac{120}{17}$. qui numerus ad $\frac{20}{17}$. proportionem habet sextuplam.

XLIX. 49 *Datum numerum distribuere in quotuis partes in data proportione Geometrica continua.*

Sit datus numerus 4665. secandus in 5. numeros continuè sextuplos. Pone 5.numeros in sextupla proportione 1 ℞.6 ℞.36 ℞.216 ℞. 1296 ℞. Horum summa 1555 ℞.æqualis esse debet dato numero 4665.Diuisis ergo 4665.per 1555.fiet 1 ℞. 3. eruntq. quinque numeri in proportione sextupla continua 3.18.108.648.3888. qui simul additi faciunt 4665.

Si secandus sit numerus 20. in tales quinque partes, inuenies 1555 ℞. æquales 20. Diuisisq. 20. per 1555. fiet 1 ℞.$\frac{4}{311}$. Eruntq. quinque partes in proportione sextupla.$\frac{4}{311}$.$\frac{24}{311}$.$\frac{144}{311}$.$\frac{864}{311}$.$\frac{5184}{311}$. facientes summam 20.

L. 50 *Inuenire quotuis numeros in data proportione Geometrica continua, quorum summa dato cuicunque numero sit æqualis.*

Sint inueniendi 5.numeri in proportione continua sextupla, facientes 4665. vel 20. Hoc ænigma à proximè præcedenti non differt. Nam si summa data secetur in 5. numeros in sextupla proportione continua, factum erit, quod iubetur.

LI. 51 *Datum numerum in tres numeros partiri, vt minores duo datam habeant differentiam: Item duo maiores aliam differentiam datam.*

Sit datus numerus 445.& minorum differentia 10.& maiorum 20.Ponatur minimus numerus 1 ℞. eritq. medius 1 ℞ + 10. ac maximus 1 ℞ + 30. Horum summa 3 ℞ + 40.æqualis esse debet dato numero 445.Ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter 3 ℞. & 405. Diuisis igitur 405. per 3. inuenietur 1 ℞. 135. minimus numerus. atque idcirco medius erit 145. & maximus 165. qui ænigmati satisfaciunt, quod summam conficiant 445.

Si datus numerus sit 200. erunt 3 ℞ + 40. æquales 200. & ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter 3 ℞. & 160. Diuisisque 160. per 3. erit 1 ℞. 53$\frac{1}{3}$. primus numerus, secundus erit 63$\frac{1}{3}$.& tertius 83$\frac{1}{3}$. qui habent datos excessus,& conficiunt 200.

Aliter.

Aliter.Ponatur medius 1.℞.eritq. minus 1 ℞—10.& maximus 1 ℞+20. quorum summa 3 ℞ +10.æqualis esse debet dato numero 445. vel 200. Ablatis 10.vtrinque,erit æquatio inter 3 ℞.& 435.vel 190. Facta diuisione, erit 1 ℞.145.vel 63$\frac{1}{3}$.primus numerus. Ergo in primo exemplo erunt tres numeri 135.145.165.in secundo autem,53$\frac{1}{3}$.63$\frac{1}{3}$.83$\frac{1}{3}$.vt prius.

52 *Tres numeros inuenire,vt minorum differentia sit data:Item maiorum differentia alia data:Et omnes tres datum numerum conficiant.* LII.

Sit minorum differentia 10.& maiorum 20.eorúmq.summa 445. vel 200.Hoc etiam problema non differt à proximè antecedenti.Si namque data summa distribuatur in tres partes datorum excessuum,factum erit, quod præcipitur.

53 *Datum numerum partiri in tres, vt vteruis extremorum cum medio ad alterum extremum proportionem habeat datam.* LIII.

Sit primum diuidendus datus numerus 100. in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem triplam:tertius verò cum medio ad primum quadruplã.Ponatur primus 1 ℞.Eruntq. alij duo simul 4 ℞.vt ad primum possint habere proportionem quadruplam. Horum ergo summa 5 ℞.æqualis esse debet dato numero 100. Diuisis igitur 100. per 5.fiet 1 ℞.20.primus numerus,ideoq.alij duo simul,80.Ponatur deinde tertius 1 ℞.ideoq.medius 80—1 ℞.Igitur primus 20.cum medio 80—1 ℞.hoc est,100 — 1 ℞.ad tertium 1 ℞.triplus est,atque idcirco æquatio erit inter 100—1 ℞.& 3 ℞.Additaq.vtrinque 1 ℞.inter 100.& 4 ℞.Diuisisq. 100.per 4.fiet 1 ℞.25.tertius numerus.Medius ergo erit 55. qui relinquitur,detracto tertio 25.ex 80.Tres propterea numeri erunt 20. 55. 25. qui simul efficiunt 100.& primus cum medio efficit 75. numerum triplum ad tertium 25.At tertius cum medio facit 80.numerum quadruplum ad primum 20.

Si datus sit numerus 60.secandus in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem noncuplam, sed tertius cum medio ad primum, quadruplam, procedemus eodem modo. Nam si primus ponatur 1 ℞. erunt alij duo simul, 4 ℞. atque idcirco 5 ℞. æquales 60. dato numero. Diuisis ergo 60.per 5. fiet 1 ℞. 12. primus numerus; ideoque alij duo facient 48. Rursum si tertius ponatur 1 ℞. facient alij duo simul 9 ℞, vt ad tertium habere possint proportionem noncuplam. Igitur 10 ℞. æquales erunt dato numero 60. Diuisisque 60. per 10. fiet 1 ℞. 6. tertius numerus. Medius autem erit 42. qui relinquitur, si tertius 6. ex 48. dematur. Quocirca tres numeri quæſiti erũt 12.42.6.qui ſimul conficiũt 60.Et primus cum medio facit numerum 54. qui ad tertium 6. noncuplus eſt. Tertius verò cum ſecundo facit 48.qui numerus ad primum 12.quadruplus eſt.

Sit deinde idem numerus 100. diſtribuendus in tres, vt tam primus cum ſecundo ad tertium, quam tertius cum ſecundo ad primum habeat proportionem triplam.Ponatur primus 1 ℞.& ſecundus,ac tertius 3 ℞.vt ad primum habeant proportionem triplam.Horum ſumma 4 ℞.ęqualis eſt 100.Diuiſis igitur 100.per 4.fiet 1 ℞.25.primus numerus;ideoque ſecundus,ac tertius facient 75.ponatur deinde tertius 1 ℞,ideoq. ſecundus 75 — 1 ℞.Igitur primus cum ſecundo faciet ſummam 100 — 1 ℞.triplá ad tertium,id eſt,ad 1 ℞.ſiue æqualẽ 3 ℞.Addita 1 ℞.vtrobique, erit æqualitas inter 100.& 4 ℞.Diuiſis igitur 100.per 4. fiet 1 ℞ 25.tertiùs numerus, ac proinde ſecundus erit 50.nimirum 100 — 1 ℞. Itaq. tres numeri erunt 25. 50.25.Et tam ſumma primi,& ſecundi ad tertium,quam ſumma tertij ac ſecundi ad primum,proportionem habet triplam.

Si vtraque proportio deberet eſſe quadrupla,reperirentur tres numeri 20.60.20.

LIIII. 54 *Inuenire tres numeros,ita vt primus cum ſecundo proportionem ad tertium habeat datam.Item tertius cum ſecundo ad primum datam proportionem habeat:Omneſque tres conficiant ſummam datam.*

Hoc ænigma à præcedenti diuerſum non eſt.Nam ſi data ſumma diuidatur in tres numeros,vt iubetur,expeditum erit ænigma, non aliter ac præcedens.

LV. 55 *Numerum inuenire,ita vt quadratus ex parte eius aliquota data deſcriptus, & quadratus alterius cuiuſuis partis eius aliquotæ, conficiant ipſum numerum, vel alium qui ad inuentum numerum proportionem habeat datam.*

Inueniendus ſit numerus, ita vt quadratus ex eius ſemiſſe deſcriptus, & quadratus ex eiuſdem parte ſexta deſcriptus, efficiant ipſum numerum, vel alium, qui ad inuentum proportionem habeat octuplam ſupertripartientem quartas. Ponatur numerus eſſe 6 ℞. vt ſine fractione habeat partes expreſſas. Eius ſemiſſis eſt 3 ℞. & ſexta pars 1 ℞. Harum partium quadrati ſunt 9 ȝ & 1 ȝ. qui faciunt 10 ȝ. numerum æqualem 6 ℞. Diuiſis ergo 6. per 10. fiet 1 ℞. $\frac{3}{5}$ (quod numeri Coſſici collaterales ſint,) ac proinde 6 ℞. erunt $\frac{18}{5}$ numerus quæſitus. Semiſſis eius $\frac{9}{5}$. facit quadratum $\frac{81}{25}$. Et eius ſexta pars $\frac{3}{5}$. facit quadratum $\frac{9}{25}$. qui cum $\frac{81}{25}$. facit $\frac{90}{25}$. id eſt, $\frac{18}{5}$. numerum quæſitum.

Sed iam duo quadrati facere debeant numerum, qui ad inuentum numerum habeat proportionem octuplam ſupertripartientem quartas. Ponatur numerus eſſe 1 ℞.Eius ſemiſſis eſt $\frac{1}{2}$ ℞.& ſexta pars $\frac{1}{6}$ ℞.Quadrati harum partium ſunt $\frac{1}{4}$ ȝ.& $\frac{1}{36}$ ȝ. qui ſimul faciunt $\frac{10}{36}$ ȝ. qui numerus ad 1 ℞.habere debet proportionem octuplam ſupertripartientem quartas, cuius videlicet denominator eſt 8 $\frac{3}{4}$.Hic autem ductus in 1 ℞. facit 8 $\frac{3}{4}$ ℞. cui numero æqualis eſſe debet numerus $\frac{10}{36}$ ȝ. Diuiſis ergo 8 $\frac{3}{4}$. per $\frac{10}{36}$. fiet 1 ℞.31 $\frac{1}{2}$.ſiue $\frac{63}{2}$.numerus inuentus (quod numeri Coſſici collaterales ſint.)Eius enim ſemiſſis $\frac{63}{4}$. facit quadratum $\frac{3969}{16}$.Et eiuſdem ſexta pars $\frac{63}{12}$ facit quadratum $\frac{3969}{144}$. qui cum priori quadrato $\frac{3969}{16}$. id eſt, cum $\frac{35721}{144}$.facit numerum $\frac{39690}{144}$. qui ad inuentum $\frac{63}{2}$. proportionem habet octuplam ſupertripartientem quartas.quippe cum ille per hunc diuiſus Quotientem faciat 8 $\frac{3}{4}$.

56 *Datum numerum partiri in duos, vt data pars primi cum ſecundo tantum faciat,quantum ſecundi pars alia data cum primo efficit.* LVI.

Numerus datus 44. ſecandus ſit in duos, vt $\frac{1}{5}$. primi cum ſecundo, & $\frac{1}{3}$. ſecundi cum primo, faciant duos numeros æquales. Ponatur primus 1 ℞, ideóque ſecundus 44—1 ℞. Quinta pars primi,nimirum $\frac{1}{5}$ ℞. cum ſecundo facit 44—$\frac{4}{5}$ ℞. Et tertia pars ſecundi, nimirum $\frac{44-1℞}{3}$. cum primo facit 1 ℞ + $\frac{44-1℞}{3}$. Eſt ergo æquatio inter 44—$\frac{4}{5}$ ℞.& 1 ℞ + $\frac{44-1℞}{3}$. Ablata 1 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 44—$\frac{9}{5}$ ℞. & $\frac{44-1℞}{3}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æqualitatem inter 132 — $\frac{27}{5}$ ℞. & 44 — 1 ℞.Et additis $\frac{27}{5}$ ℞. vtrinque, inter 132. & 44 + $\frac{22}{5}$ ℞. Ablatíſque 44. vtrinque inter 88. & $\frac{22}{5}$ ℞. Diuiſis igitur 88. per $\frac{22}{5}$. fiet 1 ℞. 20.primus numerus. Secundus verò erit 24. Vbi vides quintam partem primi, nimirum 4. cum ſecundo facere 28. quantum ſcilicet facit tertia pars ſecundi, nimirum 8. cum primo.

57 *Duos numeros inuenire,ita vt primus,accepto quolibet numero à ſecundo,faciat numerum, qui ad reliquum ſecundi proportionem habeat datam. Item ſecundus, accepto quolibet etiam numero à primo,faciat numerum, qui ad reliquum primi proportionem etiam habeat datam.* LVII.

Sint inueniendi duo numeri, vt primus accipiens 40. à ſecundo faciat numerum reliqui ſecundi quadruplum: At ſecundus accipiens

30. à primo faciat numerum residui primi noncuplum. Ponatur primus 1℞. Si igitur accipiat 40. à secundo, habebit 1℞ + 40. ac proinde secundo remanent $\frac{1}{4}$℞ + 10. vt nimirum ille ad hunc proportionem habeat quadruplam. Ergo antequam secundus daret primo 40. habuit $\frac{1}{4}$℞ + 50. Ac proinde si accipiat 30. à primo, habebit $\frac{1}{4}$℞ + 80. qui numerus ad reliquum primi, videlicet ad 1℞ — 30. debet habere proportionem noncuplam. Erit ergo æquatio inter $\frac{1}{4}$℞ + 80. & 9℞ — 270. Additísque 270. vtrinque, inter $\frac{1}{4}$℞ + 350. & 9℞. Ablatáq; $\frac{1}{4}$℞. vtrinque, inter 350. & 8$\frac{3}{4}$℞. Diuisis igitur 350. per 8$\frac{3}{4}$. fiet 1℞. 40. primus numerus. Secundus autem erit 60. nimirum $\frac{1}{4}$℞ + 50. Primus igitur 40. accipiens 40. à secundo, habebit 80. qui numerus quadruplus est numeri 20. qui secundo remanet. Secundus autem 60. accipiens 30. à primo habebit 90. qui numerus noncuplus est numeri 10. qui primo relinquitur, postquam 30. dederit secundo.

Si inueniendi sint duo numeri, vt primus accipiens 10. à secundo habeat numerum quintuplum reliqui secundi, at secundus accipiens 5. à primo, habeat numerum duplum reliqui primi; inuenies duos numeros 15. & 15. Nam posito primo 1℞. si accipiat 10. à secundo, habebit 1℞ + 10. qui numerus quintuplus est numeri $\frac{1}{5}$℞ + 2. atque hic secundo superest, postquam primo dederit 10. ergo prius habuit $\frac{1}{5}$℞ + 12. Si igitur accipiat 5. à primo, habebit $\frac{1}{5}$℞ + 17. qui numerus duplus esse debet numeri 1℞ — 5. qui primo superest, postquam dederit 5. secundo. hoc est, æqualitas erit inter $\frac{1}{5}$℞ + 17. & 2℞ — 10. Additísque 10. vtrobique, inter $\frac{1}{5}$℞ + 27. & 2℞. Et si auferatur $\frac{1}{5}$℞ vtrobique, inter 27. & 1$\frac{4}{5}$℞. Diuisis igitur 27. per 1$\frac{4}{5}$. hoc est, per $\frac{9}{5}$. fiet 1℞ 15. pro primo numero. Et quia secundus habebat $\frac{1}{5}$℞ + 12. erit quoque secundus numerus 15. Atque duo hi numeri 15. & 15. quæstioni satisfaciunt. Nam si primus accipiat 10. à secundo, habebit 25. qui numerus quintuplus est reliqui, qui secundo superest, nimirum numeri 5. Secundus verò accipiens 5. à primo, habebit 20. numerum videlicet duplum numeri 10. qui primo superest.

LVIII. 58 *Tres numeros inuenire, vt bini quique faciant tres numeros propositos, dummodo semissis summæ propositorum numerorum maior sit singulis propositis numeris.*

DEBEAT primus cum secundo efficere 20. secundus cum tertio 30. ac tertius cum primo 40. qui omnes simul faciunt numerum 90. cuius semissis 45. maior est quam 20. & quam 30. & quam 40. Quod si tertius numerus effectus deberet esse 50. vel maior, res non succederet, quia omnes tres efficerent 100. vel maiorem numerum, cuius semissis esset vel æqualis vni eorum, nimirum 50. vel minor. Vt si tertius esset 51. vel 60. essent omnes tres 101. vel 110. cuius semissis 50$\frac{1}{2}$. vel 55. minor esset tertio 51. vel 60. Sed operatio ipsa probe te docebit, an quæstio possibilis sit, nec ne. Ponatur ergo summa trium numerorum quæsitorum esse 1℞. Et quia primus ac secundus conficiunt 20. erit tertius 1℞ — 20. Item quia secundus ac tertius faciunt 30. erit primus 1℞ — 30. Denique quia tertius ac primus faciunt 40. erit secundus 1℞ — 40. Hi omnes tres simul conficiunt 3℞ — 90. quæ summa æqualis debet esse summæ omnium, quæ posita est 1℞. Est ergo æquatio inter 1℞. & 3℞ — 90. Additísque 90. vtrinque, inter 1℞ + 90. & 3℞. Ablatáque 1℞. vtrinque, inter 90. & 2℞. Diuisis igitur 90. per 2. fiet 1℞. 45. summa omnium trium quæsitorum numerorum. Et quoniam primus inuentus fuit 1℞ — 30. erit ipse primus 15. Secundus autem erit 5. nimirum 1℞ — 40. Ac tertius 25. videlicet 1℞ — 20. Itaque tres numeri ordine inuenti sunt 15. 5. 25. manifestúmque est, primum ac secundum efficere 20. secundum ac tertium 30. tertium denique ac primum 40.

Aliter. Ponatur primus 1℞. erítq; propterea secundus 20 — 1℞. vt cum primo, nimirum cum 1℞. facere possit 20. qui secundus numerus habebitur, si primus 1℞. ex 20. dematur. Tertius autem erit 10 + 1℞. vt cum secundo, id est, cum 20 — 1℞. facere possit 30. habebitúrque hic tertius, si secundus 20 — 1℞. dematur ex 30. Iam tertius 10 + 1℞. cum primo 1℞. facit 2℞ + 10. qui numerus æqualis debet esse 40. Demptis igitur 10. vtrinque, erit æquatio inter 2℞. & 30. Diuisísque 30. per 2. fiet 1℞. 15. pro primo numero. Secundus ergo 20 — 1℞. erit 5. Et tertius 10 + 1℞. erit 25. vt prius.

59 *Quatuor numeros inuenire, ita vt terni quique efficiant quatuor numeros propositos, dummodo tertia pars summæ propositorum numerorum maior sit singulis propositis numeris.* LIX.

DEBEAT primus, secundus, ac tertius facere 20. Secundus, tertius, & quartus 22. Tertius, quartus, ac primus 24. Quartus denique, primus, & secundus 27. qui omnes quatuor faciunt 93. cuius numeri pars tertia 31. maior est quam 20. & quam 22. & quam 24. & quam 27. Quod si quartus deberet esse 40. res non succederet, quia omnes quatuor efficerent 106. cuius tertia pars 35$\frac{1}{3}$. non maior est, quam 40. sed minor. Impossibilitatem porrò quæstionis ipsamet operatio indicabit. Ponatur summa omnium quatuor esse 1℞. Et quia primus secundus & tertius faciunt 20. erit quartus 1℞ — 20. Eadem ratione erit primus 1℞ — 22. Et secundus 1℞ — 24. Ac tertius denique 1℞ — 27. Hi omnes quatuor faciunt 4℞ — 93. quæ summa æqualis debet esse summæ omnium, quam posuimus 1℞. Est igitur æquatio inter 1℞. & 4℞ — 93. Additísque 93. vtrinque, inter 1℞ + 93. & 4℞. Ablatáque 1℞ vtrinque, inter 93. & 3℞. Diuisis igitur 93. per 3. fiet 1℞. 31. Et quoniam primus fuit inuentus 1℞ — 22. erit ipse primus 9. Eadémque de causa, secundus 7. Tertius 4. & quartus 11. qui quatuor numeri problema efficiunt.

Hoc ænigma alio modo ſoluemus in quinque numeris in ænigmate 127.

S C H O L I V M.

EADEM arte inuenientur quinque numeri, vt quaterni quique efficiant quinque numeros propoſitos; dummodo quarta pars ſummæ propoſitorum numerorum ſingulis numeris propoſitis maior ſit. Item ſex numeri, ſi tamen quinta pars maior ſit, &c. Et ſic deinceps quotcunque numeri, ſi modo pars ſummæ determinata à numero propoſitorum numerorum, vno minus, maior ſit ſingulis numeris propoſitis.

LX. 60 *Tres numeros inuenire, vt bini quique ſimul ſumpti excedant reliquum dato numero.*

STATVATVR primum & ſecundum ſuperare tertium 20. vnitatibus: Exceſſum ſecundi ac tertij ſimul ſupra primum eſſe 30. vnitatum: Et denique exceſſum inter tertium ac primum ſimul, & ſecundum eſſe 40. vnitatum. Ponantur omnes tres eſſe 1 ꝝ. Et quoniam primus & ſecundus ſuperant tertium 20. vnitatibus; addito communi tertio, [a] ſuperabunt quoque primus, ſecundus & tertius ſimul tertium duplicatum eiſdem 20. vnitatibus: ideóque omnes tres æquales erunt tertio duplicato, vna cum 20. quia numerus compoſitus ex tertio duplicato, & 20. ſuperat quoque tertium duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur à ſumma omnium trium, quam poſuimus 1 ꝝ. auferamus 20. remanebit tertius duplicatus 1 ꝝ — 20. atque idcirco tertius ſimplex erit $\frac{1}{2}$ ꝝ — 10. Eadem ratione primus erit $\frac{1}{2}$ ꝝ — 15. & ſecundus $\frac{1}{2}$ ꝝ — 20. Summa ergo omnium trium $\frac{3}{2}$ ꝝ — 45. æqualis erit ſummæ omnium trium numerorum quæſitorum, quam poſuimus eſſe 1 ꝝ; ita vt æquatio ſit inter 1 ꝝ & $\frac{3}{2}$ ꝝ — 45. Additiſque 45. vtrinque, inter 1 ꝝ + 45. & $\frac{3}{2}$ ꝝ. Ablataque 1 ꝝ vtrinque, inter 45. & $\frac{1}{2}$ ꝝ. Diuiſis igitur 45. per $\frac{1}{2}$. fiet 1 ꝝ 90. Cum ergo primus inuentus ſit $\frac{1}{2}$ ꝝ — 15. erit ipſe primus 30. Eandémque ob cauſam erit ſecundus 25. & tertius 35. qui tres numeri problema conficiunt.

[a] 16. pronunc. primi.

Aliter. Ponatur tertius 1 ꝝ. Et quoniam primus ac ſecundus ſuperant tertium 20. vnitatibus; erunt primus & ſecundus ſimul 1 ꝝ + 20. cum hic numerus excedat quoque 1 ꝝ. 20. vnitatibus. Ponatur deinde ſecundus 25. ſemiſſis videlicet ſummæ 50. ex 20. & 30. collectæ. Cum ergo primus & ſecundus ſimul inuenti ſint eſſe 1 ꝝ + 20. ſi dematur ſecundus 25. relinquetur primus 1 ꝝ — 5. Quia verò tertius cum primo ſuperare debet ſecundum 40. vnitatibus: Faciunt autem tertius 1 ꝝ. & primus 1 ꝝ — 5. numerum 2 ꝝ — 5. qui

qui æqualis erit numero 65. cum hic ſecundum 25. ſuperet 40. vnitatibus atque ita æquatio erit inter 2 ꝝ — 5 & 65. Additiſq. 5 vtrinque, inter 2 ꝝ. & 70. Diuiſis igitur 70 per 2. fiet 1 ꝝ 35. tertius numerus. Primus erit 30. nimirum 1 ꝝ — 5. Et ſecundus 25. vt ſupra.

Aliter. Ponatur primus & ſecundus ſimul 1 ꝝ, eritq. propterea tertius 1 ꝝ — 20. vt nimirum primus & ſecundus ſimul, id eſt, 1 ꝝ. ſuperet tertium 20. vnitatibus: qui tertius habebitur, ſi ex primo 1 ꝝ. demantur 20. Ergo omnes tres erunt 2 ꝝ — 20. Et quia ſecundus ac tertius ſuperare debent primum numero 30. addito communi primo, ſuperabunt omnes tres primum duplicatum eodem numero 30. Demptis igitur 30. ex omnibus tribus, id eſt, ex 2 ꝝ — 20. remanebit primus duplicatus 2 ꝝ — 50. ideoq. ſimplex primus 1 ꝝ — 25. Primus ergo 1 ꝝ — 25. & tertius 1 ꝝ — 20. faciunt ſummam 2 ꝝ — 45. quæ ex omnibus tribus, id eſt, ex 2 ꝝ — 20. ſubtracta relinquet ſecundum 25. Et quoniam primus ac tertius faciunt, vt dictum eſt proximè, ſummam 2 ꝝ — 45. quæ debet ſecundum 25. ſuperare numero 40. Si ſecundus 25. ſubtrahatur à prædicta ſumma, relinquetur numerus 2 ꝝ — 70. æqualis dicto exceſſui 40. Additis igitur 70. vtrinque, erit æquatio inter 2 ꝝ. & 110. Diuiſiſq. 110. per 2 fiet 1 ꝝ. 55 Primus ergo numerus 1 ꝝ — 25. erit 30. Secundus vero eſt 25. & tertius 1 ꝝ — 20. erit 35. vt prius.

61 *Quatuor numeros inuenire, vt terni quique ſimul ſumpti excedant reliquum dato numero: dummodo ſemiſsis ſummæ ex quatuor numeris poſtulatis collectæ maior ſit ſingulis numeris datis.* LXI.

POSTVLETVR, vt primus, ſecundus, ac tertius ſimul excedant quartum 20. vnitatibus: Et ſecundus, tertius, ac quartus primum 30. vnitatibus: Et tertius, quartus, ac primus ſecundum 40. vnitatibus: Ac denique quartus, primus ac ſecundus tertium 50. vnitatibus. Vbi vides, quatuor numeros datos facere 140. cuius numeri ſemiſſis 70. maior eſt ſingulis datis. Nam ſi conditio hæc non adſit, erit quæſtio impoſſibilis. Vt ſi vltimus exceſſus detur 90. facient omnes exceſſus numerum 180. cuius ſemiſſis 90. maior non eſt dato exceſſu 90. quæſtio erit inexplicabilis. Ponantur ergo omnes quatuor numeri 1 ꝝ. Et quoniam primus, ſecundus, ac tertius excedunt quartum 20. vnitatibus; addito communi quarto, [a] ſuperabunt quoque primus, ſecundus, tertius ac quartus quartum duplicatum iiſdem 20. vnitatibus: ideoque omnes quatuor æquales erunt quarto duplicato, vna cum 20. quia numerus compoſitus ex quarto duplicato, & 20. ſuperat quoque quartum duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur à ſumma omnium quatuor, quam poſuimus 1 ꝝ. auferantur 20. remanebit quartus duplicatus 1 ꝝ — 20. atque adeo quartus ſimplex erit $\frac{1}{2}$ ꝝ — 10. Eadem ratione erit primus

[a] 16. pronunc. primi.

½ ♃ — 15. Et secundus ½ — 20. Et tertius ½ ♃ — 25. Summa ergo omnium quatuor 2 ♃ — 70. æqualis erit priori summæ omnium quatuor, quam posuimns 1 ♃. ita vt æquatio sit inter 1 ♃. & 2 ♃ — 70. Additisque 70. vtrinque, inter 1 ♃ + 70. & 2 ♃. Ablataq. 1 ♃ vtrinque, inter 70. & 1 ♃. Erit igitur 1 ♃ 70. Cum ergo primus inuentus sit ½ ♃ — 15. erit ipse primus 20. Eandemque ob causam secundus erit 15. Tertius 10. & quartus 25. qui omnes quæstionem expediunt.

Aliter. Ponatur quartus 1 ♃. Et quoniam primus, secundus, ac tertius excedunt quartum 20. vnitatibus: Erunt illi tres simul 1 ♃ + 20. cum hic numerus superet 1 ♃. similiter 20. vnitatibus. Rursus quia secundus, tertius, & quartus excedunt primum 30. vnitatibus; ponatur summa secundi ac tertij 25. semissis videlicet primorum duorum excessuum 20. & 30. simul. Quia igitur primus, secundus, ac tertius faciunt, vt diximus, 1 ♃ + 20. si auferatur secundus, ac tertius simul, nimirum 25. reliquus erit primus 1 ♃ — 5. exceditque summa 1 ♃ + 25. ex secundo, tertio, & quarto collecta, primum 1 ♃ — 5. numero 30. vt patet, si primus 1 ♃ — 5. auferatur ex 1 ♃ + 25. summa secundi, tertij, & quarti. Rursus, quia primus inuentus est 1 ♃ — 5. Secundus vero ac tertius faciunt 25. quartus denique positus est 1 ♃. erunt omnes quatuor 2 ♃ + 20. Cum ergo tertius, quartus, ac primus excedant secundum numero 40. Addito communi secundo,[a] excedent omnes quatuor secundum duplicatum eodem numero 40. Ablatis igitur 40. ex summa 2 ♃ + 20. omnium quatuor, relinquetur secundus duplicatus 2 ♃ — 20. ipseque secundus semel sumptus erit 1 ♃ — 10. qui subtractus ex 25. summa secundi ac tertij, reliquum faciet tertium 35 — 1 ♃. Quoniam vero quartus, primus, & secundus faciunt 3 ♃ — 15. debentque superare tertium numero 50. superant autem tertium 35 — 1 ♃. numero 4 ♃ — 50. vt constat, si tertius 35 — 1 ♃. detrahatur ex prædicta summa 3 ♃ — 15. Est ergo æquatio inter 4 ♃ — 50. & 50. Additisque 50. vtrinque, inter 4 ♃. & 100. Diuisis ergo 100. per 4. fiet 1 ♃ 25. Primus ergo 1 ♃ — 5. erit 20. Secundus 1 ♃ — 10. erit 15. Terrius 35 — 1 ♃. erit 10. Et quartus 1 ♃. erit 25. quemadmodũ prius.

a 16. pronunc. primi.

Aliter. Ponatur summa omnium 1 ♃. Et quia priores tres excedere debent quartum numero 20. diuidenda erit 1 ♃. in duas partes, quarum maior minorem superet numero 20. Maior enim pars erit summa priorum trium, & minor pars erit quartus numerus. Diuisio autem hæc ita fiet, vt in scholio ænigmatis 1. tradidimus. Dematur numerus 20. ex 1 ♃. vt reliquus sit numerus 1 ♃ — 20. Huius enim semissis ½ ♃ — 10. erit minor pars. Et si ad hanc addatur idem numerus 20. fiet maior pars ½ ♃ + 10. Erit ergo quartus numerus ½ ♃ — 10. & priores quatuor ½ ♃ + 10. Pari ratione, quia secundus, tertius, & quartus debent excedere primum numero 30. demantur 30. ex 1 ♃. Reliqui enim numeri 1 ♃ — 30. semissis ½ ♃ — 15. erit primus numerus. Item quia tertius, quartus,

tus, & primus superare debent secundum numero 40. si demantur 40. ex 1 ♃. erit reliqui numeri 1 ♃ — 40. semissis ½ ♃ — 20. secundus numerus. Denique quia quartus, primus, & secundus superare debent tertium numero 50. si tollantur 50. ex 1 ♃. erit reliqui numeri 1 ♃ — 50. semissis ½ ♃ — 25. tertius numerus. Omnes 4. inuenti ½ ♃ — 15. ½ ♃ — 20. ½ ♃ — 25. & ½ ♃ — 10. faciunt summam 2 ♃ — 70. quæ æqualis esse debet summæ omnium, quam posuimus 1 ♃. Est ergo æquatio inter 1 ♃. & 2 ♃ — 70. Additisq. 70. vtrinque, inter 1 ♃ + 70. & 2 ♃. Ablataq. 1 ♃. vtrinque, inter 70. & 1 ♃. eritq. 1 ♃. 70. & ½ ♃ 35. Primus ergo ½ ♃ — 15. erit 20. Secundus ½ ♃ — 20. erit 15. Tertius ½ ♃ — 25. erit 10. Et quartus ½ ♃ — 10. erit 25. veluti prius.

SCHOLIVM.

EODEM *modo reperientur quinque numeri, vt quaterni quique superent reliquum dato numero; dummodo tertia pars summæ ex quinque postulatis excessibus maior sit singulis numeris. Pari ratione inuenientur sex, si tamen quarta pars maior sit, &c. Atque ita deinceps quotcunque numeri, si modò pars summæ denominata à numero datorum excessuum, minus duobus, maior sit singulis excessibus datis.*

62 *Tres numeros inuenire, quorum maximus medium superet data parte minimi: Medius quoque minimum superet data parte maximi: Minimus denique datam medij partem excedat numero dato.* LXII.

SVPERET maximus medium tertia parte minimi: Medius minimum tertia quoque parte maximi: Minimus denique tertiam item partem medij excedat 10. vnitatibus. Ponatur minimus 1 ♃ + 10. & medius 3 ♃. Ita enim minimus tertiam medij partem superabit numero 10. Et quoniam medius minimum superare debet tertia parte maximi. Superat autem medius 3 ♃. minimum 1 ♃ + 10. numero 2 ♃ — 10. vt patet, si subtractio fiat 1 ♃ + 10. ex 3 ♃. Igitur tertia pars maximi erit 2 ♃ — 10. atque idcirco maximus erit 6 ♃ — 30. Rursus quoniam maximus medium superare debet tertia parte minimi: Superat autem maximus 6 ♃ — 30. medium 3 ♃. numero 3 ♃ — 30. qui æqualis erit tertiæ parti minimi: ideoq. minimus erit 9 ♃ — 90. Fuit autem minimus positus 1 ♃ + 10. Est ergo æquatio inter 9 ♃ — 90. & 1 ♃ + 10. Additisq. 90. vtrinque, inter 9 ♃. & 1 ♃ + 100. Ablataque 1 ♃. vtrinque, inter 8 ♃. & 100. Diuisis ergo 100. per 8. fiet 1 ♃. 12 ½. Igitur minimus 1 ♃ + 10. erit 22 ½. Medius 3 ♃. erit 37 ½. Maximus denique 6 ♃ — 30. erit 45. Nam maximus 45. superat medium 37 ½. numero 7 ½. qui tertia pars est minimi 22 ½. Medius verò 37 ½. superat minimum 22 $\frac{1}{2}$. numero 15. qui tertia pars eſt maximi 45. Minimus denique 22 $\frac{1}{2}$. ſuperat 12 $\frac{1}{2}$. tertiam partem medij 37 $\frac{1}{2}$. numero 10. vt propoſitum eſt.

Qvod ſi maximus medium ſuperare debeat ſemiſſe minimi: medius minimum quarta parte maximi: Et minimus tertiam partem medij numero 8. Ponatur minimus 1 ℞ + 8. Et medius 3 ℞. vt ille tertiam huius partem excedat octonario. Et quia medius minimum ſuperare ponitur quarta parte maximi: Superat autem medius 3 ℞. minimum 1 ℞ + 8. numero 2 ℞ — 8. Igitur quarta pars maximi erit 2 ℞ — 8. ac proinde maximus erit 8 ℞ — 32. Rurſus quia maximus medium ſuperare debet ſemiſſe minimi; Superat autem maximus 8 ℞ — 32. medium 3 ℞. numero 5 ℞ — 32. qui æqualis erit ſemiſſi minimi; proptereaq. minimus erit 10 ℞ — 64. Fuit autem idem poſitus 1 ℞ + 8. Eſt ergo æquatio inter 10 ℞ — 64. & 1 ℞ + 8. Additiſque 64. vtrinque, inter 10 ℞. & 1 ℞ + 72. Ablataq. 1 ℞. vtrinque, inter 9 ℞. & 72. Diuiſis ergo 72. per 9. fiet 1 ℞. 8. Ac proinde minimus 1 ℞ + 8. erit 16. Medius vero 3 ℞. erit 24. Maximus denique 8 ℞ — 32. erit 32.

Si quis proponeret, maximum debere ſuperare medium ſemiſſe minimi: Medium quoque minimum ſemiſſe maximi: Minimum denique ſemiſſem medij binario; quæſtio eſſet impoſſibilis, vt ipſa operatio per Algebram abundè docebit. Ponatur enim minimus 1 ℞ + 2. Et quia debet ſuperare ſemiſſem medij binario, erit medius 2 ℞. Quia verò minimum medius ſuperare debet ſemiſſe maximi: Superat autem medius 2 ℞. minimum numero 1 ℞ — 2. qui ſemiſſis debet eſſe maximi. Maximus ergo erit 2 ℞ — 4. quod eſt abſurdum, cum medius inuentus ſit 2 ℞. maior quam 2 ℞ — 4.

LXIII. 63 *Tres numeros inuenire, ita vt ſi quiſque proximè ſequenti det datam ſui partem, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.*

Det primus ſecundo tertiam ſui partem: Secundus tertio quartam ſui partem: Et tertius primo quintam ſui partem: Et cum ſibi mutuò dictas partes dederint, & ab alijs acceperint, fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 3 ℞. vt tertiam partem habeat ſine fractione. Secundus autem, 4. vnitatum, vt quartam partem ſine fractione habeat. Si ergo hic ſecundus 4. accipiat $\frac{1}{3}$. primi 3 ℞. nimirum 1 ℞. atque det $\frac{1}{4}$. nimirum 1. tertio, habebit ipſe ſecundus 3 — 1 ℞. Ac tantundem habere debet primus, vbi dederit, acceperitque, quæ iubentur. At primus 3 ℞. ſi tertiam partem dederit 1 ℞. & acceperit 3 — 1 ℞. tum demum habebit 1 ℞ + 3. vel 3 + 1 ℞. vt patet, ſi addantur 3 — 1 ℞. ad 2 ℞. quod hæc formula docet. Inuenies autem 3 — 1 ℞. ſi reliquum primi, nimirum 2 ℞. dempſeris ex 3 + 1 ℞. Ergo 3 — 1 ℞. erit quinta pars tertij: quan-

$$\begin{array}{r} 2\,℞ + 0 \\ -1\,℞ + 3 \\ \hline +1\,℞ + 3 \end{array}$$

quandoquidem eam dans reliquo primi, nimirum 2 ℞. facit 3 + 1 ℞. Igitur tertius erit 15 — 5 ℞. qui ſi dederit primo quintam ſui partem, hoc eſt, 3 — 1 ℞. remanebunt illi 12 — 4 ℞. Et ſi à ſecundo 4. acceperit quartam partem, nimirum 1. habebit 13 — 4 ℞. qui numerus ęqualis eſſe debet 3 + 1 ℞. quantum ſcilicet tam primus, quam ſecundus habet, vt dictum eſt. Eſt ergo æquatio inter 13 — 4 ℞. & 3 + 1 ℞. Additiſque 4 ℞. vtrinque, inter 13. & 3 + 5 ℞. Ablatiſque 3. vtrinque, inter 10. & 5 ℞. Diuiſiſque 10. per 5. fiet 1 ℞. 2. Ac propterea primus numerus 3 ℞. erit 6. Secundus 4. vt poſuimus, & tertius 15 — 5 ℞. erit 5. Si namque primus 6. dederit tertiam ſui partem 2. acceperitque quintam partem tertij, videlicet 1. habebit 5. Ac tantundem habebit ſecundus 4. ſi dederit quartam ſui partem 1. tertio, acceperitque tertiam partem primi. Item tantum quoque habebit tertius 5. ſi dederit primo quintam partem, id eſt, 1. acceperitque à ſecundo 4. quartam partem, videlicet 1. quod eſt propoſitum.

Qvod ſi primus ſecundo debeat dare $\frac{1}{2}$. Secundus tertio $\frac{1}{4}$. & tertius primo $\frac{1}{3}$. Ponatur primus 2 ℞. vt habeat $\frac{1}{2}$. ſine fractione; Secundus autem 4. vt habeat $\frac{1}{4}$. ſine fractione. Secundus igitur poſtquam dederit $\frac{1}{4}$. tertio, ſumpſeritque $\frac{1}{2}$. à primo, habebit 1 ℞ + 3. Ac tantundem habere debet primus, poſtquam dederit $\frac{1}{2}$. ſecundo, acceperitque $\frac{1}{3}$. à tertio. At primus, poſtquam dederit $\frac{1}{2}$. ſecundo, habebit 1 ℞. reliquam, quæ cum 3. facit 1 ℞ + 3. Eſt ergo 3. tertia pars tertij, ideóque tertius erit 9. Reliquum eſt, vt tertius 9. poſtquam dederit $\frac{1}{3}$. primo, ſumpſeritque $\frac{1}{4}$. à ſecundo, habeat quoque 1 ℞ + 3. Habebit autem, ſi imperata fecerit, 7. Ergo æqualitas eſt inter 7. & 1 ℞ + 3. Ablatiſque 3. vtrinque, inter 4. & 1 ℞. Igitur 1 ℞. erit 4. ideóque primus, quem poſuimus 2 ℞. erit 8. Secundus 4. & tertius 9. Nam primus 8. ſi det $\frac{1}{2}$. accipiátque $\frac{1}{3}$. tertij, habebit 7. quemadmodum ſecundus, ſi det $\frac{1}{4}$. & accipiat $\frac{1}{2}$. primi. Nec non tertius, ſi det $\frac{1}{3}$. ſumátque $\frac{1}{4}$. ſecundi. Omnéſque tres numeri faciunt 21. triplum videlicet numeri 7. quem quiſque facit. quemadmodum etiam in primo exemplo omnes tres numeri 6. 4. 5. faciunt 15. triplum ſcilicet numeri 5. quem quiſque facit. In ſecundo porrò exemplo huius ænigmatis vides, non eſſe neceſſarium, vt partes datæ habeant denominatores, qui ſemper creſcant ordine, vt in primo exemplo contigit.

64 *Quatuor numeros inuenire ea lege, vt cum quiuis eorum proximè inſequenti datam ſui partem dederit, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.* LXIIII.

Det primus ſecundo tertiam ſui partem: Secundus tertio quartam: Tertius quarto quintam: Et quartus primo ſextam. Ac tantundem, poſtquam dederint, acceperintque dictas partes, fiant 4. numeri æquales. Ponatur primus 3 x. vt tertiam partem ſine fractione habeat. Secundus autem 4. vnitatũ, vt quartam partem habeat ſine fractione. Si ergo hic ſecundus accipiat $\frac{1}{3}$.primi 3 x. nimirum 1 x. atque det $\frac{1}{4}$. videlicet 1. tertio, habebit ipſe 1 x + 3. Ac tantundem oportet habere primum, poſtquam ſecundo dederit $\frac{1}{3}$. nimirum 1 x. acceperitque à quarto partem ſextam. Sed ſi det $\frac{1}{3}$. videlicet 1 x. ſuperſunt illi 2 x. quæ cum 3 — 1 x. conſtituunt 1 x + 3. vt ex hac formula colligitur. Inuenies autem 3 — 1 x. ſi 2 x. tolles ex 1 x + 3. Ergo ſexta pars quarti erit 3 — 1 x. Et ipſe quartus erit 18 — 6 x. Hic quartus ſi det $\frac{1}{6}$. remanebunt illi 15 — 5 x. & ſi accipiat $\frac{1}{5}$. tertij, debet habere 1 x — 3. ſicut tam primus, quam ſecundus.

	2 x	+ 0	
—	1 x	+ 3	
+	1 x	+ 3	

Sed ſi addantur 6 x — 12. ad 15 — 5 x. fit 1 x + 3. vt in hac formula apparet. Inuenies autem 6 x — 12. ſi 15 — 5 x. demantur ex 1 x + 3. Igitur $\frac{1}{5}$. tertij erit 6 x — 12. ipſeque tertius erit 30 x — 60. Reliquum eſt iam, tertium hunc habere quoque 1 x + 3. poſtquam quarto dederit $\frac{1}{5}$. videlicet 6 x — 12. acceperitque $\frac{1}{4}$. ſecundi 4. At ſi det $\frac{1}{5}$. ſuperſunt illi 24 x — 48. Et ſi acceperit $\frac{1}{4}$. à ſecundo, nimirum 1. habebit 24 x — 47. qui numerus æqualis debet eſſe 1 x + 3. Additis igitur 47. vtrinque, erit æqualitas inter 24 x. & 1 x + 50. Ablatáque 1 x. vtrinque, inter 23 x. & 50. Diuiſis ergo 50. per 23. fiet 1 x. $\frac{50}{23}$. Quocirca primus numerus 3 x erit $\frac{150}{23}$. Et ſecundus 4. ſiue $\frac{92}{23}$. Ac tertius 30 x — 60. erit $\frac{120}{23}$. Quartus denique 18 — 6 x. erit $\frac{114}{23}$. qui ænigma conficiunt. Et ſi abſtuleris denominatores, erunt quatuor numeri quæſiti integri 150. 92. 120. 114. propterea quod numeratores eandem proportionem habent, quam ipſæ minutiæ propter eundem denominatorem, vt ad finem lib. 9. Eucl. demonſtrauimus. [a] Et partes in quæſtione expreſſæ ita ſe habent ad numeros integros, vt ad dictas minutias. quia ita ſe habet V.g. $\frac{1}{3}$. numeri 12. ad 12. vt $\frac{1}{3}$. numeri 90. ad 90. &c. Itaque ſi primus 150. det $\frac{1}{3}$. nimirum 50. ſupererunt 100. & ſi accipiat $\frac{1}{6}$. quarti 114. nimirum 19. habebit 119. Item ſi ſecundus 92. det $\frac{1}{4}$. ſui numeri nimirum 23. remanebunt 69. & ſi accipiat $\frac{1}{3}$. primi 150. nimirum 50. habebit ſimiliter 119. Sic quoque ſi tertius 120. det $\frac{1}{5}$. ſui numeri, hoc eſt, 24. remanebunt 96. & ſi accipiat $\frac{1}{4}$. ſecundi 92. nimirum 23. habebit 119. Denique eodem modo, ſi quartus 114. det $\frac{1}{6}$. ſui numeri, videlicet 19. ſupererunt 95. & ſi accipiat $\frac{1}{5}$. tertij 120. nimirum 24. habebit 119.

	15	—	5 x	
—	12	+	6 x	
+	3	+	1 x	

a 15. quinti.

Hic etiam omnes 4. numeri inuenti 150. 92. 120. 114. efficiunt 476. quadruplum videlicet numeri 119. quem vnuſquiſque facit.

SCHO-

SCHOLIVM.

EODEM modo inuenientur 5. numeri, vel plures, ita vt, poſtquam vnuſquiſque ſequenti partem datam dederit, tandem fiant 5. numeri æquales, vel plures. Omneſque ſimul facient ſemper ſummam, quæ toties numerum, quem ſinguli faciunt, continebit, quot ſunt ipſi numeri.

Sint enim inueniendi 5. numeri, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$. ſecundo, acceperitque $\frac{1}{5}$. à quinto: Secundus verò dederit $\frac{1}{2}$. tertio, acceperitque $\frac{1}{3}$. à primo: Item tertius dederit $\frac{1}{7}$. quarto, acceperitque $\frac{1}{2}$. à ſecundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$. quinto, acceperitque $\frac{1}{7}$. à tertio. Quintus denique dederit $\frac{1}{5}$. primo, acceperitque $\frac{1}{6}$. à quarto, fiant tandem 5. numeri æquales. Ponatur primus 3 x. vt habeat $\frac{1}{3}$ ſine fractione. Secundus verò 2. vt habeat $\frac{1}{2}$. ſine fractione. Si ergo ſecundus det $\frac{1}{2}$. tertio, id eſt, 1. remanebit illi 1. Et ſi accipiat $\frac{1}{3}$. à primo, nimirum 1 x. habebit 1 x + 1. quem numerum vnuſquiſque tandem habere debet. Primo autem, ſi det $\frac{1}{3}$. ſecundo, ſupererunt 2 x. quæ cum $\frac{1}{5}$. quinti facere debent 1 x + 1. At 2 x. cum 1 — 1 x. faciunt 1 x + 1. vt conſtat, ſi 2 x. detrahantur ex 1 x + 1. Igitur quinta pars quinti erit 1 — 1 x. & totus quintus 5 — 5 x. Huic quinto, ſi det $\frac{1}{5}$. remanebunt 4 — 4 x. quæ cum $\frac{1}{6}$. quarti facere debent 1 x + 1. Faciunt autem 4 — 4 x. cum 5 x — 3. numerum 1 x + 1. vt patet, ſi 4 — 4 x. detrahantur ex 1 x + 1. Igitur $\frac{1}{6}$. quarti numeri erit 5 x — 3. totúſque quartus erit 30 x — 18. Huic quarto ſi det $\frac{1}{6}$. quinto, ſupererunt 25 x — 15. quæ cum $\frac{1}{7}$. tertij facere debent 1 x + 1. Faciunt autem 25 x — 15. cum 16 — 24 x. numerum 1 x + 1. vt patet, ſi 25 x — 15. demantur ex 1 x + 1. Igitur 16 — 24 x. erunt $\frac{1}{7}$. tertij numeri, totúſque tertius erit 112 — 168 x. Huic tertio, ſi det $\frac{1}{7}$. quarto, remanent 96 — 144 x. quæ cum $\frac{1}{2}$. ſecundi, id eſt, cum 1. facit 97 — 144 x. quæ æqualia debent eſſe 1 x + 1. Additis 144 x. vtrinque, erit æquatio inter 97. & 145 x + 1. Ablatáque 1. vtrinque, inter 96. & 145 x. Diuiſis igitur 96. per 145. fiet 1 x. $\frac{96}{145}$. Ergo primus numerus poſitus 3 x. erit $\frac{288}{145}$. Secundus autem poſitus 2. erit $\frac{290}{145}$. Tertius deinde inuentus 112 — 168 x. erit $\frac{112}{145}$. Quartus deinde, qui inuentus fuit 30 x — 18. erit $\frac{270}{145}$. Quintus denique inuentus 5 — 5 x. erit $\frac{245}{145}$. Et deletis denominatoribus, erunt quinque numeri inuenti integri. 288. 290. 112. 270. 245. qui problemati ſatisfaciunt. Nam ſi datas partes dent, & recipiant, vnuſquiſque habebit 241. qui numerus quintuplicatus facit 1205. ſummam omnium quinque numerorum inuentorum.

65 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt poſterior pars cum data parte aliquota prioris faciat datum quemlibet numerum.* LXV.

SIT numerus 60. diſtribuendus in duos, ita vt poſterior cum $\frac{1}{5}$. prioris efficiat 28. Ponatur prior pars 5 x. vt dare poſſit $\frac{1}{5}$. ſine fractione: eritque posterior pars 60 — 5 ꝝ. quæ si acceperit $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 1 ꝝ. habebit 60 — 4 ꝝ. qui numerus æqualis debet esse datò numero 28. Additis igitur 4 ꝝ. vtrinque, erit æquatio inter 60. & 4 ꝝ + 28. Ablatisque 28. vtrinque, inter 32. & 4 ꝝ. Diuisis ergo 32. per 4. fiet 1 ꝝ. 8. Ac propterea prior pars 5 ꝝ. erit 40. posterior vero 20. quæ si acceperit $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 8. habebit 28.

SCHOLIVM.

HOC idem sine Algebra efficietur hoc modo. Dempto numero dato, qui effici debet, à numero dato, qui distribuendus est. Diuidatur reliquus numerus per denominatorem partis datæ, minus vno. Quotiens namque per denominatorem partis multiplicatus, exhibebit priorem numerum, &c. Vt in dato exemplo, si datus numerus 28. dematur ex diuidendo numero 60. & reliquus numerus 32. diuidatur per 4. (numerum videlicet vnitate minorem denominatore quintæ partis) fiet Quotiens 8. quo ducto in 5. denominatorem partis quintæ, producetur prior numerus 40. Posterior ergo erit 20.

Si idem numerus 60. secundus sit in duos, ita vt posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris efficiat 59. Dempto numero 59. ex 60. & reliquo numero 1. diuiso per 4. fit Quotiens $\frac{1}{4}$. qui ductus in 5. faciet $\frac{5}{4}$. priorem numerum. Posterior ergo erit 58. $\frac{3}{4}$. Nam si huic addatur $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum $\frac{1}{4}$. conflabitur datus numerus 59.

LXVI. 66 *Duos numeros inuenire, quorum summa æqualis sit dato numero, & posterior cum data parte prioris efficiat datum quoque alium numerum.*

HOC ænigma cum præcedenti coincidit. Nam si summa data secetur in duas partes, vt ibi imperatur, inuenti erunt duo numeri quæsiti. Vt si inueniendi sint duo numeri, quorum summa 60. & posterior numerus cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 28. diuidendus erit numerus 60. vt dictum est, eruntque quæsiti numeri 40. & 20.

Si verò inueniendi sint duo numeri, quorum summa 60. & posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 59. erit prior numerus 1 $\frac{1}{4}$. posterior autem 58 $\frac{3}{4}$. vt in scholio præcedenti patuit.

LXVII. 67 *Tres numeros inuenire, ita vt, cum vnusquisque à summa reliquorum duorum datam partem acceperit, fiant tres numeri æquales.*

FAC, vt si primus sumat à summa reliquorum duorum $\frac{1}{3}$. Secundus à summa reliquorum duorum $\frac{1}{4}$. Et tertius à summa duorum reliquorum $\frac{1}{5}$. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1 ꝝ. summa

summa verò reliquorum duorum ponatur numerus 3. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Si igitur primus à duobus reliquis accipiat $\frac{1}{3}$. habebit 1 ꝝ + 1. Et quia secundus à summa reliquorum duorum accipiens $\frac{1}{4}$. debet etiam facere 1 ꝝ + 1. diuidenda erit summa omnium trium, nimirum 1 ꝝ + 3. in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1 ꝝ + 1. Posterior enim pars erit secundus numerus, & pars prior summa primi ac tertij. Diuisio autem hæc fiet, vt in scholio ænigmatis 65. docui, hoc modo. Dempto numero 1 ꝝ + 1. qui effici debet, ex summa 1 ꝝ + 3. omnium trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quartæ, vno minus, nimirum per 3. & quotiens $\frac{2}{3}$. per denominatorem 4. multiplicetur. Procreatus enim numerus $\frac{8}{3}$. erit prior pars, quæ ablata ex summa 1 ꝝ + 3. omnium trium, relinquet partem posteriorem 1 ꝝ + $\frac{1}{3}$. pro secundo numero. Huic enim si addatur $\frac{1}{4}$. prioris partis $\frac{8}{3}$. (quæ est summa primi ac tertij) nimirum $\frac{2}{3}$. fiet numerus 1 ꝝ + 1.

Rursus quia tertius sumens $\frac{1}{5}$. à summa primi & secundi debet etiam facere 1 ꝝ + 1. diuidenda erit summa 1 ꝝ + 3. omnium trium eodem modo in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1 ꝝ + 1. quod ita fiet. Dempto numero 1 ꝝ + 1. qui effici debet, ex summa 1 ꝝ + 3. omnium trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quintę, vno minus, hoc est, per 4. Et quotiens $\frac{2}{4}$. vel $\frac{1}{2}$. in denominatorem 5. ducatur. Productus enim numerus $\frac{5}{2}$. erit prior pars, summa videlicet primi ac secundi. quæ pars ablata ex summa 1 ꝝ + 3. omnium trium, reliquam faciet partem posteriorem 1 ꝝ + $\frac{1}{2}$. Hæc enim accipiens $\frac{1}{5}$. summæ primi ac secundi, quæ fuit $\frac{5}{2}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. faciet quoque 1 ꝝ + 1. Reliquum iam est, vt omnes tres numeri inuenti 1 ꝝ. 1 ꝝ + $\frac{1}{3}$. 1 ꝝ + $\frac{1}{2}$. conficiant summam 1 ꝝ + 3. omnium trium. Faciunt autem 3 ꝝ + $\frac{5}{6}$. Est ergo æquatio inter 1 ꝝ + 3. & 3 ꝝ + $\frac{5}{6}$. Et ablata 1 ꝝ vtrinque, inter 3. & 2 ꝝ + $\frac{5}{6}$. Ablatisque $\frac{5}{6}$ vtrinque, inter 2 $\frac{1}{6}$. & 2 ꝝ. Diuisis igitur 2 $\frac{1}{6}$. per 2. fiet 1 ꝝ. $\frac{13}{12}$. pro primo numero quæsito, qui positus fuit 1 ꝝ. Secundus, qui inuentus fuit 1 ꝝ + $\frac{1}{3}$. erit $\frac{51}{36}$. siue $\frac{17}{12}$. Tertius denique, quem inuenimus esse 1 ꝝ + $\frac{1}{2}$. erit $\frac{38}{24}$. hoc est, $\frac{19}{12}$. Et si neglexeris denominatores, erunt tres numeri quæsiti integri 13. 17. 19. problema propositum absoluentes. Nam & primus 13. cum $\frac{1}{3}$. secundi & tertij, id est, cum 12. & secundus 17. cum $\frac{1}{4}$. primi & tertij, hoc est, cum 8. & tertius 19. cum $\frac{1}{5}$. primi & secundi, nimirum cum 6. facit 25.

Hic autem summa trium numerorum inuentorum 49. non est tripla numeri 25. quem vnusquisque facit: quemadmodum in ænigmate 63. fiebat.

68 *Quatuor numeros inuenire ea conditione, vt cum vnusquisque à summa reliquorum trium datam partem acceperit, fiant quatuor numeri æquales.* LXVIII

STATVAMVS, vt ſi primus ſumat $\frac{1}{3}$. ſummæ aliorum trium: Secundus $\frac{1}{4}$. ſummæ aliorum trium: Tertius $\frac{1}{5}$. ſummæ trium reliquorum: Quartus denique $\frac{1}{6}$. ſummæ aliorum trium; quatuor numeri fiant æquales. Ponatur primus 1 ℞. & ſumma aliorum trium numerus 3. habens $\frac{1}{3}$. ſine fractione. Primus igitur ſumens $\frac{1}{3}$. huius ſummæ, videlicet 1. faciet 1 ℞ + 1. Et quia ſecundus cum $\frac{1}{4}$. ſummæ reliquorum trium debet etiam facere 1 ℞ + 1. diuidenda erit ſumma 1 ℞ + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1 ℞ + 1. ſicut in præcedenti problemate. Poſterior enim pars erit ſecundus numerus, & prior ſumma primi, tertij, & quarti. Inuenta autem fuit in antecedenti problemate pars poſterior 1 ℞ + $\frac{1}{3}$. pro ſecundo numero.

DEINDE quia tertius ſumens $\frac{1}{5}$. ſummæ primi, ſecundi, & quarti, debet ſimiliter conficere 1 ℞ + 1. diuidenda rurſum erit ſumma 1 ℞ + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1 ℞ + 1. Inuenta fuit in præcedenti problemate poſterior pars 1 ℞ + $\frac{1}{2}$. pro tertio numero.

POSTREMO quia quartus accipiens $\frac{1}{6}$. ſummæ reliquorum trium debet etiam facere 1 ℞ + 1. diuidemus ſummam 1 ℞ + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{6}$. prioris faciat 1 ℞ + 1. quod per ſcholium ænigmatis 65. ita fiet. Dempto numero 1 ℞ + 1. qui effici debet, ex ſumma 1 ℞ + 3. omnium quatuor, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis $\frac{1}{6}$. vno minus, nimirum per 5. & quotiens $\frac{2}{5}$. in ipſum denominatorem 6. ducatur. Productus enim numerus $\frac{12}{5}$. erit prior pars, ſumma ſcilicet primi, ſecundi, ac tertij. quæ pars ſubtracta ex ſumma 1 ℞ + 3. omnium quatuor, reliquam faciet partem poſteriorem 1 ℞ + $\frac{3}{5}$. Hæc enim cum $\frac{1}{6}$. prioris, hoc eſt, cum $\frac{2}{5}$. faciet 1 ℞ + 1. Reliquum iam eſt, vt omnes 4. numeri inuenti 1 ℞. 1 ℞ + $\frac{1}{3}$. 1 ℞ + $\frac{1}{2}$. 1 ℞ + $\frac{3}{5}$. integrent ſummam 1 ℞ + 3. omnium quatuor. Faciunt autem 4 ℞ + $\frac{43}{30}$. Eſt igitur æqualitas inter 1 ℞ + 3. & 4 ℞ + $\frac{43}{30}$. Ablatáque 1 ℞ vtrinque, inter 3. & 3 ℞ + $\frac{43}{30}$. Ablatiſque $\frac{43}{30}$. vtrinque, inter $1\frac{17}{30}$. & 3 ℞. Diuiſis ergo $1\frac{17}{30}$. ſiue $\frac{47}{30}$. per 3. fiet 1 ℞. $\frac{47}{90}$. pro primo numero quæſito, quem poſuimus eſſe 1 ℞. Secundus inuentus 1 ℞ + $\frac{1}{3}$. erit $\frac{231}{270}$. hoc eſt, $\frac{77}{90}$. Tertius autem inuentus 1 ℞ + $\frac{1}{2}$. erit $\frac{184}{180}$. id eſt, $\frac{92}{90}$. Quartus denique inuentus 1 ℞ + $\frac{3}{5}$. erit $\frac{505}{450}$. ſiue $\frac{101}{90}$. Et ſi abieceris denominatores, inuenti erunt quatuor numeri integri 47. 77. 92. 101. qui quæſtioni ſatisfaciunt. Nam & primus 47. cum $\frac{1}{3}$. ſecundi, tertij, & quarti, id eſt, cum 90. & ſecundus 77. cum $\frac{1}{4}$. primi, tertij, & quarti, hoc eſt, cum 60. & tertius 92. cum $\frac{1}{5}$. primi, ſecundi, ac quarti, id eſt, cum 45. & quartus 101. cum $\frac{1}{6}$. primi, ſecundi, & tertij, videlicet cum 36. facit 137.

Hic etiam ſumma quatuor numerorum inuentorum 317. quadrupla non eſt numeri 137. quem vnuſquiſque facit, quemadmodum in ænigmate 64. fiebat.

SCHO-

S C H O L I V M.

NON aliter inuenientur 5. numeri, vel 6. vel plures, ita vt ſi vnuſquiſque à ſumma reliquorum acceperit datam partem, fiant totidem numeri æquales.

69 *Tres numeros inuenire ea lege, vt ſi vnuſquiſque proximè inſequenti det imperatam ſui partem, poſtquam mutuò dederunt, & acceperunt, ſinguli habeant eundem numerum datum.* LXIX.

SINT inueniendi tres numeri, vt ſi primus det $\frac{1}{3}$. ſecundo; ſecundus $\frac{1}{4}$. tertio; & tertius $\frac{1}{5}$. primo, fiant tres numeri 30. 30. 30. In ænigmate 63. inuenimus tres numeros eadem conditione, niſi quòd tres numeros æquales, qui fieri debent, non determinauimus ad certum numerum, vt hic. Ergo inuentis, per ænigma 63. tribus numeris 6. 4. 5. qui illi ænigmati ſatisfaciunt; vt inueniantur alij tres implentes conditiones huius ænigmatis: ponantur pro tribus numeris tot radices, quot vnitates ſunt in tribus numeris inuentis, nimirum 6 ℞. 4 ℞. 5 ℞. Si ergo primus 6 ℞. det $\frac{1}{3}$. ſupererunt 4 ℞. & ſi à tertio 5 ℞. accipiat $\frac{1}{5}$. habebit 5 ℞. qui numerus æqualis debet eſſe imperato numero 30. Quocirca diuiſis 30. per 5. fiet 1 ℞. 6. ac proinde primus 6 ℞. erit 36. ſecundus 4 ℞. erit 24. & tertius 5 ℞. erit 30. Nam primus 36. amittens $\frac{1}{3}$. habebit 24. & accipiens $\frac{1}{5}$. tertij, nimirum 6. habebit 30. Ita quoque ſecundus 24. dans $\frac{1}{4}$. habebit 18. & recipiens $\frac{1}{3}$. primi, nimirum 12. habebit 30. Ac tandem tertius 30. abiiciens $\frac{1}{5}$. habebit 24. & reſumens $\frac{1}{4}$. à ſecundo, nimirum 6. habebit quoque 30. vt alij.

Aliter. Quoniam ſinguli conficere debent 30. erunt omnes tres numeri quæſiti 90. At tres numeri poſiti 6 ℞. 4 ℞. 5 ℞. faciunt 15 ℞. qui numerus æqualis eſſe debet numero 90. Diuiſis ergo 90. per 15. fiet 1. ℞. 6. veluti prius.

S C H O L I V M.

AD eundem modum in ænigmate 64. 67. & 68. determinari poterit numerus, quem ſinguli conficere debent. Vt ſi in præcedenti problemate 68 quilibet quatuor numerorum debeat efficere 100. Quoniam 4. numeri inuenti fuerunt 47. 77. 92. 101. Ponemus 4. numeros eſſe 47 ℞. 77 ℞. 92 ℞. 101 ℞. faciétque primus cum $\frac{1}{3}$. reliquorum trium, nimirum cum 90 ℞. numerorum 137 ℞. qui æqualis eſſe debet imperato numero 100. Diuiſis ergo 100. per 137. fiet 1 ℞. $\frac{100}{137}$. Igitur primus numerus 47 ℞. erit $\frac{4700}{137}$. Secundus $\frac{7700}{137}$. Tertius $\frac{9200}{137}$. & quartus $\frac{10100}{137}$. qui conditionem proble-

matis implent, dummodo denominatores nõ abiiciantur. Nam primus $\frac{[illegible]}{137}$. cum $\frac{1}{3}$. reliquorum trium, id est, cum $\frac{2000}{137}$. facit $\frac{13700}{137}$. videlicet 100. *Sic etiam secundus $\frac{7700}{137}$. cum $\frac{1}{4}$. reliquorum trium, id est, cum $\frac{6000}{137}$. facit $\frac{13700}{137}$. hoc est,* 100. *Eundem numerum* 100. *facit tam tertius cum $\frac{1}{5}$. reliquorum trium, quam quartus cum $\frac{1}{6}$. trium reliquorum.*

PORRO in ænigmate 68.& 67. si vnusquisque numerorum facere debeat certum quendam numerum determinatum, locum non habebit secunda solutio præsentis ænigmatis 69. quia summa trium numerorum in 67. ænigmate, vel 4. numerorum in 68. ænigmate inuentorum, non est tripla, vel quadrupla numeri, quem quisque conficit, postquam imperata impleuerit, vt ibi diximus. Solum ergo adhiberi poterit in ænigmate 63. vt in hoc ænigmate 69. factum est: nec non in ænigmate 64. vt iam iam videbis.

Sint enim inueniendi 5. numeri, vt si primus dederit $\frac{1}{3}$. secundo, acceperitque $\frac{1}{5}$. à quinto: Secundus verò dederit $\frac{1}{2}$. tertio, acceperitque $\frac{1}{3}$. à primo: Tertius verò dederit $\frac{1}{7}$. quarto, sumpseritque $\frac{1}{2}$. à secundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$. quinto, acceperitque $\frac{1}{7}$. à tertio: Quintus denique dederit $\frac{1}{5}$ primo, acceperitque $\frac{1}{6}$. à quarto; fiant tandem quinque numeri æquales, quorum quisque 1205. vnitates contineat. In scholio ænigmatis 64. inuenti sunt 5. numeri ea conditione, quam hic expressimus, 288. 290. 112. 270. 245. quorum vnusquisque, si imperata impleuerit, habet 241. Debet autem, vt hic iubetur, quilibet habere 1205. Ponantur ergo quinque numeri, 288 ℞. 290 ℞. 112 ℞. 270 ℞. 245 ℞. Si hi numeri imperata executi fuerint, habebit vnusquisque 241 ℞. vt dictum est, qui numerus æqualis esse debet dato numero 1205. Diuisis igitur 1205. per 241. fiet 1 ℞ 5. Igitur primus numerus positus 288 ℞. erit 1440. Secundus positus 290 ℞. erit 1450. Tertius positus 112 ℞. erit 560. Quartus positus 270 ℞. erit 1350. Quintus denique positus 245 ℞. erit 1225. Nam si imperata fecerint hi 5. numeri, deprehendes, vnumquemque habere 1205.

Aliter. Quoniam vnusquisque facere debet 1205. erit summa omnium quinque, 6025. Sed quinque numeri positi 288 ℞. 290 ℞. 112 ℞. 270 ℞. 245 ℞. faciunt summam 1205 ℞. Diuisis igitur 6025. per 1205. fiet 1 ℞ 5. veluti prius.

LXX. 70 *Datum numerum in tres, quatuor, vel plures partiri ea conditione, vt si quisque proximè sequenti det imperatam sui partem, postquam mutuò dederint, & acceperint, fiant tres numeri, vel quatuor, vel plures æquales.*

HOC ænigma à præcedenti non differt. Nam si datus numerus in tot partes æquales distribuatur, quot in ænigmate exprimuntur, inue-

niendi erunt per ænigma præcedens, eiúsque scholium, (adhibito tamen ænigmate 63.& 64. eiúsque scholio) totidem numeri, qui propositam cõditionem seruantes faciant totidem numeros æquales vni parti numeri dati, qui in totidem partes fuit distributus. In hos enim numeros inuentos datus numerus diuidẽdus est; quippe cum omnes simul faciant summam triplam, vel quadruplam numeri, quem vnusquisque inuentorum facere debet, vt dictum est.

V.g. Si numerus 90. distribuendus sit in tres, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$. secundo; secundus $\frac{1}{4}$. tertio; & tertius $\frac{1}{5}$. primo; fiant tres numeri æquales: distribuatur datus numerus 90. in tres partes æquales 30. 30. 30. ac per ænigma 69. reperiantur tres numeri, vt seruata conditione præscripta, vnusquisque faciat 30. Inuenti numeri erunt 36. 24. 30. atq; in hos distribuendus est datus numerus 90. Nam si præscriptam legem obseruent, facient vnusquisque 30.

PARI ratione, si numerus 6025. distribuendus sit in quinque partes, vt cum prima dederit $\frac{1}{3}$. secundæ; secunda $\frac{1}{2}$. tertiæ; tertia $\frac{1}{7}$. quartæ; quarta $\frac{1}{6}$. quintæ: & quinta $\frac{1}{5}$. primæ, singuli habeant eundem numerum: distribuendus erit datus numerus in quinque æquales partes 1205. 1205. 1205. 1205. 1205. & per scholium præcedentis ænigmatis (adiuuante scholio ænigmatis 64.) inueniendi quinque numeri, vt seruata lege præscripta, vnusquisque faciat 1205. qui quidem sunt, vt in proximo scholio patuit, 1440. 1450. 560. 1350. 1225. Atque in hos distribuendus est datus numerus 6025.

71 *Datis duobus numeris, alium quendam inuenire, qui vtrumque datum multiplicans faciat maiorem quidem quadratum, minorem verò latus eius quadrati.* LXXI.

SINT dati duo numeri 200. & 5. sitque numerus, quem quærimus, 1 ℞. Ex 1 ℞. in 200. fit numerus 200 ℞. Et ex 1 ℞ in 5. fit numerus 5 ℞. qui debet latus esse illius: atque adeo in se ductus faciet numerum æqualem 200 ℞. Facit autem numerus 5 ℞. in se 25 ʒ. Est ergo æquatio inter 200 ℞. & 25 ʒ. Diuisis igitur 200. per 25. fiet 1 ℞. 8. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales.) Hic enim multiplicans 200. facit quadratum 1600. cuius latus est numerus 40. ex 8. in 5. productus.

Si numeri dati sint 20. & 15. reperietur numerus $\frac{4}{45}$. Nam si ponatur numerus quæsitus 1 ℞. fiunt ex 1 ℞. in 20. & 15. numeri 20 ℞. & 15 ℞. Et ex 15 ℞. in se fit numerus 225 ʒ. qui æqualis debet esse quadrato 20 ℞. Diuisis igitur 20. per 225. fit 1 ℞. $\frac{20}{225}$. siue $\frac{4}{45}$. numerus quæsitus. Hic enim multiplicans 20. & 15. facit $\frac{80}{45}$. siue $\frac{16}{9}$. quadratum, cuius latus est numerus $\frac{60}{45}$. siue $\frac{4}{3}$. productus ex $\frac{4}{45}$. in 15.

LXXII. 72 *Duos numeros inuenire, ita vt summa ex ipsis confecta, & excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, datos numeros efficiant: dummodo datus quadratorum excessus minor sit, quàm datæ summæ quadratus.*

SIT eorum summa data 20. & excessus quadratorum datus 80. qui excessus minor est quadrato 400. datæ summæ 20.

Ponatur primus numerus 1 ℞. ideóque secundus 20 — 1 ℞. vt eorum summa sit 20. Quadrati eorum 1 ʒ. & 400 — 40 ℞ + 1 ʒ. cum ex ductu 20 — 1 ℞. in 20 — 1 ℞. fiat numerus 400 — 40 ℞ + 1 ʒ. vt in hac formula apparet. Detracto illo quadrato ex hoc, remanet excessus 400 — 40 ℞. æqualis 80. Additis 40 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 400. & 80 + 40 ℞. Ablatísque 80. vtrinque, inter 320. & 40 ℞. Diuisis ergo 320. per 40. fiet 1 ℞. 8. primus numerus, secundus verò positus 20 — 1 ℞. erit 12. Summa numerorum 8. & 12. est 20. & quadratorum 64. & 144. excessus 80.

```
      20 — 1 ℞
      20 — 1 ℞
  ----------------
    — 20 ℞ + 1 ʒ
400 — 20 ℞
  ----------------
400 — 40 ℞ + 1 ʒ
```

QVOD si detur eadem summa numerorum 20 & excessus quadratorum 400. qui minor non est quadrato 400. qui ex summa fit: erit quæstio impossibilis. Nam posito primo numero 1 ℞. & secundo 20 — 1 ℞. erunt rursus eorum quadrati 1 ʒ. & 400 — 40 ℞ + 1 ʒ. quorum excessus 400 — 40 ℞. æqualis debet esse numero 400. quod fieri non potest.

DETVR rursus summa numerorum 20. & excessus quadratorum item 20. Posito primo numero 1 ℞. & secundo 20 — 1 ℞. erit eorum summa 20. & excessus quadratorum 400 — 40 ℞. æqualis 20. Additis ergo vtrinque 40 ℞. erit æquatio inter 20 + 40 ℞. & 400. Ablatísque 20. vtrinque, inter 380. & 40. ℞. Diuisis ergo 380. per 40. fiet 1 ℞. 9 $\frac{1}{2}$. primus numerus. Secundus ergo erit 10 $\frac{1}{2}$. quorum summa 20. & excessus quadratorum $\frac{441}{4}$. $\frac{361}{4}$. numerus $\frac{80}{4}$. hoc est 20.

LXXIII 73 *Datum numerum in duos diuidere, vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, sit quilibet numerus minor quadrato dati numeri.*

SIT datus numerus 20. diuidendus in duos, vt excessus quadratorum ex ipsis factorum sit 80. Hoc ænigma à præcedenti diuersum non est. Nam si reperiantur duo numeri, quorum summa datus numerus 20. & excessus quadratorum ex ipsis factorum 80. erit summa data 20. in illos duos numeros distribuenda, &c.

74 Duos

74 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad excessum numerorum inuentorum proportionem habeat datam.* LXXIIII

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, & summa quadratorum ex ipsis procreatorum ad summam inuentorum numerorum proportionem habeat decuplam. Ponatur minor numerus 1 ℞. maior 3 ℞. ad illum triplus. Excessus est 2 ℞. Et quadratorum 1 ʒ. 9 ʒ. summa 10 ʒ. decupla ad 2 ʒ. Ergo æquatio est inter 10 ʒ. & 20 ℞. Diuisis igitur 20. per 10. fiet 1 ℞. 2. minor numerus, (quia numeri Cossici collaterales sunt) maiórq; erit 6. Excessus eorum est 4. & summa quadratorum 4. 36. est 40. qui numerus excessus 4. decuplus est.

75 *Duos numeros in data proportione reperire, ita vt excessus quadratorum ipsorum ad excessum inuentorum numerorum proportionem habeat datam.* LXXV.

NVMERI quæsiti habeant proportionem triplam, & ad eorum excessum habeat excessus quadratorum proportionem duodecuplam. Ponatur minor numerus 1 ℞ maior 3 ℞. illius triplus. Excessus eorum est 2 ℞. Quadratorum 1 ʒ. & 9 ʒ. est 8 ʒ. duodecuplam habens proportionem ad 2 ℞. Igitur æquatio erit inter 8 ʒ. & 24 ℞. Diuisis ergo 24. per 8. fiet 1 ℞. 3. minor numerus (quod collaterales sint numeri Cossici) maiorque erit 9. Excessus eorum est 6. Et quadratorum 9. & 81. excessus 72. ad 6. proportionem habet duodecuplam.

76 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum summam datam habeat proportionem.* LXXVI.

HABEANT quæsiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum genitus ad eorum summam, proportionem septuplam. Ponatur minor 1 ℞. maior 4 ℞. illius quadruplus. Summa eorum est 5 ℞. Et ex 1 ℞ in 4 ℞. fit numerus 4 ʒ. qui septuplam proportionem habere debet ad 5 ℞. Ergo æquatio erit inter 4 ʒ. & 35 ℞. Diuisisque 35. per 4. fiet 1 ℞. $\frac{35}{4}$. minor numerus quod numeri Cossici sint collaterales. Maior ergo erit $\frac{140}{4}$. Summa eorum est $\frac{175}{4}$. Ex $\frac{35}{4}$. in $\frac{140}{4}$. fit numerus $\frac{4900}{16}$. qui ad $\frac{175}{4}$. proportionem habet septuplam.

LXXVII 77 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum excessum datam habeat proportionem.*

Habeant quæsiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum productus ad eorum excessum proportionem septuplam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 4 ℞. illius quadruplus. Excessus eorum est 3 ℞. Et productus ex 1 ℞. in 4 ℞. est 4 ȝ. qui septuplam habere debet proportionem ad 3 ℞. Ergo æquatio erit inter 4 ȝ. & 21 ℞. Diuisisque 21. per 4. fiet 1 ℞. $\frac{21}{4}$. minor numerus: quod numeri Cossici collaterales sint. Maior ergo erit $\frac{84}{4}$. Excessus eorum est $\frac{63}{4}$. Ex $\frac{21}{4}$. in $\frac{84}{4}$. fit numerus $\frac{1764}{16}$. qui ad $\frac{63}{4}$. proportionem habet septuplam.

LXXVIII 78 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt quadratus minoris ad maiorem numerum proportionem habeat datam.*

Habeant numeri quæsiti proportionem triplam, & quadratus minoris ad maiorem, sextuplam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Quadratus minoris est 1 ȝ. qui sexcuplus esse debet maioris numeri 3 ℞. Ergo æquatio est inter 1 ȝ. & 18 ℞. Diuisisque 18. per 1. fiet 1 ℞. 18. minor numerus, quod numeri Cossici sint collaterales. Maior ergo erit 54. Quadratus minoris, nimirum 324. ad maiorem 54. proportionem habet sexcuplam.

LXXIX. 79 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad Quotientem, si maior per minorem diuidatur, proportionem habeat quamcunque datam.*

Habeant numeri quæsiti proportionem quadruplam, at quadratus minoris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, duplam. Ponantur quæsiti numeri 1 ℞. 4 ℞. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens 4. ad quem 1 ȝ. quadratus minoris proportionem debet habere duplam, ita vt æquatio sit inter 1 ȝ. & 8. Diuisis 8. per 1. fit 1 ȝ. 8. & 1 ℞. √ȝ 8. minor numerus. Maior ergo erit √ȝ 128. ad √ȝ. 8. quadruplus. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens √ȝ 16. id est, 4. ad quem 8. quadratus minoris proportionem habet duplam. Maior ergo erit 18. Quadratúsque minoris, nimirum 36. ad ipsum minorem 6. habet proportionem sexcuplam.

80 Duos

80 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum summam habeat proportionem datam quamlibet.* LXXX.

Habeant quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris sexcuplam ad eorum summam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Quadratus minoris est 1 ȝ. qui sexcuplam proportionem habere debet ad 4 ℞. summam videlicet amborum. Ergo æquatio erit inter 1 ȝ. & 24 ℞. Diuisisque 24. per 1. fiet 1 ℞. 24. quod numeri Cossici sint collaterales. Numeri ergo quæsiti sunt 24. 72. in proportione tripla. Et quadratus minoris 576. sexcuplam proportionem habet ad 96. summam ex ambobus collectam.

81 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum excessum habeat datam proportionem.* LXXXI.

Habeant quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris sexcuplam ad eorum excessum. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Excessus illorum est 2 ℞. ad quem quadratus 1 ȝ. minoris habere debet sexcuplam proportionem. Ita vt æquatio fit inter 1. ȝ. & 12 ℞. Diuisis ergo 12. per 1. fiet 1 ℞. 12. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Numeri igitur sunt quæsiti 12. 36. triplam habentes proportionem. Et quadratus minoris, videlicet 144. ad 24. excessum eorum sexcuplus est.

82 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad minorem habeat proportionem datam.* LXXXII.

Habeant quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus maioris ad minorem, sexcuplam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Quadratus maioris 9 ȝ. ad minorem 1 ℞. proportionem habere debet sexcuplam. Erit ergo æquatio inter 9 ȝ. & 6 ℞. Diuisisque 6. per 9. fiet 1 ℞. $\frac{6}{9}$. siue $\frac{2}{3}$. quod numeri Cossici sunt collaterales. Numeri ergo quæsiti sunt $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{3}$. proportionem habentes triplam. Et quadratus maioris, nimirum $\frac{36}{9}$. proportionem sexcuplam habet ad minorem $\frac{2}{3}$ siue ad $\frac{6}{9}$.

83 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt quadratus maioris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, proportionem habeat datam quamcunque.* LXXXIII

Dd 3

HABEANT quæſiti numeri proportionem quadruplam, at quadratus maioris ad Quotientem, diuiſo maiore per minorem, duplam. Ponantur numeri quæſiti 1 ℞. 4 ℞. Diuiſo hoc per illum, fit Quotiens 4. ad quem 16 ʓ. quadratus maioris proportionem debet habere duplam: ita vt æquatio ſit inter 16 ʓ. & 8. Diuiſis 8. per 16. fit 1 ʓ. $\frac{1}{2}$. & 1 ℞. √ʓ $\frac{1}{2}$. minor numerus. Maior ergo erit √ʓ 8. illius quadruplus. Diuiſo maiore per minorem, fit Quotiens √ʓ 16. id eſt, 4. ad quem 8. quadratus maioris proportionem habet duplam.

LXXXIV 84 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum ſummam habeat datam proportionem.*

HABEANT numeri quæſiti proportionem triplam, & quadratus maioris ſexcuplam ad eorum ſummam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Quadratus maioris 9 ʓ. ſexcuplus eſſe debet ad eorum ſummam 4 ℞. Eſt igitur æquatio inter 9 ʓ. & 24 ℞. Diuiſiſque 24. per 9. fiet 1 ℞. $\frac{24}{9}$. vel $\frac{8}{3}$. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Ac proinde numeri quæſiti triplam habentes proportionem erunt $\frac{8}{3}$. $\frac{24}{3}$. Et quadratus maioris $\frac{576}{9}$. ſexcuplus eſt ad $\frac{32}{3}$. eorum ſummam: hoc eſt, ad $\frac{96}{9}$.

LXXXV. 85 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum exceſſum habeat proportionem datam.*

HABEANT numeri quæſiti proportionem triplam, & quadratus maioris ad eorum exceſſum, decuplam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Exceſſus eorum eſt 2 ℞. ad quem quadratus maioris 9 ʓ. decuplus eſſe debet. Eſt igitur æquatio inter 9 ʓ. & 20 ℞. Diuiſiſque 20. per 9. fiet 1 ℞. $\frac{20}{9}$. propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt. Numeri ergo quæſiti ſunt $\frac{20}{9}$. $\frac{60}{9}$. in proportione tripla. Exceſſus eorum eſt $\frac{40}{9}$. ad quem decuplus eſt quadratus maioris $\frac{3600}{81}$. ſiue $\frac{400}{9}$.

LXXXVI 86 *Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, ita vt omnium trium duo quicunque ſimul additi, & in reliquum multiplicati, tres numeros conſtituant in exceſſu æquali, hoc eſt, Arithmeticè proportionales.*

DATI duo numeri ſint 3. & 5. ponatúrque tertius inuentus 1 ℞. Hic cum 3. facit 1 ℞ + 3. quæ ſumma ducta in reliquum 5. facit 5 ℞ + 15. vnum numerum. Deinde 1 ℞. cum 5. facit 1 ℞ + 5. quæ ſumma

ſumma ducta in reliquum 3 facit 3 ℞ + 15. alterum numerum. Denique ex 3. & 5. fit numerus 8. qui ductus in tertium 1 ℞. facit 8 ℞. tertium numerum. Opus eſt iam, hos tres numeros 5 ℞ + 15. 3 ℞ + 15. & 8 ℞. eſſe Arithmeticè proportionales. quod tribus modis fieri poteſt. Aut enim maximus eſt 5 ℞ + 15. & medius 3 ℞ + 15. & minimus 8 ℞. Aut maximus erit 5 ℞ + 15. medius 8 ℞. & minimus 3 + 15 ℞. Aut denique maximus erit 8 ℞. medius 5 ℞ + 15. & minimus 3 ℞ + 15. neque enim maximus eſſe poteſt 3 ℞ + 15. cum minor ſit, quam 5 ℞ + 15.

SINT primum 5 ℞ + 15. 3 ℞ + 15. 8 ℞. Arithmeticè proportionales. Igitur (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmeticè proportionalium diximus) ſumma extremorum 13 ℞ + 15. æqualis erit duplo medij, hoc eſt, numero 6 ℞ + 30. Ablatíſque 6 ℞ vtrinque, æquatio erit inter 7 ℞ + 15. & 30. Ablatíſque rurſum 15 vtrinque, inter 7 ℞, & 15. Diuiſis ergo 15. per 7. fiet 1 ℞. $\frac{15}{7}$. numerus quæſitus. Vel ſi dicti tres numeri ſunt Arithmeticè proportionales, habebunt eundem exceſſum. Sed 5 ℞ + 15. excedit 3 ℞ + 15. numero 2 ℞. Et 3 ℞ + 15. excedit 8 ℞ numero 15 — 5 ℞. vt ex regula ſubtractionis patet. Eſt ergo æqualitas inter 2 ℞ & 15 — 5 ℞. Additiſque 5 ℞ vtrinque, inter 7 ℞ & 15. fiétque rurſus 1 ℞. $\frac{15}{7}$. Iam $\frac{15}{7}$. cum 3 faciunt 3 $\frac{15}{7}$. hoc eſt, $\frac{36}{7}$. qui numerus ductus in reliquum 5 facit $\frac{180}{7}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{7}$. & 5 fit ſumma 5 $\frac{15}{7}$. hoc eſt, $\frac{50}{7}$. quæ ducta in 3. reliquum numerum facit $\frac{150}{7}$. numerum medium. Denique ex 3 & 5. fit ſumma 8. quæ ducta in reliquum numerum $\frac{15}{7}$. facit $\frac{120}{7}$. tertium numerum. Habéntque hi tres numeri $\frac{180}{7}$. $\frac{150}{7}$. $\frac{120}{7}$. eundem exceſſum $\frac{30}{7}$. ſiue 4 $\frac{2}{7}$.

SINT deinde 5 ℞ + 15. 8 ℞. 3 ℞ + 15. Arithmeticè proportionales. Igitur ſumma extremorum 8 ℞ + 30. æqualis erit duplo medij, numero videlicet 16 ℞. Ablatiſque 8 ℞ vtrinque, æquatio erit inter 30. & 8 ℞. Diuiſiſque 30 per 8. fiet 1 ℞. $\frac{30}{8}$. hoc eſt $\frac{15}{4}$. Vel dicti tres numeri habebunt eundem exceſſum. Eſt autem inter 5 ℞ + 15. & 8 ℞. exceſſus 15 — 3 ℞. At inter 8 ℞. & 3 ℞ + 15. exceſſus eſt 5 ℞ — 15. Eſt ergo æquatio inter 15 — 3 ℞. & 5 ℞ — 15. Additiſque 15 vtrinque, inter 30 — 3 ℞. & 5 ℞. Additiſque rurſum 3 ℞ vtrinque, inter 30 & 8 ℞. fiétque rurſum 1 ℞. $\frac{30}{8}$. ſiue $\frac{15}{4}$. Iam ex $\frac{15}{4}$. & 3. fit ſumma 3 $\frac{15}{4}$. ſiue $\frac{27}{4}$. quæ ducta in reliquum numerum 5 facit $\frac{135}{4}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{4}$. & 5 fit ſumma 5 $\frac{15}{4}$. ſiue $\frac{35}{4}$. quæ ducta in reliquum numerum 3 facit $\frac{105}{4}$. numerum tertium. Denique ex 3 & 5 fit ſumma 8. quæ ducta in reliquum numerum $\frac{15}{4}$. facit $\frac{120}{4}$. medium numerum: Habéntque hi tres numeri, $\frac{135}{4}$. $\frac{120}{4}$. $\frac{105}{4}$. eundem exceſſum $\frac{15}{4}$. ſiue 3 $\frac{3}{4}$.

POSTREMO ſint 8 ℞. 5 ℞ + 15. 3 ℞ + 15. Arithmeticè proportionales. Igitur ſumma extremorum 11 ℞ + 15. æqualis erit duplo medij, hoc eſt, numero 10 ℞ + 30. Ablatiſque 10 ℞. vtrinque, æquatio erit inter 1 ℞ + 15. & 30. Ablatiſque rurſum 15. vtrinque, inter 1 ℞. & 15. fiétque 1 ℞. 15. numerus quæſitus. Vel dicti tres numeri habebunt eundem exceſſum. Eſt autem inter 8 ℞. & 5 ℞ + 15. exceſſus 3 ℞ — 15. At inter 5 ℞ + 15. & 3 ℞ + 15. exceſſus eſt 2 ℞. Eſt ergo æqualtas inter 3 ℞ — 15. & 2 ℞. Additiſque 15. vtrinque, inter 3 ℞. & 2 ℞ + 15. Ablatiſque 2 ℞. vtrinque, inter 1 ℞. & 15. fiétque rurſus 1 ℞. 15. numerus quæſitus. Iam ex 15. & 3. fit ſumma 18. quæ ducta in reliquum numerum 5. facit 90. numerum medium. Deinde ex 15 & 5. fit ſumma 20. quæ ducta in reliquum numerum 3. facit 60. tertium numerum. Denique ex 3. & 5. fit ſumma 8. quæ ducta in reliquum numerum 15. facit 120. primum numerum: Habéntque tres hi numeri 120. 90. 60. eundem exceſſum 30.

Hoc quæſitum ſoluemus etiam in ænigmate 131. vbi dabuntur duo numeri, ita vt tres numeri producti non poſſint tribus modis eſſe proportionales Arithmeticè, vt hic, ſed duobus tantum modis.

LXXXVII. 87 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt, ad eorum ſummam habeat proportionem datam.*

HABEANT quæſiti numeri proportionem triplam, & exceſſus quadratorum ad ſummam eorum, octuplam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞ illius triplus. Summa eorum eſt 4 ℞. & exceſſus quadratorum 1 ȝ. 9 ȝ. eſt 8 ȝ. qui ad 4 ℞. proportionem habere debet octuplam. Erit ergo æquatio inter 8 ȝ. & 32 ℞. Diuiſíſque 32. per 8. fiet 1 ℞. 4. minor numerus: propterea quod numeri Coſſici ſunt collaterales. Maior autem erit 12. Exceſſus quadratorum 16. 144. eſt 128. qui ad 16. amborum ſummam proportionem habet octuplam.

LXXXVIII. 88 *Duos numeros in dato exceſſu inuenire, ita vt exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt, ſuperet datum exceſſum quouis numero dato: dummodo quadratus exceſſus numerorum quæſitorum dati minor ſit ſumma ex eodem exceſſu, & poſtulato numero collecta.*

SIT exceſſus numerorum quæſitorum 7. Exceſſus autem quadratorum, qui ex quæſitis numeris fiunt, maior ſit, quam 7. poſtulato numero 100. Ponatur minor numerus 1 ℞. maior 1 ℞ + 7. vt nimirum illum ſuperet numero 7. Quadrati horum numerorum 1 ȝ. & 1 ȝ + 14 ℞ + 49. ſe mutuo excedunt numero 14 ℞ + 49. qui ſuperare debet 7. numero 100. hoc eſt, æqualitas eſſe debet inter 14 ℞ + 49. & 107. Ablatíſq; 49. vtrinque, inter 14 ℞. & 58. Diuiſis ergo 58 per 14. fiet 1 ℞. 4 $\frac{1}{7}$. minor numerus: maior ergo erit 11 $\frac{1}{7}$. vt minorem ſuperet numero 7. Quadrati numerorũ

$\frac{841}{49}$. $\frac{6084}{49}$. ſe mutuo excedunt numero $\frac{5243}{49}$. qui datum numerorum exceſſum 7. ſuperat numero 100. hoc eſt, æqualis eſt numero 107. cum 107. faciant $\frac{5243}{49}$.

HÆC quæſtio ſolui potuit, quia quadratus dati exceſſus 7. nimirum numerus 49. minor eſt ſumma 107. ex dato exceſſu 7. & numero poſtulato 100. collecta. Quod ſi proponantur inueniendi duo numeri in dato exceſſu 7. ita vt exceſſus quadratorum ipſorum maior ſit, quàm 7. numero 10. quæſtio erit impoſſibilis. quod optimè ex ipſa operatione diſces. Poſito enim minore numero 1 ℞. & maiore 1 ℞ + 7. vt ſe mutuò ſuperent ſeptenario. Quadrati horum numerorum rurſum ſe excedunt numero 14 ℞ + 49. qui ſuperare debet 7. numero 10. quod eſt abſurdum, cùm illum ſuperet numero 14 ℞ + 42. qui maior eſt, quàm 7. Cauſa eſt, quia quadratus 49. exceſſus 7. minor non eſt ſumma 17.

89 *Duos numeros in dato exceſſu inuenire, ita vt exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt, ad exceſſum datum datam habeat proportionem, & inſuper contineat datum numerum, dummodo quadratus dati exceſſus minor ſit ſumma, quæ ex numero, qui ex ductu denominatoris datæ proportionis in ipſum exceſſum fit, & ex dato numero colligitur.* LXXXIX.

DATVS exceſſus ſit 4. & exceſſus quadratorum, qui ex quæſitis numeris fiunt, ad 4. habeat proportionem quintuplam, & inſuper contineat 20. vnitates. Ponatur minor numerus 1 ℞. & maior 1 ℞ + 4. vt illum quaternario ſuperet. Quadratorum 1 ȝ. & 1 ȝ + 8 ℞ + 16. eſt 8 ℞ + 16. qui quinquies continere debet datum exceſſum 4. & præterea 20. Quintuplum autem exceſſus 4. cum 20. facit 40. cui numero æqualis eſſe debet exceſſus quadratorum 8 ℞ + 16. Ablatis igitur 16. vtrinque, erit æqualitas inter 24. & 8 ℞. Diuiſiſque 24. per 8. fiet 1 ℞. 3. minor numerus. maior ergo erit 7. Eorum exceſſus 4. Quadratorum 9. 49. exceſſus 40. continet exceſſum 4. quinquies, ac præterea 20. vnitates.

HÆC etiam quæſtio ſolui potuit, quia quadratus 16. dati exceſſus 4. minor eſt ſumma ex quintuplo exceſſus 4. & numero 20. collecta. Quòd ſi exceſſus detur 4. & proportio tripla, & inſuper 3. vnitates. quæſtio fiet impoſſibilis. quod facile ex ipſa operatione cognoſcetur. Poſito enim minore numero 1 ℞. & maiore 1 ℞ + 4. erit exceſſus quadratorum 8 ℞ + 16. qui æqualis debet eſſe ſummæ ex triplo exceſſus 4. & numero 3. collecta, hoc eſt, numero 15. quod eſt abſurdum. Cauſa eſt, quia quadratus 16. exceſſus 4. non eſt minor numero 15.

XC. 90 *Datum numerum quadratum in duos numeros quadratos distribuere.*

Hoc ænigma ſine Algebra ſoluimus lib.8.noſtræ Geometriæ practicæ, propoſ.9. vbi propoſitum quadratum numerum non in duos ſolùm, ſed in quotuis numeros quadratos partiti ſumus. Per Algebram autem idem hoc modo expediemus. Sit quadratus numerus 16. diuidendus in duos quadratos. Ponatur primus quadratus 1ʒ. ac proinde ſecundus 16—1ʒ. Finge huius latus eſſe quotcunque radices, minus tot vnitatibus, quot ſunt in latere dati quadrati, nimirum 2℞—4. Huius quadratum 4ʒ+16—16℞. æquale debet eſſe quadrato 16—1ʒ. Addito 1ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 5ʒ+16—16℞.& 16. Additíſque rurſum 16℞. inter 5ʒ+16. & 16℞+16. Ablatíſque 16 vtrinque, inter 5ʒ & 16℞. Diuiſis igitur 16 per 5. fiet 1℞. $\frac{16}{5}$. quia numeri Coſſici collaterales ſunt. Huius radicis quadratus $\frac{256}{25}$. erit primus, quem poſuimus 1ʒ. Secundus autem 16—1ʒ. erit $\frac{144}{25}$. cuius radix $\frac{12}{5}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{400}{25}$. nimirum 16.

Aliter. Ponatur latus primi quadrati eſſe 1℞. Latus verò ſecundi quadrati quotuis radices, minus latere dati quadrati, nimirum 5℞—4. Quadrati numeri horum laterum 1ʒ. & 25ʒ+16—40℞. ſimul æquales debent eſſe dato quadrato 16. Additis 40℞ vtrinque, erit æquatio inter 26ʒ+16. & 40℞+16. Ablatíſque 16. vtrinque, inter 26ʒ. & 40℞. Diuiſis ergo 40. per 26. fiet 1℞ $\frac{20}{13}$. (quod numeri Coſſici ſint collaterales) cuius quadratum $\frac{400}{159}$. erit primus numerus quadratus. Secundus autem erit $\frac{2304}{169}$. qui relinquitur, ſi ille ex 16. detrahatur. Eius latus eſt $\frac{48}{13}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{2704}{169}$. hoc eſt, 16.

SCHOLIVM.

QVOD ſi minorem numerum quadratum iterum partiemur in duos quadratos, diuiſus erit datus quadratus in tres. Et ſi minimus rurſum ſecetur in duos, ſectus erit datus in quatuor. Atque ita deinceps in infinitum. Vides ergo propoſitum quadratum diuidi poſſe per Algebram in duos quadratos variis modis: ita vt ſemper fiant diuerſi duo quadrati.

HOC problema ſolui etiam poteſt ſine Algebra, hoc modo. Propoſito quadrato, ducatur eius latus in quemcunque numerum, & duplum producti numeri diuidatur per eiuſdem illius numeri quadratum auctum vnitate. Quotientis enim quadratus erit vnus quadratus quæſitus; quo ablato ex propoſito quadrato, relinquetur alter quadratus.

Vt ſi propoſitus ſit quadratus 36. ducatur eius latus 6. per 3. vt fiant 18. Et huius duplum 36. diuidatur per quadratum eiuſdem numeri 3. auctum vnitate,

vnitate, nimirum per 10. Quotientis enim $\frac{36}{10}$. ſiue $\frac{18}{5}$. quadratus $\frac{324}{25}$. id eſt, 12. $\frac{24}{25}$ erit vnus quadratus, quo ablato ex 36. erit alter 23 $\frac{1}{25}$. cuius latus $\frac{24}{5}$. ſiue 4 $\frac{4}{5}$. & ambo quadrati 12 $\frac{24}{25}$. & 23 $\frac{1}{25}$. faciunt 36.

Nota tamen, latus propoſiti quadrati non eſſe ducendum per 1. quia duo quadrati eſſent propoſitus quadratus, & 0. quod eſt ineptum. Vt ſi 6. latus propoſiti quadrati 36. duceretur in 1. vt fiant 6. & huius producti numeri duplum 12. diuideretur per 2. nimirum per quadratum vnitatis auctum vnitate, fieret Quotiens 6. cuius quadratum eſt 36. numerus propoſitus, &c.

91 *Datum numerum ex duobus quadratis compoſitum in alios duos quadratos diuidere.* XCI.

Sit numerus 34. ſiue quadratus, ſiue non quadratus, compoſitus ex duobus quadratis 9. & 25. diuidendus in alios duos quadratos. Sint latera quadratorum 3. & 5. ponatúrq; latus primi quadrati quæſiti 1℞+3. nimirum vna radix, plus latere primi quadrati dati. Latus vero ſecundi quadrati quæſiti, quotcunque radices minus latere ſecundi quadrati dati, nimirum 2℞—5. Quadrati horum laterum 1ʒ+6℞+9. & 4ʒ—20℞+25. faciunt ſummam 5℞+34—14℞. æqualem dato numero 34. Additis ergo 14℞ vtrinque, erit æquatio inter 5ʒ+34. & 14℞+34. Ablatiſque 34 vtrinque, inter 5ʒ. & 14.℞. Diuiſis igitur 14. per 5. fiet 1℞. $\frac{14}{5}$. propterea quod numeri Coſſici ſunt collaterales. Ergo latus primi quadrati quæſiti, quod poſuimus 1℞+3. erit $\frac{29}{5}$. Secundi vero quadrati latus quod poſuimus 2℞—5. erit $\frac{28}{5}$—5. hoc eſt, $\frac{3}{5}$. Quadrati horum laterum inuentorum $\frac{841}{25}$. $\frac{9}{25}$. faciunt $\frac{850}{25}$. hoc eſt, numerum 34. datum.

92 *Duos numeros quadratos in dato exceſſu inuenire.* XCII.

Detvr exceſſus 70. Ponatur latus vnius quadrati 1℞. alterius vero latus 1℞. plus quotlibet vnitatibus, dummodo quadratus numerus ex ipſis deſcriptus minor ſit dato exceſſu, nimirum 1℞+8. Quadrati horum laterum 1ʒ. & 1ʒ+16℞+64. exceſſum habent 16℞+64. qui æqualis eſſe debet dato exceſſui 70. Ablatis vtrobique 64. erit æquatio inter 16℞. & 6. Diuiſis ergo 6. per 16. fiet 1℞ $\frac{3}{8}$. latus vnius quadrati. Latus alterius poſitum 1℞+8. erit 8. $\frac{3}{8}$. ſiue $\frac{67}{8}$. Quadrati horum laterum inuentorum ſunt $\frac{9}{64}$. & $\frac{4489}{64}$. quorum exceſſus $\frac{4480}{64}$. hoc eſt, 70.

Manifestvm autem eſt, alios atque alios duos numeros quadratos poſſe reperiri in dato eodem exceſſu, prout numerus abſolutus in ſecundi quadrati radice alius atque alius aſſumetur. Vt dato eodem exceſſu 70. ſi latus primi quadrati ponatur 1℞. & ſecundi 1℞+1. erunt quadrati 1ʒ. & 1ʒ+2℞+1. & eorum exceſſus 2℞+1. qui æqualis debet eſſe dato exceſſui 70. Ablata 1.

vtrinque, erit æqualitas inter 2 ℞. & 69. Diuiſis igitur 69. per 2. fiet 1 ℞. 34 $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{69}{2}$. cuius quadratus eſt $\frac{4761}{4}$. ſiue 1190 $\frac{1}{4}$. Latus autem ſecundi quadrati, quod poſuimus 1 ℞ + 1. erit 35 $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{71}{2}$. cuius quadratus eſt $\frac{5041}{4}$ ſiue 1260 $\frac{1}{4}$. qui priorem 1190 $\frac{1}{4}$. ſuperat numero 70.

Si exceſſus detur 100. ponatúrque latus primi quadrati 1 ℞. & latus ſecundi 1 ℞ + 10. vbi quadratus numeri 10. non eſt minor exceſſu dato 100. ſed æqualis, erit quæſtio impoſſibilis. Nam quadrati 1 ȝ. & 1 ȝ + 20 ℞ + 100 exceſſum habent 20 ℞ + 100. qui æqualis debet eſſe dato exceſſui 100. quod abſurdum eſt, cum ſit maior.

XCIII. 93 *Duos numeros inuenire, quorum quadrati ſe excedant dato numero.*

Hoc ænigma ſoluitur, vt præcedens. Poſitis enim duobus lateribus, vt in præcedenti, inuenientur duo latera, quorum quadrati datum exceſſum habebunt.

XCIIII. 94 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum ſumma quadratus ſit numerus.*

Assvmatvr quilibet quadratus pro vno quæſitorum, nimirum 16. Et per problema 92. inueniantur duo numeri quadrati, quorum exceſſus 16. quadratus aſſumptus. Nam minor quadratus inuentus cum aſſumpto 16. faciet alterum quadratum inuentum maiorem. Ponatur ergo vt in dicto problemate factum eſt, latus vnius quadrati 1 ℞. & alterius 1 ℞ + 3. (vt nimirum quadratus numeri 3. minor ſit dato exceſſu 16.) Quadrati horum laterum 1 ȝ. & 1 ȝ + 6 ℞ + 9. exceſſum habent 6 ℞ + 9. qui æqualis eſſe debet dato exceſſui 16. Ablatis 9. vtrobique, erit æquatio inter 6 ℞. & 7. Diuiſis ergo 7. per 6. fiet 1 ℞ $\frac{1}{6}$. latus minoris quadrati quæſiti. Latus maioris, quod poſuimus 1 ℞ + 3. erit 3 $\frac{7}{6}$. id eſt, $\frac{25}{6}$. Quadrati laterum $\frac{7}{6}$. & $\frac{25}{6}$. ſunt $\frac{49}{36}$. & $\frac{625}{36}$. quorum exceſſus $\frac{576}{36}$. hoc eſt, 16. Duo ergo quadrati quæſiti ſunt 16. ſiue $\frac{576}{36}$. & $\frac{49}{36}$. quorum ſumma $\frac{625}{36}$. quadratus numerus eſt, latus habens $\frac{25}{6}$.

Abiectis denominatoribus, erunt inuenti duo quadrati integri 576. & 49. facientes quadratum 625. cuius latus 25.

XCV. 95 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus quadratus ſit.*

Hoc ænigma non aliter ſoluetur, ac problema 92. Si namque inueniantur per illud duo quadrati, quorum exceſſus datus ſit numerus quadratus, factum erit, quod hic iubetur.

96 Tres

96 *Tres numeros quadratos inuenire, quorum ſumma ſit numerus quadratus.* XCVI.

Per problema 94. inueniantur primum duo quadrati, quorum ſumma ſit quadratus numerus, ſintque V.g. hi 576. 49. facientes quadratum 625. Deinde per problema 95. inueniantur alij duo quadrati, quorum exceſſus ſit quadratus effectus 625. Nam minor inuentus cum quadrato 625. hoc eſt, cum duobus quadratis 576. 49. faciet maiorem quadratum. V.g. Dato exceſſu quadrato 625. inueniantur duo quadrati in illo exceſſu, hoc modo. Ponatur latus vnius 1 ℞ & alterius 1 ℞ + 10. (vt nimirum quadratus 10. vnitatum minor ſit dato exceſſu 625.) Quadrati horum laterum 1 ȝ. & 1 ȝ + 20 ℞ + 100. exceſſum habent 20 ℞ + 100. qui æqualis eſſe debet dato exceſſui 625. Ablatis ergo 100. vtrobique, erit æquatio inter 20 ℞. & 525. Diuiſiſque 525. per 20. fiet 1 ℞ 26 $\frac{1}{4}$. Latus minoris quadrati. Maioris verò latus, quod poſitum fuit 1 ℞ + 10. erit 36 $\frac{1}{4}$. Horum laterum quadrati $\frac{11025}{16}$. $\frac{21025}{16}$. exceſſum habent $\frac{10000}{16}$. hoc eſt, 625. quadratum. Hic igitur exceſſus, nimirum $\frac{10000}{16}$. ex duobus quadratis 576. 49. conflatus cum minore quadrato $\frac{11025}{16}$. componet maiorem quadratum $\frac{21025}{16}$. Atque ita tres quadrati quæſiti ſunt 576 49 $\frac{11025}{16}$. ſiue $\frac{9216}{16}$. $\frac{784}{16}$. $\frac{11025}{16}$. qui ſimul efficiunt quadratum $\frac{21025}{16}$. cuius latus eſt $\frac{145}{4}$.

Si abiiciantur denominatores, erunt inuenti tres quadrati integri 9216. 784. 11025. quorum ſumma quadratus numerus eſt 21025. cuius latus 145.

SCHOLIVM.

Atqve eadem arte inuenientur 4. quadrati efficientes numerum quadratum, ſi prius per hoc problema inueniantur tres. Deinde per problema 95. duo habentes exceſſum, illum quadratum ex tribus quadratis confectum. Pari ratione inuenientur 5. 6. 7. & quotquot quis voluerit, ſi videlicet prius inueniatur 4. vel 5. vel 6. &c.

97 *Duos numeros inuenire, quorum tam ſumma, quam exceſſus ſit numerus quadratus.* XCVII.

Ponatvr latus quadrati ex duobus numeris quæſitis conflari, vna radix, plus quotcunque vnitatibus, nimirum 1 ℞ + 4. cuius quadratum 1 ȝ + 8 ℞ + 16. æquale debet eſſe duobus numeris quæſitis. Si ergo vnus numerorum ponatur $\frac{1}{2}$ ȝ. erit alter $\frac{1}{2}$ ȝ + 8 ℞ + 16. qui duo ſimul faciunt dictum quadratum 1 ȝ + 8 ℞ + 16. Reliquum eſt, vt $\frac{1}{2}$ ȝ. ſubtractus ex $\frac{1}{2}$ ȝ + 8 ℞ + 16. relinquat etiam numerum quadratum. Ergo reliquus numerus $8\,℞ + 16$. æqualis erit alicui quadrato, qui V.g. sit 36. maior, quã 16. numerus absolutus. Ablatis igitur 16. vtrobique, erit æqualitas inter $8\,℞$. & 20. Diuisisque 20. per 8. fit $1\,℞$. $\frac{20}{8}$. siue $\frac{5}{2}$. cuius quadratus est $\frac{25}{4}$. Cum ergo vnus numerorum, qui quæruntur, positus sit $\frac{1}{2}\,ℨ$. erit is $\frac{25}{8}$ primus numerus quæsitus. Secundus numerus, qui positus fuit $\frac{1}{2}\,ℨ + 8\,℞ + 16$. erit $\frac{25}{8}$. plus $\frac{40}{2}$. siue 20. & insuper 16. hoc est $\frac{25}{8}$. & 36. siue $\frac{288}{8}$. qui duo numeri $\frac{25}{8}$. & $\frac{288}{8}$. faciunt $\frac{313}{8}$. Ad hunc enim si adiiciatur primus $\frac{25}{8}$. fit summa $\frac{338}{8}$. id est, $\frac{169}{4}$. numerus quadratus, cuius latus $\frac{13}{2}$. Et si ab eodem secundo $\frac{31}{8}$. dematur primus $\frac{25}{8}$. remanet numerus $\frac{288}{8}$. siue $\frac{144}{4}$ quadratus etiam, cuius latus $\frac{12}{2}$. siue 6.

XCVIII. 98 *Duobus numeris datis, inuenire alium, qui vtrique seorsum additus faciat quadratum.*

Sint dati duo numeri 4. & 7. Ponatur, qui quæritur, $1\,℞$. qui cum datis facit duos $1\,℞ + 4$. & $1\,℞ + 7$. qui quadrati debent esse. Detrahatur vnus ex altero, vt habeatur eorum excessus 3. quęrantúrque duo numeri, qui inter se multiplicati producant hunc eundem excessum 3. ita tamen, vt quadratum semissis excessus ipsorum maius sit minore numero dato 4. atque adeo æqualis esse possit minori numero composito $1\,℞ + 4$. & quadratum semissis summę eorundem maius sit maiore numero dato 7. atq; adeo æqualis esse possit maiori numero composito $1\,℞ + 7$. quod cur fieri debeat, operatio docebit. Hi numeri erunt $\frac{1}{2}$. & 6. Nam inter se multiplicati producunt 3. Et excessus eorum est $5\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{11}{2}$. cuius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$. maius est, quam 4. Summa verò eorundem est $6\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{13}{2}$. cuius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. hoc est, $10\frac{9}{16}$. maius est, quàm 7. Inuenti autem sunt hi duo numeri $\frac{1}{2}$. & 6 sumpta ad libitum fractione $\frac{1}{2}$ cuius numerator vnitas vnus numerorum. Nam si eius denominator 2. ducatur in numerum 3. qui produci debet, fiet alter numerus 6. Quòd si dati numeri forent 20. 23. habentes eundem excessum 3. non satisfacerent numeri $\frac{1}{2}$. & 6. Quare sumenda esset alia fractio, nimirum $\frac{1}{10}$. pro vno numero. Nam ex 10. denominatore in 3. fiet alter numerus 30. Et ex $\frac{1}{10}$. in 30. fit numerus 3. Et excessus eorum est $29\frac{9}{10}$. hoc est, $\frac{299}{10}$. cuius semissis $\frac{299}{20}$. quadratum $\frac{89401}{400}$. siue $223\frac{201}{400}$. maius est, quàm 20. Item summa eorundem numerorum est $30\frac{1}{10}$. hoc est, $\frac{301}{10}$. cuius semissis $\frac{301}{20}$. quadratum $\frac{90601}{400}$. siue $226\frac{201}{400}$. maius est, quam 23. Atque ita, si hi numeri $\frac{1}{10}$. & 30. non satisfacerent, accipienda esset alia fractio maioris denominationis, &c. Ac toties iteranda operatio, donec duo numeri reperiantur proposito satisfacientes.

Nos rem exequamur cum numeris $\frac{1}{2}$. & 6. in proposito exemplo. quorum excessus $5\frac{1}{2}$. vel $\frac{11}{2}$. & huius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$.

$\frac{121}{16}$. siue $7\frac{9}{16}$. æquale erit minori numero composito $1\,℞ + 4$. Ablatis ergo 4. vtrobique, erit æquatio inter $3\frac{9}{16}$. & $1\,℞$. atque idcirco $1\,℞$ erit $3\frac{9}{16}$. quæ radix etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{2}$. & 6. est $6\frac{1}{2}$. siue $\frac{13}{2}$. & huius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. siue $10\frac{9}{16}$. æquale erit maiori numero cõposito $1\,℞ + 7$. Ablatis ergo 7. vtrobique, fiet æquatio inter $3\frac{9}{16}$ & $1\,℞$. vt prius. Numerus igitur quæsitus est $3\frac{9}{16}$. Hic enim additus ad 4. & 7. faciet quadratos $7\frac{9}{16}$. & $10\frac{9}{16}$. siue $\frac{121}{16}$. & $\frac{169}{16}$. quorum latera $\frac{11}{4}$. & $\frac{13}{4}$.

Quod si sumatur fractio $\frac{1}{3}$. & denominator 3. ducatur in excessum 3. producetur numerus 9. atque hi duo numeri $\frac{1}{3}$. & 9. multiplicati inter se facient 3. Eorum excessus est $8\frac{2}{3}$ siue $\frac{26}{3}$. & huius semissis $\frac{13}{3}$. quadratum $\frac{169}{9}$. siue $18\frac{7}{9}$. æquale erit minori numero composito $1\,℞ + 4$. Ablatis ergo 4. vtrobique, æquatio erit inter $1\,℞$. & $14\frac{7}{9}$. ideóque $1\,℞$. erit $14\frac{7}{9}$. quæ etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{3}$. & 9. est $9\frac{1}{3}$. siue $\frac{28}{3}$. Huius semissis $\frac{14}{3}$. quadratum $\frac{196}{9}$. siue $21\frac{7}{9}$. æquale erit maiori numero composito $1\,℞ + 7$. Ablatis igitur 7. vtrinque, erit æquatio inter $14\frac{7}{9}$. & $1\,℞$. vt prius. Numerus igitur quæsitus est $14\frac{7}{9}$. Hic enim additus ad 4. & 7. facit quadratos $18\frac{7}{9}$. & $21\frac{7}{9}$. siue $\frac{169}{9}$. & $\frac{196}{9}$. quorum latera $\frac{13}{3}$. & $\frac{14}{3}$.

Ex ipsa operatione intelligis, cur eligi debeant tales duo numeri producentes excessum datorum numerorum, quales diximus. Nam nisi quadratum semissis eorum excessus maius esset minore numero 4. non fieret æquatio inter ipsum, & minorem numerum compositum, vt patet, &c. Item constat, varios numeros inueniri posse, quorum quilibet additus ad datos duos numeros faciat duos quadratos, prout videlicet varij duo numeri accipientur, qui dictum excessum 3. producant. Ita vides, in dato exemplo inuentos esse duos numeros $3\frac{9}{16}$. & $14\frac{7}{9}$.

Sed experiamur idem in datis numeris 20. & 23. Addita $1\,℞$. vtrique, fient quadrati $1\,℞ + 20$. & $1\,℞ + 23$. fiétque æquatio (electis duobus numeris $\frac{1}{10}$. & 30. qui excessum 3. producant) inter $223\frac{201}{400}$. & $1\,℞ + 20$. Item inter $226\frac{201}{400}$. & $1\,℞ + 23$. Inuenietúrque per vtramque æquationem $1\,℞$. esse $203\frac{201}{400}$. qui numerus additus ad 20. & 23. facit quadratos $223\frac{201}{400}$. & $226\frac{201}{400}$. siue $\frac{89401}{400}$. & $\frac{90601}{400}$. quorum latera $\frac{299}{20}$. & $\frac{301}{20}$.

Aliter. Sint rursus dati duo numeri 4. & 7. Ponatur numerus quæsitus $1\,ℨ - 4$. Huic enim si addantur 4. fit $1\,ℨ$. quadratus. Et si eidem numero $1\,ℨ - 4$. addantur 7. fit alius quadratus $1\,ℨ + 3$. cuius latus statuatur $1\,℞$. minus quotlibet vnitatibus, quæ superent 4. nimirum $1\,℞ - 5$. cuius quadratum $1\,ℨ - 10\,℞ + 25$. æquale esse debet quadrato $1\,ℨ + 3$. Additis $10\,℞$ vtrobique, erit æqualitas inter $1\,ℨ + 25$. & $1\,ℨ + 10\,℞ + 3$. Et si auferatur $1\,ℨ$. vtrobique, inter 25. & $10\,℞ + 3$. Ablatísque 3. vtrobique, inter 22. & $10\,℞$. Diuisis igitur 22. per 10. fiet $1\,℞$. $\frac{22}{10}$. siue $\frac{11}{5}$. à cuius quadrato $\frac{121}{25}$. si auferantur 4. (quia numerus quæsitus fuit positus $1\,ℨ - 4$.) hoc est $\frac{100}{25}$. reliquus erit numerus quæsitus $\frac{21}{25}$. Hic enim additus ad 4.& 7.facit quadratos $4\frac{21}{25}$.& $7\frac{21}{25}$. siue $\frac{121}{25}$. & $\frac{196}{25}$. quorum latera $\frac{11}{5}$.& $\frac{14}{5}$.

Si numeri dati sint 20. & 23. ponendus erit numerus quæsitus 1 ʒ — 20. vt additus ad 20. faciat quadratum 1 ʒ. Et si eidem numero 1 ʒ — 20. addantur 23. fiet alius quadratus 1 ʒ + 3. cuius latus statuatur 1 ℞. minus quotlibet vnitatibus, quæ superent 20. nimirum 1 ℞ — 21. cuius quadratum 1 ʒ — 42 ℞ + 441. æquale debet esse quadrato 1 ʒ + 3. Additis 42 ℞ vtrobique, erit æqualitas inter 1 ʒ + 441. & 1 ʒ + 42 ℞ + 3. & si dematur 1 ʒ. vtrobique, inter 441. & 42 ℞ + 3. Ablatisque 3. vtrobique, inter 438. & 42 ℞. Diuisis ergo 438. per 42. fiet 1 ℞. $10\frac{3}{7}$. siue $\frac{73}{7}$. à cuius quadrato $\frac{5329}{49}$. si auferantur 20. (quia numerus quæsitus positus fuit 1 ʒ — 20.) hoc est, $\frac{980}{49}$. reliquus fiet numerus quæsitus $\frac{4349}{49}$. siue $88\frac{37}{49}$. qui additus ad 20. & 23. faciet quadratos $108\frac{37}{49}$. & $111\frac{37}{49}$. hoc est $\frac{5329}{49}$. & $\frac{5476}{49}$. quorum latera $\frac{73}{7}$. & $\frac{74}{7}$.

XCIX. 99 *Duobus numeris datis, alium inuenire, qui ab vtroque seorsum subtractus, relinquat quadratum.*

Sint dati duo numeri 9. & 21. Ponatur numerus quæsitus 9 — 1 ʒ. Hic namque ex 9. subtractus relinquit quadratum 1 ʒ. vt in hac formula apparet.

9	+	0 ʒ
9	—	1 ʒ
	+	1 ʒ

Idem autem numerus 9 — 1 ʒ. detractus ex 21. relinquit 12 + 1 ʒ. vt in hac altera formula liquet, qui numerus debet etiam esse quadratus.

21	+	0 ʒ
9	—	1 ʒ
12	+	1 ʒ

Statuatur eius latus 1 ℞. minus quotuis vnitatibus, ita tamen, vt earum quadratus superet 12. nimirum 1 ℞ — 4. Huius quadratum 1 ʒ — 8 ℞ + 16. æquale debet esse quadrato 12 + 1 ʒ. Additis 8 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒ + 16. & 1 ʒ + 8 ℞ + 12. Et si vtrobique auferatur 1 ʒ. inter 16. & 8 ℞ + 12. Ablatisque 12. vtrinque, inter 4. & 8 ℞. Diuisis ergo 4. per 8. fiet 1 ℞. $\frac{4}{8}$. siue $\frac{1}{2}$. cuius quadratum $\frac{1}{4}$. si ex 9. auferatur, (propterea quod numerus positus fuit 9 — 1 ʒ.) hoc est ex $\frac{36}{4}$. reliquus erit numerus quæsitus $8\frac{3}{4}$. siue $\frac{35}{4}$. qui videlicet detractus ex 9. & 21. relinquit quadratos $\frac{1}{4}$. & $12\frac{1}{4}$. siue $\frac{1}{4}$ & $\frac{49}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{7}{2}$.

C. 100 *Datis duobus numeris, alium inuenire, à quo vterque datorum detractus, quadratum relinquat.*

Sint dati duo numeri 20. & 30. Ponatur numerus quæsitus 1 ʒ + 20. vt detractis 20. remaneat quadratus 1 ʒ. Reliquum est, vt 1 ʒ — 10. (qui numerus relinquitur, subductis 30. ex 1 ʒ + 20. vt in

formula apposita manifestũ est,) sit etiam quadratus.

1	ʒ	+	20
		+	30
1	ʒ	—	10

Statuatur latus numeri 1 ʒ — 10. vna radix, minus quotcunque vnitatibus, nimirum 1 ℞ — 2. Huius quadratum 1 ʒ — 4 ℞ + 4. æquale debet esse quadrato 1 ʒ — 10. Additis 4 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒ + 4. & 1 ʒ — 10 + 4 ℞. Et rursum additis 10. vtrinque, inter 1 ʒ + 14. & 1 ʒ + 4 ℞. Et si auferatur 1 ʒ. vtrobique, inter 14. & 4 ℞. Diuisis ergo 14. per 4. fiet 1 ℞. $\frac{14}{4}$. siue $\frac{7}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$. si addantur 20. (quia numerus positus fuit 1 ʒ + 20) hoc est, $\frac{80}{4}$. fiet numerus quæsitus $\frac{129}{4}$. hoc est, $32\frac{1}{4}$. à quo si demantur dati numeri 20. & 30. reliqui erunt quadrati $12\frac{1}{4}$. & $2\frac{1}{4}$. siue $\frac{49}{4}$. & $\frac{9}{4}$. quorum latera $\frac{7}{2}$. & $\frac{3}{2}$.

101 *Datum numerum in duos partiri, & insuper quadratum numerum inuenire, qui cum vtraque parte seorsum quadratum efficiat.* CI.

Sit numerus datus 40. Cape duos numeros, quorum quadrati simul minorem numerum efficiant, quam 40. nimirum 2. & 4. Vnicuique addita 1 ℞. fiunt numeri 1 ℞ + 2. & 1 ℞ + 4. quorum quadrata sunt 1 ʒ + 4 ℞ + 4. & 1 ʒ + 8 ℞ + 16. Et si ab vtroque dematur 1 ʒ. remanebunt 4 ℞ + 4. & 8 ℞ + 16. partes numeri 40. diuidendi: quippe cum quilibet horum numerorum cum 1 ʒ. faciat quadratum. Reliquum ergo est, vt duæ istæ partes efficiant 40. Efficiunt autem 12 ℞ + 20. qui numerus æqualis esse debet numero 40. Ablatis igitur 20. vtrobique, erit æquatio inter 12 ℞. & 20. Diuisisque 20. per 12. fiet 1 ℞. $\frac{20}{12}$. siue $\frac{5}{3}$. cuius quadratus $\frac{25}{9}$. siue $2\frac{7}{9}$. erit is, qui quæritur. Partes autem numeri 40. videlicet 4 ℞ + 4. & 8 ℞ + 16. erunt $10\frac{2}{3}$. & $29\frac{1}{3}$. quæ simul efficiunt 40. Et vterque cum quadrato inuento $2\frac{7}{9}$. quadratum numerum efficit. Nam $2\frac{7}{9}$. cum $10\frac{2}{3}$. siue cum $10\frac{6}{9}$. facit $13\frac{4}{9}$. hoc est, $\frac{121}{9}$. quadratum, cuius latus $\frac{11}{3}$. Et idem quadratus $2\frac{7}{9}$. cum $29\frac{1}{3}$. siue cum $29\frac{3}{9}$. facit quadratum $32\frac{1}{9}$. siue $\frac{289}{9}$. cuius latus $\frac{17}{3}$.

102 *Datum numerum in duos partiri, & insuper numerum quadratum inuenire, à quo vtraque pars seorsum subtracta quadratum relinquat.* CII.

Sit idem datus numerus 40. Latus quadrati quæsiti ponatur 1 ℞. plus tot vnitatibus, vt earum quadratum minus sit numero 40. nimirum 1 ℞ + 5. cuius quadratus 1 ʒ + 10 ℞ + 25. à quo detractus numerus 10 ℞ + 25. relinquit quadratum 1 ʒ. Vnus ergo numerorum; in quos diuidendus est 40. sit 10 ℞ + 25. quandoquidem detractus ex 1 ʒ + 10 ℞ + 25. relinquit quadratum 1 ȝ.

Sumatur deinde alterius cuiusdam quadrati latus 1 ℞ + 4. ita vt numerus eius absolutus 4. minor sit numero absoluto 5. prioris lateris. Quadratus huius secundi lateris est 1 ȝ + 8 ℞ + 16. qui detractus à priori quadrato 1 ȝ + 10 ℞ + 25. relinquit 2 ℞ + 9. alterum numerorum, in quos diuidendus est 40. Atq; ita quadratus, quem quærimus, est 1 ȝ + 10 ℞ + 25. & partes numeri 40. sunt 10 ℞ + 25. & 2 ℞ + 9. Nam prior ex illo quadrato subductus relinquit quadratum 1 ȝ. At posterior ex eodem quadrato sublatus relinquit 1 ȝ + 8 ℞ + 16. quandoquidem hic ex illo quadrato demptus relinquit 2 ℞ + 9. quod etiam hæc formula docet, qui numerus 1 ȝ + 8 ℞ + 16. similiter quadratus est lateris 1 ℞ + 4. vt paulò ante patuit. Reliquum est, vt duæ hæ partes 10 ℞ + 25. & 2 ℞ + 9. efficiant datum numerum 40. Efficiunt autem 12 ℞ + 34. qui numerus æqualis debet esse numero 40. Ablatis ergo 34. vtrobique, erit æquatio inter 12 ℞. & 6. Diuisisque 6. per 12. fiet 1 ℞. $\frac{1}{2}$. Cum ergo latus quadrati quæsiti positum sit 1 ℞ + 5. erit ipsum latus 5 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{11}{2}$. & quadratus quæsitus $\frac{121}{4}$. siue 30 $\frac{1}{4}$. Partes autem numeri 40. quas posuimus 10 ℞ + 25. & 2 ℞ + 9. erunt 30. & 10. quæ simul faciunt numerum datum 40. & detractæ ex quadrato inuento 30 $\frac{1}{4}$. relinquunt quadratos numeros $\frac{1}{4}$. & 20 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{81}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{9}{2}$.

1 ȝ	+	10 ℞	+	25	
0 ȝ	+	2 ℞	+	9	
1 ȝ	+	8 ℞	+	16	

CIII. 103 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum quolibet alio dato habeat ad summam reliquorum proportionem quamcunque datam: Item secundus cum eodem dato numero ad summam reliquorum habeat quoque datam quamuis proportionem: Tertius denique cum eodem numero dato habeat ad reliquorum summam proportionem quoque datam quamcunque.*

Sit datus numerus 73. inueniendíque sint tres numeri, quorum primus cum 73. ad reliquorum summam habeat proportionem duplam: Secundus cum 73. ad reliquorum summam proportionem triplam: Tertius denique cum 73. ad summam reliquorum proportionem quadruplam. Ponatur summa omnium trium 1 ℞. Ergo primus erit $\frac{2}{3}$ ℞ — 73. vt cum 73. habeat $\frac{2}{3}$ ℞. numerum videlicet duplum ad $\frac{1}{3}$ ℞. summam reliquorum. Secundus autem erit $\frac{3}{4}$ ℞ — 73. vt cum 73. habeat $\frac{3}{4}$ ℞. numerum videlicet triplum ad $\frac{1}{4}$ ℞. summam reliquorum. Tertius denique erit $\frac{4}{5}$ ℞ — 73. vt acceptis 73. habeat $\frac{4}{5}$ ℞. numerum scilicet quadruplum ad $\frac{1}{5}$ ℞. summam reliquorum. Quibus positis, cum primus acceptis 73. habeat $\frac{2}{3}$ ℞. qui duplus esse debet summæ reliquorum duorum. Facit autem secundus $\frac{3}{4}$ ℞ — 73. cum tertio $\frac{4}{5}$ ℞ — 73. summam $\frac{31}{20}$ ℞ — 146. ad quam duplus esse debet numerus $\frac{2}{3}$ ℞. quem primus cum 73. habet. ac proinde numerus $\frac{62}{20}$ ℞ — 292. duplus prædictæ summæ $\frac{31}{20}$ ℞ — 146. æqualis erit numero $\frac{2}{3}$ ℞. Additis igitur 292. vtrobique, æquatio erit inter $\frac{62}{20}$ ℞. & $\frac{2}{3}$ ℞ + 292. Ablatísque $\frac{2}{3}$ ℞. vtrobique, inter $\frac{146}{60}$ ℞. & 292. Diuisis igitur 292. per $\frac{146}{60}$. fiet 1 ℞. 120. Ergo primus numerus $\frac{2}{3}$ ℞ — 73. erit 7. propterea quod $\frac{2}{3}$. numeri 120. sunt 80. à quibus si auferantur 73. reliquus fit numerus 7. Secundus autem $\frac{3}{4}$ ℞ — 73. erit 17. quia $\frac{3}{4}$. numeri 120. sunt 90. à quibus si deducantur 73. reliquus fit numerus 17. Tertius denique $\frac{4}{5}$ ℞ — 73. erit 23. quippe cum $\frac{4}{5}$. numeri 120. sint 96. à quibus si tollantur 73. supersint 23. Atque hi tres numeri 7. 17. 23. problemati satisfaciunt. Nam 7. cum 73. faciunt 80. qui numerus duplus est summæ 40. ex 17. & 23. collectæ. At 17. cum 73. faciunt 90. qui numerus triplus est summæ 30. ex 7. & 23. collectæ. Denique 23. cum 73. faciunt 96. qui numerus quadruplus est summæ 24. ex 7. & 17. collectæ.

104 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum data parte summæ aliorum duorum faciat numerum datum? Item secundus cum alia data parte aliorum duorum faciat quoque quemcunque numerum datum? Tertius denique cum quauis data parte aliorum duorum faciat similiter quemlibet datum numerum.* CIIII.

Debeat primus cum $\frac{1}{2}$. secundi ac tertij facere 42. Secundus cum $\frac{1}{4}$. primi ac tertij, 36. Tertius cum $\frac{1}{12}$. primi ac secundi, 39. Ponatur primus 1 ℞. Erit ergo semissis aliorum duorum 42 — 1 ℞. Ita enim primus cum hac semisse faciet 42. Ac proinde duplum huius semissis, nimirum 84 — 2 ℞. erit summa secundi ac tertij.

Et quia secundus cum $\frac{1}{4}$. primi & tertij facere debet 36. si auferemus quartam partem primi, nimirum $\frac{1}{4}$ ℞. ex 36. reliqua erit quarta pars tertij, vnà cum secundo, numerus scilicet 36 — $\frac{1}{4}$ ℞. quem si detrahemus ex 84 — 2 ℞. hoc est, ex summa secundi ac tertij, dabit reliquus numerus 48 — 1 $\frac{3}{4}$ ℞. tres reliquas partes quartas tertij. ac proinde tertia pars huius numeri, nimirum 16 — $\frac{7}{12}$ ℞. erit quarta pars tertij, quę cum tribus quartis prædictis, hoc est, cum 48 — $\frac{7}{4}$ ℞. faciet totum tertium numerum 64 — $\frac{28}{12}$ ℞. siue 64 — 2 $\frac{1}{3}$ ℞.

Hunc tertium si subducemus ex 84 — 2 ℞. summa secundi ac tertij, reliquus fiet secundus 20 + $\frac{1}{3}$ ℞.

Quia verò tertius cum $\frac{1}{12}$. primi ac secundi, id est, cum $\frac{1}{12}$ ℞.

& $1\frac{1}{3} + \frac{5}{36}$ ℞. (quæ ſimul faciunt $1\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ ℞.) debet facere 39. Facit autem tertius $64 - 2\frac{1}{3}$ ℞. cum $1\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ ℞. numerum $65\frac{2}{3} - 2\frac{2}{9}$ ℞. Nam $-2\frac{1}{3}$. cum $+\frac{1}{9}$ facit $-2\frac{2}{9}$. vt in hac formula apparet. qui numerus $65\frac{2}{3} - 2\frac{2}{9}$ ℞. æqualis debet eſſe numero 39. Additis ergo $2\frac{2}{9}$ ℞, vtrobique, erit æqualitas inter $65\frac{2}{3}$. & $39 + 2\frac{2}{9}$ ℞. Ablatiſque 39. vtrobique, inter $26\frac{2}{3}$. ſiue $\frac{80}{3}$. & $\frac{20}{9}$ ℞. Diuiſis ergo $\frac{80}{3}$. per $\frac{20}{9}$. fiet 1 ℞. 12. primus numerus. Ac proinde ſecundus, qui inuentus eſt $20 + \frac{1}{3}$ ℞. erit 24. Tertius autem inuentus $64 - 2\frac{1}{3}$ ℞. erit 36. Atque tres hi numeri 12. 24. 36. problema abſoluunt. Facienda autem ſemper eſt æquatio cum numero, quem tertius cum parte data aliorum facere debet, vt in noſtro exemplo cum 39. factum eſt.

$$\begin{array}{r} -2\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{9} \\ \hline -2\frac{2}{9} \end{array}$$

CV. 105 *Datum numerum partiri in duas partes, vt prior cum dato alio numero ad poſteriorem cum quouis alio dato numero proportionem habeat datam quamcunque, ſi id fieri poteſt.*

DATVS numerus 100. ſecandus ſit in duas partes, vt prior 10. faciat numerum triplum numeri, quem poſterior pars cum 20. efficit. Ponatur prior pars 1 ℞. ac proinde poſterior 100 — 1 ℞. Prior cum 10. facit 1 ℞ + 10. & poſterior cum 20. facit 120 — 1 ℞. Vt ergo ille huius ſit triplus, neceſſario erit æquatio inter 1 ℞ + 10. & 360 — 3 ℞. Additiſque 3 ℞ vtrobique, inter 4 ℞ + 10. & 360. Ablatiſque 10 vtrobique, inter 4 ℞. & 350. Diuiſis igitur 350. per 4 fiet 1 ℞. $87\frac{1}{2}$. prior pars. Poſterior autem 100 — 1 ℞. erit $12\frac{1}{2}$. Prior cum 10. facit $97\frac{1}{2}$. numerum triplum numeri $32\frac{1}{2}$. ex poſteriori parte, & 20. conflati.

ADDITVM eſt in ænigmate, [ſi id fieri poteſt] quia ſæpe erit quæſtio impoſſibilis. quod optimè æquatio monebit. V. g. ſi datus numerus 100. diuidendus ſit in duos, vt prior cum 10. faciat numerum ſeptuplum numeri ex poſteriori, & 20. conflati; fieri id nullo modo poterit. Poſita enim priori parte 1 ℞. & poſteriori 100 — 1 ℞. prior cum 10. faciet 1 ℞ + 10 poſterior autem cum 20 faciet 120 — 1 ℞. cuius ille non poteſt eſſe ſeptuplus. Nam fieret æquatio inter 1 ℞ + 10. & 840 — 7 ℞. Et additis 7 ℞. vtrobique, inter 8 ℞ + 10. & 840. Ablatiſque 10. vtrobique, inter 8 ℞. & 830. Diuiſis autem 830. per 8. fieret 1 ℞. $103\frac{3}{4}$. prior pars. quod eſt abſurdum, cum maior ſit dato numero 100.

VIDES igitur, quam expeditè operatio ipſa nos inſtruat, quando quæſtio propoſita ſolui poſſit, & quando non. id quod ad initium huius lib. monuimus.

106 Nu-

106 *Numerum inuenire, à quo detractis quotuis partibus aliquotis, ſi reliquus numerus per datum numerum multiplicetur, fiat numerus æqualis ei, qui ex inuento numero, & dato conflatur.* CVI.

SIT inueniendus numerus, à quo detractis $\frac{4}{7}$. ſi reliquus numerus $\frac{3}{7}$. multiplicetur per 10. tantum fiat, quantum ex numero inuento, & dato numero 10. Ponatur numerus quæſitus 1 ℞. Detractis $\frac{4}{7}$. remanent $\frac{3}{7}$ ℞. quibus multiplicatis per 10. fit numerus $\frac{30}{7}$ ℞. id eſt, $4\frac{2}{7}$ ℞. Et ſi ad poſitum numerum 1 ℞. addantur 10. fit numerus 1 ℞ + 10. æqualis $4\frac{2}{7}$ ℞. Ablata ergo 1 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 10. & $3\frac{2}{7}$ ℞. Diuiſiſque 10. per $3\frac{2}{7}$. hoc eſt, per $\frac{23}{7}$. fiet 1 ℞. $\frac{70}{23}$. ſiue $3\frac{1}{23}$. numerus quæſitus. Subductis enim $\frac{4}{7}$. inuenti numeri $\frac{70}{23}$. nimirum $\frac{40}{23}$. ſi reliquus numerus $\frac{30}{23}$. nimirum $\frac{3}{7}$. eiuſdem numeri inuenti, multiplicetur per 10. fiet numerus $\frac{300}{23}$. ſiue $13\frac{1}{23}$. Et ſi ad inuentum numerum $\frac{70}{23}$. addatur idem numerus datus 10. hoc eſt, $\frac{230}{23}$. fiet quoque numerus $\frac{300}{23}$. ſiue $13\frac{1}{23}$.

Hoc ænigma idem eſt, quod trigeſimum, ſed variata nonnihil pronunciatione.

107 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt ex vno in alterum gignatur datus quiuis numerus.* CVII.

SINT inueniendi duo numeri in proportione ſeſquialtera, vt ex vno in alterum gignatur numerus 40. Ponantur numeri 2 ℞. 3 ℞. in proportione ſeſquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6 ʒ. æqualis 40. Diuiſis ergo 40. per 6. fit 1 ʒ $\frac{40}{6}$. Et √ʒ $\frac{40}{6}$. erit valor vnius radicis. Et quia primus numerus poſitus fuit 2 ℞. & ſecundus 3 ℞. erit primus numerus √ʒ $\frac{160}{6}$. & ſecundus √ʒ $\frac{360}{6}$. Ex vno in alterum fit numerus √ʒ $\frac{57600}{36}$. hoc eſt $\frac{240}{6}$. ſiue 40.

SINT rurſum inueniendi duo numeri in eadem proportione ſeſquialtera, vt ex vno in alterum fiat numerus 294. Poſitis rurſum duobus numeris 2 ℞. 3 ℞. in proportione ſeſquialtera, gignetur ex vno in alterum numerus 6 ʒ. æqualis 294. Diuiſiſque 294. per 6. fit 1 ʒ. 49. cuius radix eſt 7. Ergo primus numerus 2 ℞. erit 14. & ſecundus 3 ℞. erit 21. Atque ex 14 in 21. fit propoſitus numerus 294. Vides ergo aliquando numeros quæſitos eſſe ſurdos, vt in priori exemplo, & aliquando rationales, vt in poſteriori.

108 *Duos numeros in qualibet proportione datos æqualiter minuere, ita vt reliquus maioris ad reliquum minoris habeat datam quamcunque proportionem, quæ maior ſit proportione datorum numerorum.* CVIII.

Hoc ænigma idem est, quod octauum, aliis tamen verbis propositum. Nam & hic quæritur numerus, qui ex datis duobus detractus relinquat duos numeros in data proportione. Libuit tamen idipsum hoc tenore proponere, & aliter soluere, quam ænigma octauum solutum fuit, vt discas aliorum quoque ænigmatum solutiones variare. Sint ergo dati duo numeri 3. & 2. in proportione sesquialtera minuendi æqualiter, hoc est, ab ipsis vnus idémque numerus auferendus, vt reliqui proportionem habeant v.g. vigecuplam. Ponamus minorem imminutum decreuisse vsque ad 1 ℞. ac proinde maiorem vsque ad 20 ℞. vt hic reliquus ad illum reliquum habeat proportionem vigecuplam. Si igitur ex maiore 3. auferemus 20 ℞. remanebit numerus 3 — 20 ℞. qui auferendus est ex 3. vt relinquantur 20 ℞. vt in hac formula apparet. Item si ex minore 2. detrahemus 1 ℞. reliquus erit numerus 2 — 1 ℞. qui ex 2. auferendus est, vt relinquatur 1 ℞.

$$\begin{array}{ccc} 3 & + & 0\ ℞ \\ 3 & - & 20\ ℞ \\ \hline 0 & + & 20\ ℞ \end{array}$$

Quia verò ambo numeri ponuntur æqualiter imminuti, hoc est, ex vtroque idem numerus ablatus ponitur, erit æquatio inter 3 — 20 ℞. & 2 — 1 ℞. Additísque 20 ℞ vtrobique, inter 3 & 2 + 19 ℞. Ablatísque 2. vtrinque, inter 1. & 19 ℞. Erítque 1 ℞ $\frac{1}{19}$. Cum igitur ex 3. auferenda sint 3 — 20 ℞. & 2 — 1 ℞. ex 2. auferendus erit ex vtroque numero numerus $1\frac{18}{19}$. erúntque reliqui numeri $\frac{20}{19}$. & $\frac{1}{19}$. qui habent proportionem vigecuplam propositam.

CIX. 109 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt qui fit ex vno in alterum cum summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, efficiat numerum datum.*

Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, ita vt ex vno in alterum fiat numerus, qui cum quadratis ipsorum efficiat 100. Ponantur numeri quæsiti 3 ℞. 2 ℞. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6 ʓ. & eorum quadrati sunt 9 ʓ. & 4 ʓ. qui cum 6 ʓ. faciunt 19 ʓ. æquales 100. Diuisis igitur 100. per 19. fit 1 ʓ. $\frac{100}{19}$. ergo 1 ℞. erit √ʓ $\frac{100}{19}$. & 3 ℞. erunt √ʓ $\frac{900}{19}$ pro primo numero, quem posuimus 3 ℞. & secundus numerus, qui positus fuit 2 ℞. erit √ʓ $\frac{400}{19}$. ad quem √ʓ $\frac{900}{19}$. proportionem habet sesquialteram. Ex vno in alterum fit numerus √ʓ $\frac{360000}{361}$. hoc est, $\frac{600}{19}$. & summa quadratorum $\frac{900}{19}$. & $\frac{400}{19}$. est $\frac{1300}{19}$. quæ cum $\frac{600}{19}$. facit $\frac{1900}{19}$. hoc est, 100.

Sint rursus inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, ita vt numerus, qui ex vno in alterum fit, cum summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, faciat summam 2736. Repetita eadem operatione, erunt 19 ʓ. æquales 2736. Diuisis ergo 2736. per 19. fiet 1 ʓ. 144. & 1 ℞ 12. Igitur primus numerus positus 3 ℞. erit 36. & secundus, quem posuimus 2 ℞. erit 24. Ex 36. in 24. fiunt 864. quæ cum

cum quadratis 576. 1296. faciunt 2736. ipsique numeri inuenti 36. & 24. proportionem habent sesquialteram.

110 *Inuenire numerum, qui in se ductus, & productus in datũ quemuis numerum, faciat numerum, qui habeat ad inuenti numeri cubum proportionem quamcunque datam.* CX.

Inueniendus sit numerus, qui in se ductus, & hic productus in 10. faciat numerum in proportione quintupla ad inuenti numeri cubum, hoc est, qui quinquies eius cubum contineat. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. Hic in se ductus facit 1 ʓ. & 1 ʓ. in 10. facit 10 ʓ. qui numerus debet esse quintuplus cubi ex 1 ℞. procreati. Est autem cubus numeri 1 ℞. 1 ce. qui quinquies sumptus facit 5 ce. æquales 10 ʓ. Diuisis ergo 10. per 5. fiet 1 ℞ 2. numerus quæsitus, propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Nam ex 2. in 2. fit 4. & ex 4. in 10. fit numerus 40. quintuplus cubi 8. ex 2. procreati.

Si numerus ductus in se, & productus in 10. debet habere proportionem sesquialteram ad cubum, erit æquatio inter 10 ʓ. & $1\frac{1}{2}$. ce. Diuisis igitur 10. per $1\frac{1}{2}$. siue per $\frac{3}{2}$. fiet 1 ℞ $\frac{20}{3}$. qui numerus in se ductus facit $\frac{400}{9}$ & hic in 10. facit $\frac{4000}{9}$. Cubus autem numeri $\frac{20}{3}$. est $\frac{8000}{27}$. ad quem numerus $\frac{4000}{9}$. hoc est $\frac{12000}{27}$. proportionem habet sesquialteram.

Sic si numerus ductus in se, & productus in 10. debet ad cubum habere proportionem subduplam; Posito numero 1 ℞. fiet ex 1 ℞ in se numerus 1 ʓ. & ex 1 ʓ. in 10. numerus 10 ʓ. qui subduplus esse debet 1 ce. qui fit ex 1. ℞ in se cubicè. Igitur æquatio erit inter 20 ʓ. & 1 ce. eritque 1 ℞ 20. Nam ex 20. in se fit 400. & ex 400. in 10. fit 4000. qui subduplus est cubi 8000. qui fit ex 20. in se cubicè.

111 *Datum numerum in duas partes secare, vt prior multiplicata per quemuis numerum producat numerum, qui superet numerum productum ex parte posteriore in quemlibet alium numerum, numero dato, quando id fieri potest.* CXI.

Sit numerus 30. diuidendus in duas partes, vt prior ducta in 10. procreet numerum, qui numero 20. superet numerum, quem posterior pars in 40. multiplicata producit. Ponatur prior pars 1 ℞. ideoque posterior 30 — 1 ℞. Ex 1 ℞. in 10. fit numerus 10. ℞. & ex 30 — 1 ℞. in 40. fit numerus 1200 — 40 ℞. quem prior productus superare debet numero 20. Ergo si posteriori addentur 20. fiet æqualitas inter 10 ℞.& 1220 — 40 ℞. Additisque 40 ℞. vtrinque, inter 50 ℞.& 1220. Diuisis ergo 1220. per 50. fiet 1 ℞. 24 $\frac{2}{5}$. prior pars, ideoque posterior erit 5 $\frac{3}{5}$. Prior in 10. ducta facit 244. posterior in 40. facit 224. qui ab illo superatur numero 20.

Diximvs in ænigmate, [quando id fieri potest] quia non semper quæstio solui potest, vt si prior productus superare debeat posteriorem productum, numero 300. reperietur æqualitas inter 1500 — 40 ℞. & 10 ℞ Additisque 40 ℞. vtrinque, inter 1500.& 50 ℞. Diuisisque 1500. per 50. fiet 1 ℞. 30. vna pars dati numeri 30. quod est ineptum. Vbi etiam vides, ex ipsa operatione per regulam Algebræ cognosci posse, num quæstio solui possit, necne.

CXII. 112 *Datum numerum in duas partes secare, vt prior in quemlibet numerum ducta faciat numerum in data proportione ad numerum factum ex posteriori parte in quemuis alium numerum multiplicata.*

Sit numerus 40. secandus in duas partes, vt ex priore in 10. fiat numerus in proportione subdupla ad numerum factum ex parte posteriore in 30. Ponatur prior pars 1 ℞. ideoque posterior 40 — 1 ℞. Ex 1 ℞. in 10. fit numerus 10 ℞. qui subduplus esse debet numeri 1200 — 30 ℞. producti ex 40 — 1 ℞. in 30. hoc est, æquatio fiet inter 20 ℞. & 1200 — 30 ℞. Additisque 30 ℞ vtrobique, inter 50 ℞. & 1200. Diuisis ergo 1200. per 50. fiet 1 ℞. 24. prior pars, ac proinde posterior erit 16. Ex 24. in 10. fit 240. qui numerus subduplus est numeri 480. facti ex 16. in 30.

CXIII. 113 *Datum numerum in duos distribuere, vt prior diuisus per datum quemuis numerum faciat Quotientem in data proportione ad Quotientem, qui fit ex posteriori numero per quemlibet numerum diuiso.*

Sit numerus 100. tribuẽdus in duos, vt prior diuisus per 10. faciat Quotientem in proportione sextupla ad Quotientem, quem facit posterior numerus diuisus per 20. Ponatur prior 1 ℞. ac proinde posterior 100 — 1 ℞. Diuiso priore per 10. fit Quotiens $\frac{1}{10}$ ℞. Diuiso autem posteriore per 20. fit Quotiens 5 — $\frac{1}{20}$ ℞. Et quia ille Quotiens ad hunc debet habere proportionem sextuplam; erit æquatio inter $\frac{1}{10}$ ℞.& 30 — $\frac{6}{20}$ ℞. Et additis $\frac{6}{20}$ ℞. vel $\frac{3}{10}$ ℞ vtrobique inter $\frac{4}{10}$ ℞.& 30. Diuisis ergo 30. per $\frac{4}{10}$ fiet 1 ℞. 75. prior numerus. Posterior ergo erit 25. Diuisis 75. per 10. fit Quotiens $\frac{75}{10}$. Diuisis vero 25. per 20. fit Quotiens $\frac{25}{20}$ ad quem ille Quotiens $\frac{75}{10}$. vel $\frac{150}{20}$. proportionem habet sextuplam.

114 *Tres*

114 *Tres numeros in continua proportione data inuenire, vt numerus ex minore in medium productus habeat ad maiorem quamcunque proportionem datam.* CXIIII.

Inveniendi sint tres numeri in continua proportione sesquitertia, vt ex minore in medium fiat numerus ad maiorem in proportione quintupla. Ponantur quæsiti tres numeri 9 ℞. 12 ℞. 16 ℞. in proportione sesquitertia. Ex 9 ℞. in 12 ℞. fit numerus 108 ʒ. qui debet esse quintuplus tertij 16 ℞. Ergo æquatio erit inter 108 ʒ. & 80 ℞. Diuisisque 80. per 108. fiet 1 ℞. $\frac{80}{108}$. siue $\frac{20}{27}$. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Primus ergo numerus positus 9 ℞. erit $\frac{180}{27}$. Secundus positus 12 ℞. erit $\frac{240}{27}$. & tertius positus 16 ℞. erit $\frac{320}{27}$. Ex primo in secundum fit numerus $\frac{43200}{729}$. qui quintuplus est ad $\frac{320}{27}$. siue ad $\frac{8640}{729}$.

Si productus numerus ex primo in secundum debet esse æqualis tertio, erit æquatio inter 108 ʒ. & 16 ℞. Diuisis ergo 16. per 108. fiet 1 ℞ $\frac{4}{27}$. ac proinde tres numeri quæsiti erunt $\frac{36}{27}$. $\frac{48}{27}$. $\frac{64}{27}$. siue 1 $\frac{1}{3}$. 1 $\frac{7}{9}$. 2 $\frac{10}{27}$.

Si productus ex primo in secundum debet esse semissis tertij, erit æquatio inter 216 ʒ. & 16 ℞. Diuisis igitur 16. per 216. fiet 1 ℞. $\frac{16}{216}$. siue $\frac{2}{27}$. ac proinde tres numeri quæsiti erunt $\frac{18}{27}$. $\frac{24}{27}$. $\frac{32}{27}$. hoc est $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{9}$. 1 $\frac{5}{27}$. Atque ex $\frac{2}{3}$. in $\frac{8}{9}$. fit numerus $\frac{16}{27}$. qui semissis est tertij 1 $\frac{5}{27}$.

115 *Datum numerum in tres partiri, vt singuli in tres singulos numeros datos, vel in vnum eundémque numerum datum multiplicati, producant tres numeros in data proportione continua.* CXV.

Sit numerus datus 80. diuidendus in tres, vt primo ducto in 4.& secundo in 3. & tertio in 7. producantur tres numeri in continua proportione quadrupla. Ponatur prima pars 1 ℞. quæ ducta in 4. facit 4 ℞. Et quia secunda pars ducta in 3. debet gignere numerum 16 ℞. quadruplum videlicet numeri 4 ℞. quærendus erit numerus, qui in 3. ductus producat 16 ℞. Is erit Quotiens, si 16 ℞. diuidantur per 3. nimirum $\frac{16}{3}$ ℞. eritque secunda pars $\frac{16}{3}$ ℞. Rursus quia tertia pars ducta in 7. debet procreare numerum 64 ℞. quadruplum videlicet numeri 16 ℞. quærendus erit numerus, qui in 7. ductus faciat 64 ℞. Is erit $\frac{64}{7}$ ℞. Quotiens videlicet, si 64 ℞. per 7. diuidantur. Atque ita tres partes quæsitæ sunt 1 ℞. $\frac{16}{3}$ ℞. $\frac{64}{7}$ ℞. quæ ordine in 4. 3. & 7. ductæ procreant 4 ℞. 16 ℞. & 64 ℞. in data proportione quadrupla continua. Reliquum iam est, vt prædictæ tres partes in vnam summam collectæ faciant 80. numerum datum.

Faciunt autem $1\frac{304}{21}$ ℞. siue $\frac{325}{21}$ ℞. Est ergo æquatio inter $\frac{325}{21}$ ℞. & 80. Diuisis ergo 80. per $\frac{325}{21}$. fiet 1 ℞. $\frac{1680}{325}$. prima pars, quæ posita fuit 1 ℞. Quoniam autem secunda pars inuenta fuit $\frac{16}{3}$ ℞. si $\frac{1680}{325}$. valor vnius radicis ducatur in $\frac{16}{3}$ ℞. producetur secunda pars $\frac{26880}{975}$. Eadem ratione, cum tertia pars inuenta sit $\frac{64}{7}$ ℞. si vnius radicis valor $\frac{1680}{325}$. ducatur in $\frac{64}{7}$ ℞. producetur tertia pars $\frac{107520}{2275}$. Atque hæ tres partes $\frac{1680}{325}$. $\frac{26880}{975}$. $\frac{107520}{2275}$, hoc est, $5\frac{11}{65}$. $27\frac{111}{195}$. $47\frac{119}{455}$. in vnum collectæ faciunt 80. numerum datum. & multiplicatæ ordinatim per 4. 3. 7. procreant tres numeros $\frac{6720}{325}$. $\frac{80640}{975}$. $\frac{752640}{2275}$. in continua proportione quadrupla.

Qvando datus numerus 80. tribuendus est in tres, vt singulis partibus per eundem numerum quemcunque, vt per 5. multiplicatis, gignātur tres numeri in continua proportione quadrupla. fiet id facili negotio. Nam si per ænigma 49. diuidatur numerus datus 80. in tres partes continuè quadruplas, videlicet in $\frac{80}{21}$. $\frac{320}{21}$. $\frac{1280}{21}$. & singulæ per propositum numerum 5. multiplicentur, [a] producentur tres numeri in eadem proportione quadrupla, $\frac{400}{21}$. $\frac{1600}{21}$. $\frac{6400}{21}$. id est, $19\frac{1}{21}$. $76\frac{4}{21}$. $304\frac{16}{21}$.

a schol. 18. septimi.

CXVI. 116. *Datum numerum in tres partes diuidere, vt singulæ per tres singulos numeros datos multiplicatæ producant eundem numerum: Vel vt tam priores duæ per duos datos numeros ductæ producant vnum eundémque numerum, quàm posteriores duæ per alios duos numeros datos multiplicatæ producant vnum quoque & eundem numerum.*

Sit datus numerus 100. diuidendus in tres, vt primo ducto in 5. secundo in 2. & tertio in 6. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1 ℞. quo ducto in 5 fiunt 5 ℞. Et quia tantundem debet facere secundus ductus in 2. diuidemus 5 ℞. per 2. Nam Quotiens $\frac{5}{2}$ ℞ erit secundus numerus, cum in 2. ductus faciat 5 ℞. Et quoniam tantundem facere debet tertius in 6. ductus, diuidemus 5 ℞ per 6. Quotiens enim $\frac{5}{6}$ ℞. erit tertius numerus, cum in 6. ductus faciat 5 ℞. Reliquum iam est, vt omnes tres partes 1 ℞. $2\frac{1}{2}$ ℞. $\frac{5}{6}$ ℞. faciant datum numerum 100. Faciunt autem $4\frac{1}{3}$ ℞. Est ergo æquatio inter $4\frac{1}{3}$ ℞. & 100. diuisisque 100. per $4\frac{1}{3}$. hoc est, per $\frac{13}{3}$. fiet 1 ℞. $23\frac{1}{13}$. quæ dat primum numerum, quem posuimus 1 ℞. Secundus ergo inuentus $2\frac{1}{2}$ ℞. erit $57\frac{9}{13}$. Et tertius inuentus $\frac{5}{6}$ ℞. erit $19\frac{3}{13}$. Atque hi tres numeri $23\frac{1}{13}$. $57\frac{9}{13}$. $19\frac{3}{13}$. faciunt datum numerum 100. Et ductæ in 5. 2. & 6. producunt tres numeros æquales $115\frac{5}{13}$. $115\frac{5}{13}$. $115\frac{5}{13}$.

Sed iam tam priores duo numeri multiplicati per 6. & 3. debeant producere duos numeros æquales, quam posteriores duo ducti in 5. & 8. Ponatur rursum primus 1 ℞. Ex 1 ℞ in 6. fiunt 6 ℞.

Et

Et quia tantundem facere debet secundus ductus in 3. diuidemus 6 ℞ per 3. Quotiens enim 2 ℞. dabit secundum numerum, cùm ductus in 3 faciat 6 ℞. Deinde ex secundo hoc 2 ℞ in 5 fiunt 10 ℞. Et quoniam tantundem debet facere tertius ductus in 8. diuidemus 10 ℞ per 8. Nam Quotiens $1\frac{1}{4}$. erit tertius numerus, cùm ductus in 8. gignat 10 ℞. Reliquum nunc est, vt tres hi numeri 1 ℞ 2 ℞. $1\frac{1}{4}$ ℞ faciant numerum datum 100. Faciunt autem $4\frac{1}{4}$ ℞. qui numerus æqualis esse debet 100. Diuisis ergo 100. per $4\frac{1}{4}$. id est, per $\frac{17}{4}$. fiet 1 ℞. $23\frac{9}{17}$. primus numerus, qui positus fuit 1 ℞. Secundus igitur inuentus 2 ℞. erit $47\frac{1}{17}$. Et tertius inuentus $1\frac{1}{4}$ ℞. erit $29\frac{7}{17}$. Atque hi tres numeri $23\frac{9}{17}$. $47\frac{1}{17}$. $29\frac{7}{17}$. faciunt simul 100. Et priores duo ducti in 6. & 3. generant eundem numerum $141\frac{3}{17}$. Posteriores verò duo ducti in 5. & 8. procreant eundem numerum $235\frac{5}{17}$.

117 *Datum numerum in tres partes distribuere, vt prima parte diuisa per quemuis numerum. Et secunda multiplicata per alium datum numerum. Ac tertia diuisa per quemcunque etiam numerum, proueniant tres numeri æquales.* CXVII.

Sit datus numerus 178. diuidendus in tres partes, vt tantum fiat ex diuisione primæ partis per 5. quantum ex multiplicatione secundæ per 8. & quantum ex diuisione tertiæ per 6. Ponatur prima pars 1 ℞ qua diuisa per 5. fit Quotiens $\frac{1}{5}$ ℞. Et quia tantundem fieri debet ex secunda ducta in 8. diuidemus $\frac{1}{5}$ ℞ per 8. Nam Quotiens $\frac{1}{40}$ ℞. erit secunda pars, quæ multiplicata per 8. facit $\frac{1}{5}$ ℞. Et quia tantundem facere debet tertia diuisa per 6. multiplicabimus $\frac{1}{5}$ ℞ per 6. Productus enim numerus $\frac{6}{5}$ ℞ erit tertia pars, qua diuisa per 6. Quotiens fit $\frac{1}{5}$ ℞. Reliquum iam est, vt tres hæ partes 1 ℞. $\frac{1}{40}$ ℞ $\frac{6}{5}$ ℞. faciant datum numerum 178. Faciunt autem $2\frac{9}{40}$ ℞. Igitur æquatio erit inter 178. & $2\frac{9}{40}$ ℞. Et si diuidantur 178 per $2\frac{9}{40}$. siue per $\frac{89}{40}$. fiet 1 ℞. 80. prima pars, quam posuimus 1 ℞. Secunda autem erit 2. quæ habetur, si radix inuenta 80. multiplicetur per $\frac{1}{40}$. propterea quod secunda pars inuenta fuit $\frac{1}{40}$ ℞. Tertia denique erit 96. quæ quidem producetur, si eadem radix inuenta 80 multiplicetur per $\frac{6}{5}$. propterea quod tertia pars inuenta fuit $\frac{6}{5}$ ℞. Atque hæ tres partes 80. 2. 96. conficiunt 178. numerum datum. Et siue prima per 5. diuidatur, siue secunda ducatur in 8. siue denique tertia diuidatur per 6. producetur semper idem numerus 16.

8 *Datum numerum in tres partes secare, vt singulæ per singulos tres numeros datos diuisæ, faciant vnum eundémque Quotientem.* CXVIII.

Sit datus numerus 240. tribuendus in tres partes, vt prima diuisa per 5. Et secunda per 3. Et tertia per 7. procreetur semper idem Quotiens. Ponatur prima pars 1 ℞ qua diuisa per 5. fit Quotiens $\frac{1}{5}$ ℞. Et quia tantundem fieri debet ex secunda parte diuisa per 3. multiplicabimus $\frac{1}{5}$ ℞ per 3. Productus enim numerus $\frac{3}{5}$ ℞ erit secunda pars, quæ diuisa per 3. facit Quotientem $\frac{1}{5}$ ℞. Quoniam autem ex diuisione tertiæ partis per 7. debet etiam produci $\frac{1}{5}$ ℞. multiplicabimus $\frac{1}{5}$ ℞ per 7. Numerus enim productus $\frac{7}{5}$ ℞ erit tertia pars, qua diuisa per 7. Quotiens fit $\frac{1}{5}$ ℞. Restat, vt tres hæ partes 1 ℞. $\frac{3}{5}$ ℞. $\frac{7}{5}$ ℞. simul sumptæ sint 240. Faciunt autem 3 ℞. Igitur æquatio erit inter 3 ℞. & 240. Diuisisque 240. per 3 fiet 1 ℞. 80. prima pars. Secunda erit 48. quæ habetur, si inuenta radix 80. ducatur in $\frac{3}{5}$. cum secunda pars inuenta sit $\frac{3}{5}$ ℞. Tertia denique erit 112. quæ habetur, si eadem radix inuenta 80. ducatur in $\frac{7}{5}$. quandoquidem tertia pars inuenta fuit $\frac{7}{5}$ ℞. Atque omnes hæ tres partes 80. 48. 112. faciunt 240. numerum propositum. Et tam prima diuisa per 5. quam secunda per 3. & tertia per 7. fit, idem semper Quotiens 16.

CXIX.

119 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt quælibet pars aliquota minoris in aliam datam partem maioris multiplicata gignat numerum quemcunque datum.*

Sint inueniendi duo numeri in proportione tripla, vt $\frac{1}{4}$. minoris in $\frac{1}{2}$. maioris ducta procreet numerum 90. Ponatur minor 1 ℞ & maior 3 ℞, vt habeant datam proportionem triplam. Ex quarta parte minoris, nimirum $\frac{1}{4}$ ℞. in semissem maioris, id est, in $\frac{3}{2}$ ℞ fit numerus $\frac{3}{8}$ ʒ. æqualis 90. Diuisis ergo 90. per $\frac{3}{8}$. fiet 1 ʒ. 240. Et 1 ℞ erit √ʒ 240. minor numerus. Maior erit huius triplus √ʒ 2160. Iam $\frac{1}{4}$. minoris, videlicet √ʒ 15. ducta in $\frac{1}{2}$ maioris, nimirum in √ʒ 540. facit √ʒ 8100. hoc est, numerum datum 90.

CXX.

120 *Numerum inuenire, quo per datum numerum multiplicato, & per productum diuiso alio numero dato, Quotiens ad inuentum numerum datam habeat proportionem.*

Sit inueniendus numerus, quo multiplicato per 5. & per productum diuiso numero 60. Quotiens ad numerum inuentum proportionem habeat sesquialteram. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Hoc ducto in 5 fiunt 5 ℞. Diuisis autem 60. per 5 ℞. fit Quotiens $\frac{60}{5 ℞}$. qui sesquialteram proportionem habere debet ad 1 ℞. Habet autem & numerus 1 $\frac{1}{2}$ ℞. hoc est, $\frac{3 ℞}{2}$. (qui producitur ex 1 ℞. in 1 $\frac{1}{2}$. siue in $\frac{3}{2}$.) ad 1 ℞. proportionem sesquialteram.

proportionem sesquialteram. Est ergo æquatio inter $\frac{60}{5 ℞}$. & $\frac{3 ℞}{2}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 120. & 15 ʒ. Diuisis igitur 120 per 15. fiet 1 ʒ. 8. Et 1 ℞ erit √ʒ 8. numerus, quem quærimus. Nam ex √ʒ 8 in 5 fit √ʒ 200. per quem numerum si diuidantur 60. fit Quotiens √ʒ 18. qui ad √ʒ 8. sesquialteram proportionem habet: quippe cum √ʒ 8. ducta in 1 $\frac{1}{2}$. faciat √ʒ 18.

120 15 ʒ

$$\frac{60}{5 ℞} \times \frac{3 ℞}{2}$$

121 *Tres numeros inuenire Arithmeticè proportionales, ita vt eorum summa sit data pars aliquota numeri, qui ex eorum multiplicatione inter se producitur. Vel (quod idem est) vt numerus ex ipsorum multiplicatione productus ad eorundem summam proportionem habeat datam.* CXXI.

Debeat summa inuentorum numerorum esse $\frac{1}{5}$. numeri ex eorum multiplicatione producti, hoc est, numerus productus ad summam habere debeat proportionem quintuplam. Ponantur tres numeri quæsiti 1 ℞ 2 ℞. 3 ℞. qui æqualiter se excedunt numero 1 ℞. Eorum summa est 6 ℞. At numerus ex multiplicatione productus 6 ce. Nam ex 1 ℞. in 2 ℞. fit numerus 2 ʒ. Et ex 2 ʒ. in 3 ℞. fit numerus 6 ce. Et quoniam summa 6 ℞. debet esse $\frac{1}{5}$. numeri 6 ce. erit æquatio inter 30 ℞. & 6 ce. Diuisis igitur 30 per 6. fiet 1 ʒ. 5. (propterea quod inter ℞, & ce, vna denominatio, nimirum ʒ, est interposita) ideóque 1 ℞. erit √ʒ 5. & 2 ℞. erunt √ʒ 20. & 3 ℞ erunt √ʒ 45. Itaque tres numeri inuenti sunt √ʒ 5. √ʒ 20. √ʒ 45. qui se æqualiter excedunt numero √ʒ 5. vt patet, si primus à secundo, & secundus à tertio subtrahatur. Summa eorum est √ʒ 180. & numerus ex eorum multiplicatione productus √ʒ 4500. Constat autem √ʒ 180. esse $\frac{1}{5}$. numeri √ʒ 4500. hoc est, √ʒ 4500. ad √ʒ 180. proportionem habere quintuplam; cum numerus √ʒ 180. ductus in 5. faciat √ʒ 4500.

Debeat deinde numerus productus ad summam habere proportionem, quam 24. ad 1. hoc est, summa debeat esse $\frac{1}{24}$. numeri producti. Ponantur numeri proportionales Arithmeticè, 2 ℞. 3 ℞. 4 ℞. quorum summa 9 ℞. & numerus productus 24 ce. Et quia 9 ℞. debent esse $\frac{1}{24}$. numeri 24 ce. hoc est, hic numerus ad illum habere debet proportionem, quam 24. ad 1. si 9 ℞. multiplicentur per 24. fiet æqualitas inter 216 ℞. & 24 ce. Diuisis igitur 216. per 24. fiet 1 ʒ. 9. & 1 ℞ 3. Erunt igitur tres numeri quæsiti 6. 9. 12. quod positi sint 2 ℞. 3 ℞. 4 ℞. Summa eorum 27. est $\frac{1}{24}$. pars numeri 648. ex eorum multiplicatione producti: propterea quod ex 27. in 24. gignatur numerus 648.

CXXII. 122 *Tres numeros inuenire in continua proportione data, vt ex eorum multiplicatione gignatur datus numerus.*

SINT tres numeri inueniendi continuè quadrupli, vt inter ſe multiplicati procreent numerum 27. Ponantur quæſiti numeri 1 ℞. 4 ℞. 16 ℞. in continua proportione quadrupla. Ex 1 ℞ in 4 ℞. fit numerus 4 ℨ. & ex 4 ℨ in 16 ℞. fit numerus 64 ce. æqualis 27. Diuiſis ergo 27. per 64. fit 1 ce. $\frac{27}{64}$ & 1 ℞ $\frac{3}{4}$. Sunt ergo tres numeri quæſiti $\frac{3}{4}$. $\frac{12}{4}$. $\frac{48}{4}$. hoc eſt, $\frac{3}{4}$ 3. 12. quadrupli, qui inter ſe multiplicati producunt 27.

SINT rurſum inueniendi tres numeri ſeſquialteri, qui inter ſe multiplicati faciant 12. Ponantur tres numeri ſeſquialteri 1 ℞. 1 $\frac{1}{2}$ ℞. 2 $\frac{1}{4}$ ℞. hoc eſt, 1 ℞. $\frac{3}{2}$ ℞. $\frac{9}{4}$ ℞. Ex 1 ℞ in $\frac{3}{2}$ ℞. fit numerus $\frac{3}{2}$ ℨ. Et ex $\frac{3}{2}$ ℨ. in $\frac{9}{4}$ ℞. fit numerus $\frac{27}{8}$ ce. hoc eſt, 3 $\frac{3}{8}$ ce. æqualis 12. Diuiſis ergo 12 per $\frac{27}{8}$. fiet 1 ce. 3 $\frac{5}{9}$. & 1 ℞. √ce 3 $\frac{5}{9}$. primus numerus, quem poſuimus 1 ℞. Secundus ergo poſitus 1 $\frac{1}{2}$ ℞. erit √ce 12. Et tertius poſitus 2 $\frac{1}{4}$ ℞. erit √ce 40 $\frac{1}{2}$. propterea quod ex 1 $\frac{1}{2}$. in √ce 3 $\frac{5}{9}$. fit √ce 12. & ex 2 $\frac{1}{4}$. in √ce 3 $\frac{5}{9}$. fit √ce 40 $\frac{1}{2}$. Iam ex √ce 3 $\frac{5}{9}$. in √ce 12. fit numerus √ce 42 $\frac{2}{3}$. Et ex √ce 42 $\frac{2}{3}$. in √ce 40 $\frac{1}{2}$. fit numerus √ce 1728. hoc eſt, 12.

CXXIII 123 *Numerum inuenire, qui ductus in ſuam radicem quadratam producat datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, qui in ſuam radicem quadratam ductus faciat 4. Ponatur numerus quæſitus 1 ℨ. Hic ductus in 1 ℞ ſuam radicem quadratam facit 1 ce. æqualem 4. Diuiſis ergo 4 per 1. fiet 1 ce 4. eiúſque radix cubica √ce 4. cuius quadratum eſt √ce 16. numerus quæſitus; quem poſuimus 1 ℨ. Hic enim ductus in √ce 4. ſuam radicem quadratam facit √ce 64. hoc eſt, 4.

SIT deinde producendus numerus 15 $\frac{5}{8}$. inuenietúrque æqualitas inter 1 ce. & 15 $\frac{5}{8}$. Diuiſis ergo 15 $\frac{5}{8}$. per 1. fiet 1 ce. 15 $\frac{5}{8}$. hoc eſt, $\frac{125}{8}$. cuius radix cubica $\frac{5}{2}$. & huius quadratum $\frac{25}{4}$. numerus quæſitus, quem poſuimus 1 ℨ. Atque hic in ſuam radicem $\frac{5}{2}$. ductus facit $\frac{125}{8}$. hoc eſt, 15 $\frac{5}{8}$.

CXXIV 124 *Numerum inuenire, cuius radix quadrata ad eiuſdem radicem cubicam habeat proportionem.*

SIT inueniendus numerus, cuius radix quadrata ad eiuſdem radicem cubicam habeat proportionem ſeſquialteram. Ponatur quæſitus numerus 1 ℨ ce. vt nimirum habeat vtramque radicem propoſitam.

ſitam. Radix eius quadrata eſt 1 ce. & radix cubica 1 ℨ. vt ex ijs conſtat, quæ ad initium cap. 12. docuimus. quia 1 ce in ſe quadratè facit 1 ℨ ce, & 1 ℨ in ſe cubicè ſimiliter facit 1 ℨ ce. Reliquum eſt, vt 1 ce. ad 1 ℨ, proportionem habeat ſeſquialteram, hoc eſt, æquatio ſit inter 1 ce, & 1 $\frac{1}{2}$. ℨ. quod 1 $\frac{1}{2}$. ℨ ad 1 ℨ. habeat quoque ſeſquialteram proportionem. Diuiſis igitur 1 $\frac{1}{2}$. per 1, fiet 1 ℞ $\frac{1}{2}$ (quia numeri Coſſici ſunt collaterales) cuius ℨce. eſt $\frac{729}{64}$. ſiue 11 $\frac{25}{64}$. Huius radix quadrata eſt $\frac{27}{8}$. hoc eſt, 3 $\frac{3}{8}$. Radix autem cubica $\frac{9}{4}$. ſiue 2 $\frac{1}{4}$. Conſtat autem 3 $\frac{3}{8}$. ad 2 $\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{27}{8}$. ad $\frac{18}{8}$. habere proportionem ſeſquialteram.

SI proportio proponatur tripla, reperietur eodem diſcurſu æquatio inter 1 ce. & 3 ℨ. Diuiſiſque 3. per 1 fiet 1 ℞. 3. cuius zenſicubus eſt 729. atque huius radix quadrata 27. ad radicem cubicam 9. proportionem habet triplam.

125 *Duos numeros inuenire, vt ex vno in alterum gignatur numerus, qui ad duos inuentos habeat duas proportiones datas, maiorem tamen ad minorem, & minorem ad maiorem.* CXXV.

SINT inueniendi duo numeri, vt ex vno in alterum fiat numerus, qui ad minorem habeat proportionem triplam ſeſquialteram, & ad maiorem duplam. Ponatur numerus productus 1 ℞. Ergo minor numerus quęſitus erit $\frac{2}{7}$. ℞. & maior $\frac{1}{2}$. ℞. quippe cum 1 ℞ ad $\frac{2}{7}$ ℞ habeat proportionem triplam, ſeſquialteram, & duplam ad $\frac{1}{2}$. ℞. Ex $\frac{2}{7}$. ℞ in $\frac{1}{2}$. ℞ fit numerus $\frac{2}{14}$ ℨ. ſiue $\frac{1}{7}$ ℨ. æqualis poſito producto 1 ℞. Diuiſa ergo 1 per $\frac{1}{7}$. fiet 1 ℞. 7. numerus ſcilicet qui produci debet: cum numeri Coſſici ſint collaterales. Quia vero minor inuentus fuit $\frac{2}{7}$. ℞. erit minor 2. & maior 3 $\frac{1}{2}$. qui inuentus fuit $\frac{1}{2}$ ℞. Manifeſtum autem eſt 7. habere ad 2. proportionem triplam ſeſquialteram, & ad 3 $\frac{1}{2}$. duplam.

126 *Duos numeros inuenire datam ſummam efficientes, ita vt vteruis cum data parte, vel partibus alterius faciat quemuis numerum datum: qui minor ſit, quam data ſumma, & maior data parte, vel partibus datis eiuſdem ſummæ datæ.* CXXVI

SINT inueniendi duo numeri, quorum ſumma 60. ita vt prior numerus, cum $\frac{3}{7}$. poſterioris faciat 50. Ponatur prior 1 ℞. ideoque poſterior 60 — 1 ℞. Huius $\frac{3}{7}$. ſunt 25 $\frac{5}{7}$ — $\frac{3}{7}$ ℞. quæ cum 1 ℞. faciunt $\frac{4}{7}$ ℞ + 25 $\frac{5}{7}$. numerum æqualem 50. quia vt — $\frac{3}{7}$ ℞ addantur ad 1 ℞. debent ſubtrahi $\frac{3}{7}$ ℞. ex 1 ℞. atque ita remanent $\frac{4}{7}$ ℞. cum ſigno + vt ſupra in ſubtractione dictum eſt. Ablatis 25 $\frac{5}{7}$. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{4}{7}$ ℞. & 24 $\frac{2}{7}$. Diuiſis ergo 24 $\frac{2}{7}$. per $\frac{4}{7}$. fiet 1 ℞. 42 $\frac{1}{2}$. prior numerus: poſterior autem erit 17 $\frac{1}{2}$. cuius $\frac{3}{7}$. ſunt 7 $\frac{1}{2}$. quæ cum priori parte faciunt 50.

Si prior numerus cum $\frac{3}{7}$. poſterioris deberet facere 25. fieri id non poſſet, quia numerus 25. minor eſt, quam $\frac{3}{7}$. datæ ſummæ 60. vt experiri poteris. At ſi prior numerus cum $\frac{3}{7}$. poſterioris debeat facere 26. fieri id poterit, eritque prior numerus $\frac{1}{2}$. & poſterior 59 $\frac{1}{2}$. Huius $\frac{3}{7}$. ſunt 25 $\frac{1}{2}$. quæ cum priori parte faciunt 26.

Eodem pacto ſoluetur ænigma, ſi poſterior numerus cum $\frac{3}{7}$. prioris facere debeat datum numerum: ſi nimirum poſterior numerus ponatur 1 ℞. &c.

CXXVII. 127 *Quinque numeros inuenire, ita vt quatuor quomodolibet ſumpti ſine reliquo faciant quinque numeros datos: dummodo quarta pars ſummæ propoſitorum quinque numerorum maior ſit ſingulis numeris poſtulatis.*

Inveniendi ſint quinque numeri, ita vt quatuor ſine primo faciant 127. Et quatuor ſine ſecundo, 119. Et quatuor ſine tertio, 109. Et quatuor ſine quarto, 104. Et quatuor ſine quinto, 97. Vbi vides, quartam partem ſummæ 556. ex datis numeris 119. 109. 104. 97. collectę eſſe 139. numerum ſingulis illis numeris maiorem. Quoniam ergo ſumma omnium quatuor ſine quiuto eſt minima omnium, nimirum 97. erit neceſſario quintus numerus omnium maximus, quandoquidem quintus cum quibuſlibet aliis tribus facit maiorem ſummam, quam 97. Ponatur ergo quintus numerus 1 ℞. ac proinde cum alij quatuor ſine quinto faciant 97. erunt omnes quinque numeri ſimul 97 + 1 ℞. Et quia quatuor ſine quarto faciunt 104. Si ex ſumma omnium 97 + 1 ℞. detrahantur 104. reliquus erit quartus 1 ℞ — 7. Deinde quia quatuor ſine tertio faciunt 109. ſi ex eadem ſumma 97 + 1 ℞. demantur 109. remanebit tertius 1 ℞ — 12. Rurſus quoniam quatuor ſine ſecundo faciunt 119. ſi 119. ſubducantur ex eadem ſumma 97 + 1 ℞. relinquetur ſecundus 1 ℞ — 22. Denique quia quatuor ſine primo faciunt 127. ſi 127. ex eadem ſumma 97 + 1 ℞. auferatur, remanebit primus 1 ℞ — 30. Reliquum iam eſt, vt omnes hi quinque numeri inuenti faciant ſimul ſummam omnium 97 + 1 ℞. Faciunt autem 5 ℞ — 71. Igitur æquatio erit inter 97 + 1 ℞. & 5 ℞ — 71. Additiſq; 71. vtrobique, inter 168 + 1 ℞. & 5 ℞. Ablataq; 1 ℞. vtrinque, inter 168. & 4 ℞. Diuiſis ergo 168. per 4. fiet 1 ℞. 42. quintus numerus, quem poſuimus eſſe 1 ℞. Ergo quartus inuentus 1 ℞ — 7. erit 35. Et tertius inuentus 1 ℞ — 12. erit 30. Secundus autem inuentus 1 ℞ — 22. erit 20. Primus denique, qui inuentus fuit 1 ℞ — 30. erit 12. adeo vt quinque numeri quæſiti ſint

ſint ordine 12. 20. 30. 35. 42. qui ænigma propoſitum expediunt.

Hoc ænigma aliter ſolutum fuit in quatuor numeris in ænigmate 59.

128 *Numerum inuenire, ita vt tres quadrati ex eius tribus partibus datis deſcripti, & in vnam ſummam collecti, efficiant ipſum numerum inuentum, vel alium quemcunque datum.* CXXVIII.

Sit primum inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. deſcripti in vnam ſummam collecti, efficiant ipſum numerum inuentum. Ponatur ille numerus 1 ℞. cuius $\frac{2}{3}$. erunt $\frac{2}{3}$ ℞. & $\frac{3}{5}$. erunt $\frac{3}{5}$ ℞. & $\frac{1}{2}$. erit $\frac{1}{2}$ ℞. Quadrati harum partium $\frac{4}{9}$ ʒ. $\frac{9}{25}$ ʒ. $\frac{1}{4}$ ʒ. ſimul efficiunt $\frac{949}{900}$ ʒ. numerum æqualem numero poſito 1 ℞. Diuiſa igitur 1. per $\frac{949}{900}$. fiet 1 ℞. $\frac{900}{949}$. numerus quæſitus (quod numeri Coſſici ſint collaterales.) Huius $\frac{2}{3}$. ſunt $\frac{1800}{2847}$. & huius quadratus $\frac{3240000}{8105409}$. Et $\frac{3}{5}$. ſunt $\frac{2700}{4745}$. cuius quadratus $\frac{7290000}{22515025}$. Et $\frac{1}{2}$. eſt $\frac{900}{1898}$. cuius quadratus $\frac{810000}{3602404}$. qui tres quadrati faciunt ſummam $\frac{6234707464935966900}{6574152649138036209}$. quæ æqualis eſt numero inuento $\frac{900}{949}$. Nam idem numerus producitur ex huius numeratore in illius denominatorem, & ex denominatore in numeratorem, nimirum numerus 5916737384224232588100.

Sit deinde numerus inueniendus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. deſcripti faciant numerum 3796. Erunt, vt prius, tres quadrati in vnam ſummam collecti, $\frac{949}{900}$ ʒ. qui numerus æqualis eſſe debet numero 3796. Diuiſis ergo 3796. per $\frac{949}{900}$. fiet 1 ʒ. 3600. & 1 ℞. 60. numerus quęſitus. Huius enim $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. ſunt 40. 36. & 30. & quadrati horum numerorum 1600. 1296. 900. faciunt ſummam 3796.

Sit denique inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$. deſcripti ſummam faciant 20. Ponatur numerus quæſitus 1 ℞. Eius partes datæ ſunt $\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{3}$ ℞. & $\frac{1}{9}$ ℞. quarum quadrati $\frac{1}{4}$ ʒ. $\frac{1}{9}$ ʒ. & $\frac{1}{81}$ ʒ. faciunt ſummam $\frac{121}{324}$ ʒ. æqualem numero 20. Diuiſis ergo 20. per $\frac{121}{324}$. fiet 1 ʒ. $\frac{6480}{121}$. & 1 ℞. √ʒ $\frac{6480}{121}$. numerus quæſitus. Huius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$. ſunt √ʒ $\frac{6480}{484}$. √ʒ $\frac{6480}{1089}$. & √ʒ $\frac{6480}{9801}$. quarum partium quadrati $\frac{6480}{484}$. $\frac{6480}{1089}$. & $\frac{6480}{9801}$. efficiunt ſummam $\frac{103317437520}{5165871876}$. hoc eſt, 20.

129 *Datum numerum in quotlibet numeros partiri, ita vt quilibet ſequens ſuperet præcedentem dato numero.* CXXIX.

Datvs numerus 200. tribuendus ſit in ſex, vt ſecundus ſuperet primum numero 5. tertius ſecundum numero 2. quartus tertium numero 10. quintus quartum vnitate. Et ſextus quintum numero 15. Ponatur primus 1 ℞. Erit igitur ſecundus 1 ℞ + 5. Tertius 1 ℞

+ 7. Quartus 1 ♃ + 17. Quintus 1 ♃ + 18. Et sextus 1 ♃ + 33. Hi omnes faciunt 6 ♃ + 80. quæ summa æqualis esse debet dato numero 200. Ablatis ergo 80. vtrinque, erit æquatio inter 6 ♃. & 120. Diuisisque 120. per 6. fiet 1 ♃. 20. primus numerus. Secundus ergo erit 25. Tertius 27. Quartus 37. Quintus 38. & sextus 53. qui simul faciunt 200. & problema absoluunt.

Debet autem datus numerus maior esse summa, quæ ex datis excessibus colligitur, si sequens quilibet excessus præcedenti addatur. Vt quia in dato exemplo, si primus numerus foret 5. secundus esset 7. tertius 17. quartus 18. & quintus 33. qui omnes faciunt 80. oportet datum numerum maiorem esse, quàm 80. nimirum 81. vel 82. vel 200. vel 300. &c. Id quod ipsa operatio docebit. Si enim datus numerus esset 79. fieret æquatio inter 6 ♃ + 80. & 79. quod fieri nequit.

CXXX. 130 *Duos numeros inuenire in proportione data, ita vt alteruter ductus in quadratum alterius faciat numerum quemcumque datum.*

Sint inueniendi duo numeri in proportione tripla, ita vt alteruter ipsorum in quadratum alterius ductus faciat 192. Ponatur minor 1 ♃. ideóque maior 3 ♃. Ex maiore 3 ♃ in 1 ʒ quadratum minoris fit numerus 3 ce æqualis 192. Diuisis igitur 192 per 3 fiet 1 ce. 64. & 1 ♃. 4. minor numerus. Maior ergo erit 12. Nam ex 12. in 16. quadratum minoris numeri 4. fit datus numerus 192.

Rursus ex minore 1 ♃. in 9 ʒ. quadratum maioris fit numerus 9 ce. æqualis 192. Diuisis ergo 192. per 9. fiet 1 ce. $21\frac{1}{3}$. siue $\frac{64}{3}$. & 1 ♃. √ce $\frac{64}{3}$. primus numerus; secundus vero huius triplus erit √ce $\frac{1728}{3}$. In huius quadratum √ce $\frac{2985984}{9}$. si ducatur primus √ce $\frac{64}{3}$. fiet numerus √ce $\frac{191102976}{27}$. siue √ce 7077888. hoc est 192.

CXXXI. 131 *Duobus numeris datis, alium tertium inuenire, ita vt tres habeantur numeri, quorum bini simul sumpti, si in tertium ducantur, procreentur tres numeri Arithmeticè proportionales.*

Dati sint numeri 10. & 30. inueniendúsque sit tertius, ita vt bini simul sumpti, & in tertium multiplicati producant tres numeros Arithmeticè proportionales. Ponatur numerus quæsitus 1 ♃. Summa ex 1 ♃. & 10. est 1 ♃ + 10. quæ ducta in tertium 30. facit 30 ♃ + 300. Summa verò ex 1 ♃. & 30. est 1 ♃ + 30. quæ ducta in tertium 10 facit 10 ♃ + 300. Summa denique ex 10. & 30. est 40. quæ ducta in tertium 1 ♃. facit 40 ♃. ita vt tres numeri procreati sint 30 ♃ + 300. 10 ♃ + 30. & 40 ♃. qui eundem debent habere excessum.

Sed

Sed quia nondum constat, quis eorum sit maximus, & quis medius, & quis minimus: statuamus 30 ♃ + 300. esse maximum: 10 ♃ + 300. medium, & 40 ♃. minimum. Excessus priorum est 20 ♃. posteriorum 300 — 30 ♃. qui excessus æquales debent esse. Additis igitur 30 ♃ vtrinque, erit æquatio inter 50 ♃. & 300. Diuisisque 300. per 50 fiet 1 ♃ 6. numerus quæsitus, ita vt tres numeri sint 6. 10. 30. Ex 6. & 10. fit summa 16. quæ ducta in 30. facit 480. Et ex 6. & 30. fit summa 36. quæ ducta in 10. facit 360. Denique ex 10. & 30. fit summa 40. quæ ducta in 6. facit 240. Sunt autẽ hi tres producti 480. 360. 240. Arithmeticè proportionales, cum eorum excessus sit 120.

Quod si statuemus maximum 30 ♃ + 300. medium 40 ♃. & minimũ 10 ♃ + 300. erit priorum excessus 300 — 10 ♃. & posteriorum 30 ♃ — 300 qui illi æqualis esse debet. Additis ergo 300. vtrobique, erit æquatio inter 600 — 10 ♃. & 30 ♃. Additisque rursum 10 ♃ vtrinque, inter 600. & 40 ♃. Diuisis igitur 600 per 40. fiet 1 ♃. 15. numerus quæsitus, eruntq. tres numeri, 15. 10. 30. Nam ex 15. & 10. fit summa 25. quæ ducta in 30. facit 750. At ex 15. & 30. fit summa 45. quæ ducta in 10 facit 450. Denique ex 10. & 30. fit summa 40. quæ ducta in 15. facit 600. Atque hi tres numeri producti 750. 600. 450. habent eundem excessum 150.

Neque verò maximus esse potest 40 ♃. & medius 30 ♃ + 300. & minimus 10 ♃ + 300. Nam inter priores esset excessus 10 ♃ — 300 & inter posteriores 20 ♃. qui æqualis esse non potest priori excessui, cum sit maior. Est ergo maximus 30 ♃ + 300. cum etiã maior sit, quàm 10 ♃ + 300. Et vterque aliorum potest esse medius, vel minimus, vt patuit.

Hoc problema solutum etiam fuit in ænigmate 86. vbi dati sunt duo numeri, ita vt tres numeri producti tribus modis possint esse proportionales Arithmeticè.

132 *Tres numeros inuenire, ita vt primus ac secundus cum data parte tertij. Item secundus & tertius cum parte data primi: Nec non tertius ac primus cum parte data secundi, efficiant vnum eundémque numerum datum.* CXXXII

Tam primus ac secundus cum $\frac{1}{4}$. tertij, quam secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi, quam tertius ac primus cum $\frac{1}{3}$. secundi debeant facere 100. Ponatur tertius 1 ♃. cuius $\frac{1}{4}$ ♃. cum primo & secundo debent facere 100. ac propterea hi duo, antequam acciperent $\frac{1}{4}$ ♃ à tertio, habuerunt 100 — $\frac{1}{4}$ ♃. Et quia secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$ primi debẽt quoque facere 100. si ex 100. demamus tertium, nimirum 1 ♃. erit reliquus numerus 100 — 1 ♃. solus secundus vnà cum $\frac{1}{2}$ primi. Quoniam autem secundus, ac totus primus fecerunt 100 — $\frac{1}{4}$ ♃. Et hi duo simul superant secundum, ac $\frac{1}{2}$ primi, semisse eiusdem primi: si ex 100 — $\frac{1}{4}$ ♃. summa primi & secundi, auferemus 100 — 1 ♃. valorem solius secundi cum $\frac{1}{2}$. primi, erit reliquus numerus $\frac{3}{4}$ ℞. semissis primi, ac proinde totus primus erit $1\frac{1}{2}$ ℞, hoc est $\frac{3}{2}$ ℞. Deinde quia primus ac secundus simul cum $\frac{1}{4}$ tertij faciunt 100. Et solus primus facit $1\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{4}$. tertij est $\frac{1}{4}$ ℞. si $\frac{7}{4}$ ℞, hoc est, $1\frac{3}{4}$ ℞ summam ex $1\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{4}$ ℞. collectam detrahemus ex 100. erit reliquus numerus $100 - 1\frac{3}{4}$ ℞. solus secundus, cuius $\frac{1}{3}$. est $33\frac{1}{3} - \frac{7}{12}$ ℞. cum qua tertius ac primus, nimirum 1 ℞. & $1\frac{1}{2}$ ℞. hoc est, $2\frac{1}{2}$ ℞. facere debent 100. Fit autem ex $33\frac{1}{3} - \frac{7}{12}$ ℞. & $2\frac{1}{2}$ ℞ (hoc est, ex $\frac{1}{3}$. secundi, & summa tertij ac primi) numerus $33\frac{1}{3} + 1\frac{11}{12}$ ℞. qui æqualis debet esse numero 100. Ablatis ergo vtrinque $33\frac{1}{3}$. erit æqualitas inter $66\frac{2}{3}$. & $1\frac{11}{12}$ ℞. Diuisisque $66\frac{2}{3}$. per $1\frac{11}{12}$. fiet 1 ℞. $17\frac{9}{23}$. siue $\frac{2400}{69}$. tertius videlicet numerus, qui positus fuit 1 ℞. igitur secundus inuentus $100 - 1\frac{3}{4}$ ℞. erit $\frac{2700}{69}$. Et primus, quem inuenimus $1\frac{1}{2}$ ℞. erit $\frac{3600}{69}$. Atque hi tres ænigmati proposito satisfaciunt.

CXXXIII. 133 *Datum numerum partiri in tres partes continuè proportionales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus ad productum ex prima in secundam habeat datam proportionem.*

Sit datus numerus 30. tribuendus in tres partes continuè proportionales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus habeat ad productum ex prima in secundam proportionem quadruplam. Ponatur secunda pars, siue media 1 ℞. ac propterea summa primæ ac tertiæ $30 - 1$ ℞. Et quia ex media 1 ℞ in se fit 1 ℨ. a fiet etiam 1 ℨ. ex prima in tertiam: Cum ergo hic productus debeat habere quadruplam proportionem ad productum ex prima in secundam; producetur $\frac{1}{4}$ ℨ. ex prima in secundam, nimirum in 1 ℞. Si igitur partiemur $\frac{1}{4}$ ℨ. per 1 ℞, fiet Quotiens $\frac{1}{4}$ ℞ qui ductus in 1 ℞, numerum diuidentem, facit $\frac{1}{4}$ ℨ. numerum diuisum: ac proinde prima pars erit $\frac{1}{4}$ ℞. quæ cum secunda faciet $1\frac{1}{4}$ ℞. quæ summa ablata ex numero dato 30. relinquet tertiam partem $30 - 1\frac{1}{4}$ ℞. Reliquum iam est, ex prima parte $\frac{1}{4}$ ℞. in tertiam modo inuentam $30 - 1\frac{1}{4}$ ℞ gigni numerum 1 ℨ, qui ex media parte 1 ℞ in se producitur. Fit autem ex $\frac{1}{4}$ ℞. in $30 - 1\frac{1}{4}$ ℞. numerus $7\frac{1}{2}$ ℞ $- \frac{5}{16}$ ℨ. qui æqualis debet esse 1 ℨ. Additis ergo $\frac{5}{16}$ ℨ. vtrobique, erit æquatio inter $7\frac{1}{2}$ ℞. & $1\frac{5}{16}$ ℨ. Diuisisque $7\frac{1}{2}$ per $1\frac{5}{16}$. hoc est, $\frac{15}{2}$ per $\frac{21}{16}$. fiet 1 ℞. $5\frac{5}{7}$. media, vel secunda pars, nimirum $\frac{40}{7}$. Ergo prima pars, quam inuenimus esse $\frac{1}{4}$ ℞ erit $\frac{10}{7}$. siue $1\frac{3}{7}$. Et tertia, quæ fuit inuenta $30 - 1\frac{1}{4}$ ℞. erit $\frac{160}{7}$. siue $22\frac{6}{7}$. Atque hæ tres partes $1\frac{3}{7}$. $5\frac{5}{7}$. $22\frac{6}{7}$. faciunt datum numerum 30. Et ex $1\frac{3}{7}$. in $22\frac{6}{7}$. hoc est, ex prima parte in tertiam, fit numerus $32\frac{32}{49}$. qui quadruplus est numeri $8\frac{8}{49}$. facti ex prima parte $1\frac{3}{7}$. in secundam $5\frac{5}{7}$. Esse autem tres partes continuè proportionales, liquet: quippe cum idem numerus gignatur ex prima in tertiam, qui ex media in se, nimirum $32\frac{32}{49}$.

b 20. septimi.

Ali-

Aliter institui poterit æquatio, postquam inuentæ fuerint partes $\frac{1}{4}$ ℞. 1 ℞. $30 - 1\frac{1}{4}$ ℞. hoc scilicet modo. Quoniam ex prima in tertiam fieri debet 1 ℨ. numerus videlicet æqualis ei, qui fit ex media in se. si diuidemus 1 ℨ. per primam, id est, per $\frac{1}{4}$ ℞. fiet Quotiens 4 ℞. qui ductus in $\frac{1}{4}$ ℞ producit 1 ℨ. Ac proinde tertia pars erit 4 ℞. æqualis nimirum alteri parti tertiæ inuentæ $30 - 1\frac{1}{4}$ ℞. Additis ergo $1\frac{1}{4}$ ℞ vtrobique, erit æqualitas inter $5\frac{1}{4}$ ℞. & 30. Diuisisque 30. per $5\frac{1}{4}$. fiet 1 ℞. $5\frac{5}{7}$. vt prius.

Ænigma hoc soluemus quoque in ænigmate 171. sed alio exemplo proposito.

134 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum datis quotlibet vnitatibus secundi numerum faciet æqualem ei, qui secundo superest. Item secundus cū quotcunque vnitatibus tertij faciat alium numerum æqualem ei, qui tertio superest. Tertius denique, acceptis quotuis vnitatibus à primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi habeat proportionem datam.* CXXXIIII.

Svmat primus à secundo 40. vnitates: secundus à tertio 56. vnitates: tertius denique à primo 72. vnitates, ita vt primus faciat numerum æqualem reliquo secundi: secundus item æqualem ei, qui tertio remanet: tertius autem numerum faciat quintuplum eius, qui primo superest. Ponatur primus 1 ℞. Ergo acceptis 40. à secundo, habebit 1 ℞ + 40. Ac tantundem tunc superesse debet secundo. Secundus ergo antequam daret 40. primo, habuit 1 ℞ + 80. qui postquam acceperit 56. à tertio, habebit 1 ℞ + 136. Ac tantundem superesse tunc debet tertio, ideóque antequam daret 56. secundo, habuit 1 ℞ + 192. cui si à primo accipiat 72. habebit 1 ℞ + 264. qui numerus debet esse quintuplus numeri 1 ℞ − 72. qui primo, postquam dederit 72. superest. Ergo numerus huius quintuplus 5 ℞ − 360. æqualis erit numero 1 ℞ + 264, quem tertius confecit. Additis autem 360. vtrinque, erit æquatio inter 5 ℞. & 1 ℞ + 624. Et ablata 1 ℞ vtrobique, inter 4 ℞ & 624. Diuisis ergo 624. per 4. fiet 1 ℞. 156. primus numerus. Ac proinde secundus, qui inuentus fuit 1 ℞ + 80. erit 236. Tertius verò, quem inuenimus esse 1 ℞ + 192. erit 348. Atque tres hi numeri problema efficiunt, vt probare potes.

SCHOLIVM.

In similibus quæstionibus proponetur aliquando problema, quod dissolui nequit, id quod æquatio inuenta præclarè monebit. Vt si in proposito proble-

mate quis diceret, tertium acceptis 72. à primo, habere quoque numerum reliquo primi æqualem, fieret quæstio impoßibilis. Nam tertius tunc haberet, vt dictum est, 1 ℞ + 264. qui æqualis nullo modo esse potest numero 1 ℞ − 72. qui primo superest.

CXXXV. 135 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt vtroque per duos numeros datos multiplicato, producantur duo numeri facientes summam quamcunque datam.*

INVENIENDI sint duo numeri in proportione quintupla, vt minore multiplicato per 8. & maiore per 5. procreentur duo numeri, quorum summa sit 100. Ponantur quæsiti numeri 1 ℞. & 5 ℞. in proportione quintupla. Ex 1 ℞. in 8. fiunt 8 ℞. & ex 5 ℞ in 5. fiunt 25 ℞. Summa productorum est 33 ℞. æqualis 100. Diuisis igitur 100. per 33. fiet 1 ℞. $\frac{100}{33}$. siue $3\frac{1}{33}$. primus numerus. Secundus ergo erit $\frac{500}{33}$. siue $15\frac{5}{33}$. Ex $3\frac{1}{33}$. hoc est, ex $\frac{100}{33}$ in 8. fiunt $\frac{800}{33}$. siue $24\frac{8}{33}$. Et ex $15\frac{5}{33}$. id est, ex $\frac{500}{33}$. in 5. fiunt $\frac{2500}{33}$. siue $75\frac{25}{33}$. Atque hi duo producti $24\frac{8}{33}$. & $75\frac{25}{33}$ faciunt summam datam 100.

CXXXVI. 136 *Duos numeros inuenire, quorum tam summa, quam excessus sit numerus quadratus.*

PONATVR summa duorum numerus quadratus, cuius latus sit vna radix, plus quotcunque vnitatibus; nimirum quadratus 1 ʒ + 10 ℞ + 25. procreatus ex latere assumpto quocunque 1 ℞ + 5. Nam si minor numerus quæsitus statuatur $\frac{1}{2}$ ʒ. erit maior $\frac{1}{2}$ ʒ + 10 ℞ + 25. Horum enim summa 1 ʒ + 10 ℞ + 25. quadratus numerus est, ex hypothesi. Reliquum est, vt eorundem numerorum $\frac{1}{2}$ ʒ. & $\frac{1}{2}$ ʒ + 10 ℞ + 25. excessus 10 ℞ + 25. sit etiam quadratus: hoc est, æqualis cuicunque quadrato maiori, quam 25. nimirum 100. Ablatis ergo 25 vtrobique, erit æquatio inter 10 ℞. & 75. Diuisisque 75. per 10. fiet 1 ℞. $7\frac{1}{2}$. & 1 ʒ. $\frac{225}{4}$. hoc est, $56\frac{1}{4}$. Igitur minor numerus, qui fuit $\frac{1}{2}$ ʒ. erit $28\frac{1}{8}$. Maior autem, qui fuit $\frac{1}{2}$ ʒ + 10 ℞ + 25. erit $128\frac{1}{8}$. Nam summa horum numerorum $156\frac{2}{8}$. hoc est, $\frac{1250}{8}$. siue $\frac{625}{4}$. numerus quadratus est, cuius latus $\frac{25}{2}$. Item excessus eorundem 100. quadratus quoque est, cuius latus 10.

SI prædictum excessum 10 ℞ + 25. pones æqualem quadrato 36. vel alij cuicunque, qui non sit 100. inuenies aliam æstimationem vnius radicis, vt experiri potes.

CXXXVII. 137 *Dato quadrato, inuenire numerum, quo & ad datum quadratum adiecto, & ab eodem detracto, fiat numerus quadratus.*

SIT

SIT datus quadratus 100. qui per ænigma 90. vel eius scholium diuidatur in duos quadratos, quod per dictum scholium ita fiet. Latus quadrati dati, nimirum 10. ducatur in quemlibet numerum, vt in 5. Duplum huius numeri producti 100. diuidatur per quadratum numeri 5. assumpti auctum vnitate, nimirum per 26. Quotientis enim $\frac{50}{13}$. quadratus $\frac{2500}{169}$. siue $14\frac{134}{169}$. erit vnus quadratus. quo dempto ex 100. quadrato dato, reliquus fiet alter quadratus $85\frac{35}{169}$. qui duo quadrati efficiunt 100. Latera autem eorum $\frac{50}{13}$. & $\frac{120}{13}$. inter se multiplicata faciunt $\frac{6000}{169}$. siue $35\frac{85}{169}$. cuius producti numeri duplum $\frac{12000}{169}$. siue $71\frac{1}{169}$. erit numerus, qui quæritur. Is enim adiectus ad 100. facit $171\frac{1}{169}$. siue $\frac{28900}{169}$. quadratum, cuius latus $\frac{170}{13}$. siue $13\frac{1}{13}$. Idem numerus $71\frac{1}{169}$. demptus ex eodem quadrato dato 100. relinquit $28\frac{168}{169}$. siue $\frac{4900}{169}$. numerum quoque quadratum, cuius latus $\frac{70}{13}$. siue $5\frac{5}{13}$.

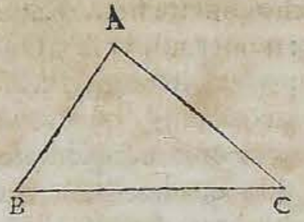
RATIO huius operationis hæc est. Quando quadratus datus 100. diuiditur in duos quadratos, latus dati quadrati, & duo latera inuentorum quadratorum, si ad lineas contrahantur, [a] constituunt triangulum rectangulum; quandoquidem duo quadrata inuenta, ex eorum lateribus descripta, æqualia sunt dato quadrato. Igitur, vt in Lemmate sequenti demonstrabimus, rectãgulum bis comprehensum sub illis duobus lateribus, additum quadrato dato, efficit quadratum, cuius nimirum latus duobus illis lateribus æquale est: & ablatum ex eodem quadrato dato, reliquum facit quadratum, cuius videlicet latus est duorum illorum laterum differentia. a 48. primi.

Si idem quadratus 100. distribuatur in duos quadratos 36. & 64. quorum latera 6. & 8. inter se multiplicata faciunt 48. erit huius numeri duplum 96. is quem quærimus. Hic enim adiectus ad 100. facit quadratum 196. cuius latus 14. & detractus ex 100. reliquum facit quadratum 4. cuius latus 2.

LEMMA.

In omni triangulo rectangulo, rectangulum bis sub duobus lateribus circa angulum rectum comprehensum, vnà cum quadrato lateris recto angulo oppositi, æquale est quadrato, cuius latus ex duobus lateribus componitur. Idem verò rectangulum bis sub lateribus prædictis comprehensum, si ex eodem quadrato lateris recto angulo oppositi detrahatur, reliquum fiet quadratum, cuius latus differentia est prædictorum duorum laterum. Lemma.

SIT triangulum rectangulum ABC. Dico rectangulum bis sub AB, AC. vnà cum quadrato ex BC. æquale esse quadrato, cuius latus æquale sit duobus lateribus AB, AC, simul. Et si idem rectangulum bis de-



trahatur ex quadrato rectæ BC, relinqui quadratum, cuius latus æquale sit differentiæ inter AB, AC. Quoniam enim si concipiatur linea
a 4. secūdi *vna ex AB, AC, composita, [a]rectangulum sub AB, AC, bis comprehensum, vnà cum quadratis ex AB, AC, æquale est quadrato rectæ ex AB, AC, compositæ: [b]Sunt autem*
b 47. primi. *quadrata ex AB, AC, quadrato ex BC, æqualia, erit quoque rectangulum bis comprehensum sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, æquale quadrato rectæ ex AB, AC, compositæ. quod est primum.*

c Lemma 39. decimi *DEINDE [c]quia duo quadrata ex AB, AC, (hoc est quadratum ex BC,) maiora sunt rectangulo bis sub AB, AC, comprehenso, quadrato eius lineæ, quæ differentia est inter AB, AC, manifestum est, si illud rectangulum bis sub AB, AC, comprehensum dematur ex quadratis rectarum AB, AC, hoc est, ex quadrato rectæ BC, remanere quadratum, cuius latus æquale est differentiæ inter AB, AC, quod est secundum.*

CXXXVIII. 138 ***Numerum inuenire, qui in quemuis datum numerum ductus, faciat numerum, qui cum quouis alio dato numero numerum efficiat æqualem ei, qui fit ex quæsito numero in quemuis alium datum numerum, maiorem tamen priore dato, multiplicato.***

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 7. faciat numerum, qui adiectus ad 60. faciat summam æqualem numero, qui fit ex inuento numero in 8. multiplicato. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Ex 1 ℞. in 7. fit numerus 7 ℞. quo addito ad 60. fit numerus 7 ℞ + 60. æqualis numero 8 ℞. qui fit ex 1 ℞ in 8. Ablatis ergo 7 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 60. & 1 ℞. Diuisisque 60. per 1. fiet 1 ℞. 60. numerus quæsitus. Hic enim ductus in 7. facit 420. additisque 60. fit numerus 480. quem nimirum facit numerus inuentus 60. in 8. ductus.

CXXXIX. 139 *Datum numerum in duas partes diuidere, & insuper quadratum inuenire, qui cum vtraque parte seorsum quadratum efficiat.*

SIT datus numerus 65. secandus in duas partes, & insuper quadratus inueniendus, cum quo quælibet illarum partium efficiat quadratum. Ponantur duo numeri quicunque, quorum quilibet compositus sit ex vna radice, & aliquot vnitatibus, nimirum 1 ℞ + 3 & 1 ℞ + 5. Quadrati horum sunt 1 ℨ + 6 ℞ + 9. & 1 ℨ + 10 ℞ + 25. Igitur si numerus 6 ℞ + 9. addatur ad 1 ℨ. qui numerus quadratus est, fit quadratus 1 ℨ + 6 ℞ + 9. Et si numerus 10 ℞ + 25. addatur ad eundem 1 ℨ. fit quadratus 1 ℨ + 10 ℞ + 25. Ergo si minor pars numeri dati ponatur 6 ℞ + 9. & maior 10 ℞ + 25. satisfactum erit problemati, si hæ partes conficiant datum numerum 65. Faciunt autem summam 16 ℞ + 34. quæ æqualis debet esse 65. Demptis 34. vtrobique, manebit æqualitas inter 16 ℞. & 31. Diuisis igitur 31. per 16. fiet 1 ℞ $\frac{31}{16}$. siue 1 $\frac{15}{16}$. cuius quadratus $\frac{961}{256}$ siue 3 $\frac{193}{256}$. erit is, qui quæritur. Minor autem pars numeri dati, quam posuimus 6 ℞ + 9. erit $\frac{330}{16}$. siue 20 $\frac{5}{8}$. Maior verò, quæ posita fuit 10 ℞ + 25. erit $\frac{710}{16}$ siue 44 $\frac{3}{8}$. quæ duæ partes simul efficiunt datum numerum 65. Et prima addita ad quadratum inuentum $\frac{961}{256}$. facit quadratum $\frac{6241}{256}$. cuius latus $\frac{79}{16}$. Secunda autem cum eodem quadrato $\frac{961}{256}$. facit quadratum $\frac{12321}{256}$. cuius latus $\frac{111}{16}$.

SCHOLIVM.

HOC ænigma plures solutiones admittit, pro varietate numerorum in principio assumptorum. Nam si numeri ponantur 1 ℞ + 1. & 1 ℞ + 2. erunt eorum quadrati 1 ℨ + 2 ℞ + 1. & 1 ℨ + 4 ℞ + 4. Atque si minor pars numeri dati 65. ponatur numerus 2 ℞ + 1. maior verò 4 ℞ + 4. satisfactum erit problemati, cum vterque numerus cum 1 ℨ. faciat quadratum. Faciunt iidem duo numeri summam 6 ℞ + 5. quæ æqualis esse debet 65. Ablatis igitur 5. vtrobique, remanebit æqualitas inter 6 ℞ & 60. Diuisisque 60. per 6. fiet 1 ℞. 10. cuius quadratus 100. est is, qui quæritur, positúsque fuit 1 ℨ. Minor verò pars numeri dati 65. quam posuimus 2 ℞ + 1. erit 21. Maior autem posita 4 ℞ + 4. erit 44. quæ duæ partes faciunt 65. Et prima addita quadrato inuento 100. facit quadratum 121. cuius latus 11. Secunda autem cum eodem quadrato 100. facit quadratum 144. cuius latus 12.

Atque in hunc modum diuidi poterit datus numerus in alias, atque alias partes, si alij atque alij numeri assumantur compositi ex 1 ℞. & aliquot vnitatibus.

140 *Datum numerum in duas partes distribuere, & insuper quadratum inuenire, à quo si duæ partes inuentæ subducantur, reliqui fiant duo quadrati.* CXL.

SIT diuidendus numerus 65. in duas partes, & inueniendus quadratus, à quo si inuentæ duæ partes demantur, reliqui fiant duo numeri quadrati. Ponantur duo numeri vtcunque, vnus compositus ex vna radice & quotlibet vnitatibus, alter verò ex vna radice minus totidem vnitatibus,nimirum 1 ℞ + 2.& 1 ℞ — 2. Quadrati horum erunt 1 ʒ + 4 ℞ + 4.& 1 ʒ — 4 ℞ + 4. Ponatur ergo quadratus, qui quæritur, 1 ʒ + 4 ℞ + 4. à quo ſi auferatur numerus 4 ℞ + 4.relinquetur quadratus ʒ. Quòd ſi poſterior quadratus à priore ſubducatur, remanebunt 8 ℞. Ac viciſſim ſi 8 ℞.detrahantur ex eodem priori quadrato 1 ʒ + 4 ℞ + 4.relinquetur poſterior quadratus 1 ʒ — 4 ℞ + 4. Ergo ſi minor pars numeri diuidendi ponatur 4 ℞ + 4.Et maior 8 ℞.ſatisfactum erit ænigmati;quippe cum minor dempta ex quadrato 1 ʒ + 4 ℞ + 4. relinquat quadratum 1 ʒ.Et maior ex eodem quadrato ſubducta relinquat quadratum 1 ʒ — 4 ℞ + 4.Reliquum iam eſt,vt hæ duæ partes 4 ℞ + 4. & 8 ℞.faciant numerum datum 65.faciunt autem ſummam 12 ℞ + 4.æqualem 65.Ablatis ergo 4.vtrinque,erit æquatio inter 12 ℞.& 61. Diuiſiſque 61.per 12.fiet 1 ℞. $\frac{61}{12}$.Ac propterea quadratus quæſitus, quem poſuimus 1 ʒ + 4 ℞ + 4.erit $\frac{7225}{144}$.cuius latus $\frac{85}{12}$. Minor autem pars numeri diuidendi poſita 4 ℞ + 4. erit $\frac{292}{12}$.ſiue $\frac{3504}{144}$.Maior autem poſita 8 ℞. erit $\frac{488}{12}$. vel $\frac{5856}{144}$. Prior enim ex inuento quadrato $\frac{7225}{144}$.ſubducta relinquit quadratum $\frac{3721}{144}$.cuius latus $\frac{61}{12}$. Poſterior autem ex eodem quadrato $\frac{7225}{144}$. detracta reliquum facit quadratum $\frac{1369}{144}$.cuius latus $\frac{37}{12}$.

Hoc etiam ænigma plures admittit ſolutiones, prout videlicet in principio alij atque alij numeri aſſumpti fuerint pro numeris 1 ℞ + 2. & 1 ℞ — 2.&c.

CXLI. 141 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant ſummam datam quamcunque, quæ maior ſit quarta parte cubi ex dato numero deſcripti.*

Datvs numerus 10. diuidendus ſit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior eſt, quam 250. quarta pars cubi ex 10. generati.Ponatur prima pars numerus compoſitus ex 1 ℞. & ſemiſſe dati numeri,nimirum 1 ℞ + 5.Secunda pars,ſemiſſis eiuſdem numeri dati,minus 1 ℞,nimirum 5 — 1 ℞. Ita enim duæ hę partes numerum datum 10.conficient.Cubi earum ſunt 1 ce + 15 ʒ + 75 ℞ + 125.& 125 — 75 ℞ + 15 ʒ — 1 ce.Summa eorum 30 ʒ + 250. nam + 1 ce,& — 1 ce.Item + 75 ℞, & — 75 ℞.ſe mutuò interimunt:& ex 15 ʒ. & 15 ʒ.fiunt 30 ʒ. atque 125. 125. faciunt 250.Hæc ergo ſumma 30 ʒ + 250.æqualis eſſe debet 370.Ablatis 250 vtrinque, remanebit æqualitas inter 30 ʒ.& 120. Diuiſis igitur 120. per 30.fiet 1 ʒ.4.& 1 ℞ 2.Prima igitur pars poſita 1 ℞ + 5.erit 7. Secunda verò,quam poſuimus 5 — 1 ℞. erit 3. Cubi harum partium 7 & 3 ſunt 343. & 27 efficiúntque 370.

Si eodem numero 10. dato, ſumma cuborum proponatur 400. inueniemus æquationem inter 30 ʒ + 250. & 400. Ablatiſque 250. vtrin-

vtrinque,inter 30 ʒ.& 150.Diuiſis igitur 150.per 30.fiet 1 ʒ.5. & 1 ℞. √ʒ 5. Ergo prima pars poſita 1 ℞ + 5. erit √ʒ 5 + 5.Secunda verò poſita 5 — 1 ℞. erit 5 — √ʒ 5.quæ ſimul faciunt 10.Cubi autem harum partium (reductis, quæ reducenda ſunt) ſunt 200 + √ʒ 32000. & 200 — √ʒ 32000. quorum ſumma eſt 400.cum + √ʒ 32000.& — √ʒ 32000.ſe mutuò interimant.

S C H O L I V M.

Sine Algebra idem ænigma ſoluetur hoc pacto. Datus numerus 20. ſecandus ſit in duas partes,quarum vbi facere debeant ſummam 2960.quæ maior eſt,quam 2000.quarta pars cubi ex 20.generati. Dematur $\frac{1}{4}$.cubi ex dato numero 20.deſcripti,nimirum 2000.ex 2960.ſumma propoſita.Et reliquus numerus 960.diuidatur per 60.triplum dati numeri 20.Quotiẽtis namque 16.radix quadrata 4.addita, & ablata ex 10.ſemiſſe dati numeri 20. dabit partes quæſitas 14. & 6. quæ ſimul faciunt datum numerum 20. & earum cubi 2744.& 216.faciunt 2960.

Hoc etiam ænigma in ænigmate 1.ſequentis capitis ſoluemus per æquationem compoſitam,in qua ſcilicet tres numeri occurrunt,quorum vnus aliis duobus eſt æqualis.

142 *Datum numerum in duos cubos diſtribuere, quorum laterum ſumma data eſt:dummodo quarta pars cubi huius ſummæ minor ſit dato numero.* CXLII.

Hoc problema ab antecedenti non differt. Nihil enim aliud hic iubemur,niſi ſummam laterum datam diſtribuere in duas partes,quarum cubi datum efficiant numerum,qui maior ſit quarta parte cubi ex ſumma laterum data procreati. Vt ſi datus numerus 2960. diuidendus ſit in duos cubos,quorum latera faciant 20. Diuidendus erit numerus 20. in duas partes,quarum cubi faciant 2960.vt in præcedenti problemate factum eſt. Nam ita numerus 2960. diuiſus erit in duos cubos 2744. & 216.quorum latera 14.& 6.datam ſummam 20.conficiunt.

Sic etiam ſi datus numerus 400.diuidendus ſit in duos cubos,quorum latera faciant 10. inuenientur duo cubi, (reductis, quæ reducenda ſunt) 200 + √ʒ 32000. & 200 — √ʒ 32000. quorum latera ſunt √ʒ 5 + 5. & 5 — √ʒ 5.ſi nimirum ſumma laterum 10. diuidatur in duas partes,vt in præcedenti ænigmate, vel ſcholio eiuſdem factum eſt. ita vt earum cubi efficiant 400.

143 *Numerum inuenire, cuius quadratus,vel multiplex quadrati datus conſtituat datam partem,vel partes cubi ex eodem inuento numero procreati.* CXLIII

SIT primum inueniendus numerus, cuius quadratus constituat $\frac{1}{9}$. cubi ex inuento numero procreati. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius quadratus est 1 ʒ. & cubus 1 ce. Vt ergo 1 ʒ. constituat $\frac{1}{9}$. numeri 1 ce, necesse est, æqualitatem esse inter 1 ʒ. & $\frac{1}{9}$ ce. Diuisa igitur 1. per $\frac{1}{9}$. fiet 1 ℞. 9. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales.) Huius enim quadratus 81. nonam partem constituit eiusdem cubi 729.

SIT deinde inueniendus numerus, cuius quadratus constituat $\frac{5}{9}$. cubi. Iisdem positis, erit æquatio inter $\frac{5}{9}$ ce. & 1 ʒ. Diuisa ergo 1. per $\frac{5}{9}$. fiet 1 ℞. $\frac{9}{5}$. vel 1 $\frac{4}{5}$. numerus quæsitus. Huius enim quadratus $\frac{81}{25}$. constituit $\frac{5}{9}$. cubi $\frac{729}{125}$.

RVRSVS sit inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum constituat $\frac{1}{7}$ cubi ipsius. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. cuius quadratus 1 ʒ. & cubus 1 ce. Ergo æqualitas erit inter 5 ʒ. & $\frac{1}{7}$ ce. Diuisis ergo 5. per $\frac{1}{7}$. fiet 1 ℞. 35. numerus quæsitus. Huius enim quadratus est 1225. & eius quincuplum 6125. constituit $\frac{1}{7}$. cubi 42875. ex 35. procreati.

POSTREMO inueniendus sit numerus, cuius quadrati quincuplum constituat $\frac{9}{10}$. cubi ipsius. Positis iisdem, erit æquatio inter 5 ʒ. & $\frac{9}{10}$ ce. Diuisis igitur 5. per $\frac{9}{10}$. fiet 1 ℞. $\frac{50}{9}$. hoc est, 5 $\frac{5}{9}$. numerus quæsitus. Eius enim quadratus est $\frac{2500}{81}$. cuius quintuplum $\frac{12500}{81}$. constituit $\frac{9}{10}$. cubi $\frac{125000}{729}$.

CXLIV 144 *Numerum inuenire, qui sui cubi constituat datam partem, vel partes.*

SIT primum inueniendus numerus, qui constituat $\frac{1}{12}$. sui cubi. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius cubus 1 ce. Est ergo æqualitas inter 1 ℞. & $\frac{1}{12}$ ce. Diuisáque 1 per $\frac{1}{12}$. fiet 1 ʒ. 12. (quod inter ce, & ℞, interiecta sit denominatio ʒ.) & eius radix quadrata, nimirum √℞ 12. erit pretium 1 ℞. Numerus ergo quæsitus est √ʒ 12. Hic enim constituit $\frac{1}{12}$ sui cubi √ʒ 1728.

DEINDE inueniendus sit numerus, qui constituat $\frac{4}{9}$. sui cubi. Positis iisdem, fiet æquatio inter 1 ℞. & $\frac{4}{9}$ ce. Diuisa igitur 1 per $\frac{4}{9}$. fiet 1 ʒ. $\frac{9}{4}$. & 1 ℞. $\frac{3}{2}$ numerus quæsitus. Eius enim cubus est $\frac{27}{8}$. cuius quatuor nonas continet inuentus numerus $\frac{3}{2}$.

CXLV. 145 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt minor in quadratum maioris ductus producat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, ita vt minore in quadratum maioris ducto, gignatur numerus 4860. Ponantur numeri quæsiti 5 ℞. & 6 ℞. in proportione sesquiquinta. Minore 5 ℞. ducto in 36 ʒ. quadratum maioris 6 ℞, fit numerus 180 ce.

180 ce. æqualis 4860. Diuisis ergo 4860. per 180. fiet 1 ce. 27. cuius radix cubica est 3. quia inter characteres ce. & N. duo medij sunt ʒ. & ℞. Ergo minor numerus positus 5 ℞. erit 15. & maior positus 6 ℞. erit 18. Atque ex minore 15. in 324. quadratum maioris 18. fit numerus 4860.

SINT rursus in eadem proportione sesquiquinta inueniendi duo numeri, ita vt minor ductus in quadratum maioris producat 1. Positis iisdem, inuenietur æqualitas inter 170 ce. & 1. Diuisa ergo 1. per 180. fiet 1 ce, $\frac{1}{180}$. & radix cubica √ce $\frac{1}{180}$. Ergo minor numerus positus 5 ℞. faciet √ce $\frac{125}{180}$. hoc est, √ce $\frac{25}{36}$. Maior autem positus 6 ℞. erit √ce $\frac{216}{180}$. siue √ce $\frac{6}{5}$. Atque ex minore √ce $\frac{25}{36}$. in √ce $\frac{36}{25}$. quadratum maioris √ce $\frac{6}{5}$. producitur √ce $\frac{900}{900}$. hoc est, 1. Quando enim numerator fractionis æqualis est denominatori, fractio illa vnitati æquiualet.

146 *Numerum inuenire, qui inter duos sit medius, superétque minorem numero dato, & superetur à maiore numero alio dato quolibet, & duo extremi efficiant summam datam quamcunque.* CXLVI.

HOC ænigma simile est ænigmati 51. & 52. sed aliter propositum, atque aliter dissolutum. Inueniendus enim sit numerus medius inter duos summam efficientes 100. ita vt minorem superet numero 15. & à maiore superetur numero 9. Quoniam maior ponitur superare medium quæsitum, numero 9. Et hic medius minorẽ, numero 15. liquidò constat maiorem superare minorem numero 24. Si ergo data summa 100. diuidatur in duas partes, quarum excessus 24. & ad minorẽ addantur 15. fiet medius quæsitus. Ponatur ergo minor pars 1 ℞. & maior 100 — 1 ℞. quæ illam superare debet numero 24. Detracta 1 ℞. ex 100 — 1 ℞. reliquus fit numerus 100 — 2 ℞. æqualis 24. Additis ergo 2 ℞. vtrinque, fiet æqualitas inter 100. & 24 + 2 ℞. Et ablatis 24. vtrobique, inter 76. & ℞. Diuisis igitur 76. per 2. fiet 1 ℞. 38. minor pars, ideóque maior erit 62. Et additis 15. ad minorem 38. fiet medius quæsitus 53. Hic enim superat minorem partem numero 15. & à maiore superatur numero 9.

147 *Datum numerum in quotlibet partes distribuere, ita vt vnaquæque ad sequentem habeat datam proportionem.* CXLVII

SIT datus numerus 10000. diuidendus in sex partes, ita vt prima ad secundam habeat proportionem æqualitatis: secunda ad tertiam duplam: tertia ad quartam triplam: quarta ad quintam proportionem æqualitatis: & quinta ad sextam proportionem quo-

prima	1 ♃	id est	3333 $\frac{1}{3}$
secunda	1 ♃		3333 $\frac{1}{3}$
tertia	$\frac{1}{2}$ ♃		1666 $\frac{2}{3}$
quarta	$\frac{1}{6}$ ♃		555 $\frac{5}{9}$
quinta	$\frac{1}{6}$ ♃		555 $\frac{5}{9}$
sexta	$\frac{1}{6}$ ♃		555 $\frac{5}{9}$

que æqualitatis. Ponatur prima pars 1 ♃. secunda 1 ♃ quoque. Tertia $\frac{1}{2}$ ♃. quarta, quinta, & sexta $\frac{1}{6}$ ♃. quæ omnes faciunt 3 ♃. æquales 10000. Diuisis igitur 10000. per 3. fiet 1 ♃. 3333 $\frac{1}{3}$. ac propterea aliæ partes numeros facient, vt in apposita formula vides. Omnes enim hæ partes in vnam summam collectæ faciunt 10000.

CXLVIII. 148 *Numerum inuenire, cuius partes datæ æquales sint parti aliquotæ datæ eiusdem, auctæ numero dato.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{2}{3}$. æquales sint eius semissi auctæ septenario. Ponatur numerus quæsitus 1 ♃. Ergo $\frac{2}{3}$ ♃. æquales erunt $\frac{1}{2}$ ♃ + 7. Ablata $\frac{1}{2}$ ♃ vtrobique, remanebit æqualitas inter $\frac{1}{6}$ ♃. & 7. Diuisis ergo 7. per $\frac{1}{6}$. fiet 1 ♃ 42. numerus quæsitus. Nam eius $\frac{2}{3}$. sunt 28. qui numerus æqualis est semissi numeri 42. id est, numero 21. aucto septenario.

CXLIX. 149 *Duos numeros inuenire, quorum summa data sit, ita vt priore per datum numerum diuisa, fiat Quotiens, qui cum data parte posterioris, efficiat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri, quorum summa 40. ita vt priore diuiso per 5. fiat Quotiens, qui cum $\frac{1}{8}$. posterioris numeri faciat 6. Ponatur prior numerus 1 ♃. & posterior 40 — 1 ♃. Diuisa 1 ♃ per 5. fit Quotiens $\frac{1♃}{5}$. Et pars octaua numeri 40 + 1 ♃. est $\frac{40 - 1♃}{8}$. quæ cum illo Quotiente facit $\frac{8♃ \times 200 - 5♃}{40}$. hoc est, $\frac{3♃ \times 200}{40}$. qui numerus æqualis debet esse 6. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 3 ♃ + 200. & 240. Ablatísque 200. vtrinque, erit æquatio inter 3 ♃. & 40. Diuisísque 40. per 3. fiet 1 ♃ 13 $\frac{1}{3}$. prior numerus quæsitus. ideóque posterior numerus positus 40 — 1 ♃. erit 26 $\frac{2}{3}$. Nam diuiso priore numero 13 $\frac{1}{3}$. per 5. fit Quotiens 2 $\frac{2}{3}$. qui cum octaua parte posterioris numeri 26 $\frac{2}{3}$. id est, cum 3 $\frac{1}{3}$. facit 6.

IN hoc exemplo proposito vides, priorem numerum inuentum esse minorem. In alio exemplo poterit esse maior. Vt si inueniendi sint duo numeri, quorum summa 20. ita vt priore diuiso per 3. Quotiens fiat, qui cum $\frac{1}{8}$. posterioris numeri faciat 5. Ponatur prior numerus 1 ♃. & posterior 20 — 1 ♃. Diuisa 1 ♃ per 3. fit Quotiens $\frac{1♃}{3}$. & pars octaua numeri 20 — 1 ♃. est $\frac{20 - 1♃}{8}$. quæ cum illo Quotiente facit $\frac{8♃ \times 60 - 3♃}{24}$. hoc est, $\frac{5♃ \times 60}{24}$. qui numerus æqualis debet esse 5. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 5 ♃ & 60. Diuisísque 60 per 5 fiet 1 ♃. 12 prior numerus quæsitus, ideóque posterior 20 — 1 ♃. erit 8. Diuiso enim priore 12. per 3. fit Quotiens 4. qui cum 1. id est, cum parte octaua posterioris numeri 8. facit 5. Estque prior numerus maior posteriore.

SCHOLIVM.

ADVERTE tamen, in simili ænigmate proponi aliquando quæstionem, quæ nulla ratione solui possit, nisi admittantur numeri Nihilo minores. Sint enim inueniendi duo numeri, quorum summa 40. ita vt priore diuiso per 5 fiat Quotiens, qui cum $\frac{1}{10}$. *posterioris faciat* 100. *Ponatur prior numerus* 1 ♃. *& posterior* 40 — 1 ♃. *Diuisa* 1 ♃ *per* 5. *fit Quotiens* $\frac{1♃}{5}$. *& pars decima numeri* 40 — 1 ♃. *est* $\frac{40 - 1♃}{10}$. *quæ cum Quotiente illo facit* $\frac{10♃ \times 200 - 5♃}{50}$. *hoc est,* $\frac{5♃ \times 200}{50}$. *qui numerus æqualis esse debet* 100. *Atque hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter* 5 ♃ + 200. *&* 5000. *Ablatísq;* 200. *vtrinque, erit æquatio inter* 5 ♃. *&* 4800. *Diuisísque* 4800. *per* 5. *fiet* 1 ♃. 960. *prior numerus quæsitus, qui maior est summa proposita* 40. *quod est ineptum. Sed concedamus hoc absurdum, & progrediamur vlterius. Secundus numerus positus* 40 — 1 ♃. *erit* 40 — 960. *Hic enim cum* 960. *facit* 40. *summam propositam. Numerus autem* 40 — 960. *æquiualet huic* — 920. *Nam si demantur* 960. *ex* 40. *remanent* — 290. *vt hæc formula demonstrat: atque hic numerus* — 920. *additus ad* 960. *priorem numerum conficit iterum summam propositam* 40. *vt in hac altera formula apparet. Iam si prior numerus* 960. *diuidatur per* 5. *fit Quotiens* 192. *qui cum* $\frac{1}{10}$. *numeri* — 920. *id est, cum* — 92. *facit* 100. *numerum propositum, vt in tertia formula videre licet.*

$$\begin{array}{r} +\ 40 \\ +\ 960 \\ \hline -\ 920 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 920 \\ +\ 960 \\ \hline +\ 40 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 192 \\ -\ 92 \\ \hline +\ 100 \end{array}$$

LIBVIT hoc exemplum pluribus verbis explicare, vt videas vim numerorum infra Nihil, & Algorithmi signorum + & —. quamuis inuenta 1 ♃. *numero* 960. *statim dicere posses, quæstionem esse impossibilem, quippe cum numerus* 960. *non possit esse pars summæ propositæ* 40.

150 *Numerum inuenire, qui cum data eius parte datum numerum quemcunque superet tanto numero, quanto idem datus numerus, vel alius datus ipsummet numerum inuentum superat.* CL.

SIT primum inueniendus numerus, qui cum eius $\frac{1}{4}$. superet 100 eodem numero, quo 100. superant inuentum numerum. Ponatur numerus quæsitus 1 ♃. qui cum $\frac{1}{4}$ faciet $1\frac{1}{4}$ ♃. quæ summa superare debet 100. eodem numero, quo 100. superant 1 ♃. Ergo demptis 100. ex $1\frac{1}{4}$ ♃. & 1 ♃. ex 100. remanebunt excessus æquales, hoc est, erit æquatio inter $1\frac{1}{4}$ ♃ — 100. & 100 — 1 ♃. Et addita 1 ♃. vtrobique, inter $2\frac{1}{4}$ ♃ — 100. & 100. Rursumque additis 100. vtrinque, inter $2\frac{1}{4}$ ♃. & 200. Diuisis ergo 200. per $2\frac{1}{4}$. fiet 1 ♃. $88\frac{8}{9}$. numerus quæsitus. Nam si ad ipsum addatur eius $\frac{1}{4}$. nimirum numerus $22\frac{2}{9}$. fiet summa $111\frac{1}{9}$. quæ superat 100. numero $11\frac{1}{9}$. quo videlicet 100. inuentum numerum $88\frac{8}{9}$. superant.

Sit deinde numerus inueniendus, qui cum $\frac{2}{3}$. sui ipsius superet 100. eodem numero, quo 140. ipsum numerum inuentum superant. Ponatur numerus quæsitus 1 ♃. Ergo æquatio erit inter $1\frac{2}{3}$ ♃ — 100 & 140 — 1 ♃. Et addita 1 ♃ vtrinque, inter $2\frac{2}{3}$ ♃ — 100. & 140. Additisque rursum 100 vtrobique, inter $2\frac{2}{3}$ ♃. & 240. Diuisis ergo 240. per $2\frac{2}{3}$ fiet 1 ♃. 90. numerus quæsitus. Nam si addantur eius $\frac{2}{3}$. nimirum 60. fiet summa 150. quæ superant 100. numero 50. quo videlicet 140. numerum inuentum 90. superant.

Sit denique inueniendus numerus, qui cum $\frac{1}{2}$ ipsius faciat summam, quæ eodem numero superet 40. quo numerus 10. inuentum numerum superat. Ponatur numerus quæsitus 1 ♃. Ergo æquatio erit inter $1\frac{1}{2}$ ♃ — 40. & 10 — 1 ♃. Additaque 1 ♃ vtrobique, inter $2\frac{1}{2}$ ♃ — 40. & 10. Additisque rursum 40. vtrinque, inter $2\frac{1}{2}$ ♃. & 50. Diuisis ergo 50 per $2\frac{1}{2}$. fiet 1 ♃. 20. quæsitus numerus, qui cum ipsius $\frac{1}{2}$. facit summam 30. quæ numerum 40. superat numero — 10. vt patet in hac formula, vbi 40. subducta sunt à 30. Atque eodem numero — 10. superat numerus 10. inuentum numerum 20. vt constat, si 20. ex 10. subtrahantur, vt in hac altera formula cernis. Vbi rursum vides mirabilem vim Algorithmi signorum + & —. quamuis dici possit, hoc exemplum non posse expediri, propterea quod numerus 20. inuentus cum $\frac{1}{2}$ id est, cum 10. facit minorem summam, quam 40.

$$\begin{array}{r} +30 \\ +40 \\ \hline -10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +10 \\ +20 \\ \hline -10 \end{array}$$

CLI. 151 *Numerum inuenire, à quo si subtrahatur data pars, vel partes, relinquatur numerus tanto minor, quam datus numerus, quanto ipse inuentus numerus eundem numerum datum superat.*

Sit inueniendus numerus, ita vt subtracta $\frac{1}{5}$ ipsius, reliquus sit numerus tanto maior quam 100. quanto ipse numerus inuentus maior est, quam 100. Ponatur quæsitus numerus 1 ♃. à quo subtracta $\frac{1}{5}$. reliquæ fiunt $\frac{4}{5}$ ♃. quæ detractæ ex 100. relinquunt 100 — $\frac{4}{5}$ ♃. Et si ex 1 ♃ demantur 100. relinquuntur 1 ♃ — 100. Et quia excessus ponuntur æquales, erit æquatio inter 100 — $\frac{4}{5}$ ♃. & 1 ♃ — 100.

Addi-

Additisque $\frac{4}{5}$ ♃ vtrinque, inter 100. & $1\frac{4}{5}$ ♃ — 100. Et rursus additis 100. vtrinque, inter 200. $1\frac{4}{5}$ ♃. Diuisis ergo 200. per $1\frac{4}{5}$. id est per $\frac{9}{5}$. fiet 1 ♃. $111\frac{1}{9}$. numerus, qui petitur. Cuius $\frac{1}{5}$. facit $22\frac{2}{9}$. id est, $\frac{200}{9}$. qui numerus demptus ex $111\frac{1}{9}$. id est, ex $\frac{1000}{9}$. relinquit $\frac{800}{9}$. hoc est $88\frac{8}{9}$. qui numerus superatur à 100. numero $11\frac{1}{9}$. quo videlicet inuentus numerus $111\frac{1}{9}$. numerum 100. superat.

Sit præterea inueniendus numerus, ita vt subtractis $\frac{2}{5}$ ipsius, reliquus numerus tanto minor sit, quàm 100. quanto ipse numerus inuentus maior est, quàm 100. Ponatur quæsitus numerus 1 ♃. Demptis $\frac{2}{5}$. remanent $\frac{3}{5}$ ♃. Eritque æquatio inter 100 — $\frac{3}{5}$ ♃. & 1 ♃ — 100. Additisque $\frac{3}{5}$ ♃ vtrobique, inter 100. & $1\frac{3}{5}$ ♃ — 100. Et rursum additis 100. vtrinque, inter 200. & $1\frac{3}{5}$ ♃. Diuisis igitur 200. per $1\frac{3}{5}$. fiet 1 ♃. 125. numerus quæsitus. Nam si ex eo tollantur $\frac{2}{5}$ ipsius, nimirum 50. remanent 75. qui à 100. superantur numero 25. quo videlicet inuentus numerus 125. superat 100.

152 *Numerum inuenire, qui in se multiplicatus, & productus in datum numerum, procreet numerum, à quo si alius datus numerus subtrahatur, reliquus fiat quicunque numerus datus.* CLII.

Inueniendus sit numerus, qui in se ductus, & productus in 10. faciat numerum, à quo si demantur 100. remaneat numerus 300. Ponatur quæsitus numerus 1 ♃. quo ducto in se, fit 1 ʒ. & hoc ducto in 10. fit numerus 10 ʒ. à quo si demantur 100. remanet numerus 10 ʒ — 100. qui æqualis debet esse numero 300. Additis 100. vtrobique, erit æquatio inter 10 ʒ. & 400. Diuisisque 400. per 10. fiet 1 ʒ. 40. Ergo √ʒ 40. est numerus, quem quærimus. Nam in se multiplicatus facit 40. Et ex 40. in 10. fit numerus 400. à quo si subtrahantur 100. remanent 300.

153 *Progressionem Arithmeticam constituere, cuius primus, & vltimus terminus dati sint, & summa progressionis data, quando id fieri potest.* CLIII.

Sit primus terminus 5. & vltimus 10. summa verò omnium terminorum 105. Hic duo oportet inuestigare, numerum videlicet terminorum, & differentiam progressionis. Ponatur numerus terminorum 1 ♃. Et quia summa ex primo, & vltimo termino collecta multiplicata per numerum terminorum producit duplum summæ progressionis, vt in Arithmetica practica, nimirum in prima regula progressionum Arithmeticarum docuimus: si summam ex primo, & vltimo termino collectam, nimirum 15. ducamus in numerum terminorum, id est, in 1 ♃. faciemus 15 ♃. cuius semissis

$\frac{15}{2}$ ʒ. est summa progressionis, æqualis summæ datæ 105. Diuisis igitur 105. per $\frac{15}{2}$. fiet 1 ʒ. 14. numerus terminorum, quem posuimus esse 1 ʒ.

Iam intermedij 12. termini debent facere summam 90. nimirum 105. dempto primo termino 5. & vltimo 10. Ponatur differentia progressionis 1 ʒ. erúntque 12. termini hi sequentes.

5 + 1 ʒ. 5 + 2 ʒ. 5 + 3 ʒ. 5 + 4 ʒ. 5 + 5 ʒ. 5 + 6 ʒ. 5 + 7 ʒ. 5 + 8 ʒ. 5 + 9 ʒ. 5 + 10 ʒ. 5 + 11 ʒ. 5 + 12 ʒ.

qui omnes summam faciunt 60 + 78 ʒ. æqualem numero 90. Demptis ergo 60. vtrinque, erit æqualitas inter 78 ʒ. & 30. Diuisísque 30. per 78. fiet 1 ʒ. $\frac{5}{13}$. differentia progressionis. Est ergo hæc progressio.

5. 5 $\frac{5}{13}$. 5 $\frac{10}{13}$. 6 $\frac{2}{13}$. 6 $\frac{7}{13}$. 6 $\frac{12}{13}$. 7 $\frac{4}{13}$. 7 $\frac{9}{13}$. 8 $\frac{1}{13}$. 8 $\frac{6}{13}$. 8 $\frac{11}{13}$. 9 $\frac{3}{13}$. 9 $\frac{8}{13}$. 10.

quippe cùm constituat 14. terminos, quorum summa est 105.

Qvando in priori operatione reperitur numerus terminorum non integer, quæstio erit impossibilis, quia dari non potest talis progressio, in qua primus, atque vltimus terminus sint illi, qui dati sunt, & summa progressionis illa, quæ proponitur. Vt si in eodem exemplo summa progressionis daretur 100. & primus terminus 5. atque vltimus 10. inueniremus æquationem inter $\frac{15}{2}$ ʒ. & 100. Diuisísque 100. per $\frac{15}{2}$. fieret 1 ʒ. 13 $\frac{1}{3}$. numerus terminorum. quod fieri nequit. Nam nulla est progressio Arithmetica in rerum natura, cuius primus terminus sit 5. & vltimus 10. summáque progressionis 100.

Itaqve ænigma propositum intelligendum est, quando verè talis est progressio, in qua dati numeri sint primus, & vltimus terminus, & summa progressionis. Neque verò parui æstimandum est, reperire huiusmodi progressionem per præcepta Algebræ. Nam si proponeretur hæc quæstio. Est progressio Arithmetica, in qua primus terminus est 5. & vltimus 32. summa vero progressionis 185. quis eam facilè inueniet sine Algebra? quam tamen sine magno labore reperiemus, ea via, quam in ænigmate præscripsimus. Inuenietur enim numerus terminorum 10. & differentia progressionis 3. ita vt progressio quæsita sit hæc.

5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. 32.

CLIV. 154 *Progreßionem Geometricam in data proportione constituere, cuius vltimus terminus datus sit, vnà cum summa progreßionis.*

Sit constituenda progressio in proportione sesquialtera, cuius vltimus terminus 19683. & summa totius progressionis 55593. Ponatur primus terminus 1 ʒ. Et quia si primus terminus ab vltimo subtrahatur, & reliquus numerus per denominatorem proportionis, vno minus, diuidatur, atque ad Quotientem vltimus terminus adiiciatur, fit totius progressionis summa, vt in Arithmetica practica in prima regula progressionum Geometricarum scripsimus: detrahatur 1 ʒ id est, primus terminus, ab vltimo 19683. & residuum 19683 — 1 ʒ. diuidatur per $\frac{1}{2}$. hoc est, per denominatorem proportionis 1 $\frac{1}{2}$. minus vno, & ad Quotientem 39366 — 2 ʒ. adiiciatur vltimus terminus 19683. fietque tota summa progressionis 59049 — 2 ʒ. æqualis datæ summæ 55593. Additis ergo 2 ʒ. vtrinque, erit æqualitas inter 59049. & 55593 + 2 ʒ. Et ablatis vtrobique 55593. inter 3456. & 2 ʒ. Diuisis igitur 3456. per 2. fiet 1 ʒ. 1728. primus videlicet terminus progressionis in proportione sesquialtera. Quocirca constituetur hęc progressio septem terminorum, qui omnes faciunt datam summam 55593.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.

155 *Progreßionem Geometricam in data proportione constituere, cuius primus terminus datus sit, vnà cum progreßionis summa.* CLV.

Sit datus primus terminus proportionis sesquialteræ 1728. & summa progressionis 55593. Ponatur vltimus terminus 1 ʒ. à quo si primus dematur, remanet numerus 1 ʒ — 1728. quo diuiso per $\frac{1}{2}$. fit Quotiens 2 ʒ — 3456. Addito ergo vltimo termino 1 ʒ. fit summa progressionis 3 ʒ — 3456. vt in Arithmetica practica diximus, æqualis datæ summæ 55593. Additísque 3456. vtrobique, erit æquatio inter 3 ʒ. & 59049. Diuisis ergo 59049. per 3. fiet 1 ʒ. 19683. vltimus terminus, totáque progressio erit hæc.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683. &c.

Hæc etiam duo proxima ænigmata intelligenda sunt, si verè in rerum natura tales progressiones Geometricæ existant, in quibus vltimus terminus, vel primus sint illi, qui proponuntur, & summa progressionis sit quoque illa, quæ datur. Vnde si quæreretur progressio in proportione sesquialtera, cuius summa 1000. & vltimus terminus 500. foret quæstio inexplicabilis, cum nulla talis progressio existat. quod experiri poteris. Sed si quæratur progressio Geometrica in proportione sesquialtera, cuius vltimus terminus sit 68 $\frac{11}{32}$. & summa progressionis 197 $\frac{1}{32}$. quia talis progressio in rerum natura existit, ponemus primum terminum 1 ʒ. qui demptus ex vltimo termino 68 $\frac{11}{32}$. relinquit 68 $\frac{11}{32}$ — 1 ʒ. quo numero diuiso per $\frac{1}{2}$. id est, per denominatorē proportionis minus vno, fit

Quotiens $\frac{4374}{32}$. — 2 x. & addito vltimo termino 68 $\frac{11}{32}$. siue $\frac{2187}{32}$. fit numerus $\frac{6561}{32}$ — 2 x. æqualis summæ progressionis 197 $\frac{1}{32}$. siue $\frac{6305}{32}$. Additis igitur 2 x. vtrobique, erit æquatio inter 2 x + $\frac{6305}{32}$. & $\frac{6561}{32}$. Ablatísque $\frac{6305}{32}$ vtrinque, inter 2 x. & $\frac{256}{32}$. Diuisis igitur $\frac{256}{32}$. per 2. fiet 1 x. 4. primus progressionis terminus. Vnde sic stabit progressio.

4. 6. 9. 13 $\frac{1}{2}$. 20 $\frac{1}{4}$. 30 $\frac{3}{8}$. 45 $\frac{9}{16}$. 68 $\frac{11}{32}$.

Sic etiam si detur primus terminus 4. & summa progressionis in proportione sesquialtera, inuenietur vltimus terminus 68 $\frac{11}{32}$. Atque ita, si à 4. continuetur proportio sesquialtera, consistendum erit in octauo termino 68 $\frac{11}{32}$. &c. Et sane præclarum est, ex vltimo termino inuenire primum, & ex primo vltimum, etiamsi intermedij nondum sint cogniti.

CLVI. 156 *Datum numerum in duos partiri, vt primus aliquoties, vt libet, sumptus sit multiplex datus secundi aliquoties, vt libet, sumpti: Vel vt secundus aliquoties, vt libet, sumptus sit datus multiplex primi aliquoties, vt libet sumpti.*

Sit datus numerus 40. diuidendus primum in duos, vt primus ter sumptus faciat numerum duplum secundi quater sumpti. Ponatur primus 1 x. & secundus 40—1 x. Triplum primi 3 x. duplum esse debet quadrupli secundi, hoc est, numeri 160 — 4 x. Erit ergo æquatio inter 3 x.& 320—8 x. Additísque 8 x vtrinque, inter 11 x & 320. Diuisis ergo 320 per 11 fiet 1 x. 29 $\frac{1}{11}$ primus numerus. alter ergo erit 10 $\frac{10}{11}$. Triplum primi est 87 $\frac{3}{11}$. qui numerus duplus est, quadrupli secundi, id est, 43 $\frac{7}{11}$.

Sit deinde idem numerus 40. tribuendus in duos, vt secundus quater sumptus sit duplus primi ter sumpti. Ergo secundus quater sumptus, id est, numerus 160 — 4 x. duplus erit primi ter sumpti, id est, 3 x. hoc est, æqualis erit 6 x. Additis ergo 4 x vtrobique, æquatio erit inter 160. & 10 x. Diuisísque 160 per 10. fiet 1 x. 16. primus numerus. alter ergo erit 24. Quadruplum huius, nimirum 96. duplum est tripli illius, nimirum 48.

CLVII. 157 *Tres numeros in Arithmetica progressione inuenire, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione genitus ad eorundem summam habeat datam proportionem.*

Sint inueniendi tres numeri Arithmeticam constituentes progressionem, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione productus, triplus sit summæ eorundem. Ponantur tres numeri quæsiti, 1 x. 2 x. 3 x. habentes eundem excessum 1 x. Ex multiplicatione eorum fit numerus 6 ce. triplus summæ eorum 6 x. hoc est, æqualis 18 x. Diuisis ergo 18 per 6 fiet 1 ȝ. 3. propterea quod inter ce. & x. medius est character ȝ. ac propterea 1 x. erit √ȝ 3. & 2 x. erunt √ȝ 12 & 3 x erunt √ȝ 27. ita vt tres numeri quæsiti sint √ȝ 3. √ȝ 12. √ȝ 27. habentes eundem excessum √ȝ 3. qui inter se multiplicati faciunt √ȝ 972. qui numerus triplus est summæ eorundem, numeri videlicet √ȝ 108.

Quando denominator proportionis, quam productus numerus ad summam habere debet, est numerus quadratus, explicabitur quæstio in numeris rationalibus. Vt iisdem positis, si numerus productus debeat habere proportionem noncuplam, inuenietur æquatio inter 6 ce. & 54 x. Diuisis igitur 54 per 6. fiet 1 ȝ 9. & 1 x. 3. atque tres numeri quæsiti erunt 3. 6. 9. qui inter se multiplicati gignunt numerum 162. noncuplum eorum summæ 18.

158 *Tres numeros inuenire, vt primus acceptis quotlibet vnitatibus à secundo, faciat numerum multiplicem quemcunque eius, qui secundo remanet: Secundus verò, acceptis quotuis vnitatibus à tertio, faciat numerum etiam multiplicem quemcunque eius, qui tertio superest: Tertius denique acceptis quotlibet vnitatibus à primo, faciat numerum æqualem residuo primi, minus dato numero.* CLVIII

Capiat primus à secundo 4. & secundus à tertio 3. & tertius à primo 10. ita vt primus faciat duplum eius, qui secundo superest: Secundus autem triplum eius, qui tertio superest: Tertius denique æqualem residuo primi, minus 14. Ponatur secundus 3 x + 6. vt dare possit 4. primo, & acceptis 3. à tertio, numerum conficiat triplum eius, qui tertio remanet, id est, numerum faciat, qui habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Igitur si secundus primo det 4. remanebunt ei 3 x + 2. habebítque tunc primus 6 x + 4. eius duplum, ac proinde, antequam acciperet 4. habuit 6 x. Deinde secundus, acceptis 3. à tertio, habebit 3 x + 9. numerum triplum eius, qui tertio superest. Tertius ergo tunc habebit 1 x + 3. & antequam daret 3. habuit 1 x + 6. qui si accipiat 10. à primo, habebit 1 x + 16. qui numerus æqualis esse debet residuo primi, minus 14. hoc est, si accedant tertio vnitates 14. tum demum faciet 1 x + 30. numerum æqualem residuo primi 6 x —10. Additis ergo 10. vtrinque, fiet æquatio inter 1 x + 40. & 6 x. Ablatáque 1 x vtrobique, inter 40. & 5 x. Diuisis ergo 40 per 5. fiet 1 x. 8. Primus ergo numerus, quem posuimus

6 ℞.erit 48.Secundus verò poſitus 3 ℞ + 6.erit 30. Tertius denique poſitus 1 ℞ + 6.erit 14. Nam primus, acceptis 4.à ſecundo, habebit 52. qui numerus duplus eſt 26.qui ſecundo ſupereſt. Secundus autem,ſumptis 3.à tertio,habebit 33. numerum triplum 11. qui tertio ſupereſt. Tertius denique,acceptis 10. à primo,habebit 24. qui numerus æqualis eſt reſiduo primi 38.—14.

Qvod ſi tertius, acceptis 10.à primo, debeat habere numerum præciſe æqualem reſiduo primi,inuenietur 1 ℞.5 $\frac{1}{5}$. Et tres numeri erunt 31 $\frac{1}{5}$. 21 $\frac{3}{5}$.11 $\frac{1}{5}$.Æquatio porro inuéta docebit,quando quæſtio eſt impoſſibilis.

CLIX. 159 *Duos numeros inuenire,ita vt primus,acceptis quotlibet vnitatibus à ſecundo,ſuperet reſiduum ſecundi dato numero: At ſecundus acceptis quotuis vnitatibus à primo, faciat numerum multiplicem datum eius,qui primo remanet, ac præterea contineat datum numerum.*

Capiat primus à ſecundo 20.Secundus verò 3.à primo: faciátque primus numerum,qui reſiduum ſecundi ſuperet numero 9. Secundus verò numerum faciat triplum reſidui primi, & inſuper contineat 9.vnitates. Ponatur primus 1 ℞.qui acceptis 20. à ſecundo, habebit 1 ℞ + 20. qui numerus reſiduum ſecundi ſuperare debet numero 9. Ergo ſecundo remanent 1 ℞ + 11.ac proinde antequam primo daret 20.habuit 1 ℞ + 31.Hic acceptis 3.à primo,habebit 1 ℞ + 34.qui numerus triplus eſſe debet reſidui primi, & inſuper continere 9. Ablatis ergo 9. erit reliquus numerus 1 ℞ + 25. triplus reſidui primi. Eſt autem reſiduum primi 1 ℞ — 3.Igitur æquatio erit inter 1 ℞ + 25.& 3 ℞ — 9.Additíſque 9.vtrinque, inter 1 ℞ + 34.& 3 ℞.Ablatáque 1 ℞.vtrobique,inter 34.& 2 ℞. Diuiſis ergo 34.per 2.fiet 1 ℞.17.primus numerus.Secundus ergo erit 48.nimirum 1 ℞ + 31. Ac primus 17. acceptis 20. à ſecundo, habebit 37. qui numerus reſiduum ſecundi 28. ſuperat numero 9. Secundus autem 48.acceptis 3. à primo, habebit 51.qui numerus triplum reſidui primi 14. ſuperat numero 9.

CLX. 160 *Numerum inuenire, per quem ſi datus numerus diuidatur, ex Quotiente in quemuis datum numerum tantum fiat, quantum ex inuento numero in alium quemuis numerum datum.*

Sit datus numerus 36. diuidendus per inuentum numerum, ita vt Quotiens in 24. ductus tantum faciat, quantum numerus inuentus in 54. ductus facit. Ponatur numerus quæſitus 1 ℞. per quem ſi diui-

ſi diuidatur numerus 36. fit Quotiens $\frac{36}{1\text{℞}}$. qui ductus in 24.facit $\frac{864}{1\text{℞}}$. numerum æqualem numero 54 ℞. qui fit ex poſito numero 1 ℞. in 54. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 864. & 54 ʒ. Diuiſis igitur 864. per 54. fiet 1 ʒ 16. & 1 ℞. 4. numerus quæſitus. Diuiſo enim dato numero 36. per 4. fit Quotiens 9. qui ductus in 24. facit 216. numerum æqualem ei, qui fit ex inuento numero 4. in 54.

Item inueniendus ſit numerus, per quem ſi diuidatur datus numerus 40. fiat Quotiens,qui ductus in 8.tantũ faciat,quantũ inuentus numerus facit in 50.ductus.Ponatur quæſitus numerus 1 ℞. per quem ſi diuidatur numerus 40.fit Quotiens $\frac{40}{1\text{℞}}$. qui ductus in 8. facit $\frac{320}{1\text{℞}}$ numerum æqualem numero 50 ℞. qui fit ex poſito numero 1 ℞. in 50. quæ æquatio per multiplicationem in crucẽ reducetur ad ęquationẽ inter 320.& 50 ʒ.Diuiſis ergo 320 per 50.fiet 1 ʒ. 6 $\frac{2}{5}$. ſiue $\frac{32}{5}$. & 1 ℞. √ʒ $\frac{32}{5}$. numerus quæſitus. per quem ſi diuidatur datus numerus 40. hoc eſt, √ʒ 1600. fit Quotiens √ʒ $\frac{8000}{32}$.qui ductus in 8.hoc eſt,in √ʒ 64. producit numerum √ʒ $\frac{512000}{32}$. qui æqualis eſt numero √ʒ $\frac{80000}{5}$.qui fit ex numero inuento √ʒ $\frac{32}{5}$. in 50. id eſt, in √ʒ 2500. Quod enim æquales ſint numeri √ʒ $\frac{512000}{32}$. & √ʒ $\frac{80000}{5}$. liquet, cum in crucem multiplicati producant eundem numerum √ʒ 2560000.

161 *Tres numeros continuè proportionales in data proportione inuenire, quorum quadrati in vnam ſummam collecti faciant datum numerum.* CXLI.

Sint inueniendi tres numeri continuè ſeſquitertij,quorum quadrati faciant 4329. Ponantur quæſiti numeri 9 ℞. 12 ℞. 16 ℞. in proportione ſeſquitertia.Eorum quadrati 81 ʒ.144 ʒ.256 ʒ. faciunt ſummam 481 ʒ. æqualem 4329. Diuiſis ergo 4329. per 481.fiet 1 ʒ. 9. & 1 ℞.3. Ergo primus numerus poſitus 9 ℞.eſt 27. ſecundus 36.& tertius 48.quorum quadrati 729.1296.2304. faciunt ſummam 4329.

Sint rurſus inueniendi tres numeri continuè dupli, quorum quadrati faciant 6000.Ponantur tres quæſiti numeri 1 ℞. 2 ℞. 4 ℞. Horum quadrati 1 ʒ. 4 ʒ.16 ʒ. faciunt ſummam 21 ʒ. æqualem 6000. Diuiſis ergo 6000. per 21. fiet 1 ʒ $\frac{2000}{7}$. & 1 ℞. √ʒ $\frac{2000}{7}$. Numeri ergo quæſiti in proportione dupla ſunt √ʒ $\frac{2000}{7}$. √ʒ $\frac{8000}{7}$. √ʒ $\frac{32000}{7}$. quorum quadrati $\frac{2000}{7}$. $\frac{8000}{7}$. $\frac{32000}{7}$. faciunt $\frac{42000}{7}$. hoc eſt,6000.

162 *Tres numeros continuè proportionales in data proportione inuenire,ita vt parte data maximi numeri in partem datam medij multiplicata,& hoc producto in partem datam minimi ducto,procreetur datus numerus.* CXLII.

SINT inueniendi tres numeri continuè ſeſquialteri, ita vt tertia parte maximi ducta in ſemiſſem medij, & hoc numero producto in quartam partem minimi multiplicato, fiat numerus 576. Ponantur tres numeri quæſiti ſeſquialteri, 4 ℞. 6 ℞. 9 ℞. Ex $\frac{1}{3}$. maximi id eſt, ex 3 ℞. in ſemiſſem medij, id eſt, in 3 ℞. fit numerus 9 ʒ. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id eſt, in 1 ℞. fit numerus 9 ce. æqualis 576. Diuiſis ergo 576. per 9. fiet 1 ce 64. cuius radix cubica 4. Ergo tres numeri quæſiti, cum poſiti ſint 4 ℞. 6 ℞. 9 ℞. erunt 16. 24. 36. Atque ex tertia parte maximi, id eſt, ex 12. in ſemiſſem medij, id eſt, in 12. fit numerus 144. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id eſt, in 4. fit 576.

CLXIII. 163 *Numerum inuenire, cuius datæ duæ partes inter ſe multiplicatæ producant numerum, quo diuiſo per datum numerum, fiat Quotiens, qui contineat partem datam, vel partes radicis quadratæ numeri inuenti.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. inter ſe multiplicatæ faciant numerum, quo diuiſo per 27. exeant $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti. Ponatur quæſitus numerus 1 ℞. Ex eius $\frac{1}{3}$. in $\frac{1}{4}$. id eſt, ex $\frac{1\text{℞}}{3}$. in $\frac{1\text{℞}}{4}$. fit numerus $\frac{1\text{ʒ}}{12}$. quo diuiſo per 27. fit numerus $\frac{1\text{ʒ}}{324}$. æqualis duabus tertiis radicis quadratæ numeri inuenti 1 ℞. hoc eſt, duabus tertiis numeri √ʒ 1 ℞. hoc eſt, numero √ʒ $\frac{4\text{℞}}{9}$. qui facit $\frac{2}{3}$. numeri √ʒ 1 ℞. producitúrque ex ductu √ʒ 1 ℞. in $\frac{2}{3}$. id eſt, in √ʒ $\frac{4}{9}$. Itaque æquatio inuenta eſt inter √ʒ $\frac{4\text{℞}}{9}$. & $\frac{1\text{ʒ}}{324}$. Igitur & æquatio erit inter eorum quadrata $\frac{4\text{℞}}{9}$. & $\frac{1\text{ʒʒ}}{104976}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationẽ inter 419904 ℞. & 9 ʒʒ. Diuiſis ergo 419904. per 9. fiet 1 ce 46656. (quia inter ℞. & ʒʒ. medij ſunt duo characteres ʒ. & ce.) & 1 ℞. 36. numerus quæſitus. Nam ex 12. eius tertia parte in 9. eius quartam partem fit numerus 108. quo diuiſo per 27. fit Quotiens 4. qui facit $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti 36. quæ radix eſt 6.

CLXIIII. 164 *Numerum inuenire, cuius pars data in ſe multiplicata, & productus numerus in aliam partem datam ductus procreet quadratum numerum inuenti numeri.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{5}$. in ſe faciat numerum, qui ductus in $\frac{1}{3}$. eiuſdem numeri inuenti producat quadratum numeri inuenti. Ponatur quæſitus numerus 1 ℞. Huius $\frac{1}{5}$. nimirum $\frac{1\text{℞}}{5}$. ducta in ſe facit $\frac{1\text{ʒ}}{25}$. qui numerus ductus in $\frac{1\text{℞}}{3}$. facit numerum $\frac{1\text{ce}}{75}$. æqualem quadrato numeri poſiti 1 ℞, hoc eſt, numero 1 ʒ. ita vt æquatio ſit inter $\frac{1\text{ce}}{75}$. & 1 ʒ. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hãc inter 1 ce. & 75 ʒ. Diuiſis ergo 75. per 1 fiet 1 ℞. 75. (quod Coſſici numeri collaterales ſint) numerus quæſitus. Nam eius quinta pars, 15. ducta in ſe facit 225. qui numerus ductus in 25. tertiam partem eiuſdem numeri 75. facit 5625. quadratum inuenti numeri 75.

165 *Numerum inuenire, cuius pars data in aliam partem datam multiplicata producat datum numerum.* CLXV.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. ducta in $\frac{1}{6}$. faciat 384. Ponatur quæſitus numerus 1 ℞. Ex $\frac{1\text{℞}}{4}$. in $\frac{1\text{℞}}{4}$ fit numerus $\frac{1\text{ʒ}}{24}$. æqualis 384. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1 ʒ. & 9216. Diuiſis igitur 9216 per 1 fiet 1 ʒ. 9216. & 1 ℞. 96. numerus quæſitus. Nam ex 24. quarta eius parte, in 16. eiuſdem partem ſextam fit numerus 384. datus.

ITEM ſit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{6}$. ducta faciat 100. Ponatur numerus quæſitus 1 ℞. Ex $\frac{1\text{℞}}{4}$. in $\frac{1\text{℞}}{6}$. fit numerus $\frac{1\text{ʒ}}{24}$. æqualis 100. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1 ʒ. & 2400. Diuiſis ergo 2400. per 1. fiet 1 ʒ. 2400. cuius radix quadrata, √ʒ 2400. erit numerus quęſitus. Nam eius $\frac{1}{4}$. eſt √ʒ 150. & $\frac{1}{6}$. √ʒ $\frac{200}{3}$. quę partes inter ſe multiplicatæ procreant √ʒ $\frac{30000}{3}$. hoc eſt, √ʒ 10000. ſiue 100.

SCHOLIVM.

SINE *Algebra ſoluetur hoc problema hac ratione; Denominatores partium inter ſe multiplicentur, & productus numerus in datum numerum ducatur. Radix enim quadrata huius producti erit numerus quæſitus. Vt in priori exemplo, ex 4. in 6. fit 24. & ex 24. in 384. fit 9216. cuius radix quadrata 96. dabit numerum quæſitum.*

QVOD *ſi proponantur tres partes inter ſe multiplicandæ, ita vt producant numerum datum; multiplicandi erunt partium denominatores inter ſe, & productus numerus in datum numerum ducendus. Huius enim numeri radix cubica dabit numerum quæſitum. Vt ſi quæratur numerus, cuius partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. inter ſe multiplicatæ producant 72000. Multiplicatis denominatoribus inter ſe, fit numerus 24. Et ex 24. in 72000. fit numerus 1728000. cuius radix cubica 120. dabit numerum quæſitum. Nam eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimirum 60. 40. 30. inter ſe multiplicatæ faciunt 72000.*

EODEM *modo progrediendum eſt, ſi quatuor partes aliquotæ proponantur inter ſe multiplicandæ: ſed ex vltimo producto extrahenda eſt radix zenzizenſica. Et ſi quinque proponantur; eruenda eſt radix ſurdeſolida. Et ſic de aliis in infinitum. Nam ex vltimo producto ſemper extrahenda eſt radix, cuius exponens æqualis eſt numero partium aliquotarum. Vt ſi dentur 10. partes aliquotæ, extrahenda erit radix Zenſurdeſolida. Et ſi dentur 12. radix*

Zensizensicubica &c. Qua de re consule, quæ cap. 2. scripsimus de progressionibus numerorum Cossicorum.

CLXVI 166 *Tres numeros inuenire, vt bini quilibet multiplicati inter se gignant tres datos numeros.*

Ex primo in secundum fiat 240. Ex primo in tertium 660. Et ex secundo in tertium, 1380. Ponatur primus numerus 1 ℞. Per quem si diuidatur numerus 240. productus ex primo in secundum, fiet secundus $\frac{240}{1\,\text{℞}}$. Nam hic Quotiens ductus in diuisorem 1 ℞. producit diuisum 240. Eadem ratione erit tertius $\frac{660}{1\,\text{℞}}$. Quotiens videlicet diuisionis numeri 660. per 1 ℞. Iam verò ex secundo $\frac{240}{1\,\text{℞}}$. in tertium $\frac{660}{1\,\text{℞}}$. fit numerus $\frac{158400}{1\,\text{ℨ}}$. æqualis 1380. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 158400. & 1380 ℨ. Diuisis ergo 158400. per 1380. fiet 1 ℨ. 114 $\frac{18}{23}$. (quod inter N. & ℨ. medius sit vnus character ℞) & 1 ℞ erit √ℨ 114 $\frac{18}{23}$. primus scilicet numerus, qui positus fuit 1 ℞. Et si per hunc primum, id est, per √ℨ $\frac{2640}{23}$. diuidatur primus numerus productus 240. hoc est, √ℨ 57600. fiet Quotiens √ℨ 501 $\frac{9}{11}$. secundus videlicet numerus. Et si per eundem primum numerum √ℨ $\frac{2640}{23}$. diuidatur secundus numerus productus 660. hoc est, √ℨ 435600. dabit Quotiens √ℨ 3795. tertium numerum. Ex primo √ℨ 114 $\frac{18}{23}$. in secundum √ℨ 501 $\frac{9}{11}$. fit √ℨ 57600. hoc est, 240. Et ex eodem primo √ℨ 114 $\frac{18}{23}$. in tertium √ℨ 3795. fit √ℨ 435600. id est, 660. Ac tandem ex secundo √ℨ 501 $\frac{9}{11}$. in tertium √ℨ 3795. fit √ℨ 1904400. id est, 1380.

CLXVII. 167 *Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualem ei, quem inuenti data pars cum maiore efficit.*

Dati sint duo numeri 12. & 20. inueniendúsque sit alius, qui cum 12. tantum faciat, quantum eius $\frac{3}{7}$. cum 20. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Igitur 12 + 1 ℞. æqualia erunt 20 + $\frac{3}{7}$ ℞. Ablatis $\frac{3}{7}$ ℞ vtrinque, erit æquatio inter 12 + $\frac{4}{7}$ ℞. & 20. Et ablatis 12. vtrobique, inter $\frac{4}{7}$ ℞. & 8. Diuisis ergo 8 per $\frac{4}{7}$. fiet 1 ℞. 14. numerus, quem inquirimus. Nam additus ad 12. facit 26. & eius $\frac{3}{7}$. nimirum 6. cum 20. faciunt similiter 26.

CXLVIII 168 *Numerum inuenire, ita vt quadrati quotcunque partium ipsius simul sumpti conficiant summam inuento numero æqualem, vel ipsius multiplicem.*

Sit primum inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. descripti summam faciant inuento numero æqualem. Ponatur numerus

numerus quæsitus 1 ℞. cuius partes nominatæ sunt $\frac{1}{2}$ ℞. $\frac{1}{3}$ ℞. & $\frac{1}{4}$ ℞. & earum quadrati $\frac{1}{4}$ ℨ. $\frac{1}{9}$ ℨ. $\frac{1}{16}$ ℨ. qui simul faciunt $\frac{244}{576}$ ℨ. quæ summa æqualis est 1 ℞. Diuisa ergo 1. per $\frac{244}{576}$. fiet 1 ℞. $\frac{576}{244}$. numerus quæsitus. Nam eius $\frac{1}{2}$. est $\frac{288}{244}$. eiúsque quadratus $\frac{82944}{59536}$. & $\frac{1}{3}$. est $\frac{192}{244}$. eiúsque quadratus $\frac{36864}{59536}$. & $\frac{1}{4}$ est $\frac{144}{244}$. eiúsque quadratus $\frac{20736}{59536}$. qui omnes tres quadrati faciunt $\frac{140544}{59536}$. numerum æqualem inuento numero $\frac{576}{244}$. quippe cum tantum fiat ex denominatore huius in numeratorem illius, quantum ex numeratore in denominatorem.

Sit deinde inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$. procreati faciant numerum decuplum numeri inuenti. Ponatur numerus 1 ℞. cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. sunt $\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{4}$ ℞. & quadrati $\frac{1}{4}$ ℨ. & $\frac{1}{16}$ ℨ. qui simul faciunt summam $\frac{5}{16}$ ℨ. æqualem 1 ℞. Diuisis ergo 1. per $\frac{5}{16}$. fiet 1 ℞. 32. numerus quæsitus. Nam quadrati 256. & 64. ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. descripti faciunt summam 320. decuplam numeri inuenti 32.

169 *Numerum inuenire, qui ductus in datam ipsius partem producat datum numerum quemcunque.* CLXIX

Sit inueniẽdus numerus, qui ductus in $\frac{3}{4}$. ipsius producat 90. Ponatur inuẽtus numerus 1 ℞. Ex 1 ℞ in $\frac{3}{4}$ ℞. fit numerus $\frac{3}{4}$ ℨ. æqualis 90. Diuisis igitur 90. per $\frac{3}{4}$. fiet 1 ℨ. 120. & 1 ℞. √ℨ 120. numerus quæsitus. Eius $\frac{3}{4}$. sunt √ℨ $\frac{1080}{16}$. vt patet, si √ℨ 120. ducatur in $\frac{3}{4}$. hoc est, in √ℨ $\frac{9}{16}$. Iam ex √ℨ 120. in √ℨ $\frac{1080}{16}$. fit √ℨ $\frac{129600}{16}$. hoc est, √ℨ 8100. hoc est, 90.

170 *Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati summam datam conficiant, maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiusdem numeri.* CLXX.

Sit numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. numerum maiorem, quam 800. qui semissis est quadrati ex 40. procreati, & minorem quam 1600. qui quadratus est eiusdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 20 — 1 ℞. & alter 20 + 1 ℞. vt cum illo faciat 40. Quadrati horum duorum numerorum 400 — 40 ℞ + 1 ℨ. & 400 + 40 ℞ + 1 ℨ. faciunt 2 ℨ + 800. numerum æqualem 928. Ablatis ergo 800. vtrobique, erit æquatio inter 2 ℨ. & 128. Diuisisque 128. per 2 fiet 1 ℨ. 64. & 1 ℞. 8. Ergo primus numerus positus 20 — 1 ℞. erit 12. & alter, quem posuimus 20 + 1 ℞. erit 28. Atque quadrati horum numerorum 12. & 28. nimirum 144. & 784. faciunt 928.

Hoc ænigma soluemus etiam per compositam æquationem in ænigmate 35. sequentis cap. 30.

CLXXI 171 *Datum numerum in tres partes continuè proportionales diuidere, ita vt productus numerus ex prima in tertiam ad productum ex prima in secundam habeat proportionem datam.*

Hoc ænigma solutum fuit etiam in problemate 133. sed pro alio exemplo.

Sit datus numerus 39. diuidendus in tres continuè proportionales, ita vt numerus factus ex primo in tertium habeat ad numerum ex primo in secundum factum proportionem duplam sesquialteram. Ponatur secundus 1 ꝛ. ideoque primus ac tertius simul 39 — 1 ꝛ. Ex secundo 1 ꝛ. in se fit 1 ȝ.[a] quantum nimirum fit ex primo in tertium. Et quia hic productus debet esse duplus sesquialter ad eum, qui fit ex primo in secundum 1 ꝛ. fiet ex primo in secundum numerus $\frac{2\text{ȝ}}{5}$. (quod 1 ȝ. ad $\frac{2\text{ȝ}}{5}$. proportionem habeat duplam sesquialteram, vt constat, si 1 ȝ. diuidatur per 2 ½. denominatorem proportionis duplæ sesquialteræ.) Quo diuiso per secundum 1 ꝛ. fit Quotiens $\frac{2\text{ȝ}}{5\text{ꝛ}}$. siue $\frac{2\text{ꝛ}}{5}$. qui ductus in diuisorē, id est, in 1 ꝛ. producit $\frac{2\text{ȝ}}{5}$. ac proinde primus numerus erit $\frac{2\text{ꝛ}}{5}$. quo ablato ex summa primi ac tertij, id est, ex 39 — 1 ꝛ. reliquus erit tertius numerus $\frac{195-7\text{ꝛ}}{5}$. in quem si ducatur primus $\frac{2\text{ꝛ}}{5}$. producetur numerus $\frac{390\text{ꝛ}-14\text{ȝ}}{25}$. æqualis numero 1 ȝ. qui fit ex medio 1 ꝛ. in se. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 25 ȝ. & 390 ꝛ — 14 ȝ. Et additis 14 ȝ vtrinque, erit æquatio inter 390 ꝛ. & 39 ȝ. Diuisis igitur 390. per 39. fiet 1 ꝛ 10. (quod numeri Cossici sint collaterales) numerus scilicet medius. Primus ergo positus $\frac{2\text{ꝛ}}{5}$. nimirum 2 ꝛ. diuisæ per 5. erit 4. Et tertius, qui inuentus est $\frac{195-7\text{ꝛ}}{5}$ hoc est, 195 — 7 ꝛ. diuisæ per 5. erit 25. ita vt tres partes numeri 39. sint 4. 10. 25. continuè proportionales. Et qui fit ex primo in tertium, vel ex secundo in se, nimirum 100. proportionem habet duplam sesquialteram ad numerum 40. qui fit ex primo in secundum.

Qvoniam verò, datis tribus numeris continuè proportionalibus,[b] numerus, qui fit ex medio in se, ad productum ex primo in medium, eandem habet proportionem, quam tres dati numeri: propterea quod medius multiplicans se, & primum producit duos illos productos, soluetur hoc ænigma propositum facilius, si per ænigma 49. datus numerus secetur in tres numeros continuè proportionales in proportione data. Ita enim numerus factus ex primo in tertiū, hoc est, ex secundo in se, habebit ad factum ex primo in secundum proportionē datā, eandē nimirum, quam tres numeri habent. Vt in dato exemplo, secandus erit datus numerus 39. in tres numeros continuè duplos sesquialteros, hoc modo. Ponantur tres numeri in proportione continua dupla sesquialtera 1 ꝛ. 2 ½ ꝛ. 6 ¼ ꝛ. quorum summa 9 ¾ ꝛ. æqualis esse debet dato numero 39. Diuisis ergo 39. per 9 ¾. fiet 1 ꝛ. 4. primus numerus, qui positus fuit 1 ꝛ. Secundus ergo positus 2 ½ ꝛ. erit 10. & tertius, quem posuimus 6 ¼ ꝛ. erit 25.

a 20. septimi.

b 17. septimi.

172 *Datum numerum in duos partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex dato primo numero procreati: hoc est, ita vt radix quadrata secundi dati numeri minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.* CLXXII

Sit datus numerus 10. distribuendus in duos, inter quos √ȝ 1. sit medio loco proportionalis, hoc est, vt ex vno in alium fiat 1. Ponatur minor pars 5 — 1 ꝛ. & maior 5 + 1 ꝛ. vt earum summa sit 10. Ex vna in alteram fit numerus 25 — 1 ȝ. vt in hac formula apparet, æqualis 1. Addito 1 ȝ. vtrobique, fiet æquatio inter 25 & 1 ȝ + 1. Ablataque 1 vtrobique, inter 24 & 1 ȝ. Diuisis ergo 24. per 1 fiet 1 ȝ. 24. & 1 ꝛ. √ȝ 24. Ergo minor pars posita 5 — 1 ꝛ. erit 5 — √ȝ 24. Maior autem posita 5 + 1 ꝛ. erit 5 + √ȝ 24. Atque hæ duæ partes inter se multiplicatæ faciunt 1. vt hic cernitur. Fiet enim multiplicatio, si 24. quadratus posterioris particulæ subtrahetur ex 25. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. docuimus.[a] Igitur √ȝ 1. medio loco proportionalis est inter 5 — √ȝ 24. & 5 + √ȝ 24. cum tam hi duo inter se multiplicati, quam ille √ȝ 1. in se, faciat 1.

	5	— 1 ꝛ	
	5	+ 1 ꝛ	
	+ 5 ꝛ	— 1 ȝ	
25	— 5 ꝛ		
25		— 1 ȝ	

5	— √ȝ 24
5	+ √ȝ 24
1	

a 20. septimi.

Porro hoc idem ænigma soluemus per compositam quoque æquationem in sequenti cap. ænigmate 38.

173 *Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati summam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione superet dato numero.* CLXXIII.

Sit datus numerus 8. diuidendus in duos, vt summa ex eorum quadratis collecta excedat productum numerum ex eorum multiplicatione mutua, numero 20. Ponatur minor numerus 4 — 1 ꝛ. & maior 4 + 1 ꝛ. vt simul faciant 8. Quadrati sunt 1 ȝ + 16 — 8 ꝛ. & 1 ȝ + 16 + 8 ꝛ. facientes summam 2 ȝ + 32. cum — 8 ꝛ. & + 8 ꝛ. se mutuò tollant. Hæc summa excedere debet productum ex vno in alterum numero 20. Est autem hic productus $16 - 1\,\mathfrak{z}$. vt in apposita formula apparet qui cum 20 faciet numerum $36 - 1\,\mathfrak{z}$. æqualem quadratorum summæ $2\,\mathfrak{z} + 32$. Addito ergo $1\,\mathfrak{z}$. vtrinque, erit æqualitas inter $3\,\mathfrak{z} + 32$. & 36. Ablatísq. 32. vtrobique, inter $3\,\mathfrak{z}$. & 4. Diuisis ergo 4. per 3. fiet $1\,\mathfrak{z}$. $\frac{4}{3}$. & $1\,\mathcal{R}$. $\sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{4}{3}$. Cum ergo minor numerus sit positus $4 - 1\,\mathcal{R}$. erit ipse numerus minor $4 - \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{4}{3}$. Maior autem positus $4 + 1\,\mathcal{R}$. erit $4 + \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{4}{3}$. qui duo numeri faciunt 8. & quadrati sunt $17\frac{1}{3} - \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{256}{3}$. & $17\frac{1}{3} + \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{256}{3}$. vt in hisce formulis apparet. quorum summa est $34\frac{2}{3}$. quæ superat

$$\begin{array}{r}
4 - 1\,\mathcal{R} \\
4 + 1\,\mathcal{R} \\ \hline
+ 4\,\mathcal{R} - 1\,\mathfrak{z} \\
16 - 4\,\mathcal{R} \qquad \\ \hline
16 - 1\,\mathfrak{z}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
4 - \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{4}{3} \\
4 - \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{4}{3} \\ \hline
- \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{64}{3} + \frac{4}{3} \\
16 - \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{64}{3} \qquad \\ \hline
17\frac{1}{3} - \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{256}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4 + \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{4}{3} \\
4 + \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{4}{3} \\ \hline
+ \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{64}{3} + \frac{4}{3} \\
16 + \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{64}{3} \qquad \\ \hline
17\frac{1}{3} + \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{256}{3}
\end{array}$$

productum $14\frac{2}{3}$. ex vno in alterum, numero dato 20. Productus autem hic $14\frac{2}{3}$. habetur, si $\frac{4}{3}$. quadratus posterioris particulæ dematur ex 16. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. traditum est, & altera hæc formula indicat.

$$\begin{array}{r}
4 - \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{4}{3} \\
4 + \sqrt{\mathfrak{z}}\,\frac{4}{3} \\ \hline
14\frac{2}{3}
\end{array}$$

SIT rursus datus numerus 40. distribuendus in duos, quorum quadrati summam faciant, quæ numerum ex eorum multiplicatione factum superet numero 403. Ponatur minor numerus $20 - 1\,\mathcal{R}$. & maior $20 + 1\,\mathcal{R}$ facientes summam 40. Quadrati sunt $1\,\mathfrak{z} + 400 - 40\,\mathcal{R}$. & $1\,\mathfrak{z} + 400 + 40\,\mathcal{R}$. quorum summa $2\,\mathfrak{z} + 800$. superans numero 403. numerum $400 - 1\,\mathfrak{z}$. productum ex vno in alterum. qui productus habetur, si quadratus $1\,\mathfrak{z}$ posterioris particulæ dematur ex 400. quadrato prioris particulæ, vt in hac formula cernis, traditúmque est cap. 23. Itaque si ad hunc productum addentur 403. fiet æquatio inter $2\,\mathfrak{z} + 800$. summam quadratorum, & $803 - 1\,\mathfrak{z}$. Additóque $1\,\mathfrak{z}$. vtrobique, inter $3\,\mathfrak{z} + 800$. & 803. Ablatísque 800. vtrinque, inter $3\,\mathfrak{z}$. & 3. Diuisis igitur 3. per 3. fiet $1\,\mathfrak{z}$. 1. & $1\,\mathcal{R}$ 1. Erit ergo minor numerus, quem posuimus $20 - 1\,\mathcal{R}$. 19. & maior positus $20 + 1\,\mathcal{R}$. erit 21. qui problema conficiunt.

$$\begin{array}{r}
20 - 1\,\mathcal{R} \\
20 + 1\,\mathcal{R} \\ \hline
400 - 1\,\mathfrak{z}
\end{array}$$

HOC etiam problema soluemus per compositam æquationem in ænigmate 39. sequentis cap.

SI numerus proponeretur 30. diuidendus in duos, vt summa quadratorum superet numerum ex partium multiplicatione productum

numero 30. foret problema impossibile, vt ex ipsa solutione disces.

174 *Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem dato numero producat quemuis datum numerum.* CLXXIV

SIT inueniendus numerus, cuius quadratus auctus octonario, si ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem octonario, producat 6497. Ponatur numerus quæsitus $1\,\mathcal{R}$. Eius quadratus auctus octonario erit $1\,\mathfrak{z} + 8$. mulctatus verò eodem octonario, $1\,\mathfrak{z} - 8$. Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt $1\,\mathfrak{zz} - 64$. vt hîc vides, si 64. quadratus posterioris particulæ, dematur ex $1\,\mathfrak{zz}$. particulæ prioris. qui productus æqualis esse debet dato numero 6497. Additis ergo 64. vtrobique, æquatio erit inter $1\,\mathfrak{zz}$. & 6561. Diuisisque 6561. per 1. fiet $1\,\mathfrak{zz}$. 6561. & radix eius zensizensica 9. numerus quæsitus. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & mulctatus octonario, 73. fitq. numerus 6497. ex 89. in 73.

$$\begin{array}{r}
1\,\mathfrak{z} + 8 \\
1\,\mathfrak{z} - 8 \\ \hline
1\,\mathfrak{zz} - 64
\end{array}$$

SI iisdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter $1\,\mathfrak{zz}$. & 74. Diuisis ergo 74. per 1. fiet $1\,\mathfrak{zz}$. 74. & radix zensizensica $\sqrt{\mathfrak{zz}}$ 74. numerus quæsitus. Eius enim quadratus $\sqrt{\mathfrak{zz}}$ 5476. auctus octonario est $\sqrt{\mathfrak{zz}}\ 5476 + 8$. & mulctatus octonario, $\sqrt{\mathfrak{zz}}\ 5476 - 8$. qui duo numeri æquiualent his duobus $\sqrt{\mathfrak{z}}\ 74 + 8$. & $\sqrt{\mathfrak{z}}\ 74 - 8$. atque hi duo inter se multiplicati producunt 10. vt hîc vides: quippe cùm 64 quadratus posterioris particulæ detractus ex 74. quadrato particulæ prioris relinquat 10.

$$\begin{array}{r}
\sqrt{\mathfrak{z}}\ 74 + 8 \\
\sqrt{\mathfrak{z}}\ 74 - 8 \\ \hline
10
\end{array}$$

SCHOLIVM.

ATQVE hæc dicta sint de ænigmatibus, quæ per simplicem æquationem enodantur. Ad similitudinem enim horum studiosus Lector alia, quotquot voluerit, formare poterit. Quare nunc alia ænigmata proponemus, in quibus soluendis occurrunt æquationes composita.

ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM ABstractorum per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus aliis duobus æqualis est, occurrit: quæ quidem composita æquatio dicitur.

CAP. XXX.

I. 1 *Datum numerum in duas partes distribuere, vt earum cubi datam summam, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero procreati, efficiant.*

HOc ænigma, quod fuit 141. præcedentis cap. soluemus hic aliter, nimirum per æquationem compositam, in qua vnus numerus Cossicus duobus Cossicis numeris reperitur æqualis: & in qua eruenda est radix ex numero composito, vel diminuto, vt in cap. 12. traditum est. Id quod etiam fiet in aliis huius cap. ænigmatibus. Sit ergo datus numerus 10. diuidendus in duas partes, quarum cubi faciant summam 370. quæ maior est, quàm 250. quarta pars cubi ex dato numeri 10. procreati. Ponatur prima pars 1 ℞. & secunda 10 — 1 ℞. Cubi harum partium sunt 1 ce. & 1000 — 300 ℞ + 30 ʒ — 1 ce. quorum summa 1000 — 300 ℞ + 30 ʒ. (Nam + 1 ce. & — 1 ce. se mutuò interimunt) æqualis esse debet 370. Additis 300 ℞ vtrobique, fiet æquatio inter 1000 + 30 ʒ. & 300 ℞ + 370. Et ablatis 370. vtrinque, inter 630 + 30 ʒ. & 300 ℞. Et rursum ablatis 630. vtrinque, inter 30 ʒ. & 300 ℞ — 630. Diuisis autem singulis hisce numeris per numerum maioris characteris Cossici, nimirum per 30. vt circa finem cap. 10. præcepimus, erit æquatio inter 1 ʒ. & 10 ℞ — 21. quam sic resolues ex doctrina cap. 12. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 21. propter signum — remanet numerus 4. cuius radix quadrata 2. addita ad 5. semissem numeri radicum dabit maiorem radicem 7. Et eadem radix 2. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Huiusmodi enim numeri, in quibus numerus absolutus affectus est signo —. duplicem radicem habent, vt cap. 12. tradidimus. Partes ergo numeri dati 10. sunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. summam datam 370. efficiunt. vt etiam in ænigmate 141. præcedentis cap. inuentum est.

SI eodem numero dato, cuborum summa proponatur 400. inueniemus æquationem vltimam inter 1 ʒ. & 10 ℞ — 20. quam ita resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix quadrata √ʒ 5. addita ad 5. semissem numeri radicum dabit maiorem radicem √ʒ 5 + 5. Et eadem radix √ʒ 5. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 5 — √ʒ 5. vt in eodem ænigmate 141. antecedentis cap. inuenimus.

QVo pacto autem ænigma hoc sine Algebra soluendum sit, dictum est supra in ænigmate 141. præcedentis cap.

2 *Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summæ minor sit dato numero.* II.

HOc problema cum antecedenti coincidit, vt in ænigmate 142. cap. præcedentis diximus.

3 *Numerum inuenire, qui cum dato numero suum quadratum efficiat.* III.

DATVS numerus sit 156. oporteátque inuenire numerum, qui additus ad 156. conficiat quadratum ipsius numeri inuenti. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. cuius quadratum 1 ʒ. cui æqualis debet esse 1 ℞ + 156. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 156. facióque 156 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{625}{4}$. ad cuius radicem $\frac{25}{2}$. hoc est, ad 12 $\frac{1}{2}$. addo semissem numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficióque pretium 1 ℞. 13. qui est numerus quæsitus. Nam 13. cum 156. facit 169. quadratum numeri 13.

SIT rursus inueniendus numerus, qui cum 50. faciat suum quadratum. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. cuius quadratum 1 ʒ. cui æqualis debet esse 1 ℞ + 50. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 50. facióque 50 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{201}{4}$. ad cuius radicem, hoc est, ad √ʒ $\frac{201}{4}$. addo semissem numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficióque pretium 1 ℞. √ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. numerum scilicet quæsitum. Huius enim quadratus est √ʒ $\frac{804}{16}$ + $\frac{202}{4}$. vt in hac formula apparet, hoc est, √ʒ $\frac{201}{4}$ + 50 $\frac{1}{2}$. quantum videlicet fit ex numero inuento √ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. vna cum dato numero 50. Conflatur enim etiam numerus √ʒ $\frac{201}{4}$ + 50 $\frac{1}{2}$. Apposui formulam multiplicationis numeri inuenti √ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. in se quadratè, vt videas, quo pacto quadratus sit productus.

	√ʒ $\frac{201}{4}$	+ $\frac{1}{2}$		
	√ʒ $\frac{201}{4}$	+ $\frac{1}{2}$		
		+	√ʒ $\frac{201}{16}$	+ $\frac{1}{4}$
$\frac{201}{4}$	+	√ʒ $\frac{201}{16}$		
$\frac{201}{4}$	+	√ʒ $\frac{804}{16}$	+ $\frac{1}{4}$	

IV. 4 *Numerum inuenire, cuius quadratus cum dato numero conficiat ipsius numeri inuenti zensizensum, siue quadrati quadratum.*

Sit datus numerus 83232. oporteátque inuenire numerum, qui cum 83232. efficiat quadrati quadratum ipsius. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius quadratus 1 ʒ. & quadrati quadratus est 1 ʒʒ. æqualis 1 ʒ + 83232. Semissis numeri zensorum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo numerum 83232. efficióque 83232 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{332929}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{577}{2}$. addo semissem numeri zensorum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficióque $\frac{578}{2}$. hoc est, 289. quadratum, cuius radix 17. est numerus quæsitus, vt prope finem cap. 12. declaratum est. Nam characteres Cossici ʒʒ. ʒ. N. non sunt collaterales, sed inter quosuis duos medius est vnus: propterea primo loco inuenitur valor vnius quadrati, deinde radix eruitur, quæ offert numerum, quem inquirimus. Atque ita numeri inuenti 17. quadratus 289. cum dato numero 83232. efficit quadrati quadratum 83521. numeri inuenti 17.

V. 5 *Numerum inuenire, cuius cubus cum dato numero conficiat sui cubi quadratum, vel sui quadrati cubum.*

Sit datus numerus 7526792. inueniendúsque alius, cuius cubus cum dato numero efficiat inuenti numeri cubi quadratum, vel (quod idem est) quadrati cubum. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius cubus 1 ce. & zensicubus 1 ʒce. æqualis 1 ce + 7526792. atque ex hoc numero composito eruenda est radix zensicubica, hoc modo. Semissis numeri medij characteris ce, nimirum $\frac{1}{2}$. facit quadratum $\frac{1}{4}$. Addito numero 7526792. fit numerus 7526792 $\frac{1}{4}$. vel 30107169. ad cuius radicem quadratam $\frac{5457}{2}$. addo semissem prædictam $\frac{1}{2}$ numeri medij characteris ce. facióque $\frac{5488}{2}$. id est, 2744. radicem quadratam huius numeri 1 ce + 7526792. propter characterem ʒ. qui in maximo charactere Cossico reperitur. Huius denique radicis quadratæ 2744. radix cubica 14. propter alium characterem ce, in maximo charactere positum, dabit numerum quæsitum, vt cap. 12. prope finem docuimus. Huius enim cubus 2744. additus dato numero 7526792. conflat suum zensicubum, vel quadrati cubum 7529536.

VI. 6 *Inuenire duos numeros conflantes datum numerum, ita vt ex ducta vnius in alterum gignatur alius quiuis datus numerus.*

Data

Data summa sit 25. & productus numerus 84. Ponatur vnus numerus 1 ℞. ideoque alter 25 — 1 ℞. qui simul additi faciunt 25. Ex vno vero in alterum fit numerus 25 ℞ — 1 ʒ. æqualis 84. Addito 1 ʒ. vtrobique erit æqualitas inter 25 ℞. & 1 ʒ + 84. Ablatisque 84. vtrinque, inter 25 ℞ — 84. & 1 ʒ. atque ex numero 25 ℞ — 84. elicienda est radix zensica, hac ratione. Semissis numeri radicum $\frac{25}{2}$. facit quadratum $\frac{625}{4}$. ex quo dempto numero 84. hoc est, $\frac{336}{4}$. propter signum —. remanet numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$ addo prædictam semissem numeri radicum, videlicet $\frac{25}{2}$. efficioque $\frac{42}{2}$. hoc est 21. vnum ex numeris quæsitis. alter ergo erit 4. qui etiam inuenietur, si vltima radix inuenta $\frac{17}{2}$. detrahatur ex prædicta semisse numeri radicum, nimirum ex $\frac{25}{2}$. Nam numerus 25 ℞ — 84. duplicem radicem habet, propter signum —. quo absolutus numerus 84. afficitur. Iam duo numeri 21. & 4. inuenti faciunt summam datam 25. & ex vno in alterum procreatur datus numerus 84.

7 *Numerum inuenire, cuius zensizensus cum dato numero efficiat numerum in data proportione ad quadratum numeri inuenti.* VII.

Datvs numerus sit 1183. inueniendusque sit alius numerus, cuius quadrati quadratus cum 1183. faciat numerum, qui ad quadratum inuenti numeri proportionem habeat, quam 176. ad 1. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius zensizensus 1 ʒʒ. & quadratus, siue zensus 1 ʒ. Erit ergo æquatio inter 1 ʒʒ + 1183. & 176 ʒ. quandoquidem vnus zensizensus cum 1183. debet ad 1 ʒ. proportionem habere, quam 176. ad 1. hoc est, æqualis esse 176 ʒ. Ablatis igitur 1183. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒʒ. & 176 ʒ — 1183. Ex numero hoc 176 ʒ — 1183. sic radicem zensizensicam eruemus. Semissis numeri medij characteris ʒ. est 88. ex cuius quadrato 7744. si tollantur 1183. propter signum —. remanent 6561. ad cuius radicem quadratam 81. si addatur prædicta semissis 88. fiet quadratus 169. cuius radix 13. dabit numerum quæsitum. Nam eius zensizensus 28561. cũ dato numero 1183. facit numerum 29744. qui ad 169. quadratum inuenti numeri proportionem habet, quam 176. ad 1.

Sed quoniam numerus 176 ʒ — 1183. duplicem habet radicem zensizensicam, maiorem scilicet & minorem, vt cap. 12. traditum est, maior est inuenta 13. quæ problemati satisfacit. Minor autem habebitur, si 81. radicem quadratam residui 6561. subtrahemus ex prædicta semisse 88. Reliqui enim numeri 7. radix quadrata, nimirum √ʒ 7. erit minor radix zensizensica, numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus est 7. & zensizensus 49. qui cum 1183. facit numerum 1232. qui ad quadratum 7. proportionem habet eandem, quam 176. ad 1.

Mm 2

VIII. 8 *Numerum inuenire, cuius Zenſicubus cum dato numero faciat numerum, qui ad ſuum cubum proportionem habeat datam.*

SIT datus numerus 106866411. inueniendusque ſit alius numerus, cuius zenſicubus cum dato numero faciat numerum, cuius proportio ad cubum inuenti numeri proportionem habeat eandem, quam 100000. ad 1. Ponatur quæſitus numerus 1 ℞. cuius cubus 1 ce. & zenſicubus 1 ʒ ce. Erit ergo æqualitas inter 1 ʒ ce + 106866411. & 100000 ce. quandoquidem 1 ʒ ce + 106866411. ad 1 ce, proportionem habere debet eandem, quam 100000. ad 1. Ablatis igitur 106866411. vtrobique remanebit æqualitas inter 1 ʒ ce. & 100000 ce — 106866411 atque adeo ex 100000. ce — 106866411. eruenda erit radix zenſicubica hoc modo. Semiſſis numeri cuborum eſt 50000. à cuius quadrato 2500000000. ſi dematur numerus propoſitus, propter ſignum —, remanebit numerus 1431335889. ad cuius radicem quadratam 37833. ſi addatur ſemiſſis prædicta 50000. habebitur radix quadrata 87833. Cuius radix cubica √ce 87833 dabit numerum quæſitum iuxta doctrinam cap. 12. Nam eius cubus eſt 87833. & zenſicubus 7714635889. qui cum dato numero 106866411. facit numerum 8783300000. qui ad cubum 87833 proportionem habet eandem, quam 100000. ad 1.

Et quoniam numerus 100000 ce — 106866411. duplicem habet radicem zenſicubicam, quarum maior inuenta eſt √ce 87833. ſatisfaciens ænigmati propoſito. Minor ita reperietur. Vltima radix quadrata inuenta 37833. Ex prædicta ſemiſſe 50000. numeri cuborum detrahatur. Reſidui namque 12167. radix cubica 23. erit minor radix ſatisfaciens quoque ænigmati propoſito. Nam eius cubus eſt 12167. & zenſicubus 148035889. qui cum dato numero 106866411. facit numerum 1216700000. qui ad cubum 12167. eandem proportionem habet, quam 100000. ad 1.

IX. 9 *Duos numeros in dato exceſſu inuenire, ita vt ex ductu vnius in alterum gignatur numerus datus quicunque.*

SIT datus exceſſus 6. & numerus datus 475. Ponatur minor numerus 1 ℞. & maior idcirco 1 ℞ + 6. Ex illo in hunc fit numerus 1 ʒ + 6 ℞. æqualis 475. Ablatis ergo 6 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒ. & 475 — 6 ℞. Radicem ergo ex hoc numero ita eruemus. Semiſſis numeri radicum 3. facit quadratum 9. ad quod adijcio numerum 475. qui intelligitur affectus ſigno +. Et ex conflato numero 484. capio radicem quadratam 22. Ex qua demo prædictam ſemiſſem 3. numeri radicum, propter ſignum —. Reliquus enim numerus 16. erit pretium 1 ℞. Ergo 1 ℞ + 6. valebit 25. Atque

que hi duo numeri 19. & 25. ſunt quæſiti. Habent enim exceſſum datum 6. & ex vno in alterum producitur numerus 475.

SIT rurſus datus exceſſus 6. & datus numerus 500. Iiſdem poſitis, erit productus numerus 1 ʒ + 6 ℞. æqualis 500. Et ablatis 6 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒ. & 500 — 6 ℞. Semiſſis numeri radicum 3. facit quadratum 9 quod additum ad 500. facit 509. à cuius radice quadrata √ʒ 509. ſi dematur prędicta ſemiſſis 3. fiet minor numerus quæſitus √ʒ 509 — 3. Addito dato exceſſu 6. fiet maior √ʒ 509 + 3. Ex minore in maiorem fit numerus 509 — 9. vt in hac formula apparet, id eſt, 500. quia — √ʒ 4581. & + √ʒ 4581. ſe mutuo interimunt. Vel certe, quia vt cap. 23. traditum eſt, ſi 9. quadratum poſterioris particulæ auferatur ex 509. quadrato prioris particulæ, remanet numerus productus 500.

	√ʒ 509	+ 3		
	√ʒ 509	— 3		
		— √ʒ 4581	— 9	
509	+ √ʒ 4581			
509	— 9			

10 *Numerum inuenire, cuius quadrati multiplex quilibet vnà cum eiuſdem numeri quadrato quadrati faciat datum numerum.* X.

SIT inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum vna cum eiuſdem quadrati quadrato efficiat 535086. Ponatur quæſitus numerus 1 ℞. cuius quadratus 1 ʒ. quinquies ſumptus facit 5 ʒ. qui numerus vnà cum eiuſdem numeri 1 ℞. Zenſizenſo, id eſt, cum 1 ʒʒ. æqualis eſſe debet numero 535086. Quoniam igitur æquatio eſt inter 5 ʒ + 1 ʒʒ. & 535086. Ablatis 5 ʒ. vtrinque, remanebit æquatio inter 1 ʒʒ. & 535086 — 5 ʒ. atque ex 535086 — 5 ʒ. elicienda eſt radix Zenſizenſica, hunc in modum. Semiſſis numeri Zenſorum $\frac{5}{2}$ facit quadratum $\frac{25}{4}$. ad quem adiectus numerus datus 535086. facit 535086 $\frac{25}{4}$. hoc eſt, $\frac{2140369}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{1463}{2}$. ſi prædicta ſemiſſis $\frac{5}{2}$. dematur, propter ſignum —. remanebit radix quadrata $\frac{1458}{2}$. hoc eſt, 729. cuius radix quadrata 27. erit radix Zenſizenſica numeri 535086 — 5 ʒ. nimirum numerus, quem inquirimus. Nam eius quadratus 729. quinquies ſumptus facit 3645. qui numerus cum 531441. Zenſizenſo inuenti numeri 27. facit numerum datum 535086.

11 *Numerum inuenire, cuius cubus, cum eiuſdem zenſicubo faciat datum numerum.* XI.

SIT inueniendus numerus, cuius cubus cum eiuſdem Zenſicubo faciat 1291503906. Ponatur quæſitus numerus 1 ℞. cuius cubus 1 ce, & Zenſicubus 1 ʒ ce. Oportet ergo exiſtere æquationem inter 1 ce + 1 ʒ ce. & 1291503906. ablatóque 1 ce vtrinque, inter 1 ʒ ce.

& 1291503906 — ce. Ex quo numero eruenda est radix Zensicubica, hoc modo. Semissis numeri medij Cossici est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. Si addatur datus numerus, fit numerus 1291503906 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{5166015625}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{71875}{2}$. si dematur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. remanebit radix Zensica $\frac{71874}{2}$. id est, 35937. cuius radix cubica 33. erit radix Zensicubica numeri 1291503906 — 1 ce. nimirum numerus, qui quæritur. Nam eius cubus 35937. cum eiusdem Zensicubo 1291467969. facit numerum 1291503906.

XII. 12 *Datum numerum in duas partes diuidere, vt maiore per minorem diuisa, & minore per maiorem, summa Quotientum sit data.*

NVMERVS 100. diuidendus sit in duas partes, vt maiore diuisa per minorem, & minore per maiorem, duo Quotientes faciant summam 2 $\frac{36}{91}$. Ponatur vna pars 1 x. & altera 100 — 1 x. Diuisa hac per illam, fit Quotiens $\frac{100 - 1x}{1x}$. Et illa per hanc diuisa, Quotiens fit $\frac{1x}{100 - 1x}$. quorum Quotientum summa $\frac{10000 - 200x \times 2ʒ}{100x - 1ʒ}$. æqualis esse debet numero 2 $\frac{36}{91}$. siue $\frac{218}{91}$. quę æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad ęquationem inter 21800 x — 218 ʒ. & 910000 — 18200 x + 182 ʒ. Additis autem 218 ʒ vtrinque, fiet æquatio inter 21800 x. & 910000 — 18200 x + 400 ʒ. Et additis 18200 x vtrobique, inter 40000 x. & 910000 + 400 ʒ. Et ablatis 910000. vtrobique, inter 40000 x — 910000. & 400 ʒ. Et diuisis singulis numeris per numerum signo ʒ affectum, id est, per 400. æqualitas erit inter 100 x — 2275. & 1 ʒ. Radix ergo quadrata ita eruetur. Semissis numeri radicum est 50. à cuius quadrato 2500. si detrahantur 2275. propter signum — reliquus fiet numerus 225. ad cuius radicem quadratam 15. si addatur prædicta semissis 50. fiet pretium radicis 65. maior pars. Minor ergo erit 35. quæ etiam habebitur, (quoniam numerus propositus 100 x — 2275. duplicem radicem habet) si radix quadrata 15. proximè inuenta auferatur ex prædicta semisse 50. Itaque partes quæsitæ sunt 65. & 35. Et diuisa illa per hanc, & hac per illam, fiunt Quotientes 1 $\frac{6}{7}$. & $\frac{7}{13}$. quæ summam faciunt 2 $\frac{36}{91}$.

XIII. 13 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius mulctatus numero dato quocunque proportionem datam habeat.*

SIT inueniendus numerus ad quem quadratus ipsius mulctatus numero 264. proportionem habeat decuplam. Ponatur quæsitus numerus 1 x. cuius quadratus 1 ʒ. si prius ab eo subducantur 264. ad 1 x. proportionem habere debeat decuplam, ita vt æquatio sit inter

inter 10 x. & 1 ʒ — 264. Et additis 264. vtrinque, inter 10 x + 264. & 1 ʒ. quæ ita expedietur. Semissis numeri radicum 5. quadratum facit 25. & additis 264. fit numerus 289. ad cuius radicem quadratam 17. si prædicta semissis 5. addatur, fit pretium vnius radicis 22. numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus 484. si amiserit 264. fiet 220. qui numerus decuplus est numeri 22.

14 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius auctus dato numero proportionem habeat datam.* XIIII.

SIT inueniendus numerus, ad quem ipsius quadratus auctus numero 110. proportionem habeat, quam 27. ad 1. Ponatur numerus quæsitus 1 x. cuius quadratus 1 ʒ. si ei addentur 110. ad 1 x proportionem habere debeat eandem, quam 27. ad 1. ita vt æquatio fit inter 1 ʒ + 110. & 27 x. Ablatísque 110. vtrinque, inter 1 ʒ. & 27 x — 110. quam ita resolues. Semissis numeri radicum $\frac{27}{2}$. quadratum facit $\frac{729}{4}$. à quo si auferantur 110. id est, $\frac{440}{4}$. reliquus fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. si addetur prædicta semissis $\frac{27}{2}$. fiet maior radix $\frac{44}{2}$. id est, 22. Et si proximè inuenta radix $\frac{17}{2}$. auferetur à prædicta semisse $\frac{27}{2}$. reliqua fiet minor radix $\frac{10}{2}$. hoc est, 5. Nam hæc æquatio duplicem habet radicem. Atque ita vterque numerus 22. & 5. problemati proposito satisfaciet. Quadratus enim 484. numeri 22. auctus numero 110. fit numerus 594. qui ad 22. eandem proportionem habet, quam 27. ad 1. Item quadratus 25. numeri 5. auctus numero 110. fit 135. qui numerus ad 5. proportionem eandem habet, quam 27. ad 1.

15 *Duos numeros inuenire, quorum quadrati datam summam conficiant: & ijdem numeri inter se multiplicati producant numerum, ad quem quadratorum summa habeat proportionem datam.* XV.

SVMMA quadratorum data sit 180. quę ad productum numerum proportionem habeat duplam sesquialteram: atque idcirco cum 180. ad 72. habeant proportionem duplam sesquialteram, productus numerus ex vno in alterum sit 72. qui numerus 72. habetur, si 180. diuidantur per 2 $\frac{1}{2}$. denominatorem datæ proportionis. Ponatur vnus numerus quæsitus 1 x. & alter $\frac{72}{1x}$. vt ex vno in alterum fiant 72. qui numerus $\frac{72}{1x}$. habetur per diuisionem 72. per 1 x. quemadmodum si inueniendus sit numerus, qui ductus in 8. faciat 48. si diuidantur 48. per 8. inuenitur numerus 6. qui ductus in 8. facit 48. Iam quadrati positorum numerorum 1 x. & $\frac{72}{1x}$. sunt 1 ʒ. & $\frac{5184}{1ʒ}$. quorum summa $\frac{1ʒʒ \times 5184}{1ʒ}$. æqualis esse debet 180. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1 ʒʒ + 5184. & 180 ʒ. Ablatísque 5184. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒʒ. & 180 ʒ—5184.cuius radicem ita inuenies.Semiſſis numeri medij,qui gerit characterem ʒ. eſt 90. à cuius quadrato 8100. ſi demantur 5184. fiet reliquus numerus 2916.ad cuius radicem 54.ſi addatur ſemiſſis prædicta 90.fiet ſumma 144. cuius radix quadrata 12. iuxta doctrinam cap.12.erit maior radix. Et ſi proximè inuentam radicem 54. demes ex ſemiſſe prædicta 90.reliquus erit numerus 36.cuius radix 6.dabit minorem radicem,quæ etiam habetur, ſi 72. diuidantur per priorem radicem inuentam 12.Itaque duo quæſiti numeri ſunt 12. & 6. qui inter ſe multiplicati faciunt 72.ad quem numerum ſumma data quadratorum ex ipſis procreatorum,qui ſunt 144.& 36.nimirum 180.proportionem habet duplam ſeſquialteram,quemadmodum propoſitum eſt.

XVI. 16 *Datum numerum in tres numeros continuè proportionales diuidere, ita vt productus ex primo in ſecundum,cum producto ex ſecundo in tertium,vnà cum eo,qui fit ex tertio in primum faciat quemlibet numerum datum.*

SIT datus numerus 76.diuidēdus, ita vt tres producti efficiant 1824.
a 1.ſecundi. Quoniam datis trib. numeris continuè proportionalibus,[a]qui fit ex medio in ſummã omnium,ęqualis eſt eis,qui fiunt ex medio in primũ,& ex medio in tertium, & ex medio in ſe,hoc eſt, ex tertio in primum, [b]cum
b 20. ſeptimi. hic æqualis ſit ei, qui fit ex medio in ſe: ſi datus numerus producendus 1824. per datum numerum diuidendum 76. diuidatur, erit Quotiens 24. medius numerus proportionalis: quippe cum Quotiens 24. ductus in diuiſorem 76. id eſt, in ſummam omnium trium, gignat numerum diuiſum 1824. qui nimirum æqualis ponitur tribus productis, quos diximus. Dempto ergo hoc medio 24. ex 76. ſumma omnium, reliqua fiet ſumma primi & tertij, 52. Ponatur ergo primus 1 ℞. erítque propterea tertius 52—1 ℞. ita vt tres numeri proportionales ſint 1 ℞. 24. 52
c 20. ſeptimi. —1 ℞. [c] Igitur qui fit ex 1 ℞ in 52—1 ℞, id eſt, 52 ℞—1 ʒ. æqualis erit numero 576. qui ex medio 24. fit in ſe. Addito ergo 1 ʒ vtrinque, erit æquatio inter 52 ℞. & 1 ʒ + 576. Ablatíſque 576. vtrobique, inter 52 ℞— 576. & 1 ʒ. quæ æquatio ita reſoluetur. Semiſſis numeri radicum eſt 26. à cuius quadrato 676.ſi demantur 576. remanet numerus 100. ad cuius radicem quadratam 10. ſi addatur prædicta ſemiſſis 26. fiet pretium radicis 36.primus numerus.tertius autem erit 16. nimirum 52—1 ℞. ita vt tres numeri proportionales ſint, 36. 24. 16. facientes ſummam 76. & tres producti ex primo in ſecundum, & ex ſecundo in tertium, & ex tertio in primum efficiunt 1824.

Quoniam verò numerus 52 ℞ — 576. duplicem habet radicem, reperietur minor, ſi radicem quadratam inuentam 10. ex prædicta ſemiſſe

ſemiſſe 26.auferatur.Relinquetur enim pretium vnius radicis 16.primus numerus,tertius autem erit 36.nimirum 52 — 1 ℞.Eruntque rurſum tres numeri proportionales 16. 24.36.qui prius,inuerſo tamen ordine.

17 *Datis duobus numeris ſiue æqualibus,ſiue inæqualibus,alium inuenire,qui vtrilibet eorum additus faciat ſummam,quæ ducta in additum,hoc eſt,in inuentum,producat quadratum alterius numeri.* XVII.

Hoc problema ſoluimus in lineis,in ſcholio propoſ.36. lib. 3. Euclidis.

SINT dati duo numeri 10.& 12.inueniendúſque ſit alius, qui additus primum ad 10.faciat numerum,qui ductus in additum,procreet quadratum alterius 12.nimirum 144.Ponatur numerus quæſitus 1 ℞.Addito numero 10. fit numerus 1 ℞ + 10.qui ductus in 1 ℞.facit 1 ʒ + 10 ℞.qui numerus æqualis eſſe debet 144.Ablatis 10 ℞ vtrobique,erit æquatio inter 1 ʒ. & 144 — 10 ℞.quam ita reſolues. Semiſſis numeri radicum 5. facit quadratum 25. & additis 144. fit numerus 169. à cuius radice quadrata 13. ſi prædicta ſemiſſis 5.auferatur,propter ſignum —.remanebit pretium radicis 8.numerus quæſitus.Hic enim additus ad 10. facit 18. qui numerus ductus in 8.facit 144. quadratum alterius numeri dati 12.

DEINDE inueniendus ſit numerus,qui additus ad 12.faciat numerum, qui ductus in additum producat 100.quadratum alterius numeri 10.Ponatur quæſitus numerus 1 ℞.qui cum 12. facit 1 ℞ + 12. Hic ductus in 1 ℞. facit numerum 1 ʒ + 12 ℞.æqualem 100. Ablatis 12 ℞.vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒ.& 100 — 12 ℞.quam ita reſolues. Semiſſis numeri radicum 6.facit quadratum 36.additíſque 100.fit numerus 136. à cuius radice quadrata √ʒ 136.ſi detrahes ſemiſſem prędictam 6. relinquetur pretium radicis, √ʒ 136 — 6.numerus quæſitus.Hic enim additus ad 12.facit √ʒ 136 + 6. qui numerus ductus in inuentum √ʒ 136 — 6. producit numerum 100.quæ quidem multiplicatio perficietur,vt cap. 23.ſcripſimus, ſi quadratum poſterioris particulæ 6. nimirum 36. auferatur ex 136. quadrato prioris particulæ.

SINT denique duo numeri æquales 8. & 8. ponaturque inuentus 1 ℞. Ex 1 ℞. & 8. fit numerus 1 ℞ + 8. qui ductus in 1 ℞ facit 1 ʒ + 8 ℞. numerum æqualem 64. quadrato numeri 8. Ablatis 8. ℞ vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒ. & 64 — 8 ℞. Semiſſis numeri radicum eſt 4. ad cuius quadratum 16. additis 64. fit numerus 80. à cuius radice quadrata √ʒ 80. ſi dematur prædicta ſemiſſis 4. remanet numerus √ʒ 80 — 4. qui quæritur. Hic additus ad 8.facit ſummam √ʒ 80 + 4. quæ ducta in inuentum, vel additum √ʒ 80 — 4. facit 64. quadratum numeri 8. vt hæc ſequens formula docet.

$$\begin{array}{r} \sqrt{ℨ}\ 80 - 4 \\ \sqrt{ℨ}\ 80 + 4 \\ \hline 64 \end{array}$$

Nam 16. quadratus posterioris particulæ 4. ablatus ex 80. quadrato prioris particulæ √ℨ 80. relinquit 64.

XVIII. 18 *Numerum inuenire medium inter numerum quotlibet vnitatibus maiorem, & alium numerum quotuis vnitatibus minorem, ita vt extremi duo inter se multiplicati faciant datum quemcunque numerum.*

Sit inueniendus numerus medius inter numerum, qui ipsum nouenario superet, & alium numerum, quem ipse ternario superet; ita vt extremi inter se multiplicati faciant 133. Ponatur quæsitus numerus medius 1 ℞. inter 1 ℞ + 9. & 1 ℞ — 3. Ita enim à priore superatur nouenario, & posteriorem ternario superat. Hi duo extremi inter se multiplicati faciunt numerum 1 ℨ + 6 ℞ — 27. æqualem 133. Additis 27. vtrobique, fiet æqualitas inter 1 ℨ + 6 ℞. & 160. Ablatisque 6 ℞. vtrinque, inter 1 ℨ. & 160 — 6 ℞. quæ ita absoluetur. Semissis numeri radicum est 3. ad cuius quadratum 9. additis 160. fit numerus 169. à cuius radice quadrata 13. si auferatur semissis prædicta 3. relinquetur pretium 1 ℞. 10. numerus scilicet medius quæsitus. eruntque extremi 19. & 7. atque inter se multiplicati faciunt 133.

Sit rursum inquirendus numerus medius inter duos, vt prius, ita vt extremi inter se multiplicati faciant 40. Inuenientur rursus extremi 1 ℞ + 9. & 1 ℞ — 3. qui inter se multiplicati faciunt numerum 1 ℨ + 6 ℞ — 27. æqualem 40. Additis ergo 27. vtrobique, erit æquatio inter 1 ℨ + 6 ℞. & 67. Ablatisq; 6 ℞ vtrinque, inter 1 ℨ. & 67 — 6 ℞. Semissis numeri radicum est 3. ad cuius quadratum 9. additis 67. fit numerus 76. à cuius radice quadrata √ℨ 76. si dematur prædicta semissis 3. propter signum —. relinquetur pretium radicis √ℨ 76 — 3. numerus medius, qui quęritur. à quo si detrahantur 3. fiet minor extremus √ℨ 76 — 6. & si addãtur 9. fiet maior extremus √ℨ 76 + 6. qui extremi inter se multiplicati faciunt 76 — 36. hoc est, 40. Nam + √ℨ 2736. & — √ℨ 2736. se mutuò interimunt, vt in apposita formula apparet. Vel etiam, quia 36. quadratum posterioris particulæ 6. demptum ex 76. quadrato prioris particulę relinquit 40. vt cap. 23. docuimus.

$$\begin{array}{r} \sqrt{ℨ}\ 76 - 6 \\ \sqrt{ℨ}\ 76 + 6 \\ \hline + \sqrt{ℨ}\ 2736 - 36 \\ 76 - \sqrt{ℨ}\ 2736 \qquad \\ \hline 76 \text{ ——— } 36 \end{array}$$

Hoc problema soluimus etiam cap. præcedenti ænigmate 146. per simplicem æquationem.

19 Nu-

19 *Numerum inuenire, qui duos alios excedat datis numeris, ita vt duo illi inter se multiplicati producant numerum, qui inuentum dato numero excedat.* XIX.

Sit quærendus numerus, qui duos alios superet numeris 8. & 6. ita vt illi duo inter se multiplicati procreent numerum quaternario maiorem numero inuento. Ponatur numerus, qui quæritur 1 ℞. Duo ergo illi minores erunt 1 ℞ — 8. & 1 ℞ — 6. qui inter se multiplicati faciunt numerum 1 ℨ — 14 ℞ + 48. æqualem 1 ℞ + 4. vt nimirum positum 1 ℞. superet quaternario. Ablatis 4. vtrinque, erit æquatio inter 1 ℨ — 14 ℞ + 44. & 1 ℞. Et additis 14 ℞ vtrobique, inter 1 ℨ + 44. & 15 ℞. Et ablatis 44 vtrinque, inter 1 ℨ. & 15 ℞ — 44. Semissis numeri radicum est $\frac{15}{2}$. à cuius quadrato $\frac{225}{4}$. ablatis 44. fiet $\frac{175}{4}$. propter signum — remanet numerus $\frac{49}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{2}$. si prædicta semissis $\frac{15}{2}$. addatur, fiet pretium radicis $\frac{22}{2}$. hoc est, 11. numerus quæsitus. Ergo duo numeri minores erunt 3. & 5. qui inter se multiplicati faciunt 15. hoc est, 11 + 4.

Qvia verò numerus hic 15 ℞ — 44. duplicem radicem habet, si radix quadrata vltimo loco inuenta $\frac{7}{2}$. dematur ex prædicta semisse $\frac{15}{2}$. reliqua fiet minor radix $\frac{8}{2}$. hoc est, 4. numerus quæsitus. à quo si auferes 8. & 6. erunt duo alij numeri minores — 4. & — 2. qui inter se multiplicati faciunt + 8. qui numerus inuentum numerum 4. superat quaternario. Vbi vides, numeros etiam absurdos, siue fictos, hoc est, minores nihilo, satisfacere ænigmati proposito. quod alicui fortassis mirum videri possit.

S C H O L I V M.

In ænigmatibus huic similibus accidit nonnunquam, æquationem inueniri simplicem: tunc nimirum, quando in numero producto ex multiplicatione duorum numerorum Cossicorum reperitur numerus absolutus æqualis excessui dato; quia tunc aufertur ille numerus absolutus, remanétque æquatio inter ℨ. & ℞. quod studiosum Lectorem monitum volo, ne turbetur, cùm viderit aliquando occurrere æquationem duplicem, & aliquando simplicem, in variis exemplis eiusdem ænigmatis. Sit enim quærendus numerus, qui alios duos superet numeris 8. & 6. ita vt duo illi inter se multiplicati procre[illegible] numerum, qui inuentum numerum excedat numero 48. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Duo ergo illi minores erunt 1 ℞ — 8. & 1 ℞ — 6. qui inter se multiplicati faciunt numerum 1 ℨ — 14 ℞ + 48. æqualem 1 ℞ + 48. Ablatis 48. vtrinque, erit æqualitas inter 1 ℨ — 14 ℞. & 1. ℞. additísque 14 ℞. vtrobique, inter 1 ℨ. & 15 ℞. quæ æquatio simplex est. Diuisis ergo 15. per 1. fiet 1 ℞ 15. (quòd numeri Coßici ℨ. & ℞. collaterales sint) ni-

mirum numerus quæſitus. Igitur alij duo minores erunt 7. & 9. qui inter ſe multiplicati producunt numerum 63. qui inuentum 15. excedit numero 48.

XX. 20 *Numerum inuenire, quem alij duo excedant datis numeris, ita vt duo illi inter ſe multiplicati procreent numerum, qui datum multiplicem quadrati ex inuento numero geniti, ſuperet dato numero.*

SIT inueniendus numerus, quem alij duo ſuperent numeris 7. & 19. qui inter ſe multiplicati excedant triplum quadrati ex inuento numero procreati, numero 73. Ponatur numerus quæſitus 1 ℞. Ergo duo alij maiores erunt 1 ℞ + 7. & 1 ℞ + 19. Hi inter ſe multiplicati faciunt numerum 1 ȝ + 26 ℞ + 133. æqualem 3 ȝ + 73. Nam ita ſuperabit triplum quadrati ex 1 ℞. deſcripti numero 73. Ablatis 73. vtrinque, erit æquatio inter 1 ȝ + 26 ℞ + 60. & 3 ȝ. Ablatóque 1 ȝ vtrobique, inter 26 ℞ + 60. & 2 ȝ. Diuiſiſque omnibus numeris per numerum zenſorum, id eſt, per 2. erit æquatio inter 13 ℞ + 30. & 1 ȝ. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{13}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{169}{4}$. additis 30. ſiue $\frac{120}{4}$. fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. ſi addatur ſemiſſis prædicta $\frac{13}{2}$. fiet 1 ℞ $\frac{30}{2}$. id eſt, 15. numerus, qui quæritur. Ergo duo numeri maiores erunt 22. & 34. qui inter ſe multiplicati faciunt numerum 748. qui triplum quadrati 225. ex inuento numero 15. procreati, nimirum numerum 675. ſuperat numero 73.

XXI. 21 *Numerum inuenire, cuius multiplex quiuis cum eiuſdem numeri quadrato faciat datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, cuius quadruplum cum eiuſdem quadrato faciat 400. Ponatur numerus, quem quærimus, 1 ℞. Huius quadruplum 4 ℞. cum eiuſdem quadrato 1 ȝ. facit numerum 1 ȝ + 4 ℞. æqualem 400. Subtractis 4 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 1 ȝ. & 400 — 4 ℞. Semiſſis numeri radicum eſt 2. ad cuius quadratum 4. additis 400. fit numerus 404. à cuius radice quadrata √ȝ 404. ſi prædicta ſemiſſis 2. dematur, fiet 1 ℞. √ȝ 404 — 2. numerus quæſitus. Eius quadruplum √ȝ 6464 — 8. vnà cum eius quadrato, quod eſt 404 — √ȝ 6464 + 4. (vt in appoſita formula liquet)

√ȝ 404 — 2	
√ȝ 404 — 2	
— √ȝ 1616 + 4	404 — √ȝ 6464 + 4
404 — √ȝ 1616	+ √ȝ 6464 — 8
404 — 6464 + 4	404 — 4

facit

facit numerum 404 — 4. hoc eſt, 400. quia — √ȝ 6464. & + 6464. ſe mutuò interimunt, vt altera formula monſtrat.

ITEM ſit inquirendus numerus, cuius quadruplum cum eiuſdem quadrato faciat 780. Poſita 1 ℞ erit eius quadruplum 4 ℞ vnà cum eius quadrato 1 ȝ numerus 1 ȝ + 4 ℞. æqualis 780. Subtractiſque 4 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 1 ȝ. & 780 — 4 ℞. Semiſſis numeri radicum eſt 2. ad cuius quadratum 4. additis 780. fit numerus 784. à cuius radice quadrata 28. ſi tollatur prædicta ſemiſſis 2. fiet 1 ℞. 26. numerus, quem inquirimus. Eius quadruplum 104. vnà cum eiuſdem quadrato 676. facit 780.

22 *Dato quouis numero, duos alios inuenire, qui inter ſe multiplicati producant datum ipſum numerum, & quadrati omnium trium faciant datam ſummam quamcunque.* XXII.

SIT datus numerus 8. inueniendíque ſint alij duo, qui inter ſe multiplicati faciant ipſum numerum 8. & quadrati omnium trium faciant 101 $\frac{7}{9}$. oportet quadratos duorum numerorum inuentorum facere 37 $\frac{7}{9}$. vt patet, ſi dati numeri 8. quadratus 64. detrahatur ex 101 $\frac{7}{9}$. ſumma omnium trium. Ponatur vnus numerorum, qui quæruntur 1 ℞. Et quia alter in hunc ductus debet facere 8. ſi 8. diuidantur per 1 ℞, erit Quotiens 8/1℞. alter numerus. Nam ductus in diuiſorem 1 ℞. producet 8. Quadrati horum duorum numerorum 1 ℞ & 8/1℞. ſunt 1 ȝ. & 64/1ȝ. qui ſummam faciunt (1ȝȝ + 64)/1ȝ. æqualem 37 $\frac{7}{9}$. ſiue $\frac{340}{9}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 9 ȝȝ + 576. & 340 ȝ. Ablatiſque 576. vtrobique, erit æquatio inter 9 ȝȝ. & 340 ȝ — 576. Diuiſis omnibus numeris per numerum 9. charactere maximo ȝȝ. inſignitum, fiet æquatio inter 1 ȝȝ. & $\frac{340}{9}$ ȝ — 64. Semiſſis numeri Zenſorum eſt $\frac{340}{18}$. à cuius quadrato $\frac{115600}{324}$. hoc eſt, à 356 $\frac{256}{324}$. Si demantur 64. remanent 292 $\frac{256}{324}$. hoc eſt, $\frac{94864}{324}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{308}{18}$. ſi addatur prædicta ſemiſſis Zenſorum $\frac{340}{18}$. fiet 1 ȝ $\frac{648}{18}$. (quia inter Coſſicos numeros binos medij ſunt ſinguli) hoc eſt, 36. cuius radix quadrata 6. erit vnus numerorum, quem poſuimus 1 ℞. ac proinde alter numerus, quem poſuimus 8/1℞. hoc eſt, 8. diuiſa per 1 ℞ nimirum per 6. erit 1 $\frac{1}{3}$. Qui etiam hoc modo reperietur. Quoniam numerus $\frac{340}{9}$ ȝ — 64. duplicem habet radicem, ſi radix quadrata $\frac{308}{18}$. vltimo loco inuenta tollatur ex prædicta ſemiſſe $\frac{340}{18}$. reliquus erit alter Zenſus $\frac{32}{18}$. ſiue $\frac{16}{9}$. cuius radix quadrata $\frac{4}{3}$. ſiue 1 $\frac{1}{3}$. offeret alterum numerum. Itaque duo numeri quæſiti ſunt 6. & 1 $\frac{1}{3}$. qui inter ſe multiplicati faciunt 8. & eorum quadrati 36. & $\frac{16}{9}$. ſiue 1 $\frac{7}{9}$. faciunt 37 $\frac{7}{9}$. ac proinde quadrati omnium trium numerorum 8. 6. 1 $\frac{1}{3}$. faciunt ſummam 101 $\frac{7}{9}$.

XXIII. 23 *Duos numeros inuenire datam efficientes ſummam, & qui inter ſe multiplicati producant datum numerum, qui maior non ſit quadrato ex ſemiſſe datæ ſummæ deſcripto.*

VEL

Datum numerum in duos diſtribuere, vt ex vno in alterum gignatur datus quicunque numerus, qui maior non ſit quadrato ſemiſſis dati numeri.

QVÆRENDI ſint duo numeri conficientes ſummam 100. Vel (quod idem eſt.) Datus numerus 100. ſecandus ſit in duos, qui inter ſe multiplicati faciant 10. Ponatur vnus numerus 1 ℞. ideoque alter 100 — 1 ℞. Hi inter ſe multiplicati faciunt numerum 100 ℞ — 1 ʒ. æqualem 10. Addito 1 ʒ. vtrinque, erit æqualitas inter 100 ℞. & 10 + 1 ʒ. Ablatíſque 10. vtrobique, inter 100 ℞ — 10. & 1 ʒ. Semiſſis numeri radicum eſt 50. à cuius quadrato 2500. ablatis 10 remanet numerus 2490. ad cuius radicem quadratam √ʒ 2490. ſi addatur prædicta ſemiſſis 50. fiet 1 ℞. √ʒ 2490 + 50. vnus numerorum, quem poſuimus 1 ℞. Alter ergo erit 100 — √ʒ 2490 + 50. hoc eſt, 100. demptis √ʒ 2490 + 50. qui numerus eſt 50 — √ʒ 2490. Nam ablatis √ʒ 2490 + 50. ex √ʒ 0 + 100. remanent — √ʒ 2490 + 50. hoc eſt, 50 — √ʒ 2490. vt hæc formula indicat.

√ʒ 0 + 100
√ʒ 2490 + 50
———————
— √ʒ 2490 + 50

Itaque duo numeri quæſiti ſunt √ʒ 2490 + 50. & 50 — √ʒ 2490. qui faciunt ſummam 100. quippe cum + √ʒ 2490. & — √ʒ 2490. ſe mutuò deſtruant. Et ex vno in alterum, hoc eſt, ex 50 + √ʒ 2490. in 50 — √ʒ 2490. gignitur numerus 10. vt hæc formula indicat. quæ multiplicatio fit, ſi quadratum 2490. poſterioris particulæ dematur ex 2500. quadrato particulæ prioris, vt cap. 23. dictum eſt.

50 + √ʒ 2490
50 — √ʒ 2490
———————
10

QVONIAM verò æquatio inuenta duplicem habet radicem, inueniemus eoſdem numeros per alteram radicem minorem. Si namque radix quadrata √ʒ 2490 vltimo loco inuenta dematur ex prædicta ſemiſſe 50. fiet 1 ℞. 50 — √ʒ 2490. vnus videlicet numerorum, quos quærimus. alter erit 50 + √ʒ 2490. qui nimirum remanet, ſi numerus 50 + √ʒ 2490. detrahatur ex 100. vt in hac formula vides. Atque ita inuenti ſunt iidem numeri 50 — √ʒ 2490. & 50 + √ʒ 2490. ordine tamen inuerſo.

100 + √ʒ 0
50 — √ʒ 2490
———————
50 + √ʒ 2490

DEBET autem numerus productus datus non maior eſſe quadrato, qui ex ſemiſſe datæ ſummæ, vel dati numeri gignitur. quia quadratus

dratus ſemiſſis maior eſt, numero, qui ex partibus inæqualibus producitur a cum hic vna cum quadrato intermediæ ſectionis æqualis ſit illi quadrato. Vnde numerus 12. diuidi non poteſt in duas partes, vt ex earum multiplicatione producatur numerus 40. Id quod pulchrè nos docet æquatio. Poſita enim vna parte 1 ℞. & altera 12 — ℞. fiet æquatio inter 1 ʒ. & 12 ℞ — 40. Et quia ex 36. quadrato ſemiſſis numeri radicum auferri nequit numerus abſolutus 40. pronunciabis, quæſtionem eſſe impoſſibilem.

a ſchol. 14 noni.

24 *Numerum inuenire, cuius quadratus ab alio numero ſuperetur dato numero, & alium excedat alio numero dato: ita vt extremi inter ſe multiplicati producant datum quemlibet numerum.* XXIIII.

QVÆRENDVS ſit numerus, cuius quadratus ſuperetur quinario ab alio numero, & alium quendam ſuperet binario, & duo extremi inter ſe multiplicati faciant 2538. Ponatur numerus ille 1 ℞. cuius quadratus 1 ʒ. Maior ergo erit 1 ʒ + 5. & minor 1 ʒ — 2. qui duo inter ſe multiplicati gignunt numerum 1 ʒʒ + 3 ʒ — 10. æqualem 2538. Additíſque 10. vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒʒ + 3 ʒ. & 2548. Et ablatis 3 ʒ vtrinque, inter 1 ʒʒ. & 2548 — 3 ʒ. Quærenda ergo eſt radix Zenſizenſica, hoc modo. Semiſſis numeri Zenſorum eſt $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$. additis 2548. ſiue $\frac{10192}{4}$. fit numerus $\frac{10201}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{101}{2}$. ſi dematur prædicta ſemiſſis $\frac{3}{2}$. remanet numerus $\frac{98}{2}$. hoc eſt, 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum quęſitum. Eius enim quadratus 49. eſt inter 54. quinario maiorem, & 47. binario minorem, fitque ex 47. in 54. numerus datus 2538.

25 *Numerum inuenire, à cuius quadrato quadrati ſubtracti quotuis quadrati eiuſdem numeri, relinquant datum numerum quemcunque.* XXV.

QVÆRENDVS ſit numerus, cuius quatuor quadrati ſubtracti ab eiuſdem quadrato quadrati relinquant 2205. Ponatur numerus 1 ℞. cuius quadratus 1 ʒ. & quatuor quadrati 4 ʒ. detracti ex 1 ʒʒ. nimirum ex quadrati quadrato poſiti numeri 1 ℞. relinquunt numerum 1 ʒʒ — 4 ʒ. æqualem 2205. Additíſque 4 ʒ. vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒʒ. & 4 ʒ + 2205. Eruenda ergo eſt radix zenſizenſica hoc modo. Semiſſis numeri zenſorum eſt 2. ad cuius quadratum 4. additis 2205. fit numerus 2209. ad cuius radicem quadratam 47. addita prędicta ſemiſſe 2. fit numerus 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum, qui quæritur. Eius enim quatuor quadrati 196. dempti ex eiuſdem zenſizenſo 2401. relinquunt 2205. numerum datum.

XXVI. 26 *Duos numeros inuenire, qui inter ſe multiplicati gignant numerum datum, & ſumma quadratorum ex eiuſdem numeris procreatorum ſit etiam data.*

Dvo numeri inuenti faciant inter ſe multiplicati 78. & eorum quadrati ſummam 205. Quoniam, vt in ſequenti Lemmate demonſtrabimus, duo numeri ſe multiplicantes producunt numerum medio loco proportionalem inter quadratos eorundem numerorum: ſi minor quadratus ponatur 1 ȝ ideóque maior 205 — 1 ȝ. erit numerus 78. medio lo-
a 20. ſeptimi. co proportionalis inter quadratos 1 ȝ. & 205 — 1 ȝ. a ac proinde numerus 205 ȝ — 1 ȝȝ. productus ex 1 ȝ. in 205 — 1 ȝ. æqualis erit quadrato numeri medij 78. hoc eſt, numero 6084. Addito ergo 1 ȝȝ vtrinque, erit æquatio inter 1 ȝȝ + 6084. & 205 ȝ. Ablatíſque 6084. vtrobique, inter 1 ȝȝ. & 205 ȝ — 6084. Eruenda ergo eſt radix Zenſizenſica. quod ita fiet. Semiſſis numeri Zenſorum eſt $\frac{205}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{42025}{4}$. ablatis 6084. ſiue $\frac{24336}{4}$. remanent $\frac{17689}{4}$. ad cuius numeri radicem quadratam $\frac{133}{2}$. ſi addatur prædicta ſemiſſis $\frac{205}{2}$. fiet numerus $\frac{338}{2}$. hoc eſt, 169. vnus quadratus, cuius radix 13. dabit vnum numerorum, nimirum maiorem. Et quia numerus 205 ȝ — 6084. duplicem habet radicem, inuenietur altera radix, ſi radicem vltimo loco inuentam $\frac{133}{2}$. detrahemus ex prædicta ſemiſſe $\frac{205}{2}$. Reliquus enim numerus $\frac{72}{2}$. id eſt, 36. dabit minorem quadratum, cuius radix 6. dabit alterum numerorum. Sunt ergo duo numeri inuenti 6. & 13. qui inter ſe multiplicati faciunt 78. & eorum quadrati 36. & 169. faciunt ſummam 205.

In numeris irrationalibus idem hoc problema expedietur, ſi duo numeri inueniendi ſint, qui inter ſe multiplicati faciant 100. & ſumma quadratorum ſit 300. Poſito enim vno quadrato 1 ȝ. erit alter 300 — 1 ȝ. inter quos numerus 100. erit medius proportionalis, vt ex ſequenti Lemmate conſtabit. Ex 1 ȝ. in 300 — 1 ȝ. fit numerus 300 ȝ — 1 ȝȝ.
b 20. ſeptimi. b æqualis numero 10000. qui fit ex medio 100. in ſe. Addito ergo 1 ȝȝ. vtrinque, erit æquatio inter 1 ȝȝ + 10000. & 300 ȝ. Et ablatis 10000. vtrobique, inter 1 ȝȝ. & 300 ȝ — 10000. Eruenda ergo hic etiam erit duplex radix Zenſizenſica, hoc videlicet modo. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 150. à cuius quadrato 22500. demptis 10000. remanet numerus 12500. ad cuius radicem quadratam √ȝ 12500. ſi addetur prædicta ſemiſſis 150. fiet maior quadratus √ȝ 12500 + 150. cuius radix quadrata, nimirum √ȝ (√ȝ 12500 + 150) dabit maiorem numerum. Et ſi radix illa √ȝ 12500. tolletur ex ſemiſſe prædicta 150. reliquus erit minor quadratus 150 — √ȝ 12500. cuius radix quadrata √ȝ (150 — √ȝ 12500) dabit minorem numerum quæſitum. Nam ex maiore radice √ȝ (√ȝ 12500 + 150) in minorem radicem √ȝ (150 — √ȝ 12500) ſi nimirum earum quadrata inter ſe multiplicentur, vt cap.

cap. 24. dictum eſt, & in hac formula apparet, fit numerus

√ȝ (√ȝ 12500 + 150)
√ȝ (150 — √ȝ 12500)
— 12500 — √ȝ 281250000
+ √ȝ 281250000 + 22500
Productus. √ȝ 10000

√ȝ 10000. hoc eſt, datus numerus 100. Item quadrati √ȝ 12500 + 150. & 150 — √ȝ 12500. faciunt ſummam 300. vt manifeſtum eſt.

Prædicta autem multiplicatio facilius conficietur, per ea, quæ cap. 23. dicta ſunt, ſi numeri multiplicandi ita conſtituantur. Nam ſi 12500. quadratum poſterioris particulæ dematur ex 22500. quadrato particulæ prioris 150. remanebit numerus 10000. Præpoſito ergo ſigno √ȝ. fiet productus numerus √ȝ 10000.

√ȝ (150 + √ȝ 12500)
√ȝ (150 — √ȝ 12500)
√ȝ 10000

L E M M A.

Dvo numeri inter ſe multiplicati procreant numerum medium proportionalem inter eorum quadratos, in proportione ipſorum numerorum.

Sint enim duo numeri A, & B. Ex A, in B, fiat C, & ex A, in ſe, fiat quadratus D, & ex B, in ſe quadratus E. Dico C, medium proportionalem eſſe inter D, & E; id eſt, E, C, D, eſſe continuè proportionales in proportione B, ad A. Quoniam enim A, multiplicans B, & A, fecit C, & D; a *erit C, ad D, vt B, ad A. Item* a 17. ſeptimi.
quia B, multiplicans B, & A. fecit E, & C; b *erit quoque E, ad C, vt B, ad A. Igitur E, C, D, continuè proportionales ſunt in proportione B, ad A. quod eſt propoſitum.* b 17. ſeptimi.

A. 3. B. 4.
D. 9. C. 12. E. 16.

C O R O L L A R I V M.

Hinc fit, ſi duo numeri ſe mutuò multiplicantes producunt aliquem numerum, quadratos ipſorum numerorum ſe mutuò multiplicantes producere quadratum numeri producti. Cùm enim numerus 12 ex 3. in 4. productus ſit medio loco proportionalis inter eorum qua- c 20. ſeptimi.
dratos 9. & 16. c fiet ex 9. in 16. quadratus numeri 12.

SCHOLIVM.

IDEM hoc ænigma 26. soluetur sine præcedenti Lemmate, hac ratione. Ponatur in priori exemplo vnus numerorum 1 ℞. ideoque alter erit $\frac{78}{1℞}$. vt ex mutua eorum multiplicatione producatur numerus 78. Quadrati eorum 1 ʒ. & $\frac{6084}{1ʒ}$. faciunt summam $\frac{1ʒʒ \times 6084}{1ʒ}$. æqualem 205. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1 ʒʒ + 6084. & 205. ʒ. Ablatisque 6084. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒʒ. & 205 ʒ — 6084. vt prius.

RVRSVS in posteriori exemplo ponatur vnus numerorum 1 ℞. eritque alter $\frac{100}{1℞}$. vt eorum multiplicatio faciat 100. Quadrati eorum 1 ʒ. & $\frac{10000}{1ʒ}$. faciunt summam $\frac{1ʒʒ \times 10000}{1ʒ}$. æqualem 300. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1 ʒʒ + 10000. & 300 ʒ. Ablatisque 10000. vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒʒ. & 300 ʒ — 10000. vt supra.

XXVII. 27 *Duos numeros inuenire facientes summam datam, quorum quadrati faciant quoque datam summam.*

SIT summa numerorum 19. & quadratorum 205. Ponatur primus numerus 1 ℞. ideóque secundus 19 — 1 ℞. Quadrati eorum 1 ʒ. & 361 — 38 ℞ + 1 ʒ. faciunt summam 361 — 38 ℞ + 2 ʒ. æqualem 205. Additis 38 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 361 + 2 ʒ. & 38 ℞ + 205. Et ablatis 205. vtrinque, inter 156 + 2 ʒ. & 38 ℞. Et rursum ablatis 156. vtrinque, inter 2 ʒ. & 38 ℞ — 156. Diuisisque omnibus per 2. numerum zensorum, erit æquatio inter 1 ʒ. & 19 ℞ — 78. quam ita resolues. Semissis numeri radicum est $\frac{19}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{361}{4}$. detractis 78. hoc est, $\frac{312}{4}$. remanet numerus $\frac{49}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{2}$. si addatur prædicta semissis $\frac{19}{2}$. fiet maior radix (quia numerus Cossicus duas radices habet) $\frac{26}{2}$. id est, 13. primus numerus quæsitus. Secundus ergo erit 6. nimirum 19 — 1 ℞. qui numerus 6. erit quoque minor radix, quæ habebitur, si vltima radix inuenta $\frac{7}{2}$. ex prædicta semisse $\frac{19}{2}$. detrahatur, remanet enim numerus $\frac{12}{2}$. siue 6. Numeri ergo qui quæruntur, sunt 13. & 6. quorum summa 19. & summa quadratorum 205.

RVRSVM summa numerorum sit 30. & quadratorum 600. Posito primo numero 1 ℞. & secundo 30 — 1 ℞. facient quadrati summam 900 — 60 ℞ + 2 ʒ. æqualem 600. Additis 60 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 900 + 2 ʒ. & 60 ℞ + 600. Et ablatis 600. vtrobique, inter 300 + 2 ʒ. & 60 ℞. Et rursum ablatis 300. vtrinque, inter 2 ʒ. & 60 ℞ — 300. Diuisisque omnibus numeris per 2. numerum Zensorum, æquatio erit inter 1 ʒ. & 30 ℞ — 150. cuius radix ita nota fiet. Semissis numeri radicum est 15. à cuius quadrato 225. demptis 150. remanet numerus 75. ad cuius radicẽ quadratam √ʒ 75.

√ʒ 75. si addetur prædicta semissis 15. fiet maior radix √ʒ 75 + 15. prior numerus, qui positus est 1 ℞. Et si eadem radix quadrata √ʒ 75. tolletur ex prædicta semisse 15. reliqua fiet minor radix 15 — √ʒ 75. qui numerus æqualis est posteriori numero 30 — 1 ℞. Nam si ex 30. detrahatur radix inuenta √ʒ 75 + 15. remanebit numerus 15 — √ʒ 75. vt hæc formula docet. Eruntque duo numeri quæsiti √ʒ 75 + 15. & 15 — √ʒ 75. quorum summa est 30. & quadratorum summa 600. vt duæ hæ formulæ indicant.

30	+	√ʒ 0
15	+	√ʒ 75
15	—	√ʒ 75

√ʒ 75 + 15	15 — √ʒ 75
√ʒ 75 + 15	15 — √ʒ 75
+ √ʒ 16875 + 225	— √ʒ 16875 + 75
75 + √ʒ 16875	225 — √ʒ 16875
300 + √ʒ 67500	300 — √ʒ 67500

DEBET autem summa quadratorum esse maior semisse quadrati, qui ex data summa numerorum gignitur, & minor quadrato eiusdem summæ. Itaque si summa numerorum proponeretur 30. & quadratorum 400. foret quæstio impossibilis. Nam summa quadratorum maior non est semisse quadrati 900. ex data summa 30. producti. Atque ita occurreret vltima æquatio inter 1 ʒ. & 30 ℞ — 250 quæ resolui nequit. Nam ex 225. quadrato semissis numeri radicum auferri non possunt 250. &c.

QVOD si quadratorum summa sit maior quadrato summæ numerorum propositorum, solui etiam non poterit problema, nisi concedamus, vnum numerum esse maiorem ipsa summa, & alterum minorem nihilo. Vt si summa detur 40. & summa quadratorum 1602. Ponemus vnum numerum 1 ℞. & alterum 40 — 1 ℞. Quadrati eorum 1 ʒ. & 1600 — 80 ℞ + 1 ʒ. faciunt summam 1600 — 80 ℞ + 2 ʒ. æqualem 1602. Additis 80 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 1600 + 2 ʒ. & 80 ℞ + 1602. Et ablatis 1600. vtrinque, inter 2 ʒ. & 80 ℞ + 2. Diuisisque omnibus per 2. numerum Zensorum, inter 1 ʒ. & 40 ℞ + 1. Iam semissis numeri radicum est 20. ad cuius quadratum 400. si addatur 1. fiunt 401. Et si ad √ʒ 401. addatur prædicta semissis 20. fiet 1 ℞. 20 + √ʒ 401. prior numerus, quem posuimus 1 ℞. qui demptus ex 40. reliquus fiet numerus posterior 20 — √ʒ 401. vt in hac formula videre licet. Vbi vides priorem numerum 20 + √ʒ 401. maiorem esse, quam 40. cum √ʒ 401. maior sit, quam 20. posteriorem verò 20 — √ʒ 401. minorem esse nihilo, nimirum 20. — 20 $\frac{1}{41}$. quorum vtrumque ineptum est. Et tamen quæstioni satisfaciunt. Nam simul efficiunt summam 40. cum + √ʒ 401. & — √ʒ 401. se mutuò interimant: & eorum quadrati 801 + √ʒ 641600. & 801 —

40	+	√ʒ 0
20	+	√ʒ 401
20	—	√ʒ 401

$\sqrt{ȝ}$ 641600. summam faciant 1602. Simile quid habuisti in ænigmate 149. superioris capitis. Vides ergo, numeros minores nihilo non esse frustra excogitatos: quippe cum per illos ænigmata quoque dissoluantur.

XXVIII 28 *Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati datam summam efficiant.*

Hic nihil aliud quæritur, nisi vt duo numeri inueniantur efficientes datum numerum, ita vt eorum quadrati efficiant quoque datam summam. quod in antecedente ænigmate factum est.

XXIX. 29 *Datum numerum in tres numeros continuè proportionales partiri, quorum medius datus sit; cuius tamen quadratus maior non sit quadrato semissis illius numeri, qui relinquitur, detracto dato medio ex dato numero.*

Sit numerus 283. diuidendus in tres continuè proportionales, quorum medius sit 78. Ponatur primus numerus 1 ℞. ac proinde tertius 205 — 1 ℞. vt duo hi faciant simul 205. qui numerus relinquitur, detracto dato medio 78. ex dato numero 283. Ex primo 1 ℞. in tertium 205 — 1 ℞. fit numerus 205 ℞ — 1 ȝ. qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet
a 20. septimi. 6084. Addito ergo 1 ȝ. vtrobique, erit æquatio inter 205 ℞. & 1 ȝ + 6084. Et ablatis 6084. vtrinque, inter 205 ℞ — 6084. & 1 ȝ. quæ æquatio ita resoluetur. Semissis numeri radicum est $\frac{205}{2}$. à cuius quadrato $\frac{42025}{4}$. si demantur 6084. hoc est, $\frac{24336}{4}$. remanebit numerus $\frac{17689}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{133}{2}$. si addatur semissis prædicta $\frac{205}{2}$. fiet maior radix $\frac{338}{2}$. hoc est, 169. Et si prædicta radix $\frac{133}{2}$. tollatur ex prædicta semisse $\frac{205}{2}$. relinquetur minor radix $\frac{72}{2}$. id est 36. Sunt ergo tres numeri continuè proportionales 36. 78. 169.

Sit rursum datus numerus 100. diuidendus in tres continuè proportionales, quorum medius sit 30. Ponatur primus 1 ℞. ac proinde tertius 70 — 1 ℞. vt duo. hi faciant simul 70. qui numerus relinquitur, detracto dato medio 30. ex dato numero 100. Ex primo 1 ℞. in tertium 70 — 1 ℞.
b 20. septimi. fit numerus 70 ℞ — 1 ȝ. b qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet 900. Addito ergo 1 ȝ. vtrobique, erit æqualitas inter 70 ℞. & 1 ȝ + 900. Ablatisque 900. vtrinque, inter 70 ℞ — 900. & 1 ȝ. quam æquationem ita expedies. Semissis numeri radicum est 35. à cuius quadrato 1225. demptis 900. remanet numerus 325. ad cuius radicem quadratam addita prædicta semisse 35. fiet maior radix $\sqrt{ȝ}$ 325 + 35. Et si eadem radix $\sqrt{ȝ}$ 325. dematur ex semisse prædicta 35. relinquetur minor radix

radix 35 — $\sqrt{ȝ}$ 325. Itaque tres numeri quæsiti sunt 35 — $\sqrt{ȝ}$ 325. 30. $\sqrt{ȝ}$ 325 + 35. continuè proportionales facientes summam 100. Et qui fit ex primo in tertium, æqualis est quadrato medij, numero videlicet 900. vt hęc formula indicat. Quæ multiplicatio expeditior erit per ea, quæ cap. 23. dicta sunt, si numeri multiplicandi ita ordinentur, vt hæc altera formula monstrat.

$$\begin{array}{r} \sqrt{ȝ}\,325 + 35 \\ 35 - \sqrt{ȝ}\,325 \\ \hline - 325 - \sqrt{ȝ}\,398125 \\ + \sqrt{ȝ}\,398125 + 1225 \\ \hline 900 \end{array}$$

Nam si 325. quadratum posterioris particulæ tolletur ex 1225. quadrato prioris particulę 35. reliquus fiet numerus 900.

$$\begin{array}{r} 35 + \sqrt{ȝ}\,325 \\ 35 - \sqrt{ȝ}\,325 \\ \hline 900 \end{array}$$

Si in eodem exemplo medius numerus detur 40. erit quęstio impossibilis. Nam posito primo numero 1 ℞. & tertio 60 — 1 ℞. fiet ex primo in tertium numerus 60 ℞ — 1 ȝ. æqualis quadrato medij, nimirum numero 1600. Et reducta æquatione, erit æqualitas inter 1 ȝ. & 60 ℞ — 1600. quod fieri nequit. Nam semissis numeri radicum est 30. à cuius quadrato 900. detrahi non possunt 1600. &c. Ratio est, quia numerus 1600. quadratus medij dati 40. maior est quadrato 900. semissis numeri 60. qui relinquitur, detracto medio dato 40. ex dato numero 100.

30 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant summam datam quamcunque, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti.* XXX.

Datvs numerus 10. diuidendus sit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior est quarta parte cubi ex 10. descripti, maior videlicet numero 250. Ponatur prima pars 1 ℞. & secunda 10 — 1 ℞. Cubi harum partium sunt 1 ce. & 1000 — 300 ℞ + 30 ȝ — 1 ce, quorum summa 1000 — 300 ℞ + 30 ȝ. æqualis esse debet numero 370. Additis 300 ℞ vtrinque, fiet æquatio inter 1000 + 30 ȝ, & 300 ℞ + 370. Et ablatis 370. vtrobique, inter 630 + 30 ȝ. & 300 ℞. Et rursum ablatis 630. vtrinque, inter 30 ȝ. & 300 ℞ — 630. Diuisis autem singulis hisce numeris per numerum Zensorum, id est, per 30. erit æquatio inter 1 ȝ. & 10 ℞ — 21. quam sic resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 21. remanet numerus 4. ad cuius radicem quadratam 2. addita prædicta semisse 5. fiet maior radix 7. Et eadem radix 2. dempta ex semisse prædicta 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Partes ergo numeri dati 10. sunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. faciunt summam 370.

Hoc idem ænigma fuit 141. capitis 29. præcedentis, ſed ſolutum aliter, quam hic, nimirum per ſimplicem æquationem, quæ occurrit propter variam numerorum poſitionem.

Ibidem quoque docuimus, quo pacto ænigma hoc ſolui poſſit ſine Algebra.

XXXI. 31 *Datum numerum in duos numeros diſtribuere, vt idem ſit exceſſus inter quadratum maioris, & quadratum minoris, qui inter quadratum dati numeri, & quadratum maioris partis.*

Sit datus numerus 30. Ponatur maior eius pars 1 ℞. & minor 30 — 1 ℞. Tres quadrati ſunt 900. 1 ȝ. & 900 — 60 ℞ + 1 ȝ. Exceſſus 900. ſupra 1 ȝ. eſt 900 — 1 ȝ. Exceſſus 1 ȝ. ſupra 900 — 60 ℞ + 1 ȝ. eſt 60 ℞ — 900. vt in hac formula ſubtractionis manifeſtũ eſt.

+ 0 + 0 ℞ + 1 ȝ
+ 900 — 60 ℞ + 1 ȝ
— 900 + 60 ℞ + 0 ȝ

Eſt igitur æquatio inter hos exceſſus, id eſt, inter 900 — 1 ȝ. & 60 ℞ — 900. Additiſque 900. vtrobique, inter 1800 — 1 ȝ. & 60 ℞. Et rurſum addito 1 ȝ. vtrinque, inter 1800. & 1 ȝ + 60 ℞. Ablatiſque 60 ℞ vtrobique, inter 1800 — 60 ℞. & 1 ȝ. Radix ita inuenietur. Semiſſis numeri radicum eſt 30. ad cuius quadratum 900. additis 1800. fit numerus 2700. à cuius radice quadrata √ȝ 2700. ſi prædicta ſemiſſis 30. dematur, remanebit pretium vnius radicis √ȝ 2700 — 30. maior ſcilicet pars. qua detracta ex dato numero 30. relinquetur minor pars 60 — √ȝ 2700. vt in hac formula ſubtractionis apparet.

+ √ȝ 0 + 30
+ √ȝ 2700 — 30
— √ȝ 2700 + 60

Iam tres quadrati ſunt 900. 3600 — √ȝ 9720000. & 6300 — √ȝ 38880000. qui ſe mutuo excedunt hoc eodem numero √ȝ 9720000 — 2700. vt in hiſce formulis ſubtractionum perſpicuum eſt.

+ 900 + √ȝ 0
+ 3600 — √ȝ 9720000
— 2700 + √ȝ 9720000

+ 3600 — √ȝ 9720000
+ 6300 — √ȝ 38880000
— 2700 + √ȝ 9720000

In poſteriori formula, quoniam √ȝ 9720000. & √ȝ 38880000. commenſurabiles ſunt, cum maiore per minorem diuiſa fiat Quotiens rationalis ſit √ȝ 4. hoc eſt, 2. ſi minor à maiore ſubtrahatur, reliquus erit numerus √ȝ 9720000. Hæc omnia clara ſunt, ſi conſiderentur ea, quæ de ſubtractione ſignorum + & —. & de ſubtractione radicum ſurdarum dicta ſunt.

32 Da-

32 *Datum numerum in duas partes diſtribuere, vt maioris partis quadratus cum minore parte faciat datum numerum quemcunque, minorem tamen quadrato dati numeri.* XXXII.

Sit diuidendus datus numerus 10. in duas partes, vt quadratus maioris partis cum parte minore faciat 73 $\frac{3}{4}$. Ponatur maior pars 1 ℞. & minor 10 — 1 ℞. Quadratus maioris partis eſt 1 ȝ. qui cum minore parte facit ſummam 1 ȝ + 10 — 1 ℞. æqualem numero 73 $\frac{3}{4}$. Ablatis 10. vtrobique, erit æquatio inter 1 ȝ — 1 ℞. & 63 $\frac{3}{4}$. Additáque 1 ℞ vtrinque, inter 1 ȝ. & 1 ℞ + 63 $\frac{3}{4}$. Radix ita eruetur. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 63 $\frac{3}{4}$. fit numerus 64. ad cuius radicem quadratam 8. ſi addatur prædicta ſemiſſis $\frac{1}{2}$. fiet pretium vnius radicis 8 $\frac{1}{2}$. maior pars, minor ergo erit 1 $\frac{1}{2}$. Nam quadratum maioris partis 8 $\frac{1}{2}$. eſt 72 $\frac{1}{4}$. & addita minore parte 1 $\frac{1}{2}$. fit numerus 73 $\frac{3}{4}$.

Qvod ſi minor pars ſtatuatur 1 ℞. & maior 10 — 1 ℞. erit quadratus maioris partis 100 — 20 ℞ + 1 ȝ. Addita vero minore parte 1 ℞. fit ſumma 100 — 19 ℞ + 1 ȝ. æqualis numero 73 $\frac{3}{4}$. Additis ergo 19 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 1 ȝ + 100. & 19 ℞ + 73 $\frac{3}{4}$. Ablatiſque 73 $\frac{3}{4}$. vtrinque, inter 1 ȝ + 26 $\frac{1}{4}$. & 19 ℞. Ablatiſque rurſum 26 $\frac{1}{4}$. vtrobique, inter 1 ȝ. & 19 ℞ — 26 $\frac{1}{4}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{19}{2}$. à cuius quadrato $\frac{361}{4}$. ablatis 26 $\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{256}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{16}{2}$. addita ad prædictam ſemiſſem $\frac{19}{2}$. facit maiorem radicem $\frac{35}{2}$. id eſt, 17 $\frac{1}{2}$. quæ inutilis eſt, cum non poſſit eſſe pars dati numeri 10. Minor ergo radix (quia numerus Coſſicus 19 ℞ — 26 $\frac{1}{4}$. duplicem radicem habet) problema ſoluet. quæ reperietur, ſi radix quadrata vltimo loco inuenta $\frac{16}{2}$. dematur ex prædicta ſemiſſe $\frac{19}{2}$. Reliquus enim numerus 1 $\frac{1}{2}$ erit minor radix, offerens minorem partem numeri 10. maiórque propterea erit 8 $\frac{1}{2}$. veluti prius.

Vides ergo, non ſemper vtramque radicem, quam Coſſicus numerus habet, aſſumi poſſe, ad problematis propoſiti ſolutionem. Maior tamen radix inuenta $\frac{35}{2}$. quamuis ad problema propoſitum nonpertineat, optimè tamen reſpondet huic æquationi inter 1 ȝ. & 19 ℞ — 26 $\frac{1}{4}$. Nam eius radicis quadratus eſt $\frac{1225}{4}$. æqualis 19 ℞ — 26 $\frac{1}{4}$. cum 19 ℞. faciant $\frac{665}{2}$. ſiue $\frac{1330}{4}$. à quibus ſi demantur 26 $\frac{1}{4}$. hoc eſt $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{1225}{4}$.

33 *Datum numerum extrema, ac media ratione ſecare.* XXXIII.

Sit datus numerus 10. ita ſecandus, vt proponitur: hoc eſt, vt minor pars, & maior, ac datus numerus 10. ſint continuè proportionales, siue (quod idem est) vt quadratus maioris partis æqualis sit numero, qui ex minore parte in datum numerum producitur. Ponatur maior pars 1 ℞. & minor 10 — 1 ℞. Quadratus maioris partis est 1 ℨ. æqualis numero 100 — 10 ℞. qui fit ex minore parte 10 — 1 ℞. in 10. Semissis numeri radicum est 5. ad cuius quadratum 25. additis 100. fit numerus 125. à cuius radice quadrata √ℨ 125. si tollatur prædicta semissis 5. reliqua fiet radix √ℨ 125 — 5. maior pars. qua ablata ex 10. reliqua fiet minor pars 15 — √ℨ 125. vt in hac formula apparet. Nam quadratum maioris partis est 150 — √ℨ 12500. ac tantundem fit ex minore parte in 10. vt duæ hæ formulæ multiplicationum demonstrant.

√ℨ 0 + 10
√ℨ 125 — 5
———————
— √ℨ 125 + 15

√ℨ 125 — 5
√ℨ 125 — 5
———————
— √ℨ 3125 + 25
125 — √ℨ 3125
———————
150 — √ℨ 12500

15 — √ℨ 125
+ 10
———————
150 — √ℨ 12500

SCHOLIVM.

SINE Algebra diuidetur numerus datus extrema ac media ratione, hoc modo. Ad quadratum numeri adijciatur eiusdem quadrati quarta pars, & ex radice quadrata numeri conflati dematur semissis dati numeri. Reliquus enim numerus erit maior pars, qua dempta ex numero dato, reliqua fiet minor pars. Hæc praxis colligitur tum ex solutione huius problematis, tum ex figura propos. 11. lib. 2. Eucl.

XXXIIII 34 *Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt quadratus maioris ad quadratum minoris proportionem habeat datam.*

SIT numerus 30. secandus in duos, vt maioris quadratus ad quadratum minoris proportionem habeat duplam sesquiquartam. Ponatur maior 1 ℞. & minor 30 — ℞. Quadratus illius est 1 ℨ. duplus sesquiquartus ad quadratum huius, nimirum ad 900 — 60 ℞ + 1 ℨ. Si ergo hic quadratus multiplicetur per $2\frac{1}{4}$. erit æquatio inter 1 ℨ. & $\frac{8100 - 540℞ + 9ℨ}{4}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 4 ℨ. & 8100 — 540 ℞ + 9 ℨ. Additis igitur 540 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 4 ℨ + 540 ℞. & 8100 + 9 ℨ. Ablatisque 4 ℨ. vtrinque, inter 540 ℞. & 8100 + 5 ℨ. Et rursum ablatis 8100. vtrinque, inter 5 ℨ. & 540 ℞ — 8100. Diuisisque omnibus per 5. erit æqualitas inter 1 ℨ. & 108 ℞ — 1620. Semissis numeri

radicum est 54. à cuius quadrato 2916. demptis 1620. remanet numerus 1296. cuius radix quadrata 36. addita ad prædictam semissem 54. facit maiorem radicem 90. quę ad ænigma soluẽdum apta non est, cùm non possit esse pars numeri dati 30. Si ergo eadem radix quadrata 36. demantur ex prædicta semisse 54. reliqua fiet minor radix 18. nimirum maior numerus quæsitus. Minor ergo erit 12. Nam 324. quadratus illius ad huius quadratum 144. proportionem habet duplam sesquiquartam.

VBI etiam vides, quamuis Cossicus numerus duplicem radicem habeat, non tamen semper vtramque assumi posse, licet maior ad vnguem etiam respondeat æquationi. Nam 8100. quadratus maioris radicis 90. æqualis est 108 ℞ — 1620. cùm 108 ℞ efficiant 9720. à quibus si demantur 1620. relinquuntur 8100.

35 *Datum numerum in duos numeros partiri, vt eorum quadrati summam datam conficiant, maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiusdem numeri.* XXXV.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. qui numerus maior est, quam 800. semissis quadrati ex 40. procreati, & minor, quam 1600. quadratus eiusdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 1 ℞. & alter 40 — ℞. Quadrati sunt 1 ℨ. & 1600 — 80 ℞ + 1 ℨ. qui summam faciunt 2 ℨ + 1600 — 80 ℞. æqualem 928. Additis 80 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 2 ℨ + 1600. & 80 ℞ + 928. Et ablatis 928. vtrinque, inter 2 ℨ + 672. & 80 ℞. Et rursum ablatis 672. vtrobique, inter 2 ℨ. & 80 ℞ — 672. Diuisisque omnibus per 2. inter 1 ℨ. & 40 ℞ — 336. Semissis numeri radicum est 20. à cuius quadrato 400. demptis 336. remanet numerus 64. cuius radix quadrata 8. addita ad prædictam semissem 20. facit maiorem radicem 28. hoc est, maiorem numerum. Minor autem erit 12. quem etiam exhibet minor radix. Nam si quadrata radix inuenta 8. dematur ex prædicta semisse 20. remanent 12. Iam quadratus 784. maioris numeri 28. cum 144. quadrato minoris numeri 12. facit datam summam 928.

HOC ænigma solutum etiam fuit in ænigmate 170. præcedentis cap. per æquationem simplicem.

36 *Duos numeros in dato excessu inuenire, quorum quadrati datam summam efficiant, quæ maior tamen sit quadrato dati excessus.* XXXVI

SIT datus excessus 11. & summa quadratorum 281. quæ maior est quadrato 121. dati excessus 11. Ponatur minor numerus 1 ℞. ideoque maior 1 ℞ + 11. Quadrati 1 ℨ. & 1 ℨ + 22 ℞ + 121. faciunt summam $2\,\mathfrak{z} + 22\,\mathfrak{r} + 121$. æqualem 281. Ablatis 121. vtrobique, erit æqualitas inter $2\,\mathfrak{z} + 22\,\mathfrak{r}$. & 160. Demptiſque rurſum $22\,\mathfrak{r}$. vtrinque, inter $2\,\mathfrak{z}$. & $160 - 22\,\mathfrak{r}$. Diuiſiſque omnibus per 2. inter $1\,\mathfrak{z}$. & $80 - 11\,\mathfrak{r}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. additis 80. ſiue $\frac{320}{4}$. fit numerus $\frac{441}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{21}{2}$. ablata prædicta ſemiſſe $\frac{11}{2}$. remanet valor vnius radicis $\frac{10}{2}$. hoc eſt, 5. minor numerus. Maior autem erit 16. Atque horum duorum numerorum quadrati 25. & 256. faciunt 281.

Sit rurſum datus exceſſus 11. & ſumma quadratorum 122. maior quadrato 121. exceſſus dati 11. Ponatur minor numerus iterum $1\,\mathfrak{r}$ & maior $1\,\mathfrak{r} + 11$. Quadrati horum numerorum faciunt, vt prius, ſummam $2\,\mathfrak{z} + 22\,\mathfrak{r} + 121$. æqualem 122. Ablatis 121. vtrobique, erit æquatio inter $2\,\mathfrak{z} + 22\,\mathfrak{r}$. & 1. Et ablatis rurſum $22\,\mathfrak{r}$ vtrinque, inter $2\,\mathfrak{z}$. & $1 - 22\,\mathfrak{r}$. Diuiſiſque omnibus per 2. inter $1\,\mathfrak{z}$. & $\frac{1}{2} - 11\,\mathfrak{r}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. addita $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{2}{4}$. fit numerus $\frac{123}{4}$. à cuius radice quadrata $\sqrt{\frac{123}{4}}$. dempta prædicta ſemiſſe $\frac{11}{2}$. relinquetur pretium vnius radicis $\sqrt{\frac{121}{4}} - \frac{11}{2}$. minor numerus, & additis 11. ſiue $\frac{22}{2}$. fiet maior numerus $\sqrt{\frac{121}{4}} + \frac{11}{2}$. Quadrati horum numerorum faciunt ſummam 122 vt hæ formulæ multiplicationum indicant.

$$\begin{array}{rrrr} & \sqrt{\frac{123}{4}} & + & \frac{11}{2} \\ & \sqrt{\frac{123}{4}} & + & \frac{11}{2} \\ \hline & +\sqrt{\frac{14883}{16}} & + & \frac{121}{4} \\ \frac{123}{4} & +\sqrt{\frac{14883}{16}} & & \\ \hline \frac{244}{4} & +\sqrt{\frac{59532}{16}} & & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & \sqrt{\frac{123}{4}} & - & \frac{11}{2} \\ & \sqrt{\frac{123}{4}} & - & \frac{11}{2} \\ \hline & -\sqrt{\frac{14883}{16}} & + & \frac{121}{4} \\ \frac{123}{4} & -\sqrt{\frac{14883}{16}} & & \\ \hline \frac{244}{4} & -\sqrt{\frac{59532}{16}} & & \end{array}$$

Nam $\frac{244}{4}$. & $\frac{244}{4}$. faciunt $\frac{488}{4}$. hoc eſt, 122. & radices ſurdæ ſe mutuò deſtruunt.

XXXVII 37 *Dato numero, alium inuenire, per quem ſi diuidatur datus numerus, fiat Quotiens ſuperans inuentum numerum dato numero.*

Sit datus numerus 60. inueniendúſque ſit alius, per quem ſi diuidatur 60. fiat Quotiens ſuperans inuentum diuiſorem numero 7. Ponatur numerus, qui quæritur, $1\,\mathfrak{r}$. Quotiens ergo erit $\frac{60}{1\,\mathfrak{r}}$. qui ſuperat diuiſorem $1\,\mathfrak{r}$. numero $\frac{60 - 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}}$. (vt patet, ſi $1\,\mathfrak{r}$. detrahatur ex $\frac{60}{1\,\mathfrak{r}}$.) qui æqualis debet eſſe dato numero 7. ita vt æquatio ſit inter $\frac{60 - 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}}$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hãc inter $60 - 1\,\mathfrak{z}$. & $7\,\mathfrak{r}$. Addito ergo $1\,\mathfrak{z}$. vtrobique, erit æquatio inter 60. & $1\,\mathfrak{z} + 7\,\mathfrak{r}$. Et ablatis $7\,\mathfrak{r}$ vtrinque, inter $1\,\mathfrak{z}$. & $60 - 7\,\mathfrak{r}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{7}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$. additis 60. ſiue $\frac{240}{4}$. fit numerus $\frac{289}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{17}{2}$. ſi dematur prædicta ſemiſſis $\frac{7}{2}$. remanebit pretium vnius radicis

cis $\frac{10}{2}$, hoc eſt, 5. numerus quæſitus. Nam diuiſis 60. per 5. fit Quotiens 12. qui diuiſorem 5. numero 7. ſuperat.

38 *Datum numerum in duos numeros partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati: hoc eſt, ita vt radix quadrata dati numeri ſecundi minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati ſit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.* XXXVIII.

Sit datus numerus 10. diuidendus in duos, inter quos $\sqrt{10}$. ſit medio loco proportionalis, hoc eſt, vt ex eorum multiplicatione producatur numerus 10. Ponatur vnus numerorum $1\,\mathfrak{r}$. & alter $10 - 1\,\mathfrak{r}$. Ex eorum multiplicatione fit numerus $10\,\mathfrak{r} - 1\,\mathfrak{z}$. æqualis 10. Addito $1\,\mathfrak{z}$. vtrobique, fiet æquatio inter $10\,\mathfrak{r}$. & $1\,\mathfrak{z} + 10$. Et ablatis 10. vtrinque, inter $10\,\mathfrak{r} - 10$. & $1\,\mathfrak{z}$. Semiſſis numeri radicum eſt 5. à cuius quadrato 25. demptis 10. fit reliquus numerus 15. ad cuius radicem quadratam $\sqrt{15}$. addita prædicta ſemiſſis 5. facit maiorem radicem $\sqrt{15} + 5$. eadémque radix quadrata detracta ex prædicta ſemiſſe 5. reliquam facit minorem radicem $5 - \sqrt{15}$. Atque hi duo numeri $\sqrt{15} + 5$. & $5 - \sqrt{15}$. faciunt ſummam 10. & ex vno in alterum fit quoque 10. vt in hac formula multiplicationis manifeſtum eſt. Nam $-\sqrt{375}$. & $+\sqrt{375}$. ſe mutuò interimunt: & ex additione $+25$. & -15. fit numerus 10.

$$\begin{array}{rrrr} & 5 & - & \sqrt{15} \\ & \sqrt{15} & + & 5 \\ \hline & +25 & - & \sqrt{375} \\ +\sqrt{375} & -15 & & \\ \hline & 10 & & \end{array}$$

Hoc idem ænigma ſoluimus per ſimplicem æquationem in præcedenti cap. ænigmate 172.

Mvltiplicatio quoque prędicta numeri $5 - \sqrt{15}$. in $5 + \sqrt{15}$. perficietur, ſi 15. quadratus poſterioris particulæ ex 25. quadrato prioris particulæ detrahatur, vt cap. 23. declaratum eſt.

$$\begin{array}{rrr} 5 & - & \sqrt{15} \\ 5 & + & \sqrt{15} \\ \hline & 10 & \end{array}$$

Idem hoc ænigma ſolutum fuit in ænigmate 23. alio tamen exemplo propoſito.

39 *Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati ſummam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione ſuperet dato numero.* XXXIX.

Sit datus numerus 30. & exceſſus datus 228. Ponatur vnus numerorum $1\,\mathfrak{r}$. & alter $30 - 1\,\mathfrak{r}$. Quadrati ſunt $1\,\mathfrak{z}$. & $1\,\mathfrak{z} + 900$

—60 ℞.qui ſummam faciunt 2 ʒ + 900 — 60 ℞.quæ ſuperare debet numerum productum ex 1 ℞.in 30 — 1 ℞.hoc eſt,numerum 30 ℞ — 1 ʒ. exceſſu 228.ita vt æqualitas ſit inter 2 ʒ + 900 — 60 ℞.& 30 ℞ + 228 — 1 ʒ. Et addito 1 ʒ.vtrinque,inter 3 ʒ + 900 — 60 ℞.& 30 ℞ + 228. Et additis 60 ℞ vtrobique,inter 3 ʒ + 900.& 90 ℞ + 228. Et ablatis 228. vtrinque,inter 3 ʒ + 672.& 90 ℞.Et rurſum ablatis 672.vtrobique, inter 3 ʒ. & 90 ℞ — 672.Diuiſiſque omnibus per 3.inter 1 ʒ.& 30 ℞ — 224.Semiſſis numeri radicum eſt 15.à cuius quadrato 225. demptis 224. ſupereſt 1.cuius radix quadrata 1.addita ad prædictam ſemiſſem 15. facit maiorem radicem 16. Eadem verò ex ſemiſſe prædicta 15. detracta relinquit minorem radicem 14.Itaque quæſitæ partes numeri 30.ſunt 16.& 14.Quadrati enim earum 256.196.ſummam faciunt 452.quæ numerum 224.factum ex ductu 16.in 14.ſuperat numero 228.

Hoc idem problema ſoluimus per ſimplicem æquationem in ænigmate 176.præcedentis capitis,propoſito tamen alio exemplo.

Si numerus diuidendus proponeretur 20. & exceſſus 30.fieret problema impoſſibile,vt ipſa operatio docebit.

XL. 40 *Datum numerum partiri in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam datam, cuius tamen quadratus minor ſit numero dato.*

Sit datus numerus 30.diuidendus in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam 5.Ponatur minoris radix 1 ℞.ideóque maioris radix 1 ℞ + 5.vt ſe excedant quinario. Quadrati harum radicum 1 ʒ.& 1 ʒ + 10 ℞ + 25.faciunt ſummam 2 ʒ + 10 ℞ + 25. æqualem 30. Ablatis 25. vtrobique,manebit æqualitas inter 2 ʒ + 10 ℞.& 5. Ablatíſque rurſum 10 ℞ vtrinque, inter 2 ʒ.& 5 — 10 ℞. Diuiſiſque omnibus per 2.inter 1 ʒ. & $\frac{5}{2}$ — 5 ℞.Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis $\frac{5}{2}$. ſiue $\frac{10}{4}$.fit numerus $\frac{35}{4}$. à cuius radice quadrata √ʒ $\frac{35}{4}$. dempta prædicta ſemiſſe $\frac{5}{2}$.fiet pretiũ radicis √ʒ $\frac{35}{4}$. — $\frac{5}{2}$ minoris ſcilicet numeri radix. Additis ergo 5. fiet maioris numeri radix √ʒ $\frac{35}{4}$ + $\frac{5}{2}$. quæ duæ radices ſe mutuo excedunt quinario.Et in ſe ductæ quadratè, faciunt numeros, qui quæruntur, 15 — √ʒ $\frac{3500}{16}$. & 15 + √ʒ $\frac{3500}{16}$. qui faciunt 30. numerum datum.

Idem ænigma ſolui etiam poteſt per ſimplicem æquationem, hoc modo. Ponatur minoris numeri radix 1 ℞ — $\frac{5}{2}$. & maioris 1 ℞ + $\frac{5}{2}$. vt hæc illam ſuperet quinario. Ambæ in ſe ductæ quadratè faciunt 1 ʒ — $\frac{10}{2}$ ℞ + $\frac{25}{4}$. & 1 ʒ + $\frac{10}{2}$ ℞ + $\frac{25}{4}$. quorum ſumma 2 ʒ + $\frac{50}{4}$. æqualis eſt 30. Ablatis $\frac{50}{4}$. hoc eſt,12 $\frac{1}{2}$. vtrobique, manebit æquatio inter 2 ʒ.& 17 $\frac{1}{2}$. Diuiſiſque 17 $\frac{1}{2}$ per 2. fiet 1 ʒ. $\frac{35}{4}$. & 1 ℞. √ʒ $\frac{35}{4}$. Cum ergo minoris numeri radix poſita ſit 1 ℞ — $\frac{5}{2}$. erit ipſa radix minoris numeri √ʒ $\frac{35}{4}$ — $\frac{5}{2}$.Et maioris numeri radix √ʒ $\frac{35}{4}$ + $\frac{5}{2}$.cum poſita ſit 1 ℞ + $\frac{5}{2}$.

Inuentæ

Inuentæ ergo ſunt eædem radices, quæ prius, &c.

41 *Datum numerum diuidere in duos, quorum radices inter ſe multiplicatæ faciant datum quemcunque numerum.* XLI.

Sit datus numerus 12. ſecandus in duos, quorum radices inter ſe multiplicatæ faciant 5. Ponatur vnus numerorum 1 ℞.& alter 12 — 1 ℞. Erunt eorum radices, √ʒ 1 ℞. + √ʒ (12 — 1 ℞.) Hæ inter ſe multiplicatæ faciunt √ʒ (12 ℞ — 1 ʒ) qui numerus æqualis eſſe debet numero 5. Igitur & eorum quadrati 12 ℞ — 1 ʒ. & 25.æquales erunt. Additóque 1 ʒ. vtrobique, erit æquatio inter 12 ℞. & 1 ʒ + 25. Et ablatis 25. vtrinque, inter 12 ℞ — 25.& 1 ʒ. Semiſſis numeri radicum eſt 6.à cuius quadrato 36.demptis 25. ſupereſt numerus 11. ad cuius radicem quadratam √ʒ 11. addita prædicta ſemiſſe 6. fiet maior radix √ʒ 11 + 6 ſiue 6 + √ʒ 11. id eſt, maior numerus quæſitus. Et ſi eadem √ʒ 11.tollatur ex ſemiſſe prædicta 6. reliqua fiet minor radix 6 — √ʒ 11. nimirum minor numerus quæſitus. Atque duo hi numeri 6 + √ʒ 11. & 6 — √ʒ 11. faciunt propoſitum numerum 12. & eorum radices ſunt √ʒ (6 + √ʒ 11) & √ʒ (6 — √ʒ 11) quæ inter ſe multiplicatæ faciunt √ʒ 25. id eſt, 5. vt hæc formula monſtrat. Nam ſi earum quadrata 6 + √ʒ 11. & 6 — √ʒ 11. inter ſe multiplicentur, (quod fiet, ſi 11. quadratum poſterioris particulæ ex 36. quadrato particulæ prioris detrahatur, vt cap.23. dictum eſt) fiet productus √ʒ 25. id eſt, 5.

√ʒ (6 + √ʒ 11)
√ʒ (6 — √ʒ 11)
√ʒ 25

Per ſimplicem æquationem ſoluemus idem ænigma, hoc modo. Ponatur vnus numerus 6 + 1 ℞. & alter 6 — 1 ℞. quorum radices √ʒ (6 + 1 ℞) & √ʒ (6 — 1 ℞) inter ſe multiplicatæ faciunt numerum √ʒ (36 + 1 ʒ) vt hæc formula indicat, æqualem numero 5. Igitur & eorum quadrati 36 (— 1 ʒ.& 25. æquales erunt. Additóque 1 ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 36. & 1 ʒ + 25. Ablatíſque 25. vtrobique, inter 11. & 1 ʒ. Diuiſis ergo 11. per 1. fiet 1 ʒ. 11. & 1 ℞. √ʒ 11. Et quia vnus numerorum poſitus fuit 6 + 1 ℞. erit ipſe numerus 6 + √ʒ 11. Alter verò, quem poſuimus 6 — 1 ℞. erit 6 — √ʒ 11. quemadmodum ſupra.

√ʒ (6 + 1 ℞)
√ʒ (6 — 1 ℞)
— 6 ℞ — 1 ʒ
36 + 6 ℞
√ʒ (36 — 1 ʒ)

42 *Dato numero, inuenire alium, qui cum dato efficiat quadratum numeri inuenti.* XLII.

Sit datus numerus 40. Ponatur inuentus numerus 1 ℞. cuius quadratus 1 ȝ. Ergo 1 ℞ + 40. æqualia sunt 1 ȝ. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$, ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 40. fit numerus 40 $\frac{1}{4}$. id est, $\frac{161}{4}$. ad cuius radicem quadratam √ȝ $\frac{161}{4}$. addita prædicta semisse $\frac{1}{2}$. fiet pretium 1 ℞. √ȝ $\frac{161}{4}$ + $\frac{1}{2}$. nimirum numerus quæsitus, qui cum dato numero 40. facit √ȝ $\frac{161}{4}$ + 40 $\frac{1}{2}$. qui numerus æqualis est quadrato numeri inuenti √ȝ $\frac{161}{4}$ + $\frac{1}{2}$. Nam hic in se ductus (vt apposita formula docet) producit numerum $\frac{162}{4}$ + √ȝ $\frac{644}{16}$. hoc est, 40 $\frac{1}{2}$ + √ȝ $\frac{161}{4}$. propterea quod hæ minutiæ √ȝ $\frac{644}{16}$. & √ȝ $\frac{161}{4}$. æquales sunt.

		√ȝ $\frac{161}{4}$	+	$\frac{1}{2}$
		√ȝ $\frac{161}{4}$	+	$\frac{1}{2}$
	+	√ȝ $\frac{161}{16}$	+	$\frac{1}{4}$
$\frac{161}{4}$	+	√ȝ $\frac{161}{16}$		
$\frac{162}{4}$ siue 40 $\frac{1}{2}$	+	√ȝ $\frac{644}{16}$		

Sit rursus datus numerus 110. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Ergo 1 ℞ + 110. æqualia sunt 1 ȝ. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 110. fit numerus 110 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{441}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{21}{2}$. addita prædicta semisse $\frac{1}{2}$. fit pretium 1 ℞. $\frac{22}{2}$. hoc est, 11. numerus quæsitus. Huius enim quadratus 121. æqualis est numero conflato ex dato 110. & inuento 11.

Hoc problema propositum etiam fuit in ænigmate 3. huius cap. in aliis tamen numeris.

XLIII. 43 *Datum numerum in duos partiri, vt summa quadratorum cum producto ex vno in alterum faciat datum numerum quemcunque.*

Sit datus numerus diuidendus 20. & quadrati cum producto ex vna parte in alteram faciant 309. Ponatur vnus numerorum 1 ℞. & alter 20 — 1 ℞. Quadrati faciunt summam 2 ȝ + 400 — 40 ℞. quæ cum producto ex vno in alterum, id est, cum 20 ℞ — 1 ȝ. facit numerum 1 ȝ + 400 — 20 ℞. æqualem 309. Additis 20 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 1 ȝ + 400. & 20 ℞ + 309. Et ablatis 309. vtrinque, inter 1 ȝ + 91. & 20 ℞. Et rursum ablatis 91. vtrinque, inter 1 ȝ. & 20 ℞ — 91. Semissis numeri radicum est 10. à cuius quadrato 100. ablatis 91. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita prædicta semisse 10. fit maior radix 13. Et eadem radice 3. dempta ex prædicta semisse 10 reliqua fiet minor radix 7. Duæ ergo partes numeri 20. sunt 13. & 7. Nam earum quadrati 169. & 49. vnà cum 91. producto ex vno in alterum faciunt 309.

Idem exequemur per simplicem æquationem, hoc modo. Ponatur maior pars 10 + 1 ℞. & minor 10 — 1 ℞. vt simul conficiant 20. Quadrati sunt 1 ȝ + 20 ℞ + 100. & 1 ȝ — 20 ℞ + 100. facientes summam 2 ȝ + 200. quæ cum producto ex vna parte in alteram, nimirum cum 100 — 1 ȝ (qui productus habetur, si 1 ȝ. id est, quadratus posterioris particulæ dematur ex 100. quadrato prioris particulæ, vt hîc apparet) facit numerum 1 ȝ + 300. æqualem 309. Ablatis ergo 300. vtrobique, manebit æqualitas inter 1 ȝ, & 9. Diuisisque 9. per 1. fiet 1 ȝ. 9. & 1 ℞. 3. Ergo maior pars posita 10 + 1 ℞ erit 13. Minor autem posita 10 — 1 ℞. erit 7. veluti prius.

10	+	1	℞
10	—	1	℞
100	—	1	ȝ

44 *Numerum inuenire, qui in datum numerum ductus faciat numerum æqualem ei, quem inuenti numeri quadratus cum quolibet numero, qui minor sit quadrato ex semisse dati numeri procreato facit.* XLIV.

Sit inueniendus numerus, qui ductus in 10. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 20. numero scilicet minore, quàm quadratus semissis numeri 10. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. qui ductus in 10. facit 10 ℞. æquales 1 ȝ + 20. nimirum quadrato ex 1 ℞. procreato, vnà cum 20. Ablatis 20. vtrobique, manebit æqualitas inter 10 ℞ — 20. & 1 ȝ. Semissis numeri radicum est 5. à cuius quadrato 25. demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix √ȝ 5. addita prædictæ semissi 5. facit √ȝ 5 + 5. maiorem radicem. Et eadem radix dempta ex prædicta semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 5 — √ȝ 5. Atque vterque numerus √ȝ 5 + 5. & 5 — √ȝ 5. problema conficit. Nam multiplicatio √ȝ 5 + 5 in 10. facit 50 + √ȝ 500. quantum nimirum fit ex 30 + √ȝ 500. quadrato numeri √ȝ 5 + 5. vnà cum 20. Item ex 5 — √ȝ 5. in 10. fit numerus 50 — √ȝ 500. æqualis quadrato 30 — √ȝ 500. numeri 5 — √ȝ 5. vnà cum 20.

Item sit inueniendus numerus, qui ductus in 20. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 84. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. Ex 1 ℞ in 20. fit numerus 20 ℞. æqualis 1 ȝ + 84. nimirum quadrato ex 1 ℞. procreato, vnà cum 84. Ablatis 84. vtrobique, manebit æqualitas inter 20 ℞ — 84. & 1 ȝ. Semissis numeri radicum est 10. à cuius quadrato 100. demptis 84. superest numerus 16. cuius radix 4. addita ad prædictam semissem 10. facit maiorem radicem 14. Ablata verò ex eadem semisse reliquam facit minorem radicem 6. Atque numerus vterque 14. & 6. problema soluit. Nam ex 14. in 20. fit numerus 280. æqualis ei, quem eius quadratus 196. cum 84. facit. Item ex 6. in 20. fit numerus 120. æqualis ei, quem eius quadratus 36. cum 84. efficit.

45 *Numerum inuenire, qui ad quemuis datum numerum additus faciat summam, quæ ducta in numerum inuentum faciat numerum datum quemcunque.* XLV.

SIT inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, producatur numerus 189. Ponatur numerus quæsitus 1℞. Additis 12. fit numerus 1℞ + 12. qui ductus in inuentum, nimirum in 1℞. facit numerum 1ʒ + 12℞. æqualem 189. Ablatis 12℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ. & 189 — 12℞. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. additis 189. fit numerus 225. à cuius radice 15. ablata prædicta semisse 6. manet valor 1℞. 9. numerus videlicet quæsitus. Hic enim additus ad 12. facit 21. & ex 21. in 9. fit datus numerus 189.

ITEM sit inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, fiat numerus 400. Ponatur 1℞. Additis 12. fit numerus 1℞ + 12. qui ductus in 1℞. facit numerum 1ʒ + 12℞. æqualem 400. Ablatísq. 12℞ vtrobique, manet æqualitas inter 1ʒ. & 400 — 12℞. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. additis 400. fit numerus 436. à cuius radice, √ʒ 436. si dematur prædicta semissis 6. reliqua fiet æstimatio vnius radicis √ʒ 436 — 6. numerus videlicet, quem inquirimus. Nam si addatur ad 12. fiet numerus √ʒ 436 + 6. vt in hac formula vides. Hic autem numerus √ʒ 436 + 6. multiplicatus per inuentum numerum √ʒ 436 — 6. facit numerum datum 400. vt hæc altera formula docet. quæ multiplicatio fiet, si 36. quadratus posterioris particulæ 6. subducatur à 436. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. declaratum fuit.

√ʒ 436 — 6
+ 12
———
√ʒ 436 + 6

√ʒ 436 + 6
√ʒ 436 — 6
———
400

XLVI. 46 *Datum numerum in duas partes secare, vt numerus procreatus ex vna in alteram ductus in quadratum dati numeri faciat numerum quemcunque datum.*

SIT numerus datus 20. secandus in duos, vt numerus ex eorum multiplicatione procreatus, si ducatur in 400. quadratum dati numeri, efficiat 300. Ponatur vnus numerus 1℞, & alter 20 — 1℞. Ex 1℞. in 20 — 1℞. fit numerus 20℞ — 1ʒ. Et hic ductus in 400. facit 8000℞ — 400ʒ. qui æqualis esse debet 300. Additis 400ʒ vtrobique, erit æquatio inter 8000℞. & 300 + 400ʒ. Et ablatis 300. vtrinque, inter 400ʒ. & 8000℞ — 300. Diuisis omnibus per 400. erit æquatio inter 1ʒ & 20℞ — $\frac{3}{4}$. Semissis radicum est 10. à cuius quadrato 100. siue $\frac{400}{4}$. demptis $\frac{3}{4}$. remanent $\frac{397}{4}$. addita semissi prædictæ 10. facit maiorem radicem 10 + √ʒ $\frac{397}{4}$. & ablata ex eadem semisse 10. relinquit radicem minorem 10 — √ʒ $\frac{397}{4}$. quæ sunt partes quæsitæ. Nam ex vna in alteram fit numerus $\frac{3}{4}$. si nimirum posterioris particulæ quadratum $\frac{397}{4}$. dematur ex 100. siue ex $\frac{400}{4}$. quadrato prioris particulæ. At ex $\frac{3}{4}$. in 400. quadratum dati numeri 20. fit numerus $\frac{1200}{4}$. hoc est, 300.

47 Nu-

47 *Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum mulctatum alio numero dato, producat datum numerum quemcunque.* XLVII.

INVENIENDVS sit numerus, cuius quadratus octonario auctus, si ducatur in eundem quadratum mulctatum ternario, producat 6942. Ponatur quæsitus numerus 1℞. Eius quadratus 1ʒ. auctus octonario, erit 1ʒ + 8. mulctatus verò ternario, 1ʒ — 3. Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt 1ʒʒ + 5ʒ — 24. vt in hac formula vides. qui numerus æqualis esse debet numero 6942. Additis ergo 24. vtrobique, erit æqualitas inter 1ʒʒ + 5ʒ. & 6966. Et ablatis 5ʒ. vtrinque, inter 1ʒʒ. & 6966 — 5ʒ. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis 6966. hoc est, $\frac{27864}{4}$. fit summa $\frac{27889}{4}$. ex cuius radice quadrata $\frac{167}{2}$. detracta semisse prædicta $\frac{5}{2}$. remanent $\frac{162}{2}$. hoc est, 81. vnus Zensus, cuius radix 9. dabit pretium vnius radicis pro numero quæsito. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & mulctatus ternario, 78. fitque ex 89. in 78. numerus datus 6942.

1ʒ + 8
1ʒ — 3
———
— 3ʒ — 24
1ʒʒ + 8ʒ
———
1ʒʒ + 5ʒ — 24

SI ijsdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter 1ʒʒ. & 34 — 5ʒ. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratũ $\frac{25}{4}$. additis 34. hoc est, $\frac{136}{4}$. fit summa $\frac{161}{4}$. à cuius radice quadrata √ʒ $\frac{161}{4}$. detracta prædicta semisse $\frac{5}{2}$. fiet 1ʒ. √ʒ $\frac{161}{4}$ — $\frac{5}{2}$. & huius radix quadrata, √ʒ (√ʒ $\frac{161}{4}$ — $\frac{5}{2}$.) numerus quæsitus. Nam eius quadratus √ʒ $\frac{161}{4}$ — $\frac{5}{2}$. auctus octonario, siue $\frac{16}{2}$. facit √ʒ $\frac{161}{4}$ + $\frac{11}{2}$. Mulctatus verò ternario, siue $\frac{6}{2}$. facit √ʒ $\frac{161}{4}$ — $\frac{11}{2}$. qui duo numeri inter se multiplicati producunt numerum 10. vt hæc formula indicat. Nam si $\frac{121}{4}$. quadratus posterioris particulæ detrahatur ex $\frac{161}{4}$. quadrato particulę prioris remanent $\frac{40}{4}$. hoc est, 10.

√ʒ $\frac{161}{4}$ + $\frac{11}{2}$
√ʒ $\frac{161}{4}$ — $\frac{11}{2}$
———
$\frac{40}{4}$. siue 10.

ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM ad res materiales contractorum, cum nonnullis exemplis ad ſecundas radices pertinentibus.

CAP. XXXI.

PROPONEMVS in hoc cap. præter ænigmata, quæſtiones nonnullas alias non admodum difficiles, quarum aliquæ non ſolum per regulam Falſi, verum etiam per ſolam regulam Trium expediri poſſunt; vt præſtantia regulæ Algebræ magis eluceat: quippe quæ omnes Arithmeticæ regulas complecti videatur. Hinc igitur exordiamur.

I. 1 *Summam pecuniæ, quam in ſacculo habeo, exiſtimat quidam aſtantium valere 600. Cuius errorem ſic corrigo. Si ad meam pecuniam accederent partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & à ſumma detraheretur $\frac{1}{12}$. eiuſdem meæ pecuniæ, tunc haberem 600. aureos. Quæſtio eſt, quanta ſit mea pecunia.*

PONATVR eſſe 1 ℞ aur. Si accedant partes $\frac{1}{2}$ ℞ $\frac{1}{3}$ ℞ $\frac{1}{4}$ ℞. quæ faciunt ſummam $1\frac{1}{12}$ ℞. fiet tota pecunia $2\frac{1}{12}$ ℞. Ablata autem $\frac{1}{12}$ ℞ reliquæ fient 2 ℞. æquales 600. Diuiſis igitur 600. per 2. fiet 1 ℞ 300. Atque hæc eſt pecunia in meo ſacculo. Nam ſi accedant partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimirum aurei 150. 100. & 75. fiet ſumma aur. 625. & dempta $\frac{1}{12}$. nimirum aur. 25. reliquus erit numerus 600.

II. 2 *Viator quidam conficit quotidie 9. milliaria. Alius decimo poſt die elapſo idem iter inſtituit, ex eodem loco, conficitque quotidie 14. milliaria. Quæritur, quoto die poſterior priorem aſſequetur.*

PONATVR, ambos ſimul futuros in 1 ℞ dierum. Ergo prior vltra 90. milliaria, quæ in decem diebus abſoluit, conficiet in 1 ℞ dierum, præterea 9 ℞. milliariorum, quandoquidem ſingulis diebus 9. milliaria conficit. Poſterior autem conficiens quotidie 14. milliaria, conficiet in 1 ℞. dierum, 14 ℞ milliariorum. Et quia in 1 ℞ dierum tot milliaria prior neceſſario confecerit, vna cum 90. quæ in 10. diebus abſoluit, quot poſterior in 1 ℞ dierum; quandoquidem

quidem tunc ſimul futuri ſunt: erit æquatio inter 9 ℞ + 90. & 14 ℞. Ablatiſque 9 ℞. vtrobique, inter 90. & 5 ℞. Diuiſis ergo 90. per 5. fiet 1 ℞. 18. Igitur poſt 18. dies conuenient. Nam prior in 18. diebus abſoluit milliaria 162. additiſque 90. quæ in præcedentibus 10. diebus confecit, fient 252. milliaria, quot videlicet poſterior in 18. diebus abſoluit.

SCHOLIVM.

HÆC porrò quæſtio in numeris abſtractis ita proponeretur. Quæratur numerus, qui ductus in 9. & ad productum addito 90. numerum efficiat æqualem ei, qui ex eodem numero in 14. multiplicato gignitur. Poſito enim numero quæſito 1 ℞. erunt 9 ℞ + 90. æquales numero 14 ℞. Ablatis ergo 9 ℞ vtrobique reperietur æqualitas inter 90. & 5 ℞. Diuiſiſq; 90. per 5. fiet 1 ℞ 18. numerus, quem quærimus. Nam hic ductus in 9. facit 162. & additis 90. fit numerus 252. æqualis ei, qui fit ex 18. in 14.

3 *Viator ſingulis diebus 9. milliaria conficit: alius vero decimo poſt die elapſo idem iter ingreditur. Quæritur quot milliaria abſoluet hic, vt priorem aſſequatur in 18. diebus.* III.

PONATVR 1 ℞. milliariorum. Ergo in 18. diebus conficiet 18 ℞. milliariorum. Cum ergo prior ſingulis diebus conficiens 9. milliaria, abſoluat in 18. diebus 162. milliaria, & additis 90. quæ perambulauit in prioribus 10. diebus, ſit manifeſtum, eum confeciſſe 252. milliaria. Eſt ergo æquatio inter 18 ℞. & 252. Diuiſiſque 252. per 18. fiet 1. ℞ 14. atque tot milliaria conficere debet poſterior, vt in 18. diebus priorem aſſequatur.

4 *Interrogatus quidam, quota ſit hora diei, ita reſpondit. Dimidiata pars horarum à media nocte vſque ad hoc inſtans ελapſarum addita ad tres quartas horarum futurarum ad ſequentem mediam noctem, indicabit numerum horarum, quem quæris. Quæritur ergo, quota tunc ſit hora.* IIII.

PONATVR 1 ℞ horarum à media nocte præteritarum. Cum ergo ab vna media nocte ad aliam mediam noctem effluant horæ 24 ſupererunt vſque ad mediam noctem inſequentem horę 24 — 1 ℞. Huius numeri $\frac{3}{4}$. faciunt $\frac{72 - 3℞}{4}$. quibus ſi addatur $\frac{1}{2}$ ℞. horarum, præteritarum, ſiue $\frac{2}{4}$ ℞. fiet numerus $\frac{72 - 1℞}{4}$. æqualis 1 ℞. Quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter

4 ℞.& 72 — 1 ℞.Additaque 1 ℞ vtrinque,erit æquatio inter 72.& 5 ℞. Diuisis ergo 72.per 5 fiet 1 ℞ 14 $\frac{2}{5}$.numerus horarum, quæ à media nocte vsque ad horam quæstionis effluxerunt. Ac proinde erit tunc hora 2. & Min.24.à meridie:cum 1. hora contineat 60. Min. quod ita probabitur. Dimidiata pars horarum 14 $\frac{2}{5}$. à media nocte præteritarum facit horas 7 $\frac{1}{5}$.quibus si addantur $\frac{3}{4}$.horarum 9 $\frac{3}{5}$. quæ supersunt vsque ad mediam noctem,nimirum 7 $\frac{1}{5}$.fient horæ 14 $\frac{2}{5}$.

EODEM modo procedemus,si sermo sit de horis ab occasu Solis,more Italorum.Nam si quis responderit, eam tunc instare horam, quæ ex $\frac{3}{4}$ horarum à proximo Solis occasu elapsarum additis ad semissem horarum,quæ vsque ad alterum occasum Solis supersunt,conficitur: Ponemus 1 ℞. horarum à proximo occasu præteritarum. Cum ergo ab vno occasu ad alium occasum fluant horæ 24.supererunt vsq; ad sequentem occasum horæ 24 — 1 ℞. Huius numeri semissis facit $\frac{24 - 1℞}{2}$. hoc est, $\frac{48 - 2℞}{4}$. quæ addita ad $\frac{3}{4}$. ℞ horarum elapsarum faciet $\frac{48 \times 1℞}{4}$. qui numerus æqualis est 1 ℞.quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 4 ℞.& 48 + 1 ℞.Ablataque 1 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 48.& 3 ℞.Diuisisque 48.per 3.fiet 1 ℞. 16. numerus horarum ab occasu præteritarum.quod ita probatur. Tres quartæ horarum 16.elapsarum faciunt 12.horas,quibus si addatur $\frac{1}{2}$.horarum 8.quæ vsque ad alterum occasum supersunt,nimirum 4.fient horæ 16.

V.

5 *Quidam habet duas mensuras vini, quarum vna valet 12. nummos,& altera 15. Vult autem ex vtroque vino miscere vnam mensuram,cuius pretium sit 13.nummorum. Quæritur, quantum vini de qualibet mensura recipiendum sit.*

PONE 1 ℞ partium mensuræ vilioris vini.Et pretiosioris vini mensuram 1 — 1 ℞.Tunc institue regulam Trium bis,hoc modo.

	mensura	numm.	mens.	numm.
Prioris vini	1	12	1 ℞ ?	facit 12 ℞.
Posterioris vini.	1	15	1 — 1 ℞ ?	facit 15 — 15 ℞.

Nam si 1. mensura prioris vini valet 12.numm. 1 ℞ vnius mensuræ eiusdem vini valebit 12 ℞ numm. Et si 1. mensura posterioris vini valet 15. numm. 1 — 1 ℞ mens. eiusdem vini valebit 15 — 15 ℞ numm. Igitur 1 ℞ mens. prioris vini, & 1 — 1 ℞ mens. posterioris valebunt 15 — 3 ℞ numm. quod pretium æquiualebit 13. numm. Additis ergo 3 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 3 ℞ + 13. & 15. Ablatisque 13 vtrinque, inter 3 ℞ & 2. Diuisis ergo 2 per 3 fiet 1 ℞. $\frac{2}{3}$.

De viliori igitur vino recipiendæ sunt $\frac{2}{3}$.vnius mensuræ,& de præstantiori $\frac{1}{3}$.vnius mensuræ quod sic probatur.

	mens.	numm.	mens.		numm.
Prioris vini.	1	12	$\frac{2}{3}$?	valent	8
Posterioris vini.	1	15	$\frac{1}{3}$?	valent	5.

Nam $\frac{2}{3}$.vnius mensuræ prioris vini valebunt 8. numm. & $\frac{1}{3}$. mensuræ vini posterioris,5. numm. atque idcirco 1.mensura mixta 13.numm.

6 *Mensura vini valet 10. numm. Quantum ergo aquæ commiscendum est vni mensuræ, vt 1.mensura mixta valeat 7. numm.?* VI.

PONE 1 ℞ mensuræ aquæ. Deinde institue regulam Trium hoc modo.

mens. vini.	mens. aquæ	numm.	mens. mixta		numm.
1 +	1 ℞	10	1?	valet	$\frac{10}{1 \times 1℞}$.

Nam si 1. mensura vini vnà cum 1 ℞ mensuræ aquæ valet 10 numm. 1. mensura ex vino & aqua mixta valebit $\frac{10}{1 \times 1℞}$. Itaque æquatio erit inter $\frac{10}{1 \times 1℞}$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10. & 7 + 7 ℞. Ablatisque 7. vtrobique, æquatio erit inter 3 & 7 ℞. Diuisisque 3 per 7.fiet 1 ℞. $\frac{3}{7}$. Ac tantum aquæ vnius mensuræ commiscendum est cum 1. mensura vini, vt 1. mensura mixta valeat 7.numm. quod ita probatur.

mens. ex vino & aqua	numm.	mens.		numm.
1 $\frac{3}{7}$.	10	1?	valet	7

Nam si 1 mensura vini cum $\frac{3}{7}$. vnius mensuræ aquæ valet 10. numm. 1. mensura sola mixta valebit 7.numm.

7 *Sunt in quodam vasculo 20.mensuræ vini,quarum qualibet valet 12.numm. Infunditur deinde vasculo illi aqua, donec vasculum vino illo & aqua repleatur. Et tunc 1.mensura mixta valet 10. numm. Quæritur,quanta sit capacitas illius vasculi.* VII.

PONE mensuras 20 + 1 ℞ vnius mensuræ. Deinde institue regulam Trium sic.

menſ. vini	menſ. aquæ	numm.	menſ. mixta		numm.
20 +	1 ꝶ	240	1. ?	valet	$\frac{240}{20\times 1\text{ꝶ}}$.

Nam ſi 1 menſura vini valet 12 numm. menſuræ vini 20+1 ꝶ menſ. aquæ ſimul valebunt 240 numm. Igitur 1 mẽſura mixta valebit $\frac{240}{20\times 1\text{ꝶ}}$. numm. atque ita inuenta eſt ęquatio inter $\frac{240}{20\times 1\text{ꝶ}}$. & 10. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 240. & 200+ 10 ꝶ. Et ablatis 200 vtrinque, manebit æqualitas inter 40. & 10 ꝶ. Diuiſiſque 40. per 10. fiet 1 ꝶ. 4. atque tot menſ. aquæ infuſę ſunt illi vaſculo, ita vt totum vaſculum capiat 24. menſuras. quod probatur ſic.

menſ. vini & aquæ	numm.	menſ.		numm.
24	240	1. ?	valet	10.

Nam ſi 24. menſurę ex vino & aqua valent 240 numm. propterea quod 1 menſ. vini valet 12 numm. valebit 1 menſ. mixta 10 numm.

VIII. 8 *Duo tabellarij ex duabus ciuitatibus, inter quas intercipiuntur Leucæ* 140. *eodem die proficiſcuntur, alter verſus alterum. Vnus quolibet die conficit* 8. *Leucas, alter verò* 6. *Leucas. Quæſtio eſt, quando conuenient, ſibique mutuò occurrent.*

Pone in 1 ꝶ. dierum. & inſtitue regulam Trium ſic.

Dies	Leucæ	Dies	Leucæ
1	8	1 ꝶ ?	8 ꝶ
1	6	1 ꝶ ?	6 ꝶ

Prior ergo in 1 ꝶ dierum conficiet 8 ꝶ. Leucarum. Et poſterior 6 ꝶ. atque ambo ſimul emenſi erunt 14 ꝶ leucarum, hoc eſt, leucas 140. Eſt ergo æquatio inter 14 ꝶ. & 140. Diuiſis igitur 140. per 14. fiet 1 ꝶ. 10. Atque decimo die peracto conuenient. quod ſic probo.

Dies	Leucæ	Dies	Leucæ
1	8	10 ?	80
1	6	10 ?	60

Nam prior in 10. diebus conficiet 80 leucas, & poſterior 60. quæ ſimul totum ſpatium intermedium leucarum 140. conſtituunt.

9 Qui-

9 *Quidam permutans* 568. *aureos, pro eis recipit quatuor genera monetarum. Primi generis monetæ* 7. *faciunt* 1. *aur. Secundi generis,* 18. *Tertij,* 21. *& quarti* 28. *Recipit autem ex quolibet genere eundem numerum monetarum. Quæritur, quotnam monetas cuiuſlibet generis accipiat.* IX.

Ponatvr 1 ꝶ monetæ cuiuſlibet, & regula Trium inſtituatur quater ſic.

Mon.	aur.	Mon.	aur.
7	1	1 ꝶ ?	$\frac{1}{7}$ ꝶ
18	1	1 ꝶ ?	$\frac{1}{18}$ ꝶ
21	1	1 ꝶ ?	$\frac{1}{21}$ ꝶ
28	1	1 ꝶ ?	$\frac{1}{28}$ ꝶ

Nam ſi 7 mon. faciunt 1 aur. 1 ꝶ mon. faciet $\frac{1}{7}$ ꝶ. aur. & ſic de reliquis. Faciunt autem fractiones in quarto loco deſcriptæ numerum $\frac{71}{252}$ ꝶ aur. æqualem numero 568. aur. Diuiſis ergo 568. per $\frac{71}{252}$. fiet 1 ꝶ. 2016. atque tot monetas ex quolibet genere recipiet. quod ſic probo.

Mon.	aur.	Mon.	aur.
7	1	2016 ?	288
18	1	2016 ?	112
21	1	2016 ?	96
28	1	2016 ?	72

Nam 2016. mon. primi generis faciunt 288 aur. Secundi autem generis, 112 aur. Tertij, 96 aur. & quarti 72 aur. qui omnes faciunt ſummam 568 aur.

10 *Mercator quidam emit lanam, & ceram pro* 124. *aur. Conſtant autem* 100. *libræ lanæ* 7. *aur. &* 100. *lib. ceræ* 14. *aur. emitque duplo plures lib. lanæ, quam ceræ. Quæſtio eſt, quot lib. vtriuſque rei emerit.* X.

Pone 1 ꝶ librarum cerę, & 2 ꝶ librarum lanæ: & inſtitue bis regulam Trium, hoc modo.

lib.	aur.	lib.	aur.
100 lanæ	7	2 ꝶ lib. lanæ?	$\frac{14}{100}$ ꝶ
100 ceræ	14	1 ꝶ lib. cæræ ?	$\frac{14}{100}$ ꝶ

Erit ergo inuenta æquatio inter $\frac{28}{100}$ ℞ aur. & 124 aur. Diuisisque 124. per $\frac{28}{100}$. fiet 1 ℞. 442 $\frac{6}{7}$. atque tot lib. ceræ emit, & lanæ lib. 885 $\frac{5}{7}$. quod ita probatur.

lib.	aur.	lib.	aur.
100 lanæ	7	885 $\frac{5}{7}$?	62
100 ceræ	14	442 $\frac{6}{7}$?	62

Ita enim pro lana, ac cera expendit 124. aur.

XI. 11 *Emit quidam aliquot vlnas panni, quas iterum vendidit. Emit autem 5. vlnas pro 7. aur. & vēdidit 7. vlnas pro 11. aur. lucratúsque est hac mercatura 100. aur. Quæritur, quotnam fuerint illæ vlnæ.*

Pone 1 ℞ vlnarum, & institue regulam Trium bis.

vlnæ	aur.	vlnæ	aur.
5	7	1 ℞?	$\frac{7}{5}$ ℞
7	11	1 ℞?	$\frac{11}{7}$ ℞

Vides, si $\frac{7}{5}$ ℞ aur. quos expendit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$ ℞ aur. quos recepit, relinqui $\frac{6}{35}$ ℞ aur. pro lucro. Est ergo æquatio inter $\frac{6}{35}$ ℞ aur. & 100. aur. Diuisisque 100. per $\frac{6}{35}$. fiet 1 ℞. 583 $\frac{1}{3}$. vln. atque tot fuerunt vlnæ emptæ, atque venditæ, quod sic probo.

vlnæ	aur.	vlnæ	aur.
5	7	583 $\frac{1}{3}$?	816 $\frac{2}{3}$.
7	11	583 $\frac{1}{3}$?	916 $\frac{2}{3}$

Vbi cernis, eum lucratum esse 100. aureos.

XII. 12 *Emit quidam aliquot vlnas panni, expendens 11. aur. pro 7. vlnis. Et totum pannum iterum vendidit, coactúsque est dare 5. vlnas pro 7. aureis: perdidítque in hac mercatura 100. aur. Quæritur, quot vlnas emerit, ac vendiderit.*

Pone 1 ℞. vln. &c. vt prius. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

vln.	aur.	vln.	aur.
7	11	1 ℞?	$\frac{11}{7}$ ℞
5	7	1 ℞?	$\frac{7}{5}$ ℞

Igitur

Igitur si $\frac{7}{5}$ ℞ aur. quos recepit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$. ℞ aur. quos expendit, emerget damnum $\frac{6}{35}$ ℞ aur. erítque æquatio inter $\frac{6}{35}$ ℞ aur. & 100. aur. Diuisis ergo 100. per $\frac{6}{35}$. fiet 1 ℞. 583 $\frac{1}{3}$. vln. atque tot vlnæ fuerunt emptæ, ac venditæ. quod sic probo.

vln.	aur.	vln.	aur.
7	11	583 $\frac{1}{3}$?	916 $\frac{2}{3}$.
5	7	583 $\frac{1}{3}$?	816 $\frac{2}{3}$.

Vides ergo eum damnum fecisse 100. aureorum.

13 *Libræ 100. ceræ emuntur 17. aureis. Quæritur, quot libræ vendendæ sint pro 1. aur. vt 102. lucrentur 18. aur.* XIII.

Pone 1 ℞ librarum, & institue regulam Trium bis.

aur.	lib.	aur.	lib.
17	100.	102?	600
1	1 ℞	102 + 18?	120 ℞

Nam 102. aur. dabunt 600. lib. Et si pro 1. aur. datur 1 ℞. lib. dabuntur 120 ℞ lib. pro aur. 102 + 18. quæ 120 ℞. æquales sunt 600. lib. quia tota cera venditur.

Erítque æquatio inter 120 ℞ lib. & 600. lib. Diuisis ergo 600. per 120. fiet 1 ℞. 5. lib. Atque tot libræ vendendæ sunt pro 1. aur. vt in 600. libris fiat lucrum 18. aur. pro 102. aur. quod sic probo.

lib.	aur.	lib.	aur.
100	17	600?	102
5	1	600?	120

Vbi in priori exemplo vides 600. lib. facere 102. aur. In posteriori vero 120. aur. id est, 102 + 18.

14 *Emit quidam 100. lib. ceræ pro 17. aur. in quibus vendendis fecit damnum 18. aur. pro 102. aur. Quæritur quot libras pro 1. aur. dederit.* XIIII.

Pone 1 ℞. librarum, &c.

aur.	lib.	aur.	lib.
17	100	102?	600
1	1 ℞	102 − 18?	84 ℞

Erítq. æquatio inter 84 ♃ lib. & 600. lib. Diuisis igitur 600. per 84. fiet 1♃. $7\frac{1}{7}$. lib. Atque tot lib. dedit pro 1. aur. vt damnum fecerit 18. aur. in 102. aur. & 600. libris. quod sic probo.

lib.	aur.	lib.	aur.
100	17	600?	102
$7\frac{1}{7}$	1	600?	84

Vbi vides expensos fuisse 102. aur. pro 600. lib. Et pro eisdem receptos fuisse 84. aur. id est, 102 — 18.

XV. 15 *Tres mercatores ineunt societatem. Primus ponit 40. aur. per 2. menses. Secundus 20. aur. per 5. menses. Tertius summam quandam aur. per 3. menses. Lucrati sunt autem 3276. aur. de quibus primo obtigerunt 1040. aur. Secundo 1300. & tertio 936. Quæritur quot aureos tertius posuerit.*

Ponatur 1 ♃. aureorum.

aur.	mens.	lucrum aur.	aur.
40	2	3276	1040 primi
20	5	3276	1300 secundi
1 ♃	3	3276	936 tertij

Per multiplicationem aureorum in tempus, reducentur numeri ad regulam Trium hoc modo.

252	80	3276?	1040 primi
	100	3276?	1300 secundi
	3 ♃. vel 72	3276?	936 tertij

Vt autem inueniatur æquatio, & pretium 1 ♃. inueniendus est numerus primus in regula Trium, qui nimirum summa est trium numerorum 80. 100. & 3♃. hoc modo. Quoniam ita se habet primus ille numerus inueniendus ad 80. vt 3276. ad 1040. [a] fiet idem numerus ex primo in quartum, qui ex secundo in tertium. Si ergo 262080. productus ex secundo 80. in tertium 3276. diuidatur per quartum 1040. exibit primus 252. Ex quo si dematur summa ex 80. & 100. collecta, nimirum 180. remanebit pretium 3♃. videlicet 72. Diuisis ergo 72. per 3. fiet 1♃ 24. numerus aur. quos tertius posuit. quæ pecunia ducta in 3. menses facit 72. &c.

[a] 19. septimi.

Pretium 1♃. hoc etiam modo reperietur. Inuento primo numero 252. [b] erit numerus 235872. factus ex primo 252. in quartum 936. æqualis numero 9828 ♃ facto ex secundo 3 ♃. in tertium 3276. Diuisis igitur 235872. per 9828. fiet 1♃. 24. vt prius.

[b] 19. septimi.

16 *Tres socij volunt inter se distribuere 455. aur. ea conditione, vt quoties primus recipit 2. toties secundus recipiat 3. Et quoties secundus recipit 4. toties tertius recipiat 5. Quæritur, quot aureos quilibet recipiat ex illa summa 455. aureorum.* XVI.

Pone primum accipere 1♃. Et secundum $1\frac{1}{2}$♃. vt habeat numerum sesquialterum ad primum. Tertium verò $1\frac{7}{8}$♃. vt habeat numerum sesquiquartum ad secundum. Erit ergo æquatio inter $4\frac{3}{8}$♃. & 455. Diuisis igitur 455 per $4\frac{3}{8}$. fiet 1♃. 104. numerus primi. Secundus ergo accipiet 156. nimirum $1\frac{1}{2}$♃. Tertius verò 195. nimirum $1\frac{7}{8}$♃. quod sic probatur. Tres numeri 104. 156. 195. faciunt summam 455. diuidendam. Et quoties 2. sunt in 104. toties 3. sunt in 156. Et quoties 4. sunt in 156. toties 5. sunt in 195. cum idem Quotiens fiat, diuidendo 104. per 2. & 156 per 3. Item diuidendo 156 per 4 & 195 per 5.

1	♃
$1\frac{1}{2}$	♃
$1\frac{7}{8}$	♃

Eadem via tenenda est, si plures socij fuerint: vt si fuerint quatuor, & quoties tertius accipit 6. toties quartus accipiat 7. ponendæ erunt $2\frac{3}{16}$ ♃. pro quarto, vt habeat numerum sesquisextum ad tertium. Si igitur diuidendi sint aurei 21840. erit æquatio inter $6\frac{9}{16}$ ♃. & 21840. Diuisis igitur 21840. per $6\frac{9}{16}$. fiet 1♃. 3328. portio primi, quem posuimus accipere 1♃. Portio secundi erit $1\frac{1}{2}$♃. id est, 4992. Portio tertij erit $1\frac{7}{8}$♃ nimirum 6240. Portio denique quarti erit $2\frac{3}{16}$♃, hoc est, 7280. quod probabis, vt prius. Nam omnes quatuor portiones faciũt summam diuidendam 21840. & idem Quotiens fit, diuidendo 3328. per 2. & 4992. per 3. Atque idem quoque, diuidendo 4992 per 4. & 6240. per 5. Denique idem etiam, diuidendo 6240 per 6. & 7280 per 7.

1	♃
$1\frac{1}{2}$	♃
$1\frac{7}{8}$	♃
$2\frac{3}{16}$	♃

17 *Habeo quatuor auri fragmenta, quæ æquiualent aureis 164. Et primum in valore duplum est secundi: secundum triplum tertij: & tertium quadruplum quarti. Quæritur valor singulorum fragmentorum.* XVII.

Pone quartum, siue minimum 1♃. aur. tertium 4♃. secundum 12♃. & primum 24♃. Sunt ergo 41♃. æquales 164 aur. Diuisisque 164 per 41. fiet 1♃. 4. atque tot aureis æquiualet minimum fragmentum, siue quartum: atque idcirco tertium valebit 16 aur.

cundum 48. & primum 96. qui quidem aurei faciunt summam 164. & seruant proportiones in quæstione expressas.

XVIII. 18 *Tres socij conferunt totam suam pecuniam, atque ita colligunt 100.aur. Est autem pecunia primi subdupla pecuniæ secundi: & pecunia secundi subtripla pecuniæ tertij. Quæritur, quantum quisque contulerit.*

Pone primum contulisse 1 ℞. Secundum 2 ℞.& tertium 6 ℞. Eruntque 9 ℞. æquales 100 aur. Diuisis igitur 100 per 9. fiet 1 ℞. 11 $\frac{1}{9}$. pecunia primi. Secundi pecunia idcirco erit 22 $\frac{2}{9}$. Et tertij 66 $\frac{6}{9}$. quæ tres summæ faciunt 100 aur. seruántque proportiones in quęstione expressas.

XIX. 19 *Moriens quidam testamentum condit, relinquitque 3000. aur. distribuendos inter vxorem, filium, & duas filias, hac conditione, vt portio filij sit dupla portionis matris: & portio matris dupla quoque portionis vnius filiæ. Quæritur, quanta sit vniuscuiusque portio.*

Ponatur portio vnius filiæ 1 ℞. matris 2 ℞. & filij 4 ℞. Erunt ergo 8 ℞. æquales 3000. aur.

Portio	filiæ	1 ℞	id est,	375	aur.
	filiæ	1 ℞		375	
	matris	2 ℞		750	
	filij	4 ℞		1500	

Diuisisque 3000. per 8. fiet 1 ℞. 375. portio vnius filiæ, atque idcirco portio matris 750. & filij 1500.

XX. 20 *Mercator quidam qualibet parte tertia suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{20}$. eiusdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiusdē pecuniæ lucratur $\frac{1}{9}$. lucri prioris. Et sic omnib. computatis, inuenit 864. aur. Quæritur quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.*

Ponatur 1 ℞ pecuniæ. Ergo primum lucrum fuit $\frac{3}{20}$ ℞. quandoquidem quælibet $\frac{1}{3}$ ℞ lucrata est $\frac{1}{20}$ ℞. Deinde secundum lucrum fuit $\frac{3}{9}$ ℞ prioris lucri $\frac{3}{20}$ ℞. nimirum $\frac{9}{180}$ ℞ hoc est, $\frac{1}{20}$ ℞. quandoquidem quælibet $\frac{1}{3}$ ℞ lucrata est $\frac{1}{9}$. prioris lucri. Iam 1 ℞. $\frac{3}{20}$ ℞. & $\frac{1}{20}$ ℞. faciunt summam 1 $\frac{1}{5}$ ℞. æqualem 864 aur. Diuisis ergo 864 per 1 $\frac{1}{5}$. fiet 1 ℞. 720. atque tot aureos habuit mercator ille. Ergo lucrum primum $\frac{3}{20}$. ℞. fuit 108. aur. Et lucrum secundum $\frac{1}{20}$. fuit 36 aur. quæ duo lucra cum 720. aur. faciunt 864 aur.

21 *Mercator quidā qualibet parte quarta suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{20}$. eiusdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecuniæ lucratur $\frac{1}{10}$. summæ ex eadem pecunia, & lucro collectæ. Et sic singulis computatis, inuenit mercator ille 400 aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.* XXI.

Pone pecuniam fuisse 1 ℞. Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{20}$ ℞. hoc est, $\frac{1}{5}$ ℞. Deinde secundum lucrum fuit $\frac{18}{50}$. ℞ siue $\frac{9}{25}$. ℞. nimirum $\frac{3}{10}$. summæ $\frac{6}{5}$ ℞. ex priori lucro, & 1 ℞. collectæ. Iam 1 ℞. $\frac{1}{5}$ ℞. & $\frac{9}{25}$ ℞. faciunt summam 1 $\frac{14}{25}$ ℞. æqualem 400. aur. Diuisis ergo 400 per 1 $\frac{14}{25}$. fiet 1 ℞. 256 $\frac{16}{39}$. aur. atque tot aur. habuit mercator ille. Primum autem lucrum $\frac{1}{5}$. ℞. fuit aur. 51 $\frac{11}{39}$. Secundum vero lucrum $\frac{9}{25}$ ℞. fuit 92 $\frac{4}{13}$. quæ duo lucra cum 256 $\frac{16}{39}$. faciunt 400. aur.

22 *Mercator quidam qualibet parte quarta suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{30}$. eiusdem pecuniæ. Deinde singulis partibus quintis eiusdem pecuniæ prioris lucratur $\frac{1}{27}$. eiusdem pecuniæ. Atque ita singulis computatis, inuenit 2136. aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.* XXII.

Pone pecuniam fuisse 1 ℞. Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{30}$. ℞. siue $\frac{2}{15}$. ℞. Secundum vero $\frac{5}{27}$ ℞. Iam 1 ℞. $\frac{2}{15}$ ℞. & $\frac{5}{27}$ ℞. faciunt summam 1 $\frac{43}{135}$ ℞. æqualem 2136 aur. Diuisis igitur 2136 per 1 $\frac{43}{135}$ fiet 1 ℞. 1620 aur. pecunia mercatoris. Ergo primum lucrum $\frac{2}{15}$ ℞. fuit 216 aur. Secundum vero $\frac{5}{27}$ ℞. fuit 300 aur. quæ duo lucra cum 1620. aur. faciunt summam 2136 aur.

23 *Tria poma aurea venduntur 11. denariolis. Quæritur quot poma vendantur pro 572. denariolis.* XXIII.

Haec quæstio per regulam Trium expedietur hoc modo.

Denar.	pom. aur.	Denar.	pom. aur.
11	3	572?	156

Per Algebram vero ſoluetur, ſi pro quarto numero inueniendo in regula Trium ponatur 1 ℞. pomorum. [a] Et quia tantum fit ex primo in

a 19. ſeptimi.

Denar.	pom. aur.	Denar.	pom. aur.
11	3	572?	1 ℞

quartum, quantum ex ſecundo in tertium, erit numerus 11 ℞ productus ex primo in quartum, æqualis numero 1716. producto ex ſecundo in tertium. Diuiſis ergo 1716. per 11. fiet 1 ℞. 156. numerus pomorum, quæ conſtant 572 denar. Vides ergo excellentiam Algebræ etiam in quæſtionibus regulæ Trium. quod etiam in ſequenti exemplo apparebit.

XXIV. 24 *Libræ 47. quarundam mercium conſtant aur. 30. Quæritur, quanti conſtabunt 100. libræ.*

PONATVR 1 ℞. vt hic vides.

lib.	aur.	lib.	aur.
47	30	100?	1 ℞

Eſt ergo æquatio inter 47 ℞. & 3000. Diuiſis ergo 3000 per 47 fiet 1 ℞. $63\frac{39}{47}$. aur.

XXV. 25 *Eſt maſſa quædam argenti pondus habens marcarum 7. quarum quælibet continet 5. ſemiuncias puri argenti, & 11. ſemiuncias cupri. Commiſcetur autem maſſæ illi liquatæ alia maſſa cupri puri, ponderis 21. marcarum. Quæritur quantum argenti puri habitura ſit quælibet marca illius maſſæ nouæ 28. marcarum.*

HIC certum eſt, pauciores ſemiuncias puri argenti contineri in 28. marcis, quam in 7. quippe cum ſemiunciæ in his contentæ diſtributæ ſint æqualiter inter 28. marcas. Et quia in illis 7. ponuntur 35. ſemiunciæ puri argenti, diuiſis his per 28. reperientur in qualibet marca $1\frac{1}{4}$. ſemiunciæ puri argenti. Si igitur 1 marca pondus habet 16. ſemiunciarum, erunt in qualibet marca $14\frac{3}{4}$. ſemiunciæ cupri. Hoc autem ita eſſe, facile probabitur. Nam pondus 21. marcarum cupri puri, faciet 336. ſemiuncias cupri: Et ſi accedant 77 ſemiunciæ in prioribus 7. marcis contentæ, fient ſemiunciæ cupri 413. qui numerus etiam producitur ex $14\frac{3}{4}$. (quot nimirum ſemiuncias cupri in qualibet marca ineſſe diximus) in 28. marcas. Sed vt quæſtio hæc ſoluatur per Algebram, ſic ſtabit exemplum ad regulam Trium inuerſam.

arg.

arg. mix.	arg. pur.	arg. mix.	arg. pur.
7. marc.	5. ſemiunc.	28. marc?	ſemiun. 1 ℞.

Et quoniam in regula Trium inuerſa, numerus factus ex primo in ſecundum æqualis eſt numero facto ex tertio in quartum, propterea quod tertius numerus in regula Trium ordinaria deberet tenere primum locum, vt in Arithmetica practica diximus: erit æquatio inter 35. & 28 ℞. Diuiſiſque 35 per 28 fiet 1 ℞. puri argenti ſemiunciæ $1\frac{1}{4}$. vt prius.

26 *Quinque conuictores ſingulis hebdomadis ſoluunt 11. aur. quantum ergo ſoluent 18. conuictores in 40. diebus.* XXVI.

HÆC quæſtio ſpectat ad regulam Trium compoſitam. quæ ad

Conuict.	Dies	aur.	Conuict.	Dies	aur.
5	7	11	18	40?	1 ℞

regulam Trium ſimplicem reducitur per multiplicationem conuictorum in tempus, vt hic.

Conuict.	aur.	Conuict.	aur.
35	11	720?	1 ℞

Nam tantum ſoluet vnus in duobus diebus, quantum duo in vno. Et tantum vnus in 35. diebus quantum 5. in ſeptem. atque hæc eſt ratio, cur dicta multiplicatio fieri debeat. Poſito igitur quarto numero 1 ℞. erit æquatio inter 35 ℞. & 7920. Diuiſis ergo 7920. per 35. fiet 1 ℞. $226\frac{2}{7}$. aur. quot nimirum 18. conuictores in 40. diebus ſoluent.

27 *Pro tribus ponderibus æqualibus vehendis per leucas 7. debentur vectori 11. groſſi, quorum quilibet valet denariolos 25. Quæro iam, quot ſimilia pondera ſint vehenda per 40. leucas pro 400. groſſis.* XXVII

HÆC etiam quæſtio ad regulam Trium compoſitam pertinet, vt hic vides.

Groſſi	Pond.	Leuc.	Groſſi	Pond.	Leuc.
11	3	7	400?	1 ℞	40

Pone 1 ℞. Pond. vehendorum, & reduc regulam ad regulam Trium ordinariam per multiplicationem pond. in ſpatium itinerarium: quandoquidem tantum ſoluendum eſt pro 1. pondere per 2 Leucas, quantum pro 2 pond. per 1 Leucam: & tantum per 1 pond. per 21 Leuc. quantum pro 3 pond. per 7 Leuc. quam reductionem hic cernis.

Groſſi	Pond.	Groſſi	Pond.
11	21	400?	40 ℞

Erit igitur æquatio inter 440 ℞. & 8400. Diuiſis ergo 8400. per 440. fiet 1 ℞. 19 $\frac{1}{11}$. Pond. vehenda per 40 Leucas pro 400 groſſis. Nam ſi pro 3. pond. per 7. Leucas ſoluuntur 11. groſſi, pro 19 $\frac{1}{11}$. pond. per 7 Leucas ſoluentur 70 groſſi. vt hic vides.

Pond.	Groſſi	Pond.	Groſſi
3	11	19 $\frac{1}{11}$?	70

Deinde ſi per 7 Leucas ſoluuntur 70 groſſi, per 40 Leucas ſoluentur 400 groſſi, vt hic vides.

Leuc.	Groſſi	Leuc.	Groſſi
7	70	40?	400

XXVIII. 28 *Tres ſartores perficiunt 7. tunicas 14. diebus. Quot igitur diebus duo ſartores perficient 8. tunicas?*

Pone 1 ℞. dierum.

Sart.	Dies	Tunic.	Sart.	Dies	Tunic.
3	14	7	2	1 ℞	8

Reductis numeris per multiplicationem ad regulam Trium ordinariam, vt hic.

42	7	2 ℞	8

Erit æquatio inter 336. & 14 ℞. Diuiſis ergo 336 per 14. fiet 1 ℞. 24. dies, in quibus duo ſartores 8. tunicas perficient. Nam ſi 3. ſartores in 14. diebus perficiunt 7. tunicas, duo ſartores in 14. diebus, nimirum in eodem tempore, perficient 4 $\frac{2}{3}$. tunicas, vt hic cernitur.

Sart.	tunic.	Sart.	tunic.
3	7	2?	4 $\frac{2}{3}$.

Deinde ſi tunicæ 4 $\frac{2}{3}$. abſoluuntur 14. diebus, tunicæ 8. abſoluentur diebus 24. vt hic conſtat.

tunic.	Dies	tunic.	Dies
4 $\frac{2}{3}$	14	8?	24

29 Ser-

29 *Seruo cuidam promiſit quidam ciuis pro 12. menſibus mercedem 10. aur. & 1. tunicam. Poſt 7. autem menſes dedit illi tunicam, & 2. aur. Quanti ergo æſtimata eſt tunica illa?* XXIX.

Pone eius pretium eſſe 1 ℞. aur. Et dic. Si 12. menſes poſcunt 1 ℞ + 10 aur. quantum poſtulat 1. menſis? inueniéſque $\frac{1\,℞\times 10}{12}$ aur. Rurſum dic. Si 7. menſes poſcunt 1 ℞ + 2 aur. quantum poſtulat 1. menſis? inueniéſque $\frac{1\,℞\times 2}{7}$ aur. vt hic vides.

Menſes	Aurei	Menſis	Aurei
12	1 ℞ + 10	1?	$\frac{1\,℞\times 10}{12}$
7	1 ℞ + 2	1?	$\frac{1\,℞\times 2}{7}$

Erit ergo æquatio inter $\frac{1\,℞\times 10}{12}$ & $\frac{1\,℞\times 2}{7}$. cum vterque numerus ſit merces 1. menſis. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 7 ℞ + 70. & 12 ℞ + 24. Ablatis ergo 24 vtrinque, erit æquatio inter 7 ℞ + 46. & 12 ℞. Rurſumque ablatis 7 ℞. vtrobique, inter 46 & 5 ℞. Diuiſis igitur 46 per 5. fiet 1 ℞. 9 $\frac{1}{5}$ aur. pro pretio tunicæ. Nam hac ratione merces 12. menſium erit 19 $\frac{1}{5}$ aur. nimirum 10 aur. & tunica. Igitur merces 7 menſium erit 11 $\frac{1}{5}$ aur. vt hic vides. nimirum 2. aur. & pretium tunicæ 9 $\frac{1}{5}$. aur.

Menſes	aur.	Menſes	aur.
12	19 $\frac{1}{5}$	7?	11 $\frac{1}{5}$

30 *Ciuis quidam ſeruo ſuo pigro ita mercedem 30. dierum conſtituit, vt laboranti ſingulis diebus dare velit 7. groſſos: ocíantem verò mulctare 5. groſſis. Ratione autem inita poſt 30. dies, ſeruus ille neque recipit aliquid, neque domino aliquid reddit. Quot igitur diebus laborauit, & quot laborare intermiſit?* XXX.

Pone 1 ℞. dierum laboris, ideóque 30 — 1 ℞ dierum otij. Et inſtitue regulam Trium bis, hoc modo.

	Dies	groſſi	Dies	groſſi
Laboris	1	7	1 ℞?	7 ℞
Otij	1	5	30 — 1 ℞?	150 — 5 ℞

Sſ

Quia igitur tantum meruit, quantum demeruit, erit æquatio inter 7 ℞. & 150 — 5 ℞. Additisque 5 ℞ vtrobique, inter 12 ℞. & 150. Diuisis ergo 150 per 12. fiet 1 ℞. 12 $\frac{1}{2}$ dies laboris, & otij 17 $\frac{1}{2}$. quod ita probatur.

	Dies	grossos	Dies	grossos
Laboris	1	7	12 $\frac{1}{2}$?	87 $\frac{1}{2}$
Otij	1	5	17 $\frac{1}{2}$?	87 $\frac{1}{2}$

Vbi vides, tantam esse mercedem, quanta est mulcta.

XXXI. 31 *Mercator quidam vendidit 20. libras partim croci, & partim zinziberis, aureis 45. Vendidit autem 1 lib. croci aureis 3. & 1 libram zinziberis $\frac{1}{2}$. aur. Quæstio est, quot libræ croci venditæ sint, & quot zinziberis?*

PONE 1 ℞ librarum croci, ideoque 20 — 1 ℞ librarum zinziberis, & institue regulam Trium bis, hoc modo.

	lib.	aur.	lib.	aur.
Croci	1	3	1 ℞?	3 ℞
Zinzib.	1	$\frac{1}{2}$	20 — 1 ℞?	$\frac{20-1℞}{2}$

Aequatio igitur est inter summam ex 3 ℞ aur. & $\frac{20-1℞}{2}$ aur. collectam, & 45 aur. Est autem illa summa 10 + $\frac{5}{2}$ ℞ aur. (Nam $\frac{20-1℞}{2}$ æquiualent numero 10 — $\frac{1}{2}$ ℞. cui si addantur 3 ℞ aur. fit summa 10 + $\frac{5}{2}$ ℞.) Igitur æquatio est inter aur. 10 + $\frac{5}{2}$ ℞ aur. & 45. aur. Ablatisque 10 aur. vtrobique, inter $\frac{5}{2}$ ℞. & 35. Diuisis igitur 35 per $\frac{5}{2}$. fiet 1 ℞. 14. Atque tot lib. croci venditę sunt, ac proinde 6 lib. zinziberis. quod ita probatur.

	lib.	aur.	lib.	aur.
Croci	1	3	14?	42
Zinzib.	1	$\frac{1}{2}$	6?	3

Vbi vides ex pretio 14 libr. croci, & 6. lib. zinziberis colligi 45. aureos.

XXXII. 32 *Negociator quidam habet duo genera monetarum numero 560. quæ æquiualent 160. aureis. Quædam illarum monetarum valent $\frac{1}{3}$. aur. & reliquarum qualibet $\frac{1}{4}$ aureis. Quæritur*

Quæritur numerus priorum, ac posteriorum.

PONE 1 ℞. priorum, & posteriorum 560 — 1 ℞. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

Monet.	aur.	Monet.	aur.
1	$\frac{1}{3}$	1 ℞?	$\frac{1}{3}$ ℞
1	$\frac{1}{4}$	560 — 1 ℞?	$\frac{560-1℞}{4}$

Quarti numeri inuenti æquiualent 160 aur. Summa illorum numerorum facit aur. 140 + $\frac{1}{12}$ ℞. (Nam $\frac{560-1℞}{4}$. æquiualent numero 140 — $\frac{1}{4}$ ℞. cui si addatur $\frac{1}{3}$ ℞. fit summa 140 + $\frac{1}{12}$ ℞.) Est igitur æquatio inter aur. 140 + $\frac{1}{12}$ ℞. & 160 aur. Ablatisque 140 vtrinque, inter $\frac{1}{12}$ ℞. & 20. Diuisis igitur 20 per $\frac{1}{12}$. fiet 1 ℞. 240. atq; tot monetæ sunt prioris generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{3}$. aur. posterioris autem generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{4}$. aur. sunt 320. quod ita probatur.

Monet.	aur.	Monet.	aur.
1	$\frac{1}{3}$	240?	80
1	$\frac{1}{4}$	320?	80

Vbi cernis, numeros in certo loco positos facere 160. aur.

33 *Quidam lanio boues emit, qui interrogatus, quanti vnum emerit, respondit: Quanto 10. boues emi pluris 40. aureis, tanto 18. boues emissem pluris 96. aureis. Quæritur de pretio.* XXXIII

HÆC quæstio soluetur per modum regulæ Algebræ sine numeris Cossicis, & sine positione 1 ℞. quod sanè peregregium videri possit. quod etiam in proximis tribus quæstionibus, quæ sequuntur, faciemus. Quoniam igitur boues 10 — 40 aur. excessus est pretij 10. boum supra 40 aur. quippe cum dicat lanio, se amplius 40 aur. expendisse, quos non debuisset expendere. Item boues 18 — 96 aur. excessus est pretij 18. boum supra 96 aur. quos non debuisset expendere. atque hi duo excessus æquales ponuntur: erit æquatio inter boues 10 — 40 aur. & boues 18 — 96 aur. Additisque 96 aur. vtrobique, inter boues 10 + 56 aur. & boues 18. (Nam ex 96. additis ad — 40. fit summa + 56) Et ablatis 10 bobus vtrinque, inter 56 aur. & 8 boues. Diuisis ergo 56 per 8. fiet pretium 1 bouis 7 aur. quod ita probatur. 10 boues valebunt 70 aur. ablatisq. 40 aur.

quos vltra iustum pretium expendit, remanent aur. 30 pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt 126 aur. detractísque 96. aur. quos non debuerat expendere, remanent similiter 30 aur. pro pretio 18 boum.

Si dixisset lanio ille, se 10 boues tanto emisse pluris 40 aur. quanto emere potuisset 18 boues minoris 96 aur. existeret æquatio inter boues 10 — 40 aur. & aur. 96—18 bobus. quia ille esset excessus pretij 10 boum vltra 40 aur. hic autem excessus aur. 96. vltra pretium boum. Additis igitur 18 bobus vtrinque, erit æquatio inter 28 boues — 40 aur. & 96 aur. Additísque rursum 40 aur. vtrobique, inter 28 boues, & 136 aur. Diuisis ergo 136 per 28. fiet pretiū 1 bouis aur. 4 $\frac{6}{7}$. quod probatur sic. Boues 10. valebunt aur. 48 $\frac{4}{7}$. & demptis 40 aur. remanent aur. 8 $\frac{4}{7}$. pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt aur. 87 $\frac{3}{7}$. quibus demptis ex 96. remanent similiter aur. 8 $\frac{4}{7}$. pro pretio 18 boum.

Sic si dicas. Emi 4 grossis—3 ouis, 41 oua, erit æquatio inter 4 gros. —3 ouis; & 41 oua. Additísque 3 ouis vtrobique, inter 4 gros. & 44 oua. Diuisis igitur 44 per 4. fiet Quotiens 11. atque tot oua ementur 1 grosso.

Item si dicas. 4 grossi — 3 denar. faciunt 97 denariolos, inuenies 1 gros. facere 25 denar.

Item si dicat quis, 4 aur. + 125 gros. facere aur. 10 $\frac{1}{4}$. Dēptis 4 aur. vtrobique, erit æquatio inter 125 gros. & 6 $\frac{1}{4}$ aur. Diuisis ergo 6 $\frac{1}{4}$ aur. per 125 gros. fiet Quotiens $\frac{1}{20}$. aur. valor 1 grossi, hoc est, 1 gross. facit $\frac{1}{20}$. vnius aurei. Quod si diuides 125 gross. per 6 $\frac{1}{4}$ aur. fiet Quotiens 20. atque tot grossi facient 1. aureum.

XXXIIII. 34 *Quando 7. vlnæ cuiusdam panni emuntur 4 $\frac{1}{2}$. aur. emuntur eodem pretio 17. vlnæ aur. 10. gross. 18 $\frac{4}{7}$. Quæstio est, quot grossi faciant 1. aur.*

Quoniam eadem est proportio 7 vln. ad 4 $\frac{1}{2}$ aur. quæ 17 vln. ad aur. 10 gross. 18 $\frac{4}{7}$. collocabimus hos quatuor numeros proportionales hoc ordine.

vlnæ	aur.	vlnæ	aur. gros.
7	4 $\frac{1}{2}$	17?	10. 18 $\frac{4}{7}$

a 19. septimi. [a] Et quia tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium, erit æquatio inter 70 aur. + 130 gross. & $\frac{153}{2}$ aur. siue 76 $\frac{1}{2}$ aur. Ablatísque 70 aur. vtrobique, inter 130 gross. & 6 $\frac{1}{2}$ aur. Diuisis ergo 130 per 6 $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens 20. atque tot grossi æquiualent 1. aureo.

XXXV. 35 *Quidam recipit à mercatore crocum pro 10. aur. Deinde rursum ab eodem accipit 24. lib. croci. Tandem reddit mercatori 30. lib.*

croci, & mercator, supputato pretio croci, restituit ei 14. aur. Quæritur pretium 1. lib. croci.

Hic vides 10 aur. + 24 lib. esse totum debitum, quod emptor mercatori debet. Similiter 30 lib. — 14 aur. Est ergo æquatio inter 10. aur. + 24 lib. & 30 lib. — 14. aur. Additísque 14 aur. vtrobique, inter 24. aur. + 24 lib. & 30 lib. Ablatísque 24. lib. vtrinque, inter 24. aur. & 6 lib. Diuisis igitur 24 per 6. fiet Quotiens 4. atque tot aurei faciunt pretium 1. libræ. quod sic probatur.

Pro 10 aur. emuntur libræ 2 $\frac{1}{2}$. atque ita emptor recepit à mercatore lib. 26 $\frac{1}{2}$. quæ valent 106 aur. Si igitur mercatori restituantur 30 lib. debebit mercator emptori lib. 3 $\frac{1}{2}$. cum hic solum receperit lib. 26 $\frac{1}{2}$. Valent autem 3 $\frac{1}{2}$. lib. aur. 14. quos mercator emptori restituit.

36 *Ciuis quidam inuenit, nescio quot, pauperes ante ianuam domus suæ: quibus è denariolis, quos in manu habet, septenos erogat denariolos. quo facto, supersunt ei in manu 24. denarioli. Quòd si cuilibet dare voluisset 9. defuissent illi 32 denarioli. Quæritur, quot pauperes fuerint, & quot denariolos ciuis ille habuerit in manu.* XXVI.

Hic vides, 7. summas denariolorum, quarum quælibet æqualis est
numero pauperum, + 24 denar. æquales esse toti numero denariolo-
rū, quos ciuis ille in manu habebat: propterea quod tot denarioli, quot
sunt pauperes, vnam summam constituunt; ac proinde toties 7. denario-
li, quot sunt pauperes, constituent 7. summas. Eodem modo 9. summæ
denariolorum, quarum quælibet æqualis est eidem numero pauperum,
— 32 denar. æquales erunt toti numero denariolorum, quos ille ciuis
habebat in manu. Ergo æquatio erit inter 7. summ. + 24 & 9. summ.
— 32. Additísque 32 vtrinque, inter 7. summ. + 56. & 9. summ. Ablatísque 7. summ. ex 9. inter 56. & 2. summ. Diuisis ergo 56 per 2. fiet Quotiens 28. numerus pauperum. Nam si cuilibet dentur 7. denar. erogati erunt 196 denar. Et quia tunc superfuerunt 24. denar. habuit ciuis ille in manu 220 denar. Quod si cuilibet dare voluisset 9 denar. oportuisset illum habere in manu 252 denar. Defuissent ergo illi 32. denarioli.

37 *Pro 70. summis librarum quarundam mercium penditur vectigal 1. summa — 23. aur. Et pro 200. summis penditur 1.* XXVII

ſumma +20.aur. Quæritur, quanti 1 ſumma conſtet.

PONE 1℞ aur. & inſtitue regulam Trium bis, hoc modo.

Summæ	aur.	Summa	aur.
70	1℞ − 32	1?	$\frac{1℞-32}{70}$
200	1℞ + 20	1?	$\frac{1℞+20}{200}$

Nam ſi pro 70. ſumm. penditur vectigal 1℞ − 32 aur. pro 1 ſumma pendetur $\frac{1℞-32}{70}$ aur. &c. Atque ita erit æqualitas inter $\frac{1℞-32}{70}$ aur. & $\frac{1℞+20}{200}$, aur. cum vterque numerus ſit vectigal 1 ſummæ. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 200℞ − 6400 aur. & 70℞ + 1400 aur. Additis igitur 6400. vtrobique, erit æquatio inter 200℞ & 70℞ + 7800. Ablatiſque 70℞ vtrinque, inter 130℞ & 7800. Diuiſis ergo 7800 per 130. fiet 1℞ 60. aur. pro pretio vnius ſummæ. quod ſic probatur. Pro 70. ſummis pendetur vectigal 28 aur. nimirum 1℞ − 32 aur. Et pro 200. ſummis pendetur vectigal 80 aur. nimirum 1℞ + 20 aur. vt hic apparet.

Summæ	aur.	Summæ	aur.
70	28	200?	80

XXXVIII. 38 *Vlnæ 10. panni rubri cum 4. vlnis panni nigri conſtant aur. 88. atque eodem pretio 2. vlnæ panni rubri cum 4. vlnis panni nigri conſtant aur. 32. Quæſtio eſt de pretio 1. vlnæ.*

PONATVR 1℞ pretium 1. vlnæ panni rubri. Conſtabuntque 10. vlnæ 10℞ ac proinde 4. vlnæ panni nigri conſtabunt 88 aur. − 10℞ Vlnæ vero 2. panni rubri conſtabunt 2℞. ideoque 4 vlnæ panni nigri, 32 aur. − 2℞. Erit ergo æquatio inter 88 aur. − 10℞ & 32 aur. − 2℞. cum vterque numerus ſit pretium 4. vlnarum panni nigri. Additis igitur 10℞ vtrobique, erit æquatio inter 88. aur. & 32 aur. + 8℞. Ablatiſque 32 aur. vtrinque, inter 56 aur. & 8℞. Diuiſis ergo 56 per 8. fiet 1℞ 7. aur. pro pretio vnius vlnæ panni rubri, quod probatur. Nam 10 vlnæ valebunt aur. 70. propterea que 4 vlnæ panni nigri, aur. 18. qui cum 70. faciunt 88 aur. Igitur 1 vlna panni nigri valebit aur. 4 $\frac{1}{2}$. Atque hoc pretio 2 vlnæ panni rubri cum 4. vlnis panni nigri valebunt aur. 32.

QVOD ſi 10. vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri conſtent aur. 88. atque eodem pretio 2 vlnæ panni rubri cum 6 vlnis panni nigri conſtent aur. 41. conſtabunt 4. vlnæ panni nigri aur. 88 − 10℞.

10℞. Et 6. vlnæ panni nigri, aur. 41 − 2℞. ſi nimirum ponatur 1℞. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, vt prius. Sed non erit æquatio inter aur. 88. − 10℞. & aur. 41 − 2℞. cum prior numerus ſit pretium 4 vlnarum panni nigri, poſterior vero 6 vlnarum. Oportet ergo prius inueſtigare pretium 4 vlnarum ex pretio 6 vlnarum, per regulam Trium, hac ratione.

Vlnæ	aur.	Vlnæ	aur.
6	41 − 2℞	4?	$\frac{164-8℞}{6}$

Inuenietúrque 4. vlnarum pretium $\frac{164-8℞}{6}$ aur. atque ita inuenta erit æquatio inter aur. 88 − 10℞ & aur. $\frac{164-8℞}{6}$. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter aur. 528 − 60℞. & aur. 164 − 8℞. Additíſque 60℞ vtrobique, inter 528 aur. & aur. 164 + 52℞. Et ablatis 164. aur. vtrinque, inter 52℞. & 364. aur. Diuiſis ergo 364 per 52. fiet 1℞. 7. aur. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, veluti prius.

ET ſi 10 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri conſtarent 88 aur. vt prius, ſed 2 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri valerent tantum 20 aur. inuenires pretium 1℞. 8 $\frac{1}{2}$ pro pretio 1 vlnæ panni rubri. quod probare potes. Nam 10 vlnæ panni rubri valebunt 85 aur. & 4 vlnæ panni nigri, aur. 3. ideoque 1 vlna $\frac{3}{4}$ aur. Atque ita 2 vlnæ panni rubri valebunt aur. 17. qui cum 3 aur. nimirum cum pretio 4 vlnarum, faciunt 20 aur.

39 *Mercator in tribus nundinis eandem aureorum ſummam exponens, lucratus eſt in ſingulis $\frac{1}{8}$. ſuæ ſummæ aureorum. Deinde ad alias ſe conferens nundinas lucratus eſt $\frac{3}{10}$. eiuſdem ſuæ ſummæ priori lucro auctæ. Atque ita deprehendit ſe habere 1287. aur. Quæritur ſumma aureorum, quos initio habuit.* XXXIX

PONATVR 1℞. Et quia in ſingulis nundinis lucratus eſt $\frac{1}{8}$ ℞. habebit poſt illas tres nundinas aur. 1 $\frac{3}{8}$ ℞. hoc eſt, $\frac{11}{8}$ ℞. Deinde quia cum $\frac{11}{8}$ ℞ lucratus eſt $\frac{3}{10}$ ℞ id eſt, $\frac{33}{80}$ ℞. ſi hoc lucrum ad $\frac{11}{8}$ ℞ adijciatur, fiet ſumma $\frac{1144}{640}$ ℞. quam vltimo loco habuit. quæ æqualis eſt 1287 aur. Diuiſis ergo 1287 per $\frac{1144}{640}$. fiet 1℞. 720 ſumma aureorum illius mercatoris. Nam eius $\frac{3}{8}$. quas in tribus nundinis eſt lucratus, ſunt 270 aur. qui cum 720. faciunt 990 aur. cum quibus tandem lucratus eſt $\frac{3}{10}$. nimirum $\frac{2970}{10}$. hoc eſt, 297 aur. qui cum 990. faciunt aur. 1287.

IN numeris abſtractis proponeretur hæc quæſtio hunc in modum. Inuenire numerum, qui cum $\frac{3}{8}$. ipſius, & cum $\frac{3}{10}$. huius ſummæ faciat 1287. Hic enim numerus inuenietur 720. &c.

XL. 40 *In exercitu Imperatoris peditum numerus octuplo maior est numero equitum. In hos distribuuntur aur. 392000. ita vt quini singulis peditibus, & 16. cuilibet equiti dentur. Quæritur, quot sint pedites, & quot equites.*

PONATVR 1 ℞ equitum, ideóque 8 ℞ peditum, instituatúrque regula Trium bis, hoc modo.

Eques	aur.	Equitum	aur.
1	16	1 ℞?	16 ℞
Pedes 1	5	8 ℞?	40 ℞

Erunt igitur 56 ℞ aur. æquales 392000 aur. Quare diuisis 392000 per 56. fiet 1 ℞. 7000. numerus equitum. ideóque pedites fuerunt 56000. octies plures. Nam ita distributi erunt equitibus aur. 112000. & peditibus aur. 280000. qui cum illis faciunt 392000. aur.

XLI. 41 *Tres milites prædam quandam aureorum æqualiter inter se diuidere volebant. Sed oborta lite, vt fit, ad manus ventum est, & tantum quisque rapuit, quantum per vim potuit. Deinde lite composita, numerarunt singuli pecunias suas, ac tandem deprehenderunt, primum acceptis 5. à secundo, habere numerum æqualem numero aureorum, qui secundo supersunt: Secundum vero, acceptis 7. à tertio, habere numerum æqualem residuo tertij: Tertium denique, acceptis 9. à primo, habere numerum triplum eius, qui tertio superest. Quæritur summa aureorum in illa præda repertorum, & quantum quisque rapuerit.*

PONE primum rapuisse 1 ℞. Acceptis ergo 5. à secundo, habuit 1 ℞ + 5. qui numerus æqualis dicitur esse residuo secundi. Antequam secundus igitur dedit 5. primo, habuit 1 ℞ + 10. Acceptis autem 7. à tertio, habuit 1 ℞ + 17. ac tantundem fuit residuum tertij. Igitur antequam tertius dedit 7. primo, habuit 1 ℞ + 24. Acceptis verò 9. à primo habuit 1 ℞ + 33. qui numerus triplus esse dicitur eius, qui primo remanet, hoc est, 1 ℞ − 9. Ergo huius triplum 3 ℞ − 27. æquale est 1 ℞ + 33. Additísq. 27. vtrobique, erit æquatio inter 1 ℞ + 60. & 3 ℞. Ablatáque 1 ℞ vtrinque, inter 60. & 2 ℞.

& 2 ℞. Diuisis ergo 60 per 2. fiet 1 ℞. 30. numerus primi. Numerus autem secundi, qui inuentus est 1 ℞ + 10. fuit 40. Tertius autem, qui inuentus est, rapuisse 1 ℞ + 24. habuit 54. & summa aureorum fuit 124. quod probare poteris. Nam primus, acceptis 5. à secundo, habebit 35. quot nimirum secundo supersunt. Et secundus, acceptis 7. à tertio, habebit 47. quot videlicet tertio supersunt. Tertius denique, acceptis 9. à primo, habebit 63. qui numerus triplus est residui primi, nimirum 21. Iam si 124. aur. in tres æquales partes distribuantur, obuenient cuilibet militi 41 $\frac{1}{3}$. aur.

42 *Quatuor socij marsupium inuenerunt aureis plenum, è quibus quilibet partem forte fortuna accepit. Sed cùm singuli suos aureos numerarent, cognouerunt, primum, acceptis 25. à secundo, habere numerum æqualem residuo secundi: Secundum verò, acceptis 30. à tertio, habere numerum triplum residui tertij: Tertium autem, acceptis 40. à quarto, habere numerum duplum residui quarti: Quartum denique, acceptis 50. à primo, habere numerum triplum residui primi, ac præterea 5. Quæritur aureorum summa, & quot quisque acceperit.* XLII.

PONE primum accepisse 1 ℞. Acceptis ergo 25. à secundo, ha-
bebit 1 ℞ + 25. ac totidem supererunt secundo, ac proinde secun-
dus, antequam dedit 25. primo, habuit 1 ℞ + 50. Acceptis autem
30. à tertio, habebit 1 ℞ + 80. Remanserunt ergo tertio $\frac{1}{3}$ ℞ + 26 $\frac{2}{3}$.
vt ille numerus huius sit triplus: ac proinde tertius antequam de-
dit 30. secundo, habuit $\frac{1}{3}$ ℞ + 56 $\frac{2}{3}$. Acceptis autem 40. à quarto,
habebit $\frac{1}{3}$ ℞ + 96 $\frac{2}{3}$. qui numerus duplus esse debet residui quarti:
ac proinde quarto tunc superfuerunt $\frac{1}{6}$ ℞ + 48 $\frac{1}{3}$. Et antequam da-
ret 40. tertio, habuit $\frac{1}{6}$ ℞ + 88 $\frac{1}{3}$. Hic denique, acceptis 50. à pri-
mo, habebit $\frac{1}{6}$ ℞ + 138 $\frac{1}{3}$. qui numerus, demptis 5. triplus esse de-
bet numeri 1 ℞ − 50. qui primo superest. Ergo huius triplum 3 ℞
− 150. æquale est $\frac{1}{6}$ ℞ + 133 $\frac{1}{3}$. Additis ergo 150. vtrobique, erit
æqualitas inter 3 ℞. & $\frac{1}{6}$ ℞ + 283 $\frac{1}{3}$. Ablatáque $\frac{1}{6}$ ℞ vtrinque, inter
2 $\frac{5}{6}$ ℞. & 283 $\frac{1}{3}$. Diuisis igitur 283 $\frac{1}{3}$ per 2 $\frac{5}{6}$ ℞. fiet 1 ℞. 100. nu-
merus primi. Ergo secundus 1 ℞ + 50. erit
150. Tertius autem $\frac{1}{3}$ ℞ + 56 $\frac{2}{3}$. erit 90.
Quartus denique $\frac{1}{6}$ ℞ + 88 $\frac{1}{3}$. erit 105. Ita
namque primus cum 25. secundi habebit
125. ac tantum etiam remanet secundo. Se-
cundus vero cum 30. tertij habebit 180. nu-
merum scilicet triplum numeri 60. qui tertio superest. Tertius de-
inde cum 40. quarti habebit 130. qui numerus duplus est numeri

100.	1 ℞
150.	1 ℞ + 50
90.	$\frac{1}{3}$ ℞ + 56 $\frac{2}{3}$
105.	$\frac{1}{6}$ ℞ + 88 $\frac{1}{3}$

65.qui quarto ſupereſt. Quartus denique cum 50.primi habebit 155. qui numerus, demptis 5.triplus eſt numeri 50.qui primo ſupereſt.

XLIII. 43 *In exercitu Cæſareo ex Germanis, Vngaris, & Italis conflato, ſunt quidem Germani 25000. Vngari vero faciunt ½. Germanorum, atque Italorum. Itali denique faciunt ⅛. Germanorum, atque Vngarorum. Quæritur numerus Vngarorum, & Italorum, & quantus ſit totus exercitus.*

Pone pro Vngaris 1ꝝ. Ergo Germani ſimul cum Italis erunt 2ꝝ. Et totus exercitus 3ꝝ. Quia vero Itali faciunt ⅛. Germanorum vnà cum Vngaris: ſunt autem Vngari cum Germanis 1ꝝ + 25000. facient Itali ⅛ꝝ + 3125. Quoniam igitur Germani ſunt 25000. & Vngari 1ꝝ. atque Itali ⅛ꝝ + 3125. erit totus exercitus 1⅛ꝝ + 28125. æqualis 3ꝝ. Ablatis ergo 1⅛ꝝ. vtrobique, erit æquatio inter 28125. & 1⅞ꝝ. Diuiſiſque 28125. per 1⅞ fiet 1ꝝ 15000. numerus Vngarorum. Itali vero erunt 5000. nimirum ⅛. Germanorum, atque Vngarorum, qui ſimul faciunt 40000. totuſque exercitus erit 45000.

XLIV. 44 *Sunt duo Duces, quorum vnus milites habet pauciores 40. quam alter. Et vterque ſuis militibus 1200. aur. diſtribuit, quo facto euenit, vt prioris Ducis milites ſinguli haberent 5. aur. amplius, quam milites Ducis poſterioris. Quæſtio eſt, quot milites vterque Dux habeat, & quot aureos ſinguli milites accipiant.*

Ponatvr 1ꝝ militum pauciorum, & 1ꝝ + 40. plurium. Si per hos milites diuidantur 1200. aur. fient Quotientes $\frac{1200}{1ꝝ}$. & $\frac{1200}{1ꝝ×40}$. numeri videlicet aureorum, qui ſingulis obuenerunt. Et quoniam quilibet priorum habet 5. amplius, quam poſteriorum quilibet; ſi poſteriori Quotienti addantur 5 fiet ſumma $\frac{5ꝝ×1400}{1ꝝ×40}$. (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{1200}{1ꝝ}$. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1200ꝝ + 48000. & 5ʒ + 1400ꝝ.

$$\begin{array}{cc} 1200 & 5ꝝ + 200 \\ \hline \frac{1200}{1ꝝ×40} & \frac{5}{1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1ꝝ + 40} \end{array}$$

Ablatiſque 1200ꝝ vtrinque, inter 48000. & 5ʒ + 200ꝝ. Et rurſum ablatis 200ꝝ vtrobique, inter 48000 — 200ꝝ. & 5ʒ. Diuiſiſq; omnibus per 5 inter 9600 — 40ꝝ. & 1ʒ. Semiſſis numeri radicum eſt 20. ad cuius quadratum 400. additis 9600. fit numerus 10000. à cuius radice quadrata 100.

ta 100. ſi auferatur prædicta ſemiſſis 20. remanet pretium 1ꝝ. 80. numerus ſcilicet militum pauciorum. Ergo plures erunt 120. nimirum 40. amplius, quam 80. quod probatur, quia diuiſis 1200. per 80. fit Quotiens 15. atque tot aureos ſinguli militum 80. accipiunt. Diuiſis autem 1200 per 120. fit Quotiens 10. numerus videlicet aureorum, quos ſinguli militum 120. accipiunt. Vbi vides, quemlibet priorum habere 5. amplius, quam quemlibet poſteriorum.

45 *Duæ Societates, quarum altera alteram 4. hominibus ſuperat, parem aureorum ſummam viritim diuidunt. In ſingulos minoris Societatis cedunt 8. aurei amplius, quam in ſingulos maioris. Aureorum autem ſumma numerum ſociorum vtriuſque Societatis ſuperat aureis 172. Quæritur ſumma aureorum, ac Sociorum.* XLV.

Ponatvr pro minore Societate, 1ꝝ hominum, ac propterea pro maiore, 1ꝝ + 4. Eritque ſumma aureorum 2ꝝ + 176. quæ ſumma diuiſa per 1ꝝ & per 1ꝝ + 4. facit Quotientes $\frac{2ꝝ×176}{1ꝝ}$. & $\frac{2ꝝ×176}{1ꝝ×4}$. numeros ſcilicet aureorum, qui cuilibet obueniunt. Et quia prior Quotiens ſuperat poſteriorem 8 aureis: ſi ad poſteriorem addantur 8 aur. fiet ſumma $\frac{10ꝝ×208}{1ꝝ×4}$ (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{2ꝝ×176}{1ꝝ}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10ʒ + 208ꝝ & 2ʒ + 184ꝝ + 704. Ablatis autem 2ʒ. vtrobique, erit æquatio inter 8ʒ + 208ꝝ. & 184ꝝ + 704. Et rurſum ablatis 184ꝝ vtrinque, inter 8ʒ + 24ꝝ. & 704. Et ablatis rurſum 24ꝝ vtrobique, inter 8ʒ. & 704 — 24ꝝ. Diuiſiſque omnibus per 8. inter 1ʒ. & 88 — 3ꝝ. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$. additis 88, ſiue $\frac{352}{4}$ fit numerus $\frac{361}{4}$ à cuius radice quadrata $\frac{19}{2}$. ſi dematur prædicta ſemiſſis $\frac{3}{2}$. ſupererit pretiũ 1ꝝ. $\frac{16}{2}$. hoc eſt, 8. numerus minoris Societatis: maioris autem numerus Sociorum erit 12. nimirum 1ꝝ + 4. Summa denique aureorum erit 192. nimirum 2ꝝ + 176. quod probatur. Nam diuiſis aureis 192. per 8. & 12. fiunt Quotientes 24. & 16. quorum ille hunc ſuperat 8. aureis.

$$\begin{array}{cc} 2ꝝ + 176 & 8ꝝ + 32 \\ \hline \frac{2ꝝ×176}{1ꝝ×4} & \frac{8}{1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1ꝝ + 4} \end{array}$$

46 *Mercator quidam ad nundinas ter profectus, prima negotiatione lucratus eſt ſummam æqualem ſuæ pecuniæ, ita vt poſt primam negotiationem habuerit duplum ſuæ pecuniæ. Deinde in ſecunda negotiatione lucratus eſt radicem quadratam eius* XLVI.

dupli, ac præterea 2. aureos. In tertia denique negotiatione lucratus est quadratum totius prioris summæ, & insuper 4. aureos. Atque ita deprehendit se habere 510. aureos. Quæritur summa pecuniæ, quam initio habuit.

PONE illum post secundam negotiationem habuisse 1 ♃, cum qua lucratus est in tertia negotiatione eius quadratum, ac præterea 4. aur. ita vt lucrum hoc fuerit 1 ʒ + 4. Igitur post tertiam negotiationem habuit summam 1 ʒ + 1 ♃ + 4. æqualem 510. aur. Ablatis 4. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒ + 1 ♃. & 506. Ablatáque rursus 1 ♃ vtrobique, inter 1 ʒ & 506 — 1 ♃. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 506. fit numerus 506 $\frac{1}{4}$, hoc est $\frac{2025}{4}$ à cuius radice quadrata $\frac{45}{2}$. si tollatur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. remanet pretium 1 ♃, $\frac{44}{2}$. hoc est 22. Atque tot aureos post secundam negotiationem habuit. Et quia hoc fuit lucrum radicis pecuniæ, quam post primam negotiationem habuit, præterea 2 aurei: demptis 2 supererunt 20. nimirum lucrum radicis pecuniæ, quam habuit post negotiationem primam. Ergo illa pecunia ponatur 1 ʒ. cuius radix quadrata 1 ♃. Erítque lucrum post secundam negotiationem, 1 ʒ + 1 ♃ æquale 20. Ablata autem 1 ♃ vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒ, & 20 — 1 ♃. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 20. hoc est, $\frac{80}{4}$. fit numerus $\frac{81}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{9}{2}$. dempta prædicta semisse $\frac{1}{2}$. supererit pretium 1 ♃. $\frac{8}{2}$. hoc est, 4. Atque tantum fuit lucrum secundæ negotiationis, + 2. Ablatis igitur 4. & 2. ex 22. (nimirum ex pecunia, quam post secundam negotiationem habuit) supersunt 16. ac tantum habuit post primam negotiationem, quæ pecuniæ dicitur esse dupla illius, quam ad nundinas attulit: ac proinde initio habuit 8. aur. quod probatur. Nam post primam negotiationem habuit 16 aur. & post secundam 22. nimirum radicem numeri 16, & præterea 2, hoc est 6. quæ cum 16 faciunt 22. Cum his lucratus est quadratum, nimirum 484. ac præterea 4. atque ex 22. 484. & 4. colligitur summa 510 aur.

XLVII. 47 *Visum est hoc loco artificium, quo Archimedes argenti quantitatem aureæ coronæ permixtam deprehendit, per regulam Algebræ explicare.*

CAPIANTVR igitur duæ massæ, auri vna, & altera argenti, æqualis ponderis cum corona. Deinde vas æneum affabre factum aqua impleatur, & immissa corona, 100 librarum, ponamus effluxisse 65 lib. aquæ. Repleto postea vase iterum aqua, immissam massam auri puri 100. librarum eiecisse 60. libras aquæ. Denique iterum repleto vase aqua, immissam massam puri argenti eiecisse 90 lib. aquæ. Ponatur 1 ♃ lib. argenti contineri in corona, ac proinde lib.

de lib. auri 100 — 1 ♃. & instituatur regula Trium bis, hoc modo.

	lib.	aquæ	lib.	lib.
Auri	100	60	100 — 1 ♃?	$\frac{6000 - 60♃}{100}$
Argenti	100	90	1 ♃?	$\frac{90♃}{100}$

Reperies enim libras auri 100 — 1 ♃ eiicere libras aquæ $\frac{6000 - 60♃}{100}$ si 100 lib. auri eiiciunt 60 lib. At 1 ♃ lib. argenti eiicere libras aquæ $\frac{90♃}{100}$. si 100 lib. argenti eiiciunt 90 lib. aquæ. Hæ libræ aquę eiectę faciunt $\frac{6000 \times 30♃}{100}$ lib. aquæ (Quoniam fractiones $\frac{6000 - 60♃}{100}$ & $\frac{90♃}{100}$ eundem habent denominatorem, satis est addere numeratores, & summæ conflatæ 6000 + 30 ♃. supponere eundem denominatorem 100) æquales 65 lib. quas corona eiicit. Hęc æquatio inter $\frac{6000 \times 30♃}{100}$. & 65. per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 6000 + 30 ♃. & 6500. Ablatisque 6000. vtrinque, erit æquatio inter 30 ♃, & 500. Diuisis ergo 500 per 30. fiet 1 ♃. 16 $\frac{2}{3}$. atque tot libræ argenti in corona permixtæ fuerunt: ac propterea solum 83 $\frac{1}{3}$. libræ auri in eadem reperiuntur. quod probatur, vt hic vides.

	lib.	aquæ	lib.	aquæ
Argenti	100	90	16 $\frac{2}{3}$?	15
Auri	100	60	83 $\frac{1}{3}$?	50

Reperies enim libras argenti 16 $\frac{2}{3}$. eiicere lib. aquæ 15. & libras auri 83 $\frac{1}{3}$. eiicere lib. aquæ 50 quę cum 15 faciunt 65 quot videlicet libræ aquæ effluunt, si corona in aquam imponatur.

SCHOLIVM.

EODEM modo soluetur hæc quæstio. Sunt tres massæ eiusdem ponderis, nimirum 10. librarum: Vna auri puri, altera argenti puri, & tertia ex auro, argentóque mixta. Prima autem eiicit $\frac{1}{30}$. lib. aquæ: Secunda $\frac{3}{4}$. lib. aquæ: ac tertia $\frac{1}{8}$. lib. aquæ. Nam sic instituetur regula trium bis; si in tertia massa ponatur 1 ♃. lib. argenti, ac proinde auri lib. 10 — 1 ♃.

Auri	lib. 10	aquæ lib. $\frac{1}{30}$	10 — 1 ♃ lib. auri?	aq. lib. $\frac{10 - 1♃}{300}$
Argéti	lib. 10	aquæ lib. $\frac{3}{4}$	1 ♃ lib. argéti.	aq. lib. $\frac{3♃}{40}$

Nam duo numeri in quarto loco facient summam $\frac{400 \times 860♃}{12000}$. lib. aquæ æqualem $\frac{1}{8}$. lib. aquæ, quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 12000. & 3200 + 68800 ♃. Et ablatis 3200. vtrobique, erit æquatio inter 8800. & 6880 ♃. Diuisis igitur 8800 per 6880. fiet 1 ♃. 1 $\frac{12}{43}$. atque tot lib. argenti sunt in tertia massa, ac proinde in eadem erunt lib. 8 $\frac{31}{43}$. auri, quod probatur, vt hic vides.

Argenti lib. 10	aq. lib. $\frac{3}{4}$	arg. lib. $1\frac{12}{43}$?	aq. lib. $\frac{165}{1720}$
Auri lib. 10	aq. lib. $\frac{1}{30}$	aur. lib. $8\frac{31}{43}$?	aq. lib. $\frac{375}{12900}$

Inuenies argenti lib. $1\frac{12}{43}$. eiicere aquæ lib. $\frac{165}{1720}$. & auri lib. $8.\frac{31}{43}$. eiicere aquæ lib. $\frac{375}{12900}$. quæ cum illis faciunt $\frac{1}{8}$. libr. aquæ.

QVOD si quis desideret magis accuratam rationem deprehendendi quãtitatem auri, & argenti in corona illa, vel in tertia massa proximè dicta, is legat eruditißimum libellum Marini Ghetaldi Patritij Ragusini, qui inscribitur Promotus Archimedes. Vbi in propos. 17. varias causas errorum, qui in prædicto Archimedis artificio, committi possunt, enumerat. Deinde in propos. 18. magis accuratum artificium demonstrat.

XLVIII 48 *Tres mercatores lucrati sunt 700. aur. quos inter se ita distribuerunt, habita ratione pecuniæ, quam quisque ad negotiationem attulit, vt portio secundi superarit portionem primi aureis 12. portio verò tertij portionem secundi aureis 16. Quæritur, cuiusque portio quanta fuit.*

PONATVR portio primi 1 ℞ eritque propterea portio secundi 1 ℞ + 12. & tertij 1 ℞ + 28. Hæ tres portiones simul faciunt 3 ℞ + 40. æquales 700. Ablatis 40 vtrobique, erit æquatio inter 3 ℞. & 660. Diuisis igitur 660 per 3. fiet 1 ℞. 220. portio primi. Portio autem secundi erit 232. & tertij 248. quæ omnes simul faciunt 700.

XLIX. 49 *Tres lusores, quorum quisque certam summam aureorum attulit, eam sortem habuerunt, vt statim primus lucratus sit $\frac{1}{2}$. secundi: Deinde secundus $\frac{1}{3}$. tertij: tertius denique $\frac{1}{4}$. primi. Atque ita contigit, vt singuli haberent 700. aur. Quæritur, quot quisque aureos ad ludum attulerit.*

PONATVR pecunia primi 1 ℞. qui si det $\frac{1}{4}$ ℞ tertio, supererunt ei $\frac{3}{4}$ ℞, quæ cum $\frac{1}{2}$. secundi debent facere 700. Ergo $\frac{1}{2}$. secundi est 700 — $\frac{3}{4}$ ℞. atque idcirco huius duplum attulit, nimirum 1400 — $1\frac{2}{4}$ ℞. Nam ita, postquam perdiderit $\frac{1}{2}$. remanebunt illi 700 — $\frac{3}{4}$ ℞ qui numerus cum $\frac{1}{3}$. tertij debet facere 700. Ergo $\frac{1}{3}$. tertij est $\frac{3}{4}$ ℞; ideóque ad ludum attulit $2\frac{1}{4}$ ℞, siue $\frac{9}{4}$ ℞. qui si amiserit $\frac{1}{3}$. supererunt ei $\frac{6}{4}$ ℞ quæ cum $\frac{1}{4}$. primi, nimirum cum $\frac{1}{4}$ ℞. habebit $\frac{7}{4}$. ℞ æquales 700. Diuisis igitur 700 per $\frac{7}{4}$. fiet 1 ℞. 400. pecunia videlicet primi. Ac proinde secundus, qui inuentus est attulisse 1400 — $1\frac{1}{2}$. attulit ad ludum aur. 800. Et tertius aur. 900. nimirum $2\frac{1}{4}$ ℞. quod

quod probatur. Nam si primus amittat $\frac{1}{4}$. supererunt 300. aur. qui cum $\frac{1}{2}$. aureorum 800. quos secundus attulit, faciunt 700 aur. Item $\frac{1}{2}$. secundi, nimirum 400. aurei cum $\frac{1}{3}$. tertij, id est, cum 300. facit similiter 700 aur. Ac denique $\frac{2}{3}$. tertij, postquam amiserit $\frac{1}{3}$. nimirum 600 aur. cum $\frac{1}{4}$. primi, id est, cum 100. facit quoque 700. aureos.

50 *Quidam habet duo vasa aurea, & vnum operculum, cuius pretium est 150. aur. quod additum ad pretium primi vasis facit pretium triplum pretij secundi vasis. Additũ verò idem operculum vasi secundo facit pretium æquale pretio primi vasis. Quæstio est de pretio vtriusque vasis.* L.

PONATVR pretium primi 1 ℞. Ergo 1 ℞ + 150. tripla sunt pretij secundi vasis, ideóque eius æstimatio est $\frac{1}{3}$ ℞ + 50 aur. Cui si accedat operculum 150 aur. erit eius tunc pretium $\frac{1}{3}$ ℞ + 200 aur. æquale 1 ℞. nimirum pretio primi vasis. Ablata $\frac{1}{3}$ ℞. vtrinque, erit æquatio inter $\frac{2}{3}$ ℞. & 200. Diuisis igitur 200 per $\frac{2}{3}$. fiet 1 ℞. 300 aur. pretium scilicet primi vasis. Secundi autem vasis pretium, quod inuentum est $\frac{1}{3}$ ℞ + 50 erit 150 aur. quod probatur. Nam 300 aur. hoc est, pretium primi vasis, cum pretio operculi, id est, cum 150. faciunt summam 450. triplam pretij secundi vasis, nimirum 150 aur. At 150. aur. pretium videlicet secundi vasis, cum operculo, siue cum 150 aur. faciunt summam 300 aur. æqualem pretio primi vasis.

51 *Quidam emit, nescio quot, perdices, ita vt si emisset seorsum illarum $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. & insuper 6. haberet 100. perdices. Quæritur numerus perdicum.* LI.

PONATVR 1 ℞, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. faciunt $\frac{47}{60}$ ℞, quæ cum 6. faciunt $\frac{47}{60}$ ℞ + 6. æqualia 100. Ablatis 6 vtrobique, erit æquatio inter $\frac{47}{60}$. & 94. Diuisis igitur 94 per $\frac{47}{60}$. fiet 1 ℞. 120. numerus videlicet perdicum emptarum. Nam eius $\frac{1}{3}$. est 40. & $\frac{1}{4}$. est 30. & $\frac{1}{5}$. est 24. quæ omnes partes cum 6. faciunt summam 100 perdicum.

52 *Alexander Magnus, cum quadam die familiariter cum Calisthene philosopho ageret de ætate sua, & amicorum suorum Ephestionis, & Clyti, ita disseruit. Ergo, inquit, Ephestionem meum duobus annis antecedo: At Clytus amborum annos sua ætate comprehendit, & præterea an-* LII.

nos quatuor. Cui Calisthenes. Cum pater meus vixerit annos 96. iucunda mihi fuit ista relatio, ô Rex. Nam annos trium vestrum ætas eius præcisè habuit. Quæritur, qua ætate Alexander colloquium istud habuerit, & quot annos tam Ephestio, quam Clytus tunc habuerit.

PONATVR pro annis Ephestionis 1 ℞. Igitur anni Alexandri fuerunt 1 ℞ + 2. & Clyti 2 ℞ + 6. qui omnes faciunt annos 4 ℞ + 8 æquales 96. Ablatis 8 vtrobique, erit æquatio inter 4 ℞ & 88. Diuisis igitur 88 per 4. fiet 1 ℞. 22. anni nimirum Ephestionis. Alexander igitur habuit 24. annos. Clytus verò 50. qui anni in vnam collecti summam faciunt 96 annos.

LIII. 53 *Nicanor ea pugna, qua interijt, occurrit Iudæ Machabæo, agmine quadrato collecto ex Syrorum auxiliarijs militibus, atque iis, quos secum adduxerat. Cæsa sunt autem ex eo agmine 35000. Reliqui fuga elapsi sunt, quorum numerus fuit 156. vltra numerum auxiliariorum militum Syrorum. Quæstio est, quot militibus occurrerit Nicanor Machabæo, & quot habuerit milites auxiliarios, quot item secum adduxerit.*

PONATVR pro agmine illo quadrato 1 ȝ. in quo computati sunt milites cæsi 35000. Item numerus fuga seruatorum 156. & numerus militum auxiliariorum incognitus. Ponatur hic numerus 1 ℞ cui si addantur milites cæsi 35000. & 156. fuga seruati, conflabitur summa 1 ℞ + 35156. æqualis 1 ȝ. nimirum toti agmini quadrato. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 35156. hoc est, $\frac{140624}{4}$ conficietur numerus $\frac{140625}{4}$ ad cuius radicem quadratam $\frac{375}{2}$. si addatur prędicta semissis numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. fiet 1 ℞. $\frac{376}{2}$. hoc est, 188. numerus videlicet auxiliariorum militum. ipse verò secum adduxit 35156. atque idcirco totum agmen quadratum comprehendit 35344. qui numerus quadratus est habens radicem 188.

LIIII. 54 *Quidam habet 4. massas ex argento, & cupro mixtas. Pondus primæ continet 11. marcas, quarum quælibet conflatur ex 9. semiuncijs puri argenti, & 7 semiunc. cupri puri: quia 1. marcam statuimus comprehendere 16. semiuncias. Pondus secundæ massæ est 15. marcarum, quarum singulæ continent 7. semiunc.*

semiunc. argenti, & 9. semiunc. cupri. Pondus tertiæ massæ habet 24. marcas, quarum singulæ conflant 10. semiunc. argenti, & 6. semiunc. cupri. Pondus denique quartæ massæ est 136. marcarum, quarum singulæ continent 14. semiunc. argenti, & 2. semiunc. cupri. Vult autem ex hisce massis conflare vnam, additis aliquot marcis argenti, ita vt quælibet marca contineat 15. semiunc. puri argenti, & 1. semiunc. puri cupri. Quæstio iam est, quantum argenti puri admiscendum sit illis massis, & quot marcas massa noua sit habitura.

PONATVR 1 ℞. marcarum puri argenti addendarum. Quoniam verò omnes marcæ mixtæ in illis 4. massis contentæ sunt 186. & omnes semiunciæ puri argenti 2348. & cupri 628. vt hic vides.

Marcæ mixtæ	Semiunciæ puri arg.	Semiunc. puri cupri.
11	99	77
15	105	135
24	240	144
136	1904	272
186	2348	628

Cum enim prima massa marcarum 11. quælibet marca contineat se-
miunc. argenti puri, & cupri 7 semiunc. erunt in tota illa massa 99. semi-
unc. argenti puri, & 77 semiunc. puri cupri, &c. instituenda erit regula
trium hoc modo.

Marcę mixtæ	Mar. pu. arg.	Semiun. cupri.	Mar. mix.	Semiun. cup.
	186 + 1 ℞.	628.	1?	$\frac{628}{186 \times 1 ℞}$.

Hoc est, Marcæ mixtæ 186 + 1 ℞. marcarum puri arg. continent 628 se-
miunc. cupri, (quia in massa conflanda comprehenduntur 628 semiunc.
cupri; quot videlicet in 4 massis compositis continentur, cum nulla no-
ua semiunc. cupri accedat) quot ergo semiunc. cupri continebit 1 marca
noua mixta? Inuenies enim $\frac{628}{186 \times 1 ℞}$. semiunc. cupri, quę fractio æquiua-
let 1 semiunc. cupri: propterea quod in vna marca noua mixta conti-
neatur tantum 1 semiunc. cupri ex hypothesi. Hæc æquatio per multi-
plicationem in crucem reducetur ad hanc inter 628. & 186 + 1 ℞. Abla-
tisque 186. vtrobique, erit æquatio inter 442. & 1 ℞. Erit ergo 1 ℞. 442.
atque tot marcæ argenti puri admiscendę sunt, vt singulæ marcæ com-
prehendant 15 semiunc. puri arg. & 1 semiunc. cupri. quod sic proba-
tur. Quoniam in 4 illis massis propositis continentur 186 marcæ mix-

tæ, ſi addantur inuentæ 442 marcæ argenti puri, fient marcæ mixtæ 628. atque idcirco quælibet habebit 1 ſemiunc. cupri, quòd in omnibus ſimul ſint 628 ſemiunc. cupri.

Et quia vna marca poſita eſt 16 ſemiunciarum, comprehendent 442 marcæ puri arg. ſemiuncias 7072. quibus ſi addantur ſemiunciæ 2348 puri argenti, quæ in 4. maſſis propoſitis reperiuntur, fient 9420. ſemiunc. puri argenti, quæ diſtributæ in 628 marcas nouæ maſſæ conflatæ, dabunt cuilibet marcæ 15 ſemiuncias argenti puri.

Hæc eadem quæſtio facilè etiam expedietur ſine Algebræ auxilio. Quoniam enim in 4 maſſis propoſitis habentur 628 ſemiunciæ cupri, neceſſe eſt, vt maſſa noua conflanda ſit totidem marcarum, vt nimirum cuilibet 1 ſemiuncia cupri poſſit aſſignari. Si igitur 186 marcæ mixtæ, quas 4. illæ maſſæ continent, detrahantur ex 628. ſupererunt 442 marcæ puri argenti addendæ ad 186 marcas, vt fiat numerus marcarum 628. in noua maſſa conflata comprehenſarum.

Qvod ſi maſſa ex 4. propoſitis conflanda ſit cum argento addito, vt ſingulæ marcę contineant 13 ſemiuncias puri arg. & 3 ſemiunc. cupri: Diuiſis 628 ſemiunciis cupri per 3. exibit numerus marcarum in noua maſſa, $209\frac{1}{3}$. Ita enim quælibet marca 3 ſemiunc. cupri continebit. Si igitur ex $209\frac{1}{3}$. demantur marcæ 186. in 4. primis maſſis contentę, reliquus fiet numerus $23\frac{1}{3}$. marcarum puri arg. addendarum: conflabitúrque numerus $209\frac{1}{3}$. marcarum in maſſa noua comprehenſarum: quarum quælibet 13 ſemiunc. arg. puri comprehendet. Nam in marcis $209\frac{1}{3}$. continentur ſemiuncię $\frac{10048}{3}$. ex quibus ſi demantur 628. ſiue $\frac{1884}{3}$ ſemiunc. cupri puri in maſſa noua contentæ, remanebunt $\frac{8164}{3}$ ſemiunc. argenti puri: quibus in $209\frac{1}{3}$ marcas diſtributis, prouenient cuilibet marcæ 13 ſemiunc. puri argenti.

Si verò maſſa ex eiſdem 4 maſſis conflanda ſit, cum cupro addito, vt ſingulæ marcæ contineant 12 ſemiunc. argenti puri, & 4. ſemiunc. cupri puri: erit cuprum adiiciendum, non autem argentum, quia diſtributis 2348 ſemiunc. argenti, quæ in 4. illis maſſis exiſtunt, in 186 marcas, reperientur in qualibet marca plures ſemiunciæ argenti, quam 12. nimirum $12\frac{116}{186}$. Diuiſis igitur 2348 ſemiunc. argenti puri per 12. exibit in Quotiente numerus marcarum in noua maſſa, $195\frac{2}{3}$. Sic enim quælibet marca continebit 12 ſemiunc. argenti puri. Demptis autem marcis 186. quas illæ 4. maſſæ complectuntur, remanebunt $9\frac{2}{3}$ marcæ cupri addendæ, vt confletur noua maſſa marcarum $195\frac{2}{3}$. quarum quælibet 4. ſemiunc. cupri continebit. Nam in marcis $195\frac{2}{3}$. continentur $\frac{9392}{3}$ ſemiuncię. E quibus ſi demantur 2348 ſemiunc. argenti, hoc eſt, $\frac{7044}{3}$. relinquentur $\frac{2348}{3}$ ſemiunc. cupri, quibus diſtributis in $195\frac{2}{3}$ marcas, prouenient cuilibet marcæ 4 ſemiunc. cupri.

Iam verò ſi quæratur, quantum cupri addendum ſit quatuor illis maſſis, vt in qualibet marca nouæ maſſæ conflatæ reperiantur 15 ſemiunc. puri cupri, & 1 argenti: inſtituenda erit regula Trium hoc modo, poſita 1 ℞ marcarum puri cupri.

Marcæ

Marcæ mix. Marcę pu. cup.	Semiun. arg.	Mar. mix.	Sem. arg. pu.
186 + 1 ℞	2348	1 ?	$\frac{2348}{186 \times 1 ℞}$

Eritque quartus numerus æqualis 1 ſemiunciæ argenti puri: quę æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2348 & 186+1 ℞. Ablatiſque 186 vtrobique, erit æquatio inter 2162 & 1 ℞. Erit ergo 1 ℞ 2162. numerus videlicet marcarum cupri admiſcendarum, vt ſingulę marcæ contineant 15 ſemiunc. cupri, & 1 argenti. Quoniam enim in 4. illis maſſis exiſtunt 186. marcę, additis proximè inuentis 2162. fiet numerus marcarum 2348. ac proinde quælibet habebit 1 ſemiunc. argenti: quippe cum in omnibus ſimul ſint 2348 ſemiunc. argenti. Et quia 2162 marcæ puri cupri comprehendunt ſemiunc. 34592. ſi addantur 628 ſemiunc. cupri in quatuor prioribus maſſis contentæ, fient 34592 ſemiunc. quibus diſtributis in 2348 marcas nouæ maſſę conflatæ, congruent cuilibet marcæ 15 ſemiuncię cupri.

Si autem quæſtio ſit, quantum argenti contineat 1 marca, ſi 4. illæ maſſæ conflentur, & nihil eis addatur: ſic ſtabit regula Trium.

Marcæ	Semiunc. arg.	Marca	Semiunc. arg.
186	2348	1 ?	$12\frac{58}{93}$

Continebit ergo 1 marca ſemiunc. arg. $12\frac{58}{93}$. & proinde ſemiunc. cupri $3\frac{35}{93}$.

Sic ſi quæratur, quantum cupri contineat 1 marca, ſic ſtabit regula.

Marcæ	Semiunc. cupri	Marca	Semiunc. cupri
186	628	1 ?	$3\frac{35}{93}$

Continebit enim 1 marca ſemiunc. cupri puri $3\frac{35}{93}$. ideóque $12\frac{58}{93}$. ſemiuncias puri argenti.

Et ſi quæſtio ſit, cuius ponderis maſſa continens in qualibet marca 3 ſemiunc. argenti, & 13 cupri, commiſcenda ſit illis 4 maſſis, vt ſingulæ marcę nouæ maſſæ conflatę contineant 5 ſemiunc. argenti, & 11 cupri, ponatur pro numero marcarum addendarum 1 ℞ & pro numero ſemiun. argenti in illa maſſa contentarum, 3 ℞. quia numerus ſemiunciarum in illa maſſa triplus eſt numeri marcarum, quandoquidem quælibet marca comprehendere dicitur 3 ſemiunc. argenti. Sic igitur ſtabit regula Trium.

Mar. mix.	Mar. mix. nouæ	Semiunc. arg.	Sem. arg. nouæ	Marca noua	Sem. arg.
186 + 1 ℞		2348 + 3 ℞		1 ?	$\frac{2348 \times 3 ℞}{186 \times 1 ℞}$

Quartus enim numerus ęquabitur 5 ſemiunciis argenti, quot nimirum 1 marca massæ nouę includere debet. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2348 + 3 ℞. & 930 + 5 ℞. Ablatisque 930 vtrobique, erit æquatio inter 1418 + 3 ℞ & 5 ℞. Ablatisque rursum 3 ℞ vtrinque, inter 1418. & 2 ℞. Diuisis igitur 1418 per 2. fiet 1 ℞. 709. numerus marcarum, quas massa quinta commiscenda continebit. Additis igitur 186 marcis quatuor priorum massarum, fiet noua massa marcarum 895. quarum quælibet continet 5 semiunc. argenti, & 11 cupri. quod sic probatur. Duc 895. marcas in 16 semiunc. faciésque 14320. semiuncias partim argenti, & partim cupri in massa noua marcarum 895. contentas. Deinde duc easdem marcas 895. in 5. semiunc. argenti, quas quęlibet marca continere debet, faciésque semiunc. argenti 4475. in noua illa massa contentas. Denique duc easdem marcas 895. in 11. semiunc. cupri, quas quælibet marca continere debet, efficiésque 9845. semiunc. cupri quæ cum 4475. semiunc. argenti faciunt 14320. quot nimirum semiunciæ in vniuersum continentur in 895. marcis.

LV. 55 *Duo Societatem ineunt: quorum secundus duplo plus pecuniæ secum affert, quam primus, ac præterea 5. aur. Lucrati sunt autem 960. aur. ex quibus primo obuenerunt aur. 300. & secundo 660. Quantum ergo singuli imposuerunt.*

Pone pro primo 1 ℞. ideóque pro secundo 2 ℞ + 5. Summa amborum est 3 ℞ + 5. qua lucrati sunt 960. aur. Institue ergo regulam Trium sic.

3 ℞ + 5   960   1 ℞? $\frac{960\,\text{℞}}{3\,\text{℞}\times 5}$

Inuenies enim primum, qui posuit 1 ℞. lucrari $\frac{960\,\text{℞}}{3\,\text{℞}\times 5}$. qui numerus æqualis est 300 aur. qui primo obuenerunt. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 960 ℞. & 900 ℞ + 1500. Ablatis igitur 900 ℞ vtrobique, remanebit æquatio inter 60 ℞. & 1500. Diuisis igitur 1500 per 60. fiet 1 ℞. 25. pro aureis, quos primus posuit. Ergo secundus posuit 55. aur. quod probatur. Amborum enim summa est 80 aur. Ergo regula Trium sic stabit bis.

80   960   25 ?   300   80   960   55 ?   660

LVI. 56 *Duo habent pecuniam, nimirum 200. aur. simul, & pecunia secundi diuisa per pecuniam primi facit Quotientem* 1 $\frac{1}{2}$. *Quæstio est, quantam quisque pecuniam habeat.*

Hæc quæstio cum sequentibus ad secundas radices pertinet. Ponatur pro primo 1 ℞, & pro secundo 1 A. Resoluenda ergo est secunda radix in primam hoc modo. Quoniam ambo habent 200. aur. erit æquatio inter 1 ℞ + 1 A, & 200. Ablataque 1 ℞ vtrinque, inter 1 A, & 200 — 1 ℞. Erit igitur 1 A, resoluta in 200 — 1 ℞. Quare pono denuò numerum primi 1 ℞, & secundi 200 — 1 ℞. qui simul faciunt 200. aur. Diuiso iam numero secundi per numerum primi, fit Quotiens $\frac{200 - 1\,\text{℞}}{1\,\text{℞}}$. æqualis 1 $\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 400 — 2 ℞, & 3 ℞. Additisque 2 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 400. & 5 ℞. Diuisis ergo 400. per 5. fiet Quotiens 80. numerus prioris. Ergo secundus habebit 120. nimirum 200 — 1 ℞. quo numero diuiso per 80. fit Quotiens 1 $\frac{1}{2}$.

Aliter. Ponatur numerus secundi 1 ℞, & primi 1 A. Ergo iterum erit æquatio inter 1 ℞ + 1 A, & 200. aur. Ablataque 1 ℞ vtrobique, inter 1 A, & 200 — 1 ℞. atque ita 1 A. resoluta est in 200 — 1 ℞. Pono ergo denuo pro secundo 1 ℞, & pro primo 200 — 1 ℞. Diuiso illo per hunc fit Quotiens $\frac{1\,\text{℞}}{200 - 1\,\text{℞}}$. æqualis $\frac{3}{2}$. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 2 ℞. & 600 — 3 ℞. Additisque 3 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 5 ℞ & 600. Diuisis ergo 600 per 5. fiet 1 ℞. 120. pro numero secundi. Primus ergo habet 80. nimirum 200 — 1 ℞. vt prius.

57 *Septem mercatores debent cuidam creditori pecuniam hoc modo, Sex, excluso septimo, debent simul 994. aur.* LVII.

Deinde sex, secluso primo, debent 882. aur.

Sex, secluso secundo, debent aur. 952.

Sex, dempto tertio, debent aur. 896.

Sex, excluso quarto, debent aur. 910.

Sex, secluso quinto, debent aur. 840.

Sex denique, excepto sexto, debent aur. 1036.

Quæritur iam, quanta sit summa totius debiti, & quantum quisque debeat.

Primvm quia excluditur debitum septimi à tota summa: si pro debito septimi ponatur 1 ℞. erit summa totius debiti 994 + 1 ℞. aur.

Deinde quia excluditur debitum primi: si pro eo ponatur 1 A, erit summa totius debiti aur. 882 + 1 A.

Tertio quia excluditur debitum secundi, pone pro eo 1 B, aur. eritque summa totius debiti aur. 952 + 1 B.

Quarto quia eximitur debitum tertij, si pro eo ponatur 1 C, aur. erit summa totius debiti aur. 896 + 1 C.

Quinto quia ſubticetur debitum quarti, ſi pro eo ponatur 1 D, aur. erit totius debiti ſumma aur. 910 + 1 D.

Sexto quia ſupprimitur debitum quinti, ſi pro eo ponatur 1 E, aur. habebitur ſumma totius debiti 840 + 1 E, aur.

Septimo denique, quia non exprimitur debitum ſexti, ſi pro eo ponatur 1 F, aur. erit ſumma totius debiti 1036 + 1 F, aur.

994	+ 1 ℞
882	+ 1 A
952	+ 1 B
896	+ 1 C
910	+ 1 D
840	+ 1 E
1036	+ 1 F

Quia igitur ſumma omnium, hoc eſt, totum debitum ſepties ponitur, vt hic vides, habebimus ſex æquationes, ſi ſuperiorem cum ſingulis inferioribus conferemus: propterea quod quodlibet totum ſibiipſi eſt æquale. Videlicet.

Primum 994 + 1 ℞. æqualia ſunt 882 + 1 A. Igitur ablatis 882. vtrobique, erit æquatio inter 112 + 1 ℞, & 1 A. Cum ergo pro debito primi poſita ſit 1 A; erit debitum primi aur. 112 + 1 ℞.

Deinde eodem modo æquatio erit inter 994 + 1 ℞, & 952 + 1 B. Ablatiſque 952 vtrinque, inter 42 + 1 ℞. & 1 B, ac proinde debitum ſecundi 42 + 1 ℞.

Tertio ſimiliter æquatio erit inter 994 + 1 ℞, & 896 + 1 C. Ablatiſque 896 vtrinque, inter 98 + 1 ℞, & 1 C: ideoque debitum tertij erit 98 + 1 ℞.

Quarto pari ratione erit æquatio inter 994 + 1 ℞, & 910 + 1 D. Ablatiſque 910 vtrobique, inter 84 + 1 ℞, & 1 D. Debitumque quarti erit aur. 84 + 1 ℞.

Quinto non ſecus erit æquatio inter 994 + 1 ℞, & 840 + 1 E. Ablatiſque 840. vtrobique, inter 154 + 1 ℞, & 1 E: propterea que debitum quinti erit aur. 154 + 1 ℞.

Sexto non aliter æquatio erit inter 994 + 1 ℞, & 1036 + 1 F. Ablatiſque 994 vtrobique, inter 1 ℞, & 42 + 1 F. Rurſumque ablatis 42. vtrinque, inter 1 ℞ — 42. & 1 F. ideoque debitum ſexti erit aur. 1 ℞ — 42.

Et quia pro debito ſeptimi poſita fuit 1 ℞. erunt omnium debita hæc, quæ faciũt ſummam 7 ℞ + 448. aur. æqualem 994 + 1 ℞. cum hic etiam numerus toti debito æqualis ſit, vt paulò ante diximus. Ablata ergo 1 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 6 ℞ + 448. & 994. Ablatiſque rurſum 448. vtrobique, inter 6 ℞, & 546. Diuiſis igitur 546 per 6. fiet 1 ℞. 91. debitum ſeptimi, quod fuit 1 ℞. Hinc facile debita aliorum elicies. Quoniam enim debitum primi fuit 112 + 1 ℞. erit ipſum debitum 203. ſumma nimirum ex 91. & 112. conflata. Sic etiam debitum ſexti

Debitum primi	112	+ 1 ℞
Secundi	42	+ 1 ℞
Tertij	98	+ 1 ℞
Quarti	84	+ 1 ℞
Quinti	154	+ 1 ℞
Sexti	1 ℞	— 42
Septimi	1 ℞	

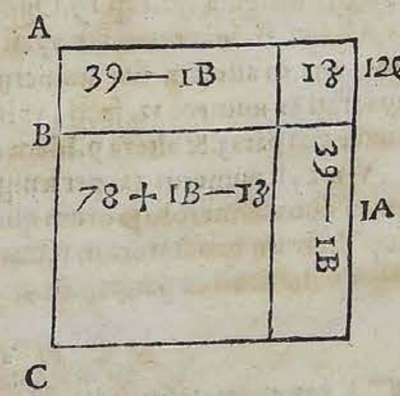
ſexti erit 49. nimirum 1 ℞ — 42. & ſic de cæteris, vt hic cernis.

Debitum	Primi	203	aur.	Summa omnium, ſeu totũ debitum.	1085. aur.
	Secundi	133			
	Tertij	189			
	Quarti	175			
	Quinti	245			
	Sexti	49			
	Septimi	91			

Probatio. Dempto debito ſeptimi ex toto debito, debebunt 6. alij aur. 994. Item dempto debito primi ex eodem debito toto, debebunt 6 alij, aur. 882. & ſic de cæteris.

58 *Duo ſocij habent duos numeros aureorum, quorum ſumma à* LVIII. *ſumma quadratorum ex ipſis procreatorum ſubtracta, relinquit* 78. *Addita verò ad numerum ex eorum multiplicatione productum facit* 39. *Quæritur, qui ſint iſti numeri.*

Hanc quæſtionem per ſequentem figuram explicabimus, vbi quadratum rectæ AC, diuiſum eſt in duo quadrata, & duo complementa, quorum quodlibet inter duo quadrata medium proportionale eſt, vt in Lemmate propoſ. 54. lib. 10. Eucl. demonſtrauimus, & ſupra quoque in numeris in Lemmate ænigmatis 26. cap. 30. oſtendimus. Ponatur ergo minor numerus 1 ℞; nimirum linea A B, & maior 1 A, nimirum linea BC. Summa autem ex ipſis conflata, nimirum linea AC, ponatur 1 B. Eritque quadratum rectæ AB, 1 ʒ. Et quoniam ſumma numerorum 1 B. ſubtracta ex duobus quadratis rectarum AB, BC, relinquit 78. facient duo illa quadrata 78 + 1 B. Ita enim ſi ex illis demetur 1 B, relinquentur 78. Igitur quadratum rectæ BC, erit 78 + 1 B, — 1 ʒ. Si enim duo quadrata faciunt 78 + 1 B, vt diximus, erit ſolum quadratum rectæ BC, 78 + 1 B — 1 ʒ.



Deinde, quia ſumma numerorum AB, BC, nimirum 1 B, addita ad productum ex eorum multiplicatione, id eſt, ad complementum AD, facit 39 erit complementum hoc 39 — 1 B. Ita namq. ſi addatur 1 B, fiet ipſum complementum 39.

Quia vero quadratum rectæ A C, quæ valet 1 B, constat ex duobus quadratis rectarum A B, B C, id est, ex 78 + 1 B, & ex duobus complementis, hoc est, ex 78 — 2 B, éstque quadratum rectæ A C, ex 1 B, procreatum 1 B ℨ. erit æquatio inter 1 B ℨ. & 156 — 1 B, qui numerus conflatur ex 78 + 1 B, id est, ex duobus quadratis, & ex duobus complementis, hoc est, ex 78 — 2 B. Huius autem numeri 156 — 1 B, radix non aliter inuestigabitur, quàm ex numero 156 — 1 ℞, ac si hic æqualis esset 1 ℨ. nimirum hoc pacto. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 156. hoc est, $\frac{624}{4}$. fit numerus $\frac{625}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{25}{2}$. si dematur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. remanebit pretium 1 ℞. $\frac{24}{2}$. hoc est 12. ac tantum valet recta A C, hoc est, 1 B, summa numerorum 1 ℞. & 1 A.

Quoniam igitur 1 B, est 12. complementum 39 — 1 B, erit 27. & quadratum maius 78 + 1 B — 1 ℨ. erit 90 — 1 ℨ. éstque complementum 27. medium proportionale inter quadratum hoc maius 90 — 1 ℨ. & quadratum minus 1 ℨ. vt initio diximus: si ducatur 90 — 1 ℨ. in 1 ℨ. fiet numerus 90 ℨ — 1 ℨℨ. a æqualis quadrato ex 27. descripto, nimirum numero 729. Addito ergo 1 ℨℨ. vtrobique, erit æquatio inter 90 ℨ. & 729 + 1 ℨℨ. & ablatis 729. vtrobique, inter 90 ℨ — 729. & 1 ℨℨ. Huius numeri 90 ℨ — 729. radicem Zensizensicam ita inueniemus. Semissis numeri Zensorum est 45. à cuius quadrato 2025. si demantur 729. remanet numerus 1296. ad cuius radicem 36. si addatur prædicta semissis 45. fit 1 ℨ. 81. maior, minor autem erit 9. si nimirum ex prædicta semisse 45. dematur inuenta radix 36. Zensorum autem 81. & 9. radices quadratæ sunt 9. & 3. numeri quæsiti. Nam eorum quadrati sunt 81. & 9. à quorum summa 90. si ipsorum numerorum summa 12. detrahatur, reliquus fit numerus 78. Et si eadem summa 12. addatur ad 27. numerum ex eorum multiplicatione productum, fit summa 39.

a 20. septimi.

PORRO postquam inuentum fuit, 1 B, summam numerorum 1 ℞, & 1 A, esse 12. facilius inueniemus vtrumque numerorum 1 ℞, & 1 A, seorsum, per ænigma 172. cap. 29. Quoniam enim complementum, quod fit ex AB, in CB, inuentum est 27. si numerus 12. diuidatur in duas partes, vt ex vna in alteram fiat numerus 27. qui non maior est quarta parte quadrati ex numero 12. facti, vt in prædicto ænigmate docuimus, inuenietur vna pars 3. & altera 9. Idem quoq. efficietur per ænigma 38. cap. 30.

VEL, si numerus 12. per ænigma 170. cap. 29. vel 35. cap. 30. diuidatur in duos numeros, quorum quadrati simul faciant 90. summam videlicet duorum quadratorum rectarum AB, CB, quæ inuenta est 90. reperientur iterum duæ partes 3. & 9.

SCHOLIVM.

EX hoc ænigmate facilè intelligitur, eum, qui quæstiones per Algebram soluere vult, debere optimè esse exercitatum in Geometriæ scientia, vt cap. 1. diximus. Hoc enim ænigma ab eo, qui Geometriam ignorat, vix, aut nullo modo soluetur, vt patet.

59 *Duo socij habent duas summas aureorum. Quadrati numeri ex summis procreati faciunt 340. Sed ipsæ summæ inter se multiplicatæ faciunt $\frac{6}{7}$ maioris quadrati. Quæstio est, quantæ sint istæ summæ.* LIX.

PONATVR maior summa 1 ℞ & minor 1 A. Quadrati sunt 1 ℨ. & 1 A
ℨ. qui simul facere debent 340. Igitur 1 ℨ. erit 340 — 1 A ℨ. & 1 A ℨ, erit
340 — 1 ℨ. Duo vero numeri inter se multiplicati faciunt numerum 1 ℞
A, æqualem $\frac{6}{7}$. ℨ. hoc est, $\frac{6}{7}$. maioris quadrati, qui est 1 ℨ. Si igitur æquatio
est inter 1 ℞ A, & $\frac{6}{7}$. ℨ. erit quoque æquatio inter horum numerorum qua
drata, nimirum inter 1 ℨ A ℨ. & $\frac{36}{49}$ ℨℨ. quæ æquatio per multiplicatio-
nem in crucem reducetur ad æquationem inter 49 ℨ A ℨ, & 36 ℨℨ. Et
per depressionem signi ℨ, primæ radicis, erit æquatio inter 49 A
ℨ, & 36 ℨ. Ac per regulam Trium, si 36 ℨ. æquiualent 49 A ℨ. æquiua-
lebit 1 ℨ. numero $\frac{49 A ℨ}{36}$. vt hic vides, abiecto signo ℨ. in primo ac tertio
numero.

36. 49 A ℨ 1 ? $\frac{49 A ℨ}{36}$.

Et quoniam 1 A ℨ. fuit æqualis numero 340 — 1 ℨ. erit quoque æquatio
inter 1 A ℨ. & 340 — $\frac{49 A ℨ}{36}$. quandoquidem 1 ℨ. inuentus fuit æqualis nu-
mero $\frac{49 A ℨ}{36}$. Additis igitur $\frac{49 A ℨ}{36}$. vtrobique, erit æquatio inter 1 A ℨ +
$\frac{49 A ℨ}{36}$. & 340. Cum ergo 1 A ℨ. faciat $\frac{36}{36}$ A ℨ. (quod $\frac{36}{36}$. & 1. æquales sint
numeri.) erit æquatio inter $\frac{85}{36}$ A ℨ. & 340. Diuisis ergo 340. per $\frac{85}{36}$. fiet
1 A ℨ. 144. cuius radix 12. erit vnus numerorum, nimirum summa pecu-
niæ minor, pro qua posuimus 1 A, cuius quadratum 1 A ℨ. Quia vero
quadratum maioris summæ fuit 340 — 1 A ℨ. Si pretium 1 A ℨ. nimirum
144. dematur ex 340. reliquum fiet quadratum maioris summæ 196. cu-
ius radix est 14. alter numerorum, nimirum maior summa, quam posui-
mus 1 ℞. Itaque primus habet 14 aur. & secundus 12. Quadrati enim ho-
rum numerorum 196. 144. faciunt 340. & ex 14. in 12. fit numerus 168.
hoc est, $\frac{6}{7}$. maioris quadrati 196.

90 *Tres socij habent pecunias. Primus dicit secundo, si mihi dares $\frac{1}{2}$. tuæ pecuniæ, haberem 100. aur. Secundus vero dicit tertio, si mihi dares $\frac{1}{3}$. tuæ pecuniæ, haberem 100. aur. Tertius denique dicit primo, si mihi dares $\frac{1}{4}$. tuæ pecuniæ, haberem 100. aur. Quæritur, quantum quisque eorum habeat.* LX.

PONATVR primi pecunia 1 ℞. aur. secundi 1 A, aur. & tertij
1 B, aur. Primus ergo cum $\frac{1}{2}$. secundi habebit 1 ℞ + $\frac{1}{2}$ A. qui nu-

merus æqualis eſt 100. aur. Dempta ergo 1 ♃ vtrinque, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ A. & 100. aur. — 1 ♃. ideoque & inter dupla, nimirum inter 1 A, & 200 aur. — 2 ♃. Atque ita pro ſecundo, loco 1 A, pono 200 aur. — 2 ♃. qui ſecundus cum $\frac{1}{3}$. tertij, habebit 200 aur. — 2 ♃ + $\frac{1}{3}$ B, qui numerus etiam æqualis eſt 100 aur. Additis ergo 2 ♃ vtrobique, erit æqualitas inter 200 aur. + $\frac{1}{3}$ B, & 100 aur. + 2 ♃. Et ablatis 100 vtrobique, inter 100 aur. + $\frac{1}{3}$ B, & 2 ♃. Et rurſum ablatis 100 vtrinque, inter $\frac{1}{3}$ B, & 2 ♃ — 100. ideoque & inter tripla, nimirum inter 1 B, & 6 ♃ — 300 aur. Atque ita pro tertio, loco 1 B, pono 6 ♃ — 300 aur. Hic tertius cum $\frac{1}{4}$. primi, id eſt, cum $\frac{1}{4}$ ♃. habebit 6 $\frac{1}{4}$ ♃ — 300. numerum etiam æqualem 100 aur. Additis igitur 300 vtrobique, erit æquatio inter 6 $\frac{1}{4}$ ♃. & 400. Diuiſis ergo 400 per 6 $\frac{1}{4}$. fiet 1 ♃. 64. atque tot aureos habet primus. Secundus autem, qui inuentus eſt habere 200 — 2 ♃ habet aur. 72. Tertius denique, qui deprehenſus eſt habere aur. 6 ♃ — 300. habet 84 aur. Ita enim tam primus 64. cum $\frac{1}{2}$. ſecundi 72. id eſt, cum 36. quam ſecundus 72. cum $\frac{1}{3}$. tertij 84. id eſt, cum 28. quam tertius 84 cum $\frac{1}{4}$. primi 64. id eſt, cum 16. habebit 100. aur.

LXI. 61 *Tres habent pecuniam. Primus dicit reliquis, ſi adhuc haberetis 100. aur. eſſet ſumma veſtrorum aur. dupla meæ ſummæ. Secundus dicit reliquis, ſi adhuc haberetis 100. aur. eſſet ſumma veſtrorum aur. meæ ſummæ tripla. Tertius reliquis dicit, ſi adhuc haberetis 100. aur. ſumma veſtrorum aur. eſſet ſummæ meæ quadrupla. Quæritur, quantum quiſque habeat.*

Ponatvr primi pecunia 1 ♃, & aliorum duorum ſimul 1 A. Hi duo cum 100 aur. habebunt ſummam duplam pecuniæ primi. Ergo æquatio erit inter 2 ♃. & 1 A + 100. Et ablatis 100 vtrobique, inter 2 ♃ — 100. & 1 A, ac proinde ſecundus, ac tertius, qui ponuntur habere 1 A, habebunt 2 ♃ — 100. Et ſi addatur ſumma primi, quæ eſt 1 ♃, erit ſumma omnium trium 3 ♃ — 100.

Ponatur deinde ſumma ſecundi 1 B. habebuntque propterea primus ac tertius 3 ♃ — 100 — 1 B. quandoquidem omnes tres habent 3 ♃ — 100. Et quia ſumma primi ac tertij, vnà cum 100 aur. tripla eſt ſummæ ſecundi; erit æquatio inter 3 ♃ — 1 B. (Nam ſi addantur 100. ad 3 ♃ — 100 — 1 B, fit ſumma 3 ♃ — 1 B) & 3 B. Addita igitur 1 B, vtrinque, erit æqualitas inter 3 ♃ & 4 B: atque idcirco & inter ſubquadrupla, hoc eſt, inter $\frac{3}{4}$ ♃. & 1 B. ac proinde ſecundus, qui habet 1 B, habebit $\frac{3}{4}$ ♃.

Denique pro ſumma tertij ponatur 1 C. habebuntque propterea reliqui duo 3 ♃ — 100 — 1 C, quandoquidem omnes tres habent 3 ♃ — 100 aur. Et quoniam ſumma primi ac ſecundi, vna cum 100. aur.

aur. quadrupla eſt ſummæ tertij, erit æquatio inter 3 ♃ — 1 C. (Nam ſi addantur 100. ad 3 ♃ — 100 — 1 C, fit ſumma 3 ♃ — 1 C.) & 4 C. Additáque 1 C, vtrinque, erit æquatio inter 3 ♃. & 5 C. ideóque & inter ſubquintupla, hoc eſt, inter $\frac{3}{5}$ ♃. & 1 C. ac proinde tertius habebit $\frac{3}{5}$ ♃.

Itaque cùm primus habeat 1 ♃. ſecundus $\frac{3}{4}$ ♃, & tertius $\frac{3}{5}$ ♃, habebunt omnes tres ſimul 1 $\frac{27}{20}$ ♃. ſiue $\frac{47}{20}$ ♃. Habebant autem omnes tres ſimul etiam 3 ♃ — 100. Eſt igitur æquatio inter $\frac{47}{20}$ ♃. ſiue 2 $\frac{7}{20}$ ♃. & 3 ♃ — 100. Additíſque 100 vtrinque, inter 2 $\frac{7}{20}$ ♃ + 100. & 3 ♃. Ablatíſque 2 $\frac{7}{20}$ ♃ vtrobique, inter 100. & $\frac{13}{20}$ ♃. Diuiſis igitur 100 per $\frac{13}{20}$. fiet 1 ♃. 153 $\frac{11}{13}$. aur. pecuniæ primi. Secundus autem habens $\frac{3}{4}$ ♃. habebit 115 $\frac{5}{13}$. Et tertius habens $\frac{3}{5}$ ♃ habebit 92 $\frac{4}{13}$. Nam ſecundus ac tertius vnà cum 100. habebunt 307 $\frac{9}{13}$. qui numerus duplus eſt numeri 153 $\frac{11}{13}$. quem habet primus. Item primus ac tertius vnà cum 100. habebunt 346 $\frac{2}{13}$. qui numerus triplus eſt numeri 115 $\frac{5}{13}$. quem habet ſecundus. Secundus denique ac primus, vnà cum 100. habebunt 369 $\frac{3}{13}$. aur. qui numerus quadruplus eſt numeri 92 $\frac{4}{13}$. quem habet tertius.

62 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, ſi adhuc haberem 100. aur. fieret mea ſumma æqualis duabus ſummis veſtris. Secundus reliquis dicit, ſi haberem adhuc 100. aur. ſumma mea eſſet veſtræ ſummæ dupla. Tertius denique ait ad reliquos, ſi adhuc haberem 100. aur. ſumma mea fieret ſummæ veſtræ tripla. Quæritur, quantum quiſque habeat.* LXII.

Ponatvr primi ſumma 1 ♃. Ergo cùm 100. habebit 1 ♃ + 100 ac tanta erit ſumma ſecundi & tertij, omnéſque tres habebunt 2 ♃ + 100. Ponatur ſumma ſecundi 1 A. Ergo cum 100. habebit 1 A + 100. qui numerus duplus eſt ſummæ primi ac tertij, quæ eſt 2 ♃ + 100 — 1 A, (quia cùm omnes tres habeant 2 ♃ + 100. ſi tollatur 1 A, ſumma videlicet ſecundi, remanebit ſumma primi ac tertij 2 ♃ + 100 — 1 A.) Ac proinde æquatio erit inter 1 A + 100. & 4 ♃ + 200 — 2 A. Additíſque 2 A, vtrobique, inter 3 A + 100. & 4 ♃ + 200. Et ablatis 100. vtrinque, inter 3 A, & 4 ♃ + 100. Si ergo omnia diuidantur per 3. erit æquatio inter 1 A, & $\frac{4}{3}$ ♃ + $\frac{100}{3}$. Ac proinde cùm ſecundus poſitus ſit habere 1 A, erit eius ſumma $\frac{4}{3}$ ♃ + $\frac{100}{3}$. Ponatur denique ſumma tertij 1 B. Ergo cum 100. habebit 1 B + 100. qui numerus triplus eſt ſummæ primi ac ſecundi, quæ eſt $\frac{7}{3}$ ♃ + $\frac{100}{3}$. conflata ex 1 ♃ ſumma primi, & $\frac{4}{3}$ ♃ + $\frac{100}{3}$. ſumma ſecundi. Igitur æquatio erit inter 1 B + 100. & $\frac{21}{3}$ ♃ + $\frac{300}{3}$. hoc eſt, inter 1 B, + 100. & 7 ♃ + 100. Ablatíſque 100. vtrobique, inter 1 B, & 7 ♃. Ac proinde tertij ſumma, quæ poſita fuit 1 B, erit 7 ♃.

Itaque cum primus habeat 1 ℞. secundus $\frac{4}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. & tertius 7 ℞. habebunt omnes tres 9 $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. Habebant autem omnes tres etiam 2 ℞ + 100. Est igitur æquatio inter 9 $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. & 2 ℞ + 100. Ablatísque 2 ℞ vtrobique, inter 7 $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. & 100. Ablatísque rursum $\frac{100}{3}$. hoc est, 33 $\frac{1}{3}$. vtrobique, inter 7 $\frac{1}{3}$ ℞. & 66 $\frac{2}{3}$. Diuisis igitur 66 $\frac{2}{3}$. per 7 $\frac{1}{3}$. fiet 1 ℞ 9 $\frac{1}{11}$. summa primi. Secundus autem habens 1 $\frac{1}{3}$ ℞ + 33 $\frac{1}{3}$. habebit 45 $\frac{5}{11}$. Tertius denique habens 7 ℞. habebit 63 $\frac{7}{11}$. Ita namque primus cum 100. faciet 109 $\frac{1}{11}$. summam æqualem summæ secundi ac tertij. Secundus verò cum 100. faciet summam 145 $\frac{5}{11}$. duplam summæ primi ac tertij. Tertius denique cum 100. faciet 163 $\frac{7}{11}$. summam triplam summę primi ac secundi.

LXIII. 63 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis 100. aur. haberem summā æqualem reliquæ vestræ summæ. Secundus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis 100. aur. esset mea summa reliquæ vestræ dupla. Tertius denique dicit reliquis, si de vestra summa remoueretis 100. aur. mea summa esset reliquæ vestræ summæ tripla. Quæritur vnius cuiusque summa.*

PONATVR primi pecunia 1 ℞. Ergo reliqui duo simul habebunt 1 ℞ + 100. vt amotis 100. habeant reliquam summam æqualem summæ primi. Omnésque tres simul habebunt 2 ℞ + 100.

Ponatur pecunia secundi 1 A. quæ dupla est pecuniæ primi ac tertij, si remoueant 100. aur. Habent autem primus ac tertius 2 ℞ + 100 — 1 A. (cum enim omnes tres habeant 2 ℞ + 100. si dematur 1 A, summa secundi, reliqua fiet summa primi ac tertij 2 ℞ + 100 — 1 A.) & amotis 100. habebunt 2 ℞ — 1 A. cuius numeri dupla est 1 A, summa secundi. Ergo ęquatio erit inter 4 ℞ — 2 A, & 1 A. Et additis 2 A, vtrinque, inter 4 ℞, & 3 A. Et omnibus diuisis per 3. inter $\frac{4}{3}$ ℞. & 1 A. Ac proinde summa secundi, quem posuimus habere 1 A, erit $\frac{4}{3}$ ℞.

Ponatur denique summa tertij 1 B, quæ tripla est summæ primi ac secundi, si remoueant 100. aur. Habent autem primus & secundus $\frac{7}{3}$ ℞, & amotis 100. habebunt $\frac{7}{3}$ ℞ — 100. cuius numeri triplum $\frac{21}{3}$ ℞ — 300. æquale erit summæ tertij 1 B. Ergo tertius habet 7 ℞ — 300.

Itaque cum primus habeat 1 ℞, secundus $\frac{4}{3}$ ℞, & tertius 7 ℞ — 300 habebunt omnes tres simul 9 $\frac{1}{3}$ ℞ — 300. Habebant autem omnes tres quoque simul 2 ℞ + 100. Æquatio ergo est inter 9 $\frac{1}{3}$ ℞ — 300 & 2 ℞ + 100. Additísque 300. vtrinque inter 9 $\frac{1}{3}$ ℞, & 2 ℞ + 400. Ablatísque 2 ℞ vtrobique, inter 7 $\frac{1}{3}$ ℞, & 400. Diuisis ergo 400. per 7 $\frac{1}{3}$. fiet 1 ℞. 54 $\frac{6}{11}$. pecunia primi. Secundus verò habens $\frac{4}{3}$ ℞ habebit 72 $\frac{8}{11}$. Et tertius habens

habens 7 ℞ — 300. habebit 81 $\frac{9}{11}$. quod probatur. Nam si ex 154 $\frac{6}{11}$. summa secundi ac tertij reiiciantur 100. remanebit summa 54 $\frac{6}{11}$. æqualis summæ primi. Et si ex 136 $\frac{4}{11}$ summa primi ac tertij, abiiciantur 100. reliqua erit summa 36 $\frac{4}{11}$. subdupla summæ secundi 72 $\frac{8}{11}$. Si denique ex 127 $\frac{3}{11}$. summa primi ac secundi remoueantur 100. remanebit summa 27 $\frac{3}{11}$ subtripla summæ tertij 81 $\frac{9}{11}$.

64 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de mea summa remouerem 100. aur. summa vestra esset reliquæ meæ summæ quadrupla. Secundus dicit reliquis, si de mea summa abiicerem 100. aur. vestra summa esset reliquæ meæ summæ tripla. Denique tertius reliquis dicit, si de mea summa auferrem 100 aur. esset vestra summa reliquæ meæ summæ dupla. Quæritur vniuscuiusque summa.* LXIIII.

PONATVR pecunia primi 1 ℞ + 100. Ergo secundus ac tertius habebunt 4 ℞. vt hæc summa quadrupla sit summæ primi, si prius abiecerit 100. aur. omnésque tres habebunt 5 ℞ + 100.

Ponatur deinde pecunia secundi 1 A + 100. vt abiectis 100. reliqua summa 1 A, sit subtripla summæ primi ac tertij: quæ est 5 ℞ + 100 — 1 A + 100. ita vt æquatio sit inter 3 A. & 5 ℞ + 100 — 1 A + 100. Et addita 1 A + 100. vtrinque, inter 4 A + 100. & 5 ℞ + 100. Ablatísque 100 vtrobique, inter 4 A, & 5 ℞. Diuisísque his duobus numeris per 4. erit æquatio inter 1 A, & $\frac{5}{4}$ ℞. Cum ergo secundus positus sit habere 1 A + 100. habebit $\frac{5}{4}$ ℞ + 100.

Ponatur denique summa tertij 1 B + 100. vt abiectis 100. reliqua summa sit subdupla summæ primi ac secundi: quæ est 2 $\frac{1}{4}$ ℞ + 200. ita vt æquatio sit inter 2 B, & 2 $\frac{1}{4}$ ℞ + 200. Diuisis ergo omnibus per 2. erit 1 B, æqualis $\frac{9}{8}$ ℞ + 100. Cum ergo tertius positus sit habere 1 B + 100. habebit $\frac{9}{8}$ ℞ + 200.

Itaque cum primus habeat 1 ℞ + 100. Secundus $\frac{5}{4}$ ℞ + 100. & tertius $\frac{9}{8}$ ℞ + 200. habebunt omnes tres simul 3 $\frac{3}{8}$ ℞ + 400. Habebant autem omnes tres etiam simul 5 ℞ + 100. Æquatio igitur est inter 3 $\frac{3}{8}$ ℞ + 400. & 5 ℞ + 100. Ablatísque 100 vtrobique, inter 3 $\frac{3}{8}$ ℞ + 300. & 5 ℞. Et rursum ablatis 3 $\frac{3}{8}$ ℞ vtrinque, inter 300. & 1 $\frac{5}{8}$ ℞. Diuisis igitur 300. per 1 $\frac{5}{8}$. fiet 1 ℞. 184 $\frac{8}{13}$. Primus ergo qui positus est habere 1 ℞ + 100. habebit 284 $\frac{8}{13}$. aur. Secundus verò habens $\frac{5}{4}$ ℞ + 100. habebit 330 $\frac{10}{13}$. aur. Tertius denique habens $\frac{9}{8}$ ℞ + 200. habebit 407 $\frac{9}{13}$ aur. quod probatur. Nam si primus remoueat 100. de sua summa, erit reliquus numerus 184 $\frac{8}{13}$. subquadruplus summæ secundi ac tertij, quæ est 738 $\frac{6}{13}$. Et si secundus de summa abiiciat 100. erit reliquus numerus 230 $\frac{10}{13}$. subtriplus summæ primi ac tertij, quæ est 692 $\frac{4}{13}$. Denique si tertius de sua summa remoueat 100. erit reliquus numerus $307\frac{9}{13}$. subduplus summæ primi ac secundi, quæ est $615\frac{5}{13}$.

LXV. 65 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si vobis darem 100. aur. faceretis summam meæ reliquæ summæ quintuplam. Secundus dicit reliquis, si vobis darem 100. aur. fieret vestra summa reliquæ meæ summæ sextupla. Tertius denique reliquis dicit, si vobis darem 100. aur. faceretis summam reliquæ meæ summæ sextuplam. Quæritur vniuscuiusque summa.*

PONATVR pecunia primi $1x + 100$. Ergo reliqui duo habebunt $5x - 100$. vt si primus eis det 100. habeant $5x$. numerum videlicet quintuplum reliqui numeri primi. Omnésque tres simul habebunt $6x$.

Ponatur secundi pecunia $1A + 100$. vt postquam aliis duobus dederit 100. reliqua $1A$, sit subsescupla summæ aliorum cum illis 100. aur. quos à secundo acceperunt. Habent autem primus ac tertius $6x - 1A + 100$. ac propterea cum 100. aur. secundi habebunt $6x + 100 - 1A + 100$. qui numerus sescuplus est $1A$, hoc est æqualis $6A$. Additis ergo $1A + 100$. vtrobique erit æquatio inter $6x + 100$. & $7A + 100$. Ablatisque 100. vtrobique, inter $6x$. & $7A$. Diuisisque duobus hisce numeris per 7. erunt $\frac{6}{7}x$. æquales $1A$. Ergo secundus, quem posuimus habere $1A + 100$. habebit $\frac{6}{7}x + 100$.

Ponatur denique pecunia tertij $1B + 100$. vt postquam aliis duobus dederit 100. aur. reliqua $1B$, sit subseptupla summæ primi, ac secundi vna cum 100. aur. quos à tertio acceperunt. Habent autem primus ac secundus $\frac{13}{7}x. + 200$. ideóque cum 100. aur. tertij habebunt $\frac{13}{7}x. + 300$. qui numerus septuplus est $1B$, hoc est, æqualis $7B$. Diuisisque $\frac{13}{7}x. + 300$. & $7B$, per 7. erit æquatio inter $\frac{13}{49}x + \frac{300}{7}$. & $1B$. Ergo tertius, quem posuimus habere $1B + 100$. habebit $\frac{13}{49}x + \frac{1000}{7}$.

Itaque cum primus habeat $1x + 100$. Secundus $\frac{6}{7}x + 100$. & tertius $\frac{13}{49}x + \frac{1000}{7}$. habebunt omnes tres simul $2\frac{6}{49}x + \frac{2400}{7}$. Habebant autem & omnes tres simul $6x$. Est igitur æqualitas inter $2\frac{6}{49}x + \frac{2400}{7}$. & $6x$. Ablatisque $2\frac{6}{49}x$ vtrinque inter $\frac{2400}{7}$. & $3\frac{43}{49}x$. Diuisis igitur $\frac{2400}{7}$ per $3\frac{43}{49}$. fiet $1x$. $88\frac{8}{19}$. Primus ergo, cui dedimus $1x + 100$. habebit $188\frac{8}{19}$. Secundus autem, qui inuentus est habere $\frac{6}{7}x + 100$. habebit $177\frac{15}{19}$. Tertius denique habens $\frac{13}{49}x + \frac{1000}{7}$. habebit $166\frac{6}{19}$. quod probatur. Nam si primus det 100. aur. aliis duobus, habebunt alij duo $442\frac{2}{19}$. qui numerus quintuplus est reliquæ summæ primi $88\frac{8}{19}$. Et si secundus aliis duobus det 100. aur. habebunt alij duo $454\frac{14}{19}$. qui nume-

numerus sextuplus est summæ reliquæ secundi $75\frac{15}{19}$. Denique si tertius aliis duobus det 100. aur. habebunt alij duo $464\frac{4}{19}$. qui numerus septuplus est reliquæ summæ tertij $66\frac{6}{19}$.

66 *Tres pecuniam habent. Primus reliquis dicit, si vos daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestræ summæ reliquæ æqualis. Secundus reliquis dicit, si daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestræ summæ reliquæ dupla. Tertius denique dicit reliquis, si mihi daretis 100. aur. fieret mea summa reliquæ vestræ summæ tripla. Quæritur vniuscuiusque summa.* LXVI.

PONATVR pecunia primi $1x$. qui si acceperit 100. aur. ab aliis duobus habebit $1x + 100$. ac tantundem habebunt tunc alij duo, atque idcirco antequam dederunt 100. aur. habuerunt $1x + 200$. Omnésq. tres habebunt $2x + 200$.

Ponatur pecunia secundi $1A$. qui si acceperit 100. aur. ab aliis duobus, habebit $1A + 100$. qui numerus duplus est summæ reliquæ primi, ac tertij, quę antequam dederint 100. aur. aliis duobus, est $2x + 200 - 1A$. & postquam dederint 100. aur. aliis duobus, habebunt $2x + 100 - 1A$. Huius ergo duplum $4x + 100 - 2A$, æquale erit $1A + 100$. Et additis $2A$, vtrobique, æquatio erit inter $4x + 200$. & $3A. + 100$. Et ablatis 100. vtrinque, inter $4x + 100$. & $3A$. Diuisisque duobus hisce numeris per 3. erit æquatio inter $\frac{4}{3}x + \frac{100}{3}$. & $1A$. Secundus ergo habet $\frac{4}{3}x + \frac{100}{3}$. quoniam posuimus eum habere $1A$.

Ponatur denique pecunia tertij $1B$, qui si acceperit 100. aur. ab aliis duobus, habebit $1B + 100$. qui numerus triplus est summę reliquæ primi ac secundi, quę antequam dederint 100. aur. aliis duobus, est $\frac{7}{3}x + \frac{100}{3}$. & postquam dederint 100 aur. aliis duobus, habebunt $\frac{7}{3}x - \frac{200}{3}$. Huius ergo triplum $7x - 200$. æquale est $1B + 100$. Et additis 200. vtrinque, ęqualitas erit inter $7x$, & $1B + 300$. Ablatisq. 300 vtrobique, inter $7x - 300$. & $1B$. Tertius igitur, quem posuimus habere $1B$, habebit $7x - 300$.

Itaque cum primus habeat $1x$. Secundus $\frac{4}{3}x + \frac{100}{3}$. & tertius $7x - 300$. habebunt omnes tres simul $9\frac{1}{3}x - \frac{800}{3}$. Habebant autem & omnes simul $2x + 200$. Est ergo æqualitas inter $9\frac{1}{3}x - \frac{800}{3}$. & $2x + 200$. Ablatisque $2x$ vtrobique, inter $7\frac{1}{3}x - \frac{800}{3}$. & 200. Additisque $\frac{800}{3}$. vtrinque, inter $7\frac{1}{3}x$, & $\frac{1400}{3}$. Diuisis igitur $\frac{1400}{3}$ per $7\frac{1}{3}$. fiet $1x$. $63\frac{7}{11}$. pecunia primi. Secundus verò, qui inuentus est habere $\frac{4}{3}x + \frac{100}{3}$. habebit $118\frac{2}{11}$. Tertius denique, quem inuenimus habere $7x - 300$. habebit $145\frac{5}{11}$. quod probatur. Nam primus cum 100. habebit summam $163\frac{7}{11}$. æqualem summæ reliquorum, si prius dederint 100. aur. Secundus verò cum 100. faciet summam $218\frac{2}{11}$. duplam reliquorum summæ, postquam 100.aur.dederint. Tertius denique cum 100. faciet ſummam 245 $\frac{5}{11}$. triplam ſummæ reliquorum,poſtquam dederint 100.aur.

LXVII. 67 *Tres habent pecuniam. Dicit primus reliquis. Si mihi daretis $\frac{1}{2}$. veſtræ ſummæ, haberem 100. aur. Secundus verò dicit reliquis, ſi mihi daretis $\frac{1}{3}$. veſtræ ſummæ, haberem 100.aur. Tertius denique reliquis dicit, ſi mihi daretis $\frac{1}{4}$. veſtræ ſummæ, haberem 100. aur. Quæritur pecunia vniuſcuiuſque.*

PONATVR pecunia primi 100 — 1 ℞. Ergo reliqui duo habebunt 2 ℞. Ita enim ſi dent $\frac{1}{2}$. nimirum 1 ℞, primo, habebit primus 100. aur. Omnéſque tres ſimul habebunt 100 + 1 ℞.

Ponatur ſecundi pecunia 1 A, habebúntque primus ac tertius 100 + 1 ℞ — 1 A, qui ſi ſecundo dent $\frac{1}{3}$. nimirum $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$ ℞ — $\frac{1}{3}$ A. habebit ſecundus 1 A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$ ℞ — $\frac{1}{3}$ A, hoc eſt, $\frac{2}{3}$ A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$ ℞ qui numerus æqualis eſt 100.aur. Si ergo auferantur $\frac{100}{3}$. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{2}{3}$ A + $\frac{1}{3}$ ℞. & $\frac{200}{3}$. Ablatíſque $\frac{1}{3}$ ℞ vtrinque, inter $\frac{2}{3}$ A, & $\frac{200}{3}$ — $\frac{1}{3}$ ℞. Diuiſiſque duobus hiſce numeris per $\frac{2}{3}$. erit æqualitas inter 1 A, & 100 — $\frac{1}{2}$ ℞. Secundus ergo habebit 100 — $\frac{1}{2}$ ℞.

Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quia primus ac ſecundus habent 200 — $\frac{3}{2}$ ℞. ſi tertio dent $\frac{1}{4}$. nimirum 50 — $\frac{3}{8}$ ℞. habebit tertius 1 B + 50 — $\frac{3}{8}$ ℞, qui numerus æqualis eſt 100.aur. Ablatíſque 50. vtrinque, erit æqualitas inter 1 B — $\frac{3}{8}$ ℞, & 50. Additíſque $\frac{3}{8}$ ℞ vtrobique, inter 1 B, & 50 + $\frac{3}{8}$ ℞. Tertius igitur habebit 50 + $\frac{3}{8}$ ℞.

Itaque cum primus habeat 100 — 1 ℞. Secundus 100 — $\frac{1}{2}$ ℞. & tertius 50 + $\frac{3}{8}$ ℞. habebunt omnes tres ſimul 250 — $\frac{9}{8}$ ℞. Habebant autem omnes tres ſimul etiam 100 + 1 ℞. Eſt igitur æquatio inter 250 — $\frac{9}{8}$ ℞. & 100 + 1 ℞. Additíſque $\frac{9}{8}$ ℞ vtrobique, inter 250. & 100 + 2 $\frac{1}{8}$ ℞. Ablatíſque 100 vtrinque, inter 150. & 2 $\frac{1}{8}$ ℞. Diuiſis igitur 150. per 2 $\frac{1}{8}$. fiet 1 ℞. 70 $\frac{10}{17}$. Primus igitur habens 100 — 1 ℞, habebit 29 $\frac{7}{17}$. Secundus autem habens 100 — $\frac{1}{2}$ ℞, habebit 64 $\frac{12}{17}$. Tertius denique habens 50 + $\frac{3}{8}$ ℞. habebit 76 $\frac{8}{17}$. Nam tam primus cum $\frac{1}{2}$. ſummæ reliquorum duorum, quam ſecundus cum $\frac{1}{3}$. ſummæ aliorum duorum, & quam tertius cum $\frac{1}{4}$. ſummæ aliorum duorum habet 100.aur.

LXVIII 68 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, ſi vobis darem $\frac{1}{2}$. meæ ſummæ, haberetis 100. aur. Secundus verò reliquis dicit, ſi vobis darem $\frac{1}{3}$. meæ ſummæ, haberetis 100.aur. Tertius denique reliquis dicit, ſi vobis darem $\frac{1}{4}$. meæ pecuniæ, haberetis 100.aur.*

VEL

Secundus, ac tertius dicunt primo, ſi nobis dares $\frac{1}{2}$. tuæ pecuniæ, habe-
remus 100. aur. At primus, ac tertius dicunt ſecundo, ſi nobis da-
res $\frac{1}{3}$. tuæ pecuniæ, haberemus 100. aur. Denique primus, ac ſe-
cundus dicunt tertio, ſi nobis dares $\frac{1}{4}$. tuæ pecuniæ, haberemus
100. aur. Quæritur vniuſcuiuſque ſumma.

PONATVR pecunia primi 1 ℞. Ergo reliqui duo habebunt 100 — $\frac{1}{2}$
℞. vt accipientes $\frac{1}{2}$. primi, nimirum $\frac{1}{2}$ ℞. habeant 100. Omnéſque tres ha-
bebunt $\frac{1}{2}$ ℞ + 100.
Ponatur pecunia ſecundi 1 A, erítque ſumma primi ac tertij $\frac{1}{2}$ ℞ + 100
— 1 A. Et ſi acceperint $\frac{1}{3}$. ſecundi, nimirum $\frac{1}{3}$ A, habebunt $\frac{1}{2}$ ℞ + 100
— 1 A + $\frac{1}{3}$ A, qui numerus æqualis eſt 100. Additis ergo 1 A, vtrobique,
erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ ℞ + 100 + $\frac{1}{3}$ A, & 100 + 1 A. Ablatíſque 100 vtrin-
que, inter $\frac{1}{2}$ ℞ + $\frac{1}{3}$ A. & 1 A. Et rurſum ablata $\frac{1}{3}$ A, vtrobique, inter $\frac{1}{2}$ ℞, &
$\frac{2}{3}$ A. Diuiſoque vtroque numero per $\frac{2}{3}$. inter $\frac{3}{4}$ ℞. & 1 A. Habet ergo ſe-
cundus $\frac{3}{4}$ ℞.
Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quoniam primus & ſecundus habent
$\frac{7}{4}$ ℞. Si acceperint $\frac{1}{4}$. tertij, habebunt $\frac{7}{4}$ ℞ + $\frac{1}{4}$ B. ſummam æqualem 100 aur.
Ablatíſque $\frac{7}{4}$ ℞ vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{4}$ B. & 100 — $\frac{7}{4}$ ℞. Diuiſo
ergo vtroque numero per $\frac{1}{4}$. erit 1 B, æqualis 400 — 7 ℞. Tertius ergo
habet 400 — 7 ℞.
Itaque cum primus habeat 1 ℞. ſecundus $\frac{3}{4}$ ℞, & tertius 400 — 7 ℞. ha-
bebunt omnes tres 400 — $\frac{21}{4}$ ℞. Habebant autem & omnes ſimul $\frac{1}{2}$ ℞ +
100. Si igitur vtrinque addantur $\frac{21}{4}$ ℞. erit æqualitas inter 400. & $\frac{23}{4}$ ℞ +
100. Ablatíſque 100 vtrobique, inter $\frac{23}{4}$ ℞. & 300. Diuiſis igitur 300 per
$\frac{23}{4}$. fiet 1 ℞. 52 $\frac{4}{23}$. pecunia primi. Secundi pecunia, qui inuentus eſt habe-
re $\frac{3}{4}$ ℞. erit 39 $\frac{3}{23}$. aur. Tertius denique habens 400 — 7 ℞. habebit 34 $\frac{18}{23}$
aur. quod probatur. quia tam ſecundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi, quam
primus ac tertius cum $\frac{1}{3}$. ſecundi, & quam primus & ſecundus cum $\frac{1}{4}$. ter-
tij habent 100.aur.

69 *Tres mercatores Societatem ineunt per 12. menſes. Primus im-* LXIX.
ponit 100. aur. Secundus 200. aur. & tertius 300. aur. Poſt
menſes autem duos imponit primus aliquot libras piperis, cu-
ius 3 libræ valent 1. aur. Et poſt menſes quatuor ſecundus im-
ponit maſſam argenti, cuius 1. marca valet 7. aur. Tranſactis
12. menſibus, recipit primus ex lucro 50. aur. ſecundus 110.
aur. & tertius 90. aur. ita vt totum lucrum fuerit 250. aur.

Quæritur, quot libras piperis primus imposuerit, & quot marcas argenti secundus.

PONE primum imposuisse 1 ♃ librarum piperis: Et secundum 1 A, marcarum argenti. Cum ergo tres libræ piperis valeant 1 aur. valebit 1 ♃ lib. aur. $\frac{1}{3}$ ♃. Et cum 1. marca argenti valeat 7 aur. valebit 1 A marcarum aur. 7 A, vt hic vides.

lib.	aur.	lib.	aur.
3	1	1 ♃?	$\frac{1}{3}$ ♃
Marca	aur.	Marc.	aur.
1	7	1 A?	7 A

Et quia pecunia cuiusque multiplicanda est in tempus, si 100. aur. primi ducantur in 12. mens. fiet numerus 1200. Et ex 200. aur. secundi in 12. mens. fiet numerus 2400. & ex 300. aur. tertij in 12. mens. fiet numerus 3600. Rursus ex $\frac{1}{3}$ ♃. primi in 10. mens. quibus in Societate stetit, (nam post duos menses imposuit $\frac{1}{3}$ ♃. aur. hoc est, 1. lib. piperis) fit numerus $\frac{10}{3}$ ♃. aur. Et ex 7 A, in 8. mens. quibus in commercio steterunt, (nam post 4. mens. imposuit 1 A, marc. quæ valet 7 A) fit numerus 56 A marc. Igitur numerus primi est $1200 + \frac{10}{3}$ ♃. Secundi $2400 + 56$ A marc. & tertij 3600. qui tres numeri faciunt $7200 + \frac{10}{3}$ ♃ $+ 56$ A. Vnde sic stabit exemplum ad regulam Trium ter repetitam.

$7200 + \frac{10}{3}$ ♃ $+ 56$ A 250 $\begin{cases} 1200 + \frac{10}{3} ♃? & 50 \\ 2400 + 56 A? & 110 \\ 3600? & 90 \end{cases}$

hoc est, si $7200 + \frac{10}{3}$ ♃ $+ 56$ A, lucrantur 250. aur. quid lucrabuntur aur. $1200 + \frac{10}{3}$ ♃. & quid aur. $2400 + 56$ A. & quid aur. 3600? Erunt autem lucra aur. 50. 110. & 90. vt in quæstione positum est. [a] Ergo tantum fiet ex primo numero in quartos, quantum ex secundo in tertios. Fit autem ex primo in quartum 90. numerus $648000 + 300$ ♃ $+ 5040$ A. qui æqualis erit numero 900000. qui fit ex secundo 250. in tertium 3600. Ablatis igitur 648000. vtrobique, erit æquatio inter 300 ♃ $+ 5040$ A. & 252000. Et ablatis 300 ♃ vtrinque, inter 5040 A, & $252000 - 300$ ♃. Diuisisque duobus hisce numeris per 5040. fiet 1 A, $50 - \frac{5}{84}$ ♃. Ac proinde 56 A facient $2800 - 3\frac{1}{3}$ ♃. quibus additis ad $7200 + \frac{10}{3}$ ♃. siue $+ 3\frac{1}{3}$ ♃. fiet numerus 10000. qui primum locum obtinebit in regula trium, pro numero $7200 + \frac{10}{3}$ ♃ $+ 56$ A. vt alios etiam numeros Cossicos resoluere possis, vt hic cernis.

a 19. septimi.

1000

10000 250 $\begin{cases} 1200 + \frac{10}{3} ♃? & 50 \\ 2400 + 56 A? & 110 \\ 3600? & 90 \end{cases}$

Nam ex 10000. in 110. fit numerus 1100000. æqualis numero 600000 + 14000 A, facto ex 250. in $2400 + 56$ A. Ablatis ergo 600000. vtrinque, erit æqualitas inter 500000. & 14000 A. Diuisisque duobus hisce numeris per 14000. fiet 1 A, $35\frac{5}{7}$ marc. argenti. Denique ex 10000. in 50. fit numerus 500000. æqualis numero $300000 + \frac{2500}{3}$ ♃. facto ex 250. in $1200 + \frac{10}{3}$ ♃. Ablatis ergo 300000. vtrobique, erit æqualitas inter 200000. & $\frac{2500}{3}$ ♃. Diuisisque 200000. per $\frac{2500}{3}$ ♃. fiet 1 ♃. 240. libræ piperis. quod probatur sic. $35\frac{5}{7}$. marc. argenti valebunt aur. 250. & 240. lib. piperis aur. 80. vt hic vides.

Marca	aur.	Marc.	aur.
1	7	$35\frac{5}{7}$?	250
Lib.	aur.	Lib.	aur.
3	1	240?	80

Et quia aurei 250. steterunt in commercio 8. menses: ductis 250 in 8. fit numerus 2000. qui addendus est ad 2400. loco 56. A. vt numerus tertius in medio fit 4400. Item quia aur. 80. steterunt in commercio 10. menses: ductis 80. in 10. fit numerus 800. qui ad 1200. addendus est loco $\frac{10}{3}$ ♃. vt numerus tertius in supremo loco fit 2000. Vnde sic denuò stabit exemplum.

10000 250 $\begin{cases} 2000? & 50 \\ 4400? & 110 \\ 3600? & 90 \end{cases}$

Vbi vides, tres numeros tertios facere 10000. primum numerum regulæ Trium: eosdémque lucrifacere 50. 110. & 90.

70 *Tres mercatores ineunt Societatem. Primus imponit 35. aur.* LXX.
amplius, quam secundus. At secundus, ac tertius simul imponunt 84. aur. Lucrum commune est 66. aur. ex quibus tertius pro parte sui lucri recipit aur. 21. Quæstio est, quantum quisque imposuerit, & quantum tam primus, quam secundus de lucro receperit.

PONE, primum imposuisse 1 ♃ + 35. aur. Secundum 1 ♃.

aur. vt primus vltra huius summam imposuerit præterea 35.aur. Et tertium aur.84 — 1 ℞. vt summa secundi ac tertij faciat 84.aur. Deinde ponatur lucrum primi 1 A; & secundi 1 B. Et quoniam lucrum tertij est 21. aur. sic stabit exemplum.

119 + 1 ℞.	66	1 ℞ + 35 ?	1 A
		1 ℞ ?	1 B
		84 — 1 ℞ ?	21

a 19. septimi. a Et quoniam tantum fit ex primo numero in quartum, quantum ex secundo in tertium: Fit autem numerus 2499 + 21 ℞. ex primo 119 + 1 ℞ in quartum infimum: Et ex secundo 66. in tertium infimum 84 — 1 ℞. fit numerus 5544 — 66 ℞. qui illi æqualis est. Additis igitur 66 ℞ vtrinque, fiet æquatio inter 2499 + 87 ℞. & 5544. Et ablatis 2499. vtrobique, inter 87 ℞. & 3045. Diuisis ergo 3045. per 87. fiet 1 ℞. 35. ac proinde primus imposuit 70.aur. nimirum 1 ℞ + 35. Et secundus 35. nimirum 1 ℞. Et tertius 49. nimirum 84 — 1 ℞. Et primus numerus regulæ erit 154. Ergo iam ita stabit exemplum.

154	66	70 ?	1 A
		35 ?	1 B
		49 ?	21

Ex 154. in 1 A, fit numerus 154 A, æqualis numero 4620. facto ex 66. in 70. Diuiso ergo vtroque numero per 154. fiet 1 A, 30. Item ex 154. in 1 B, fit numerus 154 B, æqualis numero 2310. facto ex 66. in 35. Diuiso ergo vtroque numero per 154. fiet 1 B, 15. Recepit ergo primus de lucro 30. aur. & secundus 15. aur. quod ita probatur.

154	66	70 ?	30
		35 ?	15
		49 ?	21

ÆNIG-

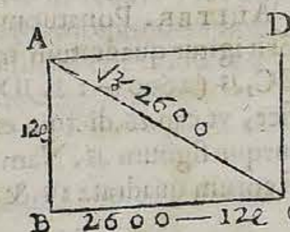
ÆNIGMATA VARIA AD figuras Geometricas pertinentia.

CAP. XXXII.

IN extremo hoc cap. reducentur ad vsum omnia ferè illa, quę de numeris Irrationalibus pręcepta sunt: quippe cum ænigmata proponenda sint varia de figuris Geometricis, in quibus plerunque latera, diametri, atque areæ per numeros surdos explicari solent. Horum ænigmatum primum sit hoc.

1 *Est rectangulum quoddam altera parte longius ABCD, cuius area continet palmos 120. diameter vero palm. √ʒ 2600. Quæruntur latera.*

a 47. primi. a QVONIAM quadrata laterum AB, BC, æqualia sunt quadrato diametri AC. quod est 2600. si quadratum lateris AB, ponatur 1 ℞, erit quadratum lateris BC, 2600 — 1 ℞. Ergo latera ipsa erunt √ʒ 1 ℞, & √ʒ (2600 — 1 ℞) quæ inter se multiplicata producent aream BD, nimirum palm. 120. vt cap. 1. lib. 3. Geom. pract. diximus, atque idcirco quadrata laterum 1 ℞, & 2600 — 1 ℞. inter se multiplicata producent quadratum areæ, nimirum 14400. ex coroll. Lemmatis ænig. 26. cap. 30. Cum ergo ex 1 ℞. in 2600 — 1 ℞ fiat 2600 ℞ — 1 ʒ. erit æquatio inter 14400. & 2600 ℞ — 1 ʒ. Additoque 1 ʒ. vtrinque, inter 1 ʒ + 14400. & 2600 ℞. Ablatisq; 14400. vtrobique, inter 1 ʒ. & 2600 ℞ — 14400. Iam sic. Semissis numeri radicum est 1300. à cuius quadrato 1690000. subtractis 14400. remanet 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam √ʒ 1675600. si addatur prædicta semissis 1300. fiet 1 ℞. 1300 + √ʒ 1675600. Et si eadem radix ex prædicta semisse detrahatur, reliqua fiet minor radix 1300 — √ʒ 1675600. (quia hæc æquatio duplicem habet radicem, propter signum — quo numerus absolutus afficitur.) Ergo minoris lateris AB, quadratum erit 1300 — √ʒ 1675600. maioris autem lateris BC, quadratum erit 1300 + √ʒ 1675600. quod etiam relinquitur, si quadratum 1300 — √ʒ 1675600. lateris AB, detrahatur ex



2600 + √ʒ 0
1300 — √ʒ 1675600
————————
1300 + √ʒ 1675600

2600. quadrato diametri AC, vt in hac formula apparet. Vides ergo duo quadrata 1300 — √ʒ 1675600. & 1300 + √ʒ 1675600. simul facere 2600. quadratum diametri. Et si eorum latera √ʒ (1300 — √ʒ 1675600.) & √ʒ (1300 + √ʒ 1675600) inter se multiplicentur, produci aream rectanguli √ʒ 14400. hoc est, 120. palm. quæ multiplicatio fiet, si quadratum posterioris particulæ 1675600. dematur ex 1690000 quadrato prioris particulæ, & reliquo numero signum √ʒ, præfigatur. vt ex iis constat, quæ cap. 23. & 24. scripsimus, atque in hac formula apparet.

√ʒ (1300 — √ʒ 1675600)
√ʒ (1300 + √ʒ 1675600)
————————
√ʒ 14400

ALITER. Posito quadrato minoris lateris AB, 1 ℞. & idcirco quadrato maioris lateris 2600 — 1 ℞. erunt ipsa latera √ʒ 1 ℞, & √ʒ (2600 — 1 ℞) quæ inter se multiplicata facient aream 120. palm. Faciunt autem √ʒ (2600 ℞ — 1 ʒ) vt hic vides. quæ multiplicatio fiet, si ipsa quadrata 2600 — 1 ℞. & 1 ℞. inter se multiplicentur, & producto numero signum √ʒ. præfigatur. Est igitur ęquatio inter 120. & √ʒ (2600 ℞ — 1 ʒ.) atque ideo & inter eorum quadrata 14400. & 2600 ℞ — 1 ʒ. vt supra, &c.

√ʒ (2600 — 1 ℞)
1 ℞
————————
√ʒ (2600 ℞ — 1 ʒ)

ALITER. Ponatur minus latus AB, 1 ℞. ideoque eius quadratum 1 ʒ. Erit igitur quadratum maioris lateris BC, 2600 — 1 ʒ. & ipsum latus BC, √ʒ (2600 — 1 ʒ.) Ducatur AB, 1 ℞. in BC, √ʒ (2600 — 1 ʒ.) quod fiet, vt cap. 26. dictum est, si 1 ℞. reducatur ad quadratum 1 ʒ. præponaturque signum √ʒ. Nam si √ʒ 1 ʒ. ducatur in √ʒ (2600 — 1 ʒ) quod fiet si eorum quadrata 1 ʒ. & 2600 — 1 ʒ. inter se multiplicentur, vt cap. 26. dictum est, producetur numerus √ʒ (2600 ʒ — 1 ʒʒ) pro area rectãguli 120. Ergo ęquatio erit inter √ʒ (2600 ʒ — 1 ʒʒ) & 120. ac proinde & inter eorum quadrata 2600 ʒ — 1 ʒʒ. & 14400. Et addito 1 ʒʒ. vtrobique, inter 2600 ʒ. & 1 ʒʒ + 14400. Ablatisque 14400. vtrinque, inter 2600 ʒ — 14400. & 1 ʒʒ. Iam sic radicem Zensizensicam eruemus. Semissis numeri Zensorum est 1300. à cuius quadrato 1690000 demptis 14400. remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam √ʒ 1675600. si addatur prædicta semissis 1300. fiet 1 ʒ. 1300 + √ʒ 1675600. Et si eadem radix ex prædicta semisse dematur, relinquetur minus quadratum 1300 — √ʒ 1675600. Ergo maioris lateris BC, quadratum erit 1300 + √ʒ 1675600. & minoris lateris AB, quadratum erit 1300 — √ʒ 1675600. & radix maior erit √ʒ (1300 + √ʒ 1675600) & minor, √ʒ (1300

√ʒ (2600 — 1 ʒ)
1 ʒ
————————
√ʒ (2600 ʒ — 1 ʒʒ)

(1300 — √ʒ 1675600) vt supra, &c.

ALITER [a] Quoniam quadrata laterum AB, BC, faciunt 2600 & ex vno latere in aliud fit area 120. inueniendi erũt per ænigma 26. ca. 30. duo numeri, qui inter se multiplicati faciant 120. & eorum quadrati faciant 2600. quod ita fiet. Ponatur minor numerus quadratus 1 ʒ. & maior 2600 — 1 ʒ. Et quoniam per Lemma ænigmatis 26. cap. 30. numerus 120. quem latera quadratorum 1 ʒ. & 2600 — 1 ʒ. producunt, medio loco proportionalis est inter ipsa quadrata; [b] erit numerus 2600 ʒ — 1 ʒʒ. factus ex 1 ʒ. in 2600 — 1 ʒ. æqualis quadrato numeri 120. hoc est, numero 14400. Est ergo æquatio inter 2600 ʒ — 1 ʒʒ. & 14400. Additoque 1 ʒʒ. vtrobique, inter 2600 ʒ. & 1 ʒʒ + 14400. Et ablatis 14400. vtrinque, inter 2600 ʒ — 14400. & 1 ʒʒ. vt supra, &c.

a 47. primi.
b 20. septimi.

2 *Campus altera parte longior habet latera in proportione septupla: & eorum quadrata simul sumpta ad eorum summam proportionem habent centuplam. Quæruntur latera, area, & diameter.* II.

PONATVR minus latus 1 ℞. & maius 7 ℞, quorum summa 8 ℞ & quadrata 1 ʒ. 49 ʒ. summam faciunt 50 ʒ. centuplam summæ 8 ℞. Igitur æquatio est inter 50 ʒ. & 800 ℞. Diuisis ergo 800. per 50. fiet 1 ℞. 16. minus latus. Maius erit 112. in proportione septupla. Ergo area erit 1792. producta ex vno latere in aliud. Diameter vero erit √ʒ 12800. Hoc est, quadrata laterum 256. & 12544. facient summam 12800. centuplam summæ laterum 16. & 112. quę est 128. at quadratum diametri erit 12800. summa duorum quadratorum laterum, ac proinde diameter √ʒ 12800.

3 *Est rectangulum 4500. palmorum, & longitudo tripla est latitudinis. Quæruntur latera & diameter.* III.

PONATVR latitudo 1 ℞. & longitudo 3 ℞. Hæc latera inter se multiplicata producunt aream 3 ʒ. æqualem 4500. Diuisis ergo 4500 per 3. fiet 1 ʒ. 1500 & 1 ℞. √ʒ 1500. latitudo rectanguli: & eius triplum √ʒ 13500. erit eiusdem longitudo. Ex latitudine in longitudinem fit area √ʒ 20250000. hoc est, 4500. Diametri autem quadratum erit 15000. æquale duobus quadratis laterum, & ipsa diameter erit √ʒ 15000.

4 *Est parallelepipedum, hoc est, columna quadrilatera palmorum 3375. Altitudo ad longitudinem basis, & hæc longitudo ad latitudinem basis proportionem habet sesquialteram. Quæruntur mensuræ.* IV.

PONATVR altitudo 9 ℞. longitudo 6 ℞. & latitudo 4 ℞. in continua proportione sesquialtera. Latitudo in longitudinem facit basem 24 ȝ & hæc in altitudinem facit aream parallepipedi 216 ce. æqualem 3375. Diuisis igitur 3375 per 216. fiet 1 ce. 15 $\frac{135}{216}$. & 1 ℞. cubica 2 $\frac{1}{2}$. Ergo 9 ℞. facient 22 $\frac{1}{2}$. altitudinem: Et 6 ℞. facient 15. longitudinem basis: Et 4 ℞. facient 10. latitudinem basis. quæ mensuræ inuicem multiplicatæ faciunt 3375.

V. 5 *Est parallelepipedum basem habens quadratam, cuius latus subdecuplum est altitudinis parallelepipedi, cuius area continet 6780. palmos. Quæritur basis, & altitudo.*

PONATVR latus basis 1 ℞ ideóque altitudo parallelepipedi 10 ℞. Ex 1 ℞. in se fit 1 ȝ, nimirum basis quadrata, quæ ducta in altitudinem, id est, in 10 ℞. facit 10 ce. aream scilicet parallelepipedi æqualem 6780. Diuisis igitur 6780. per 10. fiet 1 ce. 678. & 1 ℞. √ce 678. latus basis. quod in se ductum facit √ce 459684. aream basis. Altitudo verò ad latus decuplam habens proportionem erit √ce 678000. quæ ducta in aream basis, id est, in √ce 459684. facit √ce 311665752000. aream totius parallelepipedi, nimirum 6780.

VI. 6 *Est superficies rectangula habens longitudinem quadruplam latitudinis, & aream 576. Quæruntur latera.*

PONATVR minus 1 ℞, & maius 4 ℞. Hæc inter se multiplicata producunt 4 ȝ. aream rectanguli æqualem 576. Diuisis ergo 576 per 4. fiet 1 ȝ. 144. & 1 ℞ 12. minus latus. Maius ergo erit 48.

VII. 7 *Est columna quadrangula rectangula, cuius basis latera proportionem habent sesquitertiam, & altitudo ad latus maius basis proportionem habet duplam superbipartientem tertias: soliditas denique columnæ continet palm. 93312. Quæruntur dimensiones singulæ.*

PONATVR latus minus basis 3 ℞, & maius 4 ℞, altitudo verò 10 $\frac{2}{3}$ ℞. vt ad maius latus 4 ℞, habeat proportionem duplam superbipartientem tertias, & maius latus ad minus sesquitertiam. Hi tres numeri inter se multiplicati producunt 128 ce. soliditatem videlicet columnæ æqualem 93312. Diuisis igitur 93312 per 128. fiet 1 ce. 729. & 1 ℞. 9. Ergo latus minus basis, quod posuimus 3 ℞ erit

erit 27. & maius 4 ℞, erit 36. altitudo verò 10 $\frac{2}{3}$ ℞. erit 96. Atque tres hæ dimensiones inter se multiplicatæ faciunt aream 93312.

8 *Sunt duæ turres inæquales supra duas bases quadratas erectæ. Latera basium proportionem habent sesquitertiam, qualem etiam habent & altitudines & soliditates: ipsæque altitudines permutatim sunt laterum basium duplæ. Soliditates denique ambarum turrium simul complectuntur palm. 21000. Quæruntur dimensiones singulæ.* VIII.

PONATVR latus minoris basis 3 ℞. & maioris 4 ℞. vt hoc ad illud proportionem habeat sesquitertiam sine fractione. Eritque minor basis 9 ȝ. & maior 16 ȝ. Et quia altitudines laterum basium sunt permutatim duplæ. hoc est, altitudo turris maioris basis dupla est lateris basis minoris, & altitudo turris minoris basis dupla est lateris maioris basis; erit illa 6 ℞, & hæc 8 ℞. habebuntque proportionem sesquitertiam,[a] eandem nimirum, quam latera basium habent, eritque turris minoris basis altior quam turris maioris basis. Quoniã verò, vt in sequẽti Lemmate demonstrabimus, duo numeri multiplicantes per crucem duos numeros, qui habeant duplicatam proportionem priorum numerorum, producunt duos numeros in eadem cum illis proportione:[b] habentque bases duplicatam proportionem laterum basium: ideoque & altitudinum: fit vt maior altitudo 8 ℞. ducta in minorem basem 9 ȝ. producat 72 ce, turrim minoris basis, & minor altitudo 6 ℞, ducta in maiorem basem 16 ȝ, producat 96 ce turrim maioris basis; quæ per prædictum Lemma sequens habebunt eandem proportionem sesquitertiam, quam ipsæ altitudines, vel latera basium habent: eritque propterea turris maioris basis, & minoris altitudinis maior, ac turris minoris basis, & maioris altitudinis minor. Atque ambæ turres simul conficiunt 168. ce. summam æqualem 21000. Diuisis ergo 21000 per 168. fiet 1. ce. 125. & 1 ℞. 5. Ideoque latus maioris turris, quod positum est 4 ℞. erit 20. palm. Et latus minoris turris positum 3 ℞, erit 15. palm. Et reliquæ dimensiones erunt, vt in hac formula positæ sunt. Vbi vides, & latera basium, & altitudines, soliditatesque turrium habere proportionem sesquitertiam, & bases ipsas proportionem superseptupartientem nonas, duplicatam scilicet pro.

a 15. quinti.

a 20. sexti.

8 ℞	X	16 ȝ		96 ce
6 ℞		9 ȝ		72 ce

Latus basis turris minoris.	15.
Latus basis turris maioris.	20.
Basis minoris turris.	225.
Basis maioris turris.	400.
Altitudo minoris turris.	40.
Altitudo maioris turris.	30.
Soliditas minoris turris.	9000.
Soliditas maioris turris.	12000.

portionis sesquitertiæ. Soliditates denique ambarum turrium conficere palm. 21000. vt ænigma proponit.

L E M M A.

Si duo numeri in duos, qui habeant proportionem duplicatam illorum, per crucem multiplicentur, habebunt producti eandem, quam ipsi numeri, proportionem.

SINT *duo numeri quicunque 8. & 6. proportionem sesquialteram habentes: & alij duo 16. & 9. habentes proportionem duplicatam proportionis sesquitertiæ, nimirum superseptupartientem nonas, vt hic apparet 16 12. 9. Fiatque 72. ex 8. in 9. & 96. ex 6. in 16. Dico esse 96 ad 72. vt 8. ad 6. Cum enim 16. & 9. habeant proportionem duplicatam proportionis 8. ad 6. cadet inter illos medius proportionalis 12. in proportione 8. ad 6. ac proinde*

8 X 16   96
      12
6   9   72

a 19. septimi. *cum sit, vt primus 8. ad secundum 6. ita tertius 16. ad quartum 12.* [a] *fiet idem numerus ex primo 8. in quartum 12. qui ex secundo 6. in tertium 16. nimirum 96. Item cum sit, vt primus 8. ad secundum 6. ita tertius 12. ad quartum 9.*
b 19 septimi. [b] *fiet idem numerus 72. ex primo 8. in quartum 9. qui ex secundo 6. in tertium*
c 17 septimi. *12. Quocirca cum 96. fiat ex 12. in 8. & 72. ex 12. in 6.* [c] *erit eadem proportio 96. ad 72. quæ 8 ad 6.*

HINC fit, minorem altitudinem ducendam esse in maiorem basem, & maiorem altitudinem in minorem basem, vt soliditates procreatæ eandem habeant proportionem, quam altitudines, ac propterea maiorem turrẽ habere minorem altitudinem: minorem verò turrem altitudinẽ maiorem. Propter hanc causam dictum est in ænigmate, altitudines esse permutatim duplas laterum basium.

IX. 9 *Est triangulum rectangulum, cuius basis (voci basem, latus recto angulo oppositum) continet palm. 52. Latera autem proportionem habent duplam superbipartientem quintas. Quæruntur duo latera.*

PONATVR minus 5 ℞, & maius 12 ℞, vt sine fractione proportionem habeant duplam superbipartientem quintas: Quadrata laterum
d 47. primi. sunt 25 ʒ, & 144 ʒ, quæ simul faciunt summam 169 ʒ, [d] æqualem quadrato basis, numero scilicet 2704. Diuisis igitur 2704. per 169. fiet 1 ʒ. 16. & 1 ℞, 4. Minus ergo latus 5 ℞, erit 20. palm. & maius 12 ℞, erit 48 palm. quod probatur. Nam duo quadrata laterum 400. & 2304. faciunt 2704. quadratum basis.

10 *Est*

10 *Est altera parte longius, cuius area 500. palm. & duo latera simul faciunt 100. palm. Quæruntur latera.* X.

PONATVR vnum 1 ℞, & alterum 100 — 1 ℞. Hæc multiplicata inter se faciunt 100 ℞ — 1 ʒ, aream rectanguli æqualem 500. Addito ergo 1 ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 100 ℞, & 1 ʒ + 500. Ablatísque 500. vtrobique, inter 100 ℞ — 500. & 1 ʒ. Ita autem radix Zensica eruetur. Semissis numeri radicum est 50. à cuius quadrato 2500. demptis 500. remanet numerus 2000. ad cuius radicem √ʒ 2000 si addatur prædicta semissis 50. fiet maior radix 50 + √ʒ 2000. Et si eadem radix √ʒ 2000 ex prædicta semisse dematur, reliqua fiet minor radix, 50 — √ʒ 2000. Est igitur maius latus 50 + √ʒ 2000. minus autem 50 — √ʒ 2000. quod etiam habebitur, si maius detrahatur ex 100. summa laterum, vt hîc vides. quod probatur, quia duo latera 50 + √ʒ 2000. & 50 — √ʒ 2000. faciunt 100. & inter se multiplicata producunt aream 500. quæ multiplicatio fiet, vt cap. 23. traditum est, si 2000. quadratum posterioris particulæ subducatur ex 2500. quadrato particulæ prioris, vt apposita formula indicat.

100	+	√ʒ	0
50	+	√ʒ	2000
50	—	√ʒ	2000

50	+ √ʒ	2000
50	— √ʒ	2000
500		

11 *Est rectangulum, cuius diameter √ʒ 180. & maius latus ad minus proportionem habet triplam. Quæruntur latera, & area.* XI.

PONATVR minus latus 1 ℞, & maius 3 ℞, quorum quadrata 1 ʒ, & 9 ʒ, faciunt summam 10 ʒ, [a] æqualem quadrato diametri, hoc est, numero 180. Diuisis ergo 180. per 10. fiet 1 ʒ 18. & 1 ℞, √ʒ 18. latus minus. Maius ergo erit √ʒ 162. illius triplum. Area autem erit √ʒ 2916. id est, 54. a 47. primi.

12 *Est triangulum rectangulum, cuius vnum latus est √ʒ 18 + 3. Alterum autem latus, & basis simul faciunt √ʒ 162 + 9. Quæruntur singula latera.* XII.

PONATVR alterum latus incognitum 1 ℞, eritque propterea basis √ʒ 162 + 9 — 1 ℞. Quadrata laterum sunt 1 ʒ, & 27 + √ʒ 648. [b] quæ simul æqualia sunt quadrato basis, nimirum numero 243 — 18 ℞ + 1 ʒ + √ʒ 52488 — √ʒ 648 ʒ b 47. primi.

√ʒ 18 + 3
√ʒ 18 + 3
+ √ʒ 162 + 9
+ 18 + √ʒ 162
27 + √ʒ 648

√ʒ 162 + 9 − 1 ♃
√ʒ 162 + 9 − 1 ♃

− √ʒ 162 ʒ − 9 ♃ + 1 ʒ
+ √ʒ 13122 + 81 − 9 ♃
+ 162 + √ʒ 13122 − √ʒ 162 ʒ

+ 243 − 18 ♃ + 1 ʒ + √ʒ 52488 − √ʒ 648 ʒ

vt duæ propositæ formulæ multiplicationis quadratæ indicant. Si ergo vtrinque auferatur √ʒ 648. erit æquatio inter 1 ʒ + 27. & 243 − 18 ♃ + 1 ʒ + √ʒ 41472 − √ʒ 648 ʒ. Nam si auferatur √ʒ 648. à √ʒ 52488 (quæ commensurabiles sunt, habentes proportionem noncuplam, propterea quod, si √ʒ 52488. diuidatur per √ʒ 648. Quotiens fit √ʒ 81. id est, 9.) reliqua fiet √ʒ 41472. Ablatóque 1 ʒ vtrinque, inter 27. & 243 − 18 ♃ + √ʒ 41472 − √ʒ 648 ʒ. Ablatísque rursum 27. vtrobique, inter 0. & 216 − 18 ♃ + √ʒ 41472 − √ʒ 648 ʒ. Et additis vtrobique 18 ♃. & √ʒ 648 ʒ. inter 18 ♃ + √ʒ 648 ʒ. hoc est, inter √ʒ 648 ʒ + 18 ♃. & 216 + √ʒ 41472. Diuiso ergo hoc numero per illum, (abiectis signis Cossicis ♃, & ʒ, ex diuisore. quia totum hoc aggregatum √ʒ 648 ʒ + 18 ♃, est numerus radicum, quod in creatione numeri quadrati basis, numerus √ʒ 648 ʒ. factus sit ex 1 ♃, in √ʒ 162. bis; ac propterea numerus √ʒ 648 ʒ. censeri debeat pro numero radicum. Consule ea, quæ prope finem cap. 26. scripsimus. Abijciuntur autem signa Cossica ♃, & ʒ, ex diuisore. quemadmodum si æquatio sit inter 20. & 5 ♃, vt diuidantur 20. per 5. abijcitur signum ♃, propterea quod 5 ♃, est numerus radicum; sicuti √ʒ 648 ʒ + 18 ♃) proueniet æstimatio 1 ♃, nimirum alterius lateris trianguli, quod positum fuit 1 ♃.

Vt autem hæc diuisio fiat, multiplicandus est tam diuisor √ʒ 648 + 18. quam numerus diuidendus per √ʒ 648 − 18, vt cap. 23. docuimus. Ita enim fiet nouus diuisor 324. & nouus diuidendus √ʒ 3359232 + 1296. quæ multiplicationes hîc cernuntur.

√ʒ 648 + 18
√ʒ 648 − 18

324

216 + √ʒ 41472
√ʒ 648 − 18

− 3888 − √ʒ 13436928
+ √ʒ 30233088 + √ʒ 26873856

√ʒ 3359232 + 1296

In priori multiplicatione aufertur quadratum 324. posterioris particulæ 18. ex 648. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. docuimus. In posteriori verò detraximus √ʒ 13436928. ex √ʒ 30233088. (quia commensurabiles sunt, habétque posterior numerus ad priorem proportionem sesquialteram) factúsque est residuus numerus √ʒ 3359232. Item ex √ʒ 26873856. id est, ex 5184. dempsimus 3888.

factúsque

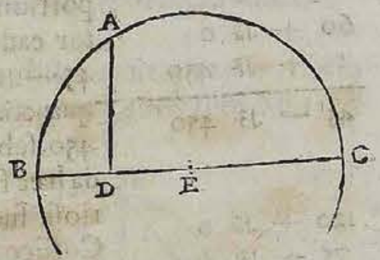
factúsque est totus productus √ʒ 3359232 + 1296.

Iam verò si diuidatur √ʒ 3359232. per 324. hoc est, per √ʒ 104976. fiet Quotiens √ʒ 32. Et diuisis 1296 per 324. fit Quotiens 4. Pretium ergo 1 ♃. est √ʒ 32 + 4. atque tantum est alterum latus trianguli quæsitum, quod posuimus esse 1 ♃. Basis verò angulo recto opposita, quam statuimus √ʒ 162 + 9 − 1 ♃. erit √ʒ 50 + 5. qui numerus relinquitur, si radix inuenta √ʒ 32 + 4. detrahatur ex √ʒ 162 + 9. nimirum ex summa lateris quæsiti, ac basis. quod etiam patet, quia quadrata laterum simul sumpta faciunt 75 + √ʒ 5000. quadratum basis inuentæ √ʒ 50 + 5. Sunt enim duo illa quadrata 27 + √ʒ 648. & 48 + √ʒ 2048.

Alivd exemplum facilius. Sit vnum latus 4. & summa alterius lateris cum base sit 8. Ponatur alterum latus incognitum 1 ♃. ac proinde basis 8 − 1 ♃. Quadrata duorum laterum 16. & 1 ʒ. [a] sunt simul sumpta æqualia quadrato basis, numero videlicet 64 − 16 ♃ + 1 ʒ. Ablato ergo 1 ʒ vtrinque, erit æquatio inter 16. & 64 − 16 ♃. Additisque 16 ♃ vtrobique, inter 16 + 16 ♃. & 64. Ablatisque 16. vtrinque, inter 16 ♃. & 48. Diuisis ergo 48. per 16. fiet 1 ♃. 3. pro altero latere. Ac proinde diameter 8 − 1 ♃. erit 5. quod probatur, cum quadrata laterum 16. & 9. æqualia sint quadrato 25. basis. Area verò trianguli erit 6. semissis nimirum numeri 12. producti ex vno latere in aliud.

a 47. primi.

13 *Est circulus, cuius diameter* 120. *& ex quodam puncto circumferentiæ demissa perpendicularis ad diametrum est* √ʒ (2925 − √ʒ 405000.) *Quærantur partes diametri.* XIII.



Ponatvr minor pars BD, 1 ♃. ideóque maior CD, 120 − 1 ♃. Et quia, ex scholio propos. 13. lib. 6. Eucl. AD, est media proportionalis inter BD, CD; [b] erit rectangulum sub BD, CD, æquale quadrato ex AD. Fit autem ex BD, 1 ♃, in CD, 120 − 1 ♃. numerus 120 ♃ − 1 ʒ. Hic ergo æqualis est quadrato rectæ AD, nimirum numero 2925 − √ʒ 405000. Addito ergo 1 ʒ. vtrobique, erit æquatio inter 120 ♃, & 1 ʒ + 2925 − √ʒ 405000. Ablatisque 2925 − √ʒ 405000. vtrinque, inter 1 ʒ, & 120 ♃ − 2925 − √ʒ 405000. Ex hoc ergo numero sic radicem quadratam eruemus. Semissis numeri radicum est 60. è cuius quadrato 3600. demptis 2925 − √ʒ 405000. remanet numerus 675 + √ʒ 405000. vt in hac formula vides. ad cuius radi-

b 17. sexti.

cem quadratam, quæ est √ȝ (675 + √ȝ 405000) si addatur prędicta semissis 60. fit maior radix 60 + √ȝ (675 + √ȝ 405000) atque tanta est portio CD. Et si eadem √ȝ (675 + √ȝ 405000) detrahatur ex eadem semisse 60. remanebit minor radix 60 — √ȝ (675 + √ȝ 405000) pro minore portione BD. quæ etiã habebitur, si ex tota diametro 120. detrahes portionẽ CD, nimirũ 60 + √ȝ (675 + √ȝ 405000) vt hic vides.

3600	+	√ȝ 0
2925	—	√ȝ 405000
675	+	√ȝ 405000

120	+	√ȝ 0
60	+	√ȝ (675 + √ȝ 405000)
60	—	√ȝ (675 + √ȝ 405000)

Iam verò vt æstimationem vtriusque portionis 60 + √ȝ (675 + √ȝ 405000) & 60 — √ȝ (675 + √ȝ 405000) inuenias, eruenda est radix ex hoc Binomio 675 + √ȝ 405000. vt ad finem cap. 28. docuimus, hoc videlicet modo. Diuidatur maior particula 675. in duas partes per Lemma cap. 28. quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati minoris particulæ √ȝ 405000. quod ita fiet. Semissis numeri diuidendi 675. est $\frac{675}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{455625}{4}$. detracta quarta parte quadrati minoris particulæ, quæ est $\frac{405000}{4}$. remanet numerus $\frac{50625}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{225}{2}$. addita semissi prædictæ $\frac{675}{2}$. facit $\frac{900}{2}$. hoc est, 450. maiorem partem: Et eadem radix $\frac{225}{2}$. dempta ex eadem semisse $\frac{675}{2}$. relinquit $\frac{450}{2}$. hoc est, 225. minorem partem. Atque hæ duæ partes 450. 225. inter se multiplicatæ producunt 101250. quartam partem quadrati 405000. minoris particulæ √ȝ 405000. Radices autem partiũ 225. & 450. copulatæ per signum +, hoc modo. √ȝ 225 + √ȝ 450. hoc est, 15 + √ȝ 450. dabunt radicem Binomij 675 + √ȝ 405000. ad quam radicem si addatur numerus 60. semissis nimirum numeri radicum, fiet maior radix 75 + √ȝ 450. pro maiore portione CD. Et si ex eadem semisse 60. dematur eadem radix, remanebit minor portio BD, 45 — √ȝ 450. vt prior hæc formula monstrat. quæ etiam habebitur, si maior portio 75 + √ȝ 450. subtrahatur ex tota diametro 120. vt secunda hæc formula indicat. Vides ergo, quam laboriosa fuerit extractio radicis ex hoc numero Cossico, 120 ℞ — 2925 — √ȝ 405000. quæ difficultas orta est ex numero irrationali composito (— 2925 — √ȝ 405000.) Quare proponemus aliud exemplum facilius in materia Sinuum.

60	+	√ȝ 0
15	+	√ȝ 450
45	—	√ȝ 450

120	+	√ȝ 0
75	+	√ȝ 450
45	—	√ȝ 450

Sit igitur in eadem figura diameter BC, 2000. vt sinus totus sit 1000. Et AD, sit sinus grad. 20. nimirum 342. Quæruntur sinus versi arcuum AB, AC, & sinus complementi DE. Pro BD, ponatur 1 ℞, eritque propterea CD, 2000 — 1 ℞. Et quoniam AD, est media proportionalis inter BD, CD ex scholio propos. 13. lib. 6 Eucl. [a] erit numerus 2000 ℞ — 1 ȝ. factus ex BD, in CD, æqualis quadrato ex AD,

a 17. sexti.

AD, nimirum numero 116964. Additóque 1 ȝ. vtrinque, erit æquatio inter 2000 ℞. & 1 ȝ + 116964. Ablatísque 116964. vtrobique, inter 1 ȝ. & 2000 ℞ — 116964.

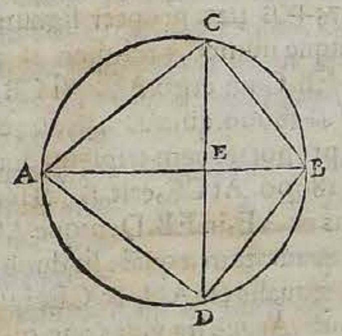
Iam sic. Semissis numeri radicum est 1000. è cuius quadrato 1000000. demptis 116964. remanet numerus 883036. ad cuius radicem quadratam √ȝ 883036. si prædicta semissis 1000. addatur, fiet maior radix 1000 + √ȝ 883036. pro maiori portione CD. Et si eadem radix ex eadem semisse 1000 dematur, reliqua fiet minor radix 1000 — √ȝ 883036 pro minori parte BD. quæ etiam habebitur, si maior portio ex tota diametro 2000. subtrahatur, vt in hac formula vides. Itaque si omnia hæc in numeris absolutis desiderentur, cum numeri 883036. maior radix sit 940. & minor 939. erit CD, 1940. maior quam vera, & 1939. minor quam vera. Item BD, erit 60. minor quam vera, & 61 maior, quam vera. Quòd si auferatur semidiameter CE, 1000. ex 1940. relinquetur sinus complementi 940. maior, quam verus, & 939. minor, quam verus, &c.

2000	+	√ȝ 0
1000	+	√ȝ 883036
1000	—	√ȝ 883036

Inventis porro segmentis BD, CD, si ducantur rectæ AB, AC, inuenientur ipsæ chordæ, ex propos. 47. lib. 1. Eucl. cum triangula fiant rectangula ABD, ACD, &c. In priori exemplo reperietur chorda AB, √ȝ (5400 — √ȝ 6480000) & chorda AC, √ȝ (9000 + √ȝ 6480000) &c.

14 *Est circulus, cuius diameter diuiditur per lineam perpendicularem ad diametrum extrema ac media ratione, & vna è duabus chordis minoribus est 150 — √ȝ 4500. Quæstio est, quanta sit diameter, & quantæ eius portiones, & reliquæ lineæ.* XIIII.

Ponatur EB, minor pars diametri AB, 1 ℞. Et quia AB, secta est in E, extrema ac media ratione, éstque maius segmentum AE, erit AE, media proportionalis inter AB, & EB: [a] Est autem & BC, media proportionalis inter easdem AB, EB. Igitur AE, BC, æquales sunt. Ponitur autem BC, 150 — √ȝ 4500. Igitur & AE, est 150 — √ȝ 4500. [b] Cum ergo CE, sit media proportionalis inter AE, EB, [c] erit numerus 150 ℞ — √ȝ 4500 ȝ. factus ex AE, in EB, æqualis quadrato ex CE, ideóq. recta



a coroll. 8. sexti.

b coroll. 8. sexti.

c 17. sexti.

CE, erit √ȝ (150 ℞ — √ȝ 4500 ȝ.) Est autem eadem CE, √ȝ (27000 — √ȝ 405000000 — 1 ȝ) propterea quod 1 ȝ, quadratum rectæ EB, demptum ex 27000 — √ȝ 405000000. quadrato rectæ BC,[a] reliquum facit 27000 — √ȝ 405000000 — 1 ȝ. quadratum rectæ CE. Igitur æqualia sunt duo quadrata 150 ℞ — √ȝ 4500 ȝ. & 27000 — √ȝ 405000000 — 1 ȝ. quippe cum vtrumque quadrato rectæ, CE, ostensum sit æquale. Addito ergo 1 ȝ. vtrinque, erit æquatio inter 1 ȝ + 150 ℞ — √ȝ 4500 ȝ. & 27000 — √ȝ 405000000. Et ablatis 150 ℞ vtrobique, inter 1 ȝ — √ȝ 4500 ȝ. & 27000 — √ȝ 405000000 — 150 ℞. Et si addatur √ȝ 4500 ȝ. vtrobique inter 1 ȝ. & 27000 — √ȝ 405000000 — 150 ℞ + √ȝ 4500 ȝ. Ex hoc numero Cossico ita eliciemus pretium 1 ℞. Totus numerus est instar numeri Cossici diminuti, cuius portio 27000 — √ȝ 405000000. pro numero absoluto habetur, & altera portio — 150 ℞ + √ȝ 4500 ȝ. pro numero radicum. Nam √ȝ 4500 ȝ. est etiam numerus radicum, vt in ænigmate 12. diximus, & ad finem cap.26. docuimus. Itaque dimidium numeri radicum erit — 75 + √ȝ 1125. ad cuius quadratum 6750 — √ȝ 25312500. si addantur 27000 — √ȝ 405000000. fit numerus 33750 — √ȝ 632812500. à cuius radice quadrata auferenda est semissis numeri radicum, quę fuit — 75 + √ȝ 1125. vt habeatur valor 1 ℞.

a 47. primi.

ITA autem ex Residuo hoc 33750 — √ȝ 632812500. radicem quadratam eruemus. Secetur maius nomen 33750. in duas partes, quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati nominis minoris, quæ quarta pars est 158203125. quod ita fiet, iuxta doctrinam Lemmatis cap.28. Ex 284765625. quadrato semissis maioris nominis 33750. detrahatur dicta quarta pars 158203125. Et reliqui numeri 126562500. radix quadrata 11250. addatur, & detrahatur ex 16875. semisse numeri 33750. Nam numeri producti 28125. 5625. erunt partes quæsitæ, quæ inter se multiplicatæ faciunt 158203125. Atque hæ partes copulatæ per signum — dabunt radicē propositi Residui, præposito tamen signo √ȝ. vtrique parti, hoc modo √ȝ 28125 — √ȝ 5625. vt ad finem cap.28. tradidimus: hoc est, √ȝ 28125 — 75. Ab hac radice detrahendum est dimidium numeri radicum 75 + √ȝ 1125. propter signum — quo numerus radicum afficiebatur. Fietque numerus reliquus √ȝ 40500 — 150. pro pretio 1 ℞, hoc est, pro linea EB. Cum ergo AE, ipsi CB, æqualis, sit 150 — √ȝ 4500. erit tota diameter √ȝ 18000. quia √ȝ 40500; & √ȝ 4500. commensurabiles sunt, habentes proportionem triplam, & minore ex maiore subducta, relinquitur √ȝ 18000. At CE, erit √ȝ (√ȝ 162000000 — 36000) numerus videlicet factus ex AE, in EB. Denique AC, erit √ȝ (√ȝ 405000000 — 9000) cum eius quadratum æquale sit duobus quadratis rectarum AE, CE. Et quia AC, æqualis est AD, & CE, ipsi ED, cognitæ erunt omnes lineæ huius figuræ. Atque ita vides duo quadrata rectarum AC, BC, nimirum √ȝ 405000000 — 9000. & 27000 — √ȝ 405000000. facere 18000. quadratum diametri AB, vt vult propos.47.lib.1. Eucl.[b] cum angulus ACB, in semicirculo sit rectus.

b 31. tertij.

ALI-

ALITER. Quoniam maius segmentum AE, æquale ipsi CB, est 150 — √ȝ 4500. si ponatur EB, 1 ℞. erit tota diameter AB, 150 — √ȝ 4500 + 1 ℞. Atque ita quadrato maioris segmenti AE, 27000 — √ȝ 405000000. ęqualis erit numerus 150 ℞ — √ȝ 4500 ȝ + 1 ȝ. factus ex EB, id est, ex 1 ℞. in totam, AB, id est, in 150 — √ȝ 4500 + 1 ℞. Et transpositis particulis huius æquationis, vt supra, reperietur iterum æquatio inter 1 ȝ. & 27000 — √ȝ 405000000 — 150 ℞ + √ȝ 4500 ȝ, &c.

ALITER. Ponatur tota diameter AB, 1 ℞. eritque minus segmentum EB, 1 ℞ — 150 — √ȝ 4500.[a] Atque ita numerus 1 ȝ — 150 ℞ — √ȝ 4500 ȝ. factus ex 1 ℞, id est, ex AB, in 1 ℞ — 150 — √ȝ 4500. id est, in EB, æqualis erit quadrato 27000 — √ȝ 405000000. rectæ AE. Et additis vtrobiq; 150 ℞ — √ȝ 4500 ȝ. æquatio erit inter 1 ȝ. & 27000 — √ȝ 405000000 + 150 ℞ — √ȝ 4500 ȝ. Ex hoc ergo numero Cossico, ita radicem extrahemus. Totus numerus intelligatur compositus ex duabus particulis, quarum prior 27000 — √ȝ 405000000. est instar numeri absoluti, & posterior + 150 ℞ — √ȝ 4500 ȝ. instar numeri radicum. Dimidium numeri radicum est 75 — √ȝ 1125. ad cuius quadratum 6750 — √ȝ 25312500. si addantur 27000 — √ȝ 405000000. fit numerus 33750 — √ȝ 632812500. ad cuius radicem quadratam √ȝ 28125 — 75. (quæ inuenietur, vt supra) si addatur semissis numeri radicum 75 — √ȝ 1125. fiet 1 ℞. √ȝ 18000. pro diametro AB, quantam videlicet supra inuenimus, &c.

a 17. sexti.

SCHOLIVM.

IN prima solutione huius ænigmatis, quando ex √ȝ 28125 — 75. radice huius Residui 33750 — √ȝ 632812500. detraximus 75 + √ȝ 1125. dimidiū numeri radicum, diximus relinqui numerum √ȝ 40500 — 150. quod mirum non est. Nam totum illud dimidium 75 + √ȝ 1125. affici intelligendum est signo —. propterea non solum 75. detracta à — 75. faciunt — 150. sed etiam √ȝ 1125. addita ad √ȝ 28125. facit √ȝ 40500. quia cum numeri √ȝ 28125. & — √ȝ 1125. habeant signa contraria, ille nimirum signum +, hic vero intelligatur habere signum —. loco subtractionis fieri debet additio, vt cap.4. docuimus. Et quidem rectè hoc modo factam esse detractionem, clarissimè testatur solutio ænigmatis, quippe cum omnes lineæ inuentæ respōdeant experientiæ. Quod etiam hoc exemplo perspicuum fiet. Sit enim √ȝ 100 — 6. radix alicuius residui, à qua detrahendum sit dimidium numeri radicum 4 + √ȝ 9. quod affectum erat signo —. ita vt + √ȝ 9. intelligatur esse — √ȝ 9. Vides ergo ex detractione 4. ex — 6. relinqui — 10. & ex subtractione — √ȝ 9. à √ȝ 100. relinqui 13. ita vt totum residuum sit 13 — 10. hoc est, 3. Nam √ȝ 100 — 6. faciat 4. & 4 — √ȝ 9. facit 1. Constat autem ex detractione 1. à 4. relinqui 3.

√ȝ 100	— 6
4	+ √ȝ 9
13	— 10

IN hoc eodem ænigmate vides, quando numerus radicum est compositus, *affectusque signo —. dimidio numeri radicum præponendum esse signum —. vt quadratè multiplicetur, quod etiam fieri intelligitur in alijs æquationibus, vbi numerus radicum simplex est, affectusque signo —. Vt si numerus radicum est — 10 ℞. eius semissis est — 5, quæ in se ducta facit 25. ac si non haberet præfixum signum —. Atque hęc causa fuit, cur in superioribus non affixum fuerit dimidio numeri radicum signum —, etiamsi numerus radicum illo affectus fuerit: quia nimirum semper producitur quadratus cum signo +, siue dimidio numeri radicum præponatur signum — siue non.*

XV. 15 *Est quadratum, cuius latus est 7. Quæritur diameter.*

a schol. 47. primi. QVADRATVM lateris est 49. a cuius duplum est quadratum diametri. Igitur quadratum diametri erit 98. & ipsa diameter √ʒ 98.

XVI. 16 *Est quadratum, cuius diameter est √ʒ. 98. Quæritur latus.*

b schol. 47. primi. b QVONIAM quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estq; quadratum diametri 98. erit quadratum lateris 49. & latus ipsum √ʒ 49. hoc est, 7.

XVII. 17 *Est quadratum, cuius diameter & latus faciunt summam 6. Quæruntur diameter ac latus.*

c schol. 47. primi. PONATVR latus 1 ℞. ac proinde diameter 6 — 1 ℞. c Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: Estque quadratum lateris 1 ʒ. & quadratum diametri 36 — 12 ℞ + 1 ʒ. erit æquatio inter 2 ʒ, & 36 — 12 ℞ + 1 ʒ. Ablatoque 1 ʒ. vtrinque, inter 1 ʒ. & 36 — 12 ℞.

Iam sic. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. si addantur 36. fit numerus 72. à cuius radice √ʒ 72. si prædicta semissis 6. dematur, reliqua fiet æstimatio 1 ℞. √ʒ 72 — 6. atque tantum erit latus. quod demptum ex 6. reliquam faciet diametrum 12 — √ʒ 72. vt in hac formula vides. quod probatur. quia quadratum diametri 216 — √ʒ 41472. duplum est quadrati lateris 108 — √ʒ 10368. Et diameter ac latus faciunt summam 6.

√ʒ 0 + 6
√ʒ 72 — 6
—————
12 — √ʒ 72

XVIII. 18 *Est quadratum, cuius latus ductum in diametrum facit 10. Quæruntur latus ac diameter.*

PONATVR latus 1 ℞. ideoque diameter 10/1℞. Nam ex 1 ℞ in 10/1℞ fiunt 10. qui numerus 10/1℞. est Quotiens, si 10. per 1 ℞. diuidantur. Ita

Ita enim Quotiens ductus in diuisorem 1 ℞. producit numerum diuisum 10. a Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estq; quadratum lateris 1 ʒ. & quadratum diametri 100/1ʒ. erit æqualitas inter 2 ʒ. & 100/1ʒ. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2 ʒʒ. & 100. Diuisis ergo 100. per 2. fiet 1 ʒʒ. 50. & 1 ℞. √ʒʒ 50. pro latere. Quia verò diameter posita fuit 10/1℞. hoc est, 10. diuisa per 1 ℞. si diuidantur 10. per √ʒʒ 50. nimirum per pretium 1 ℞. fiet Quotiens √ʒʒ 200. pro diametro. quod probatur. Nam ex latere √ʒʒ 50. in diametrum √ʒʒ 200. fit numerus √ʒʒ 10000. id est, 10. Et √ʒʒ 40000. quadratum diametri duplum est quadrati lateris √ʒʒ 2500. a schol. 47. primi.

19 *Est quadratum, cuius diameter superat latus numero 3. Quæruntur latus, ac diameter.* XIX.

PONATVR latus 1 ℞. ideóque diameter 1 ℞ + 3. b Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum lateris 1 ʒ. & quadratum diametri 1 ʒ + 6 ℞ + 9. erit æquatio inter 2 ʒ. & 1 ʒ + 6 ℞ + 9. Ablatóque 1 ʒ vtrinque, inter 1 ʒ, & 6 ℞ + 9. Semissis numeri radicum est 3. ad cuius quadratum 9. additis 9. fit numerus 18. ad cuius radicem √ʒ 18. si addatur prædicta semissis 3. fiet 1 ℞. √ʒ 18 + 3. pro latere. Diameter autem erit √ʒ 18 + 6. quod probatur. quia quadratum diametri 54 + √ʒ 2592. duplum est quadrati lateris 27 + √ʒ 648. Et diameter latus superat numero 3. b schol. 47. primi.

20 *Est quadratum, cuius latus ductum in differentiam inter diametrum & latus facit 5. Quæruntur diameter ac latus.* XX.

PONATVR latus 1 ℞. ac propterea differentia inter diametrum ac latus 15/1℞. quæ habetur ex diuisione 15. per 1 ℞. vt nimirum Quotiens ductus in diuisorem 1 ℞. producat numerum diuisum 15. Quia ergo diameter excedit latus hac differentia, erit diameter 1 ℞ + 15/1℞. c Quoniam autem quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estque quadratum lateris 1 ʒ. & quadratum diametri 1ʒʒ×30ʒ×225/1ʒ erit æquatio inter 2 ʒ & 1ʒʒ×30ʒ×225/1ʒ. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 2 ʒʒ. & 1 ʒʒ + 30 ʒ + 225. Ablato ergo 1 ʒʒ. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒʒ. & 30 ʒ + 225. Ex hoc numero radicem Zensizensicam sic eruemus. Semissis numeri Zensorum est 15. ad cuius quadratum 225. additis 225. fit numerus 450. ad cuius radicem quadratam √ʒ 450. si addatur prædicta semissis 15. fiet 1 ʒ. √ʒ 450 + 15. & 1 ℞. √ʒ (√ʒ 450 + 15) vt ad finem cap. 12. traditum est, atque tantum est latus: cuius quadrati √ʒ 450 + 15. duplum dabit quadratum diametri √ʒ 1800 + 30. ac proinde diameter erit √ʒ (√ʒ 1800 + 30) quod probatur. Nam si latus ex c schol. 47 primi.

diametro subtrahatur,remanebit differentia √ʒ (√ʒ 1800+30) — √ʒ (√ʒ 450+15) quæ ducta in latus √ʒ (√ʒ 450+15) producit numerum 15. Consule caput 24. vbi hæc multiplicatio expresse habetur.

XXI. 21 *Est rectangulum, cuius area est 30. & proportio laterum sesquialtera. Quæruntur latera, & diameter.*

PONATVR minus latus 2 ꝝ. ideóque maius 3 ꝝ. sesquialterum ad illud. Ex multiplicatione laterum inter se, fit numerus 6 ʒ. area rectanguli, æqualis areæ datæ 30. Diuisis igitur 30. per 6. fiet 1 ʒ. 5. & 1 ꝝ. √ʒ 5. Et quia minus latus posuimus esse 2 ꝝ. erit minus latus √ʒ 20. numerus videlicet duplus radicis, numeri scilicet √ʒ 5. Cum ergo maius latus positum sit 3 ꝝ. erit maius latus √ʒ 45. numerus scilicet triplus vnius radicis, quæ fuit √ʒ 5. [a] Quia verò quadrata laterum 20. & 45. simul æqualia sunt quadrato diametri, erit quadratum diametri 65. & ipsa diameter √ʒ 65. quod probatur. quia ex latere √ʒ 20. in latus √ʒ 45. fit numerus √ʒ 900. hoc est, 30. quantam videlicet posuimus aream rectanguli.

a schol. 47. primi.

XXII. 22 *Est rectangulum, cuius area 80. & differentia laterum 2. Quæruntur latera, ac diameter.*

PONATVR minus latus 1 ꝝ. ideóque maius 1 ꝝ + ꝝ. Hæc latera inter se multiplicata faciunt aream 1 ʒ + 2 ꝝ. æqualem areæ datæ 80. Ablatis igitur 2 ꝝ. vtrobique, erit æqualitas inter 1 ʒ. & 80 — 2 ꝝ. Semissis numeri radicum est 1. ad cuius quadratum 1. additis 80. fit numerus 81. à cuius radice 9. si prædicta semissis 1. dematur, reliqua fiet æstimatio 1 ꝝ. 8. pro minore latere: Maius ergo erit 10. excedens illud binario. Ex latere 8. in latus 10. fit area proposita 80. Duo verò quadrata laterum 64. & 100. æqualia sunt quadrato diametri, ac propterea quadratum diametri erit 164. ipsáque diameter √ʒ 164.

XXIII. 23 *Est rectangulum, cuius area 80. & summa duorum laterum 20. Quæruntur latera, & diameter.*

PONATVR vnum latus 1 ꝝ. ideóq; alterum 20 — 1 ꝝ. Hęc inter se multiplicata faciunt aream 20 ꝝ — 1 ʒ. æqualem areæ datæ 80. Addito ergo 1 ʒ vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒ + 80. & 20 ꝝ. Ablatisq; 80. vtrinque, inter 1 ʒ. & 20 ꝝ — 80. Semissis numeri radicum est 10. à cuius quadrato 100. demptis 80. remanet numerus 20. ad cuius radicē √ʒ 20. addita prædicta semisse 10. fiet 1 ꝝ. √ʒ 20 + 10. maior pro vno latere. Atque eadem radix √ʒ 20. dempta ex prædicta semisse 10. reliquam faciet minorē radicem 10 — √ʒ 20. quæ etiam habebitur, si latus inuentum √ʒ 20 + 10. detrahatur ex 20. summa laterum, vt hîc vides. Latera inuenta 10 + √ʒ 20. & 10 — √ʒ 20. inter se multiplicata producunt aream 80. propositam. quæ multiplicatio facilè fiet, (si per doctrinam cap. 23. 20. quadratum particulæ posterioris detrahatur ex 100. quadrato particulæ maioris, vt in secunda hac formula vides. Iam quadrata laterum 120 + √ʒ 8000. & 120 — √ʒ 8000. [a] æqualia sunt quadrato diametri: ideóque quadratum diametri erit 240. & ipsa diameter √ʒ 240.

√ʒ	0	+	20
√ʒ	20	+	10
— √ʒ	20	+	10

10	+	√ʒ	20
10	—	√ʒ	20
80			

a 47. primi.

24 *Est rectangulum, cuius diameter 30. & summa laterum 42. Quæruntur latera, & area.* XXIIII.

PONATVR vnum latus 1 ꝝ. ac proinde alterum 42 — 1 ꝝ. Horum quadrata 1 ʒ. & 1764 — 84 ꝝ + 1 ʒ. [b] æqualia sunt quadrato diametri: atque idcirco æquatio erit inter 2 ʒ + 1764 — 84 ꝝ. & 900. Et additis 84 ꝝ vtrobique, inter 84 ꝝ + 900. & 2 ʒ + 1764. Ablatísque 900. vtrinque, inter 84 ꝝ. & 2 ʒ + 864. Et rursum ablatis 864. vtrinque, inter 2 ʒ. & 84 ꝝ — 864. Diuisisque omnibus per 2. inter 1 ʒ. & 42 ꝝ — 432. Semissis numeri radicum est 21. à cuius quadrato 441. demptis 432. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita prædicta semisse 21. fiet radix maior 24. pro latere maiore: Eadémque radix 3. dempta ex prædicta semisse 21. relinquet minorem radicem 18. pro minore latere. quod etiam habebitur, si latus maius inuentum 24. subtrahatur ex 42. summa laterum. Iam ex 24. in 18. fit area 432. Vbi etiam vides quadrata laterum 576. & 324. efficere 900. quadratum diametri propositæ 30.

b 47. primi.

25 *Est rectangulum, cuius area cum diametro facit 15. & differentia laterum est √ʒ 5. Quæruntur latera, diameter, & area.* XXV.

PONATVR minus latus 1 ꝝ — √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. (qui numerus √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. est semissis datæ differentiæ √ʒ 5.) & maius 1 ꝝ + √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. Ita enim hoc excedet illud differentia √ʒ 5. cùm minus à maiore subductum relinquat √ʒ 5. vt in hac formula vides. Nam √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. & √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. debent addi, propter diuersa signa + & —. quæ additio fit, si √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. duplicetur, & duplato numero √ʒ $\frac{20}{4}$. hoc est, √ʒ 5. superioris numeri signum + intelligatur præpositum, vt cap. 4. diximus. Ex latere 1 ꝝ — √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. in latus 1 ꝝ + √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. fit area 1 ʒ — 1 $\frac{1}{4}$. Et quia area cum diametro facit 15. Si ex hac summa detraharur dicta area 1 ʒ — 1 $\frac{1}{4}$. remanebit dia-

1	ꝝ	+	√ʒ	1 $\frac{1}{4}$
1	ꝝ	—	√ʒ	1 $\frac{1}{4}$
			√ʒ	5

meter $16\frac{1}{4}$ — 1 ℨ. cuius quadratum erit 1 ℨℨ + $264\frac{1}{16}$ — $32\frac{1}{2}$ ℨ quod ſerua.

Quia verò quadratum lateris minoris 1 ℞ — √ℨ $1\frac{1}{4}$. eſt 1 ℨ — √ℨ 5 ℨ + $1\frac{1}{4}$. Et quadratum lateris maioris 1 ℞ + √ℨ $1\frac{1}{4}$. eſt 1 ℨ + √ℨ 5 + $1\frac{1}{4}$. quæ duo quadrata conficiunt 2 ℨ + $2\frac{1}{2}$. [a] qui numerus æqualis erit quadrato diametri ſupra ſeruato, numero videlicet, 1 ℨℨ + $264\frac{1}{16}$ — $32\frac{1}{2}$ ℨ. Additis ergo $32\frac{1}{2}$ ℨ vtrinque, erit æqualitas inter $34\frac{1}{2}$ ℨ + $2\frac{1}{2}$. & 1 ℨℨ + $264\frac{1}{16}$. Et ablatis $2\frac{1}{2}$ vtrobique, inter $34\frac{1}{2}$ ℨ & 1 ℨℨ + $261\frac{9}{16}$. Et rurſum ablatis $261\frac{9}{16}$. vtrinque, inter $34\frac{1}{2}$ ℨ — $261\frac{9}{16}$. & 1 ℨℨ. Iam ſic. Semiſſis numeri Zenſorum eſt $17\frac{1}{4}$. à cuius quadrato $297\frac{9}{16}$. demptis $261\frac{9}{16}$. remanet numerus 36. cuius radix 6. dempta ex prædicta ſemiſſe $17\frac{1}{4}$. relinquit minorem Zenſum $11\frac{1}{4}$. & minorem radicem √ℨ $11\frac{1}{4}$. Ergo minus latus poſitum 1 ℞ — √ℨ $\frac{5}{4}$. erit √ℨ $11\frac{1}{4}$ — √ℨ $\frac{5}{4}$. Maius verò, quod poſuimus 1 ℞ + √ℨ $\frac{5}{4}$. erit √ℨ $11\frac{1}{4}$ + √ℨ $\frac{5}{4}$. quæ duo latera ſe mutuo excedunt numero √ℨ 5. vt in hac formula ſubtractionis videre licet, id eſt √ℨ 5. Atque eadem duo latera inter ſe multiplicata faciunt 10. pro area, vt hic vides. Nam + √ℨ $\frac{225}{16}$. & — √ℨ $\frac{225}{16}$. ſe mutuò tollunt, & $\frac{45}{4}$ — $\frac{5}{4}$. faciunt $\frac{40}{4}$. hoc eſt, 10.

$$\begin{array}{l} √ℨ\ 11\tfrac{1}{4} + √ℨ\ \tfrac{5}{4} \\ √ℨ\ 11\tfrac{1}{4} - √ℨ\ \tfrac{5}{4} \\ \hline \quad 0 + √ℨ\ \tfrac{20}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} √ℨ\ \tfrac{45}{4} - √ℨ\ \tfrac{5}{4} \\ √ℨ\ \tfrac{45}{4} + √ℨ\ \tfrac{5}{4} \\ \hline \quad + √ℨ\ \tfrac{225}{16} - \tfrac{5}{4} \\ \tfrac{45}{4} - √ℨ\ \tfrac{225}{16} \\ \hline \quad \tfrac{40}{4}.\ \text{id eſt, } 10. \end{array}$$

Deinde quadrata laterum ſunt $\frac{50}{4}$ — √ℨ $\frac{900}{4}$. & $\frac{50}{4}$ + √ℨ $\frac{900}{4}$ quę faciunt ſummam 25. [b] æqualem quadrato diametri, (quia — √ℨ $\frac{900}{4}$. & + √ℨ $\frac{900}{4}$. ſe mutuò tollunt, & ex $\frac{50}{4}$. & $\frac{50}{4}$. fiunt $\frac{100}{4}$. id eſt, 25.) Quare √ℨ 25. nimirum 5. erit diameter, quæ cum area inuenta 10. facit ſummam 15. propoſitam.

[a] 47. primi.

[b] 47. primi.

Qvamvis autem numerus hic Coſſicus $34\frac{1}{2}$ ℨ — $261\frac{9}{16}$. habeat duplicem radicem, vt cap. 12. oſtendimus: tamen cum maiore radice, quæ eſt √ℨ $23\frac{1}{4}$. (quæque reperitur, ſi radix 6. ſupra inuenta addatur ad prædictam ſemiſſem $17\frac{1}{4}$. Numerus enim conflatus $23\frac{1}{4}$. erit maior Zenſus, & √ℨ $23\frac{1}{4}$. maior radix) hic nihil efficies. quia latera eſſent √ℨ $23\frac{1}{4}$ — √ℨ $\frac{5}{4}$. & √ℨ $23\frac{1}{4}$ + √ℨ $\frac{5}{4}$. quæ inter ſe multiplicata facient maiorem aream, quam 10. inuenietúrque maior diameter, quam 5. Quare ſumma ex area, & diametro conflata maior erit ſumma propoſita 15. Vides ergo hic mirum quid, non poſſe videlicet ſemper aſſumi vtramq; radicem æquationis. quod quidem rarò contingit. Itaque ſi examen inſtitutum per alteram radicum non reſpondet ænigmati, aſſumenda eſt altera radix. Vt in propoſito ænigmate, quia examen per radicem maiorem non ſuccedit, propterea minor radix aſſumpta eſt.

Alivd exemplum ſimile. Sit differentia laterum 2. & area cum diametro faciat 58. Quæruntur rurſum latera, diameter, & area.

Pona-

Ponatur minus latus 1 ℞ — 1. (Eſt autem 1. ſemiſſis differentiæ laterum) & maius 1 ℞ + 1. Ita enim hoc excedet illud binario, cum minus à maiore ſublatum relinquat 2. vt hic vides. Quadrata laterum ſunt 1 ℨ — 2 ℞ + 1. & 1 ℨ + 2 ℞ + 1. quæ faciunt ſummam 2 ℨ + 2. [a] æqualem quadrato diametri. Ex 1 ℞ — 1. in 1 ℞ + 1. fit area 1 ℨ — 1. quæ cum diametro debet facere 58. Si ergo ex 58. dicta area detrahatur, reliqua fiet diameter 59 — 1 ℨ. cuius quadratũ eſt 1 ℨℨ + 3481 — 118 ℨ. Et quia paulò ante idẽ quadratum inuentũ eſt 2 ℨ + 2. erunt duo hęc quadrata inter ſe æqualia. Additis ergo 118 ℨ vtrobique, erit æquatio inter 1 ℨℨ + 3481. & 120 ℨ + 2. Ablatiſque 2 vtrinque, inter 1 ℨℨ + 3479. & 120 ℨ, & rurſum ablatis 3479 vtrobique, inter 1 ℨℨ, & 120 ℨ — 3479. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 60. à cuius quadrato 3600. detractis 3479. remanet numerus 121. cuius radix 11. detracta à prædicta ſemiſſe 60. relinquit 49. minorem Zenſum: ac proinde minor radix erit 7. Cum ergo minus latus poſitum ſit 1 ℞ — 1. & maius 1 ℞ + 1. erit illud 6. & hoc 8. quorum differentia eſt 2. Ex 6 in 8 fit area 48. quæ cum diametro facere debet 58. Detractis igitur 48 ex 58 reliqua fiet diameter 10. quæ etiam reperietur, ſi laterum quadrata 36 & 64. in vnam ſummam 100 colligantur, [b] quæ ęqualis erit quadrato diametri, ideoque diameter erit √ℨ 100. id eſt, 10.

$$\begin{array}{l} 1\ ℞ + 1 \\ 1\ ℞ - 1 \\ \hline \quad 0 + 2 \end{array}$$

[a] 47. primi.

[b] 47. primi.

Hic etiam cum maiore radice, quæ eſt √ℨ 71. (quia ſuperior radix 11. addita ad prędictam ſemiſſem 60 facit 71. maiorem Zenſum, maior propterea radix erit √ℨ 71) nihil efficies. nam latera erunt √ℨ 71 — 1. & √ℨ 71 + 1, maiora quam 6 & 8. ideoq; maiorem aream continebunt, quam 48. atque eorum quadrata maius quadratum diametri conſtituent, quã 100. ac proinde diameter maior erit quam 10. atq; idcirco area cum diametro maiorem ſummam conficiet, quam 58. Vbi etiam vides, non poſſe ſemper aſſumi vtramque radicem ad problematis ſolutionem, vt paulò ante diximus.

26 *Eſt rectangulum, cuius vnum latus eſt 6. & quod fit ex altero latere in diametrum eſt 80. Quæruntur alterum latus, ac diameter, vnà cum area.* XXVI.

Ponatvr alterum latus 1 ℞. Quadrata laterum 6. & 1 ℞, ſunt 36 & 1 ℨ, [c] quorum ſumma 1 ℨ + 36. æqualis erit quadrato diametri. Et quia ex latere incognito in diametrum fit numerus 80. ſi 80. diuidantur per 1 ℞ latus ignotum, fiet Quotiens $\frac{80}{1\,℞}$ ac tanta erit diameter: quippe cum ex Quotiente hoc $\frac{80}{1\,℞}$ in 1 ℞, diuiſorem producatur numerus diuiſus 80. ideoque quadratum diametri erit $\frac{6400}{1\,ℨ}$ æquale priori quadrato eiuſdem diametri inuento 1 ℨ + 36. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1 ℨℨ + 36 ℨ, & 6400. Ablatis ergo 36 ℨ vtrobique, erit æquatio inter 1 ℨℨ, & 6400 — 36 ℨ. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 18. ad cuius

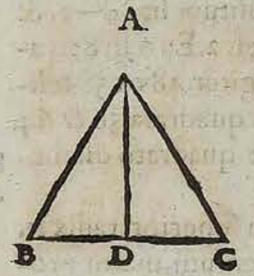
[c] 47. primi.

quadratum 324.additis 6400.fit numerus 6724.à cuius radice 82.si prædicta semissis 18.tollatur,relinquetur pretium 1 ʒ.64.Ergo 1 ℞ erit 8.latus quæsitum.Nam ex latere 6.in latus 8.fit area 48.Et quadrata laterum 36. & 64.faciunt quadratum diametri 100. ideóque diameter erit 10. Vbi vides,ex latere 8.inuento in diametrum 10.fieri 80.

XXVII. 27 *Est triangulum æquilaterum ABC,cuius area 60. Quæruntur latus BC,ac perpendicularis AD.*

a schol. 26.primi. b 47.primi.

[a] QVONIAM AD, secat BC, bifariam, ponatur BD, 1 ℞, & quodlibet laterum 2 ℞. eritque quadratum BD, 1 ʒ, & quadratum lateris AB,4 ʒ. [b] Cum ergo duo quadrata BD,AD, æqualia sint quadrato AB,erit quadratum AD, 3 ʒ, & ipsa AD,√ʒ 3 ʒ.Ex BD,1 ℞, in AD √ʒ 3 ʒ. fit area trianguli ABC, vt cap.2. lib.4.Geom.Pract.demonstrauimus,nimirũ √ʒ 3 ʒʒ, vt hic apparet:quia 1 ℞.quadranda est, & quadrato 1 ʒ. preponendum signum √ʒ.atque ita √ʒ 3. ʒ multiplicanda in √ʒ 1 ʒ. vt ad finem cap. 26. scripsimus.



√ʒ 3 ʒ
1 ℞
√ʒ 3 ʒʒ

Et quia area posita est 60.erit æquatio inter 60. & √ʒ 3 ʒʒ. ideóque & inter eorum quadrata 3600.& 3 ʒʒ.Diuisis ergo 3600.per 3.fiet 1 ʒʒ.1200.& √ʒʒ 1200.erit pretium 1 ℞,hoc est,lineæ BD, ac proinde totum latus BC, erit √ʒʒ 19200. nimirum duplum √ʒʒ 1200.Vt enim dupletur √ʒʒ 1200.ducenda est per Zensizensum binarij,nimirum per 16. Quoniam autem area 60.producitur ex BD,√ʒʒ 1200.in AD,si 60.hoc est,radix √ʒʒ 12960000. diuidatur per √ʒʒ 1200.fiet Quotiens √ʒʒ 10800.pro perpendiculari AD.quod probatur.Nam ex √ʒʒ 1200.in √ʒʒ 10800. fit √ʒʒ 12960000.hoc est,60. area proposita.

ALIVD exemplum.Sit area trianguli √ʒ 243. Positis iisdem, inuenietur æqualitas inter √ʒ 243.& √ʒ 3 ʒʒ.ac proinde & inter eorum quadrata 243.& 3 ʒʒ.Diuisis ergo 243.per 3.fiet 1 ʒʒ.81. cuius √ʒʒ,est 3. quantitas lineæ BD,ac proinde totum latus BC,erit 6.Quod si diuidatur area √ʒ 243.per BD,quæ est 3.hoc est,per √ʒ 9. fiet Quotiens √ʒ 27.pro perpendiculari AD.quod probatur.quia ex BD, 3. id est, ex √ʒ 9.in AD,√ʒ 27.fit √ʒ 243.area proposita.

XXVIII 28 *Est triangulum æquilaterum ABC,cuius perpendicularis AD, est 6.Quæruntur latus BC,& area.*

PONA-

PONATVR BD,1 ℞.inuenieturque AD,√ʒ 3 ʒ, vt in præcedenti ænigmate. Et quia eadem AD, posita est 6.erit æquatio inter 6. & √ʒ 3 ʒ. Si ergo diuidantur 6.per √ʒ 3.numerum maioris characteris ʒ. fiet 1 ℞. √ʒ 12.pro recta BD,quia vt ad finem cap.26. diximus, numerus √ʒ 3 ʒ, est numerus radicum,& non Zensorum.

Vel sic.Quoniam æquatio est inter 6. & √ʒ 3 ʒ, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 36.& 3 ʒ.Diuisis ergo 36.per 3.fiet 1 ʒ.12.& 1 ℞. √ʒ 12. pro linea BD. Atque idcirco totum latus BC, erit √ʒ 48. duplum videlicet √ʒ 12.Area autem erit √ʒ 432. numerus scilicet productus ex BD,√ʒ 12.in AD, 6.id est,in √ʒ 36.

ALIVD exemplum.Sit perpendicularis AD, 3.

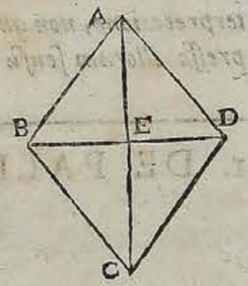
Positis iisdem,reperietur æquatio inter 3.& √ʒ 3 ʒ.Diuisis igitur 3. per √ʒ 3.qui est numerus radicum, vt dictum est,fiet 1 ℞,√ʒ 3. pro recta BD, totumque latus,BC,erit √ʒ 12.

Vel sic, quia æquatio est inter 3. & √ʒ 3 ʒ.erit quoque æquatio inter eorum quadrata 9.& 3 ʒ.Diuisis ergo 9.per 3.fiet 1 ʒ 3.& 1 ℞,√ʒ 3.pro recta BD,totumque latus BC, erit √ʒ 12. Area autem erit √ʒ 27. numerus videlicet productus ex BD,√ʒ 3.in AD,3.id est,in √ʒ 9.quod verum esse, liquido constat,cum quadratum lateris,nimirum 12. ad quadratum perpendicularis, id est, ad 9. proportionem habeat sesquitertiam, vt vult Eucl.propos.12.lib.13.

29 *Est Rhombus ABCD, cuius area 60. & proportio diametrorum, AC, BD, sesquiquarta.Quæruntur latus,& diametri.* XXIX.

PONATVR maior diameter AC,5 ℞.ideoque minor BD,4 ℞ [a].Quia igitur diametri in Rhombo se mutuò diuidunt bifariam,atque angulos etiam bifariam,[b] erit AE,diuidens in Isoscele ABD, angulum A, bifariam,ad BD,perpendicularis. Igitur cum area trianguli ABD,producatur ex AE,in BE, vt propo.2.lib.4.Geom.Pract.ostendimus;& area trianguli CBD,ex CE,hoc est,ex AE, in DE;producetur tota area Rhombi ex AE, in BD. Eodemque modo eadem area producetur ex BE,in AC.Fit autem ex BE,2 ℞.in AC, 5 ℞,numerus 10 ʒ.Igitur æquatio erit inter 60 & 10 ʒ,quod vterque numerus sit area Rhombi.Diuisis ergo 60.per 10.fiet 1 ʒ,6.& 1 ℞,√ʒ 6. Igitur AC,posita 5 ℞,erit √ʒ 150.Et BD, posita 4 ℞,erit √ʒ 96.quod probatur,quia ex BE, √ʒ 24. (semisse diametri BD, √ʒ 96)in AC,√ʒ 150 fit area Rhombi √ʒ 3600.id est,60. Atque ita cognita est vtraque diameter.

a schol.34 primi. b schol. 26.primi. c 1.secundi.



Deinde quia AE, EB, sunt √ʒ 37 ½. & √ʒ 24.& earum quadrata a 47. primi. $37\frac{1}{2}$. & 24. quæ simul faciunt $61\frac{1}{2}$. summam [a] æqualem quadrato lateris AB; erit latus AB, $\sqrt{61\frac{1}{2}}$.

XXX. 30 *Est Rhombus ABCD, cuius area 60. & diuisa maiore diametro AC, per minorem BD, Quotiens est $1\frac{1}{4}$. Quæruntur diametri, & latus.*

QVONIAM ex BE, in AC, fit area Rhombi; fiet ex BD, in AC, duplum areæ, nimirum 120. Ponatur ergo minor diamater BD, 1 ♃, ideoque maior diameter AC, $1\frac{1}{4}$ ♃. vt diuisa per BD, faciat Quotientem $1\frac{1}{4}$. Ex BD, 1 ♃, in AC, $1\frac{1}{4}$ ♃, fit numerus $\frac{5}{4}$ ʒ qui ęqualis erit 120. Per multiplicationem ergo in crucem, erit æqualitas inter 5 ʒ, & 480. Diuisis igitur 480. per 5. fiet 1 ʒ, 96. & 1 ♃, $\sqrt{96}$. pro diametro BD. quæ posita fuit 1 ♃. At vero AC, posita $1\frac{1}{4}$ ♃ erit $\sqrt{150}$. quia $\sqrt{96}$. multiplicata per $\frac{5}{4}$. id est, per $\sqrt{\frac{25}{16}}$. facit $\sqrt{150}$. Vel etiam, si ad $\sqrt{96}$. adiiciatur $\frac{1}{4}$. nimirum $\sqrt{6}$. fit summa $\sqrt{150}$. Atque ita inuentæ sunt diametri BD, AC, $\sqrt{96}$. & $\sqrt{150}$. quod probatur. quia ex $\sqrt{24}$. semisse diametri BD, in $\sqrt{150}$. diametrum AC, fit area Rhombi $\sqrt{3600}$, hoc est, 60. Deinde quia AE, EB, sunt $\sqrt{37\frac{1}{2}}$. &

b 47. primi. $\sqrt{24}$. [b] facient earum quadrata $37\frac{1}{2}$ & 24. summam $61\frac{1}{2}$. æqualem quadrato lateris AB: proptereaque latus AB, erit $\sqrt{61\frac{1}{2}}$.

APPENDIX.

HÆC sunt, studiose Lector, quæ de regula Algebræ, eiusque explicatione scribenda mihi visa sunt: qui plura requirit, ab alijs huius regulæ scriptoribus petat. Non grauabor tamen appendicis loco subiungere quatuor ænigmata Ptolomæi ex libro primo Epigrammatum græcorum desumpta, & quintum aliud Euclidis, ascriptis ipsis Epigrammatibus græcis, cum eorum interpretatione, non quidem de verbo ad verbum, sed vt res clarior fieret, expresso illorum sensu duntaxat. Ænigmata Ptolemæi sunt hæc.

I. 1. DE PALLADIS STATVA, QVOTNAM illa auri talenta appendat.

Πρῶτον.

Παλλὰς ἐγὼ τελέθω σφυρήλατος, αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
  Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων.
Ἥμισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος, ὀγδοάτην δὲ
  Θέσπις, καὶ δεκάτην μοῖραν ἔθηκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐεικοστὴν Θεμίσων, τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
  Ἐννέα. καὶ τέχνη, δῶρον Ἀριστοδίκου.

PAL-

PALLAS ego sum, malleo hunc in modum fabrefacta: sed aurum munus est iuuenum, qui in studio versantur Poetices. Dimidium quidem auri partem contulit Charisius: Octauam verò Thespis: Decimam dehinc Solon: Et vigesimam Themison: Reliqua autem nouem talenta, & mercedem item, quæ artifici debebatur, contulit Aristodicus.

Quæritur de toto pondere statuæ, & quot quisque talenta contulerit.

PONATVR pondus statuæ 1 ♃ talentorum auri. Ergo Charisius con-
tulit $\frac{1}{2}$ ♃ tal. Thespis $\frac{1}{8}$ ♃. Solon $\frac{1}{10}$ ♃. Themison $\frac{1}{20}$ ♃, & Aristodicus 9.
talenta. quæ omnes partes conficiunt $\frac{31}{40}$ ♃ + 9. summam æqualem 1 ♃.
Ablatis igitur $\frac{31}{40}$ ♃ vtrinque, æqualitas erit inter 9. & $\frac{9}{40}$ ♃. Diuisis igitur
9 per $\frac{9}{40}$. fiet 1 ♃. 40. Atque tot talentorum fuit statua. Charisius ergo
contulit 20. talenta, nimirum semissem totius ponderis. Thespis 5. talen-
ta, octauam scilicet partem. Solon 4. talenta, nimirum partem deci-
mam. Themison denique 2. talenta, partem videlicet vigesimam. quæ
omnes partes cum 9. talentis, quæ contulit Aristodicus, conficiunt 40.
talenta.

---

2. DE AVGEÆ ARMENTIS, QVOTNAM boues fuerint. II.

Δεύτερον.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκείδαο.
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος, ὃς δ' ἀπάμειπτο,
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ τῶνδε,
Μοίρῃ δ' ὀγδοάτῃ ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται,
Δωδεκάτῃ δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' οὖρον,
Ἀμφὶ δ' ἄρ Ἤλιδα δῖαν ἐεικοστῇ νεμέθονται.
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα,
Λοιπὰς δ' αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

AVGEAM interrogauit generosus Hercules de multitudine armentorum, cui ille respondit. Media horum pars, amice, circa fluuium Alpheum pascitur: octaua autem circa Saturni collem: cæterum duodecima procul hinc iuxta loca Taraxippi extrema: At vigesima eorum pars circa Elidem pascitur:

trigesimam verò in Arcadia ego reliqui: Reliqua autem quinquaginta numero armenta videas ipse.

Quæstio est de numero boum, & quotnam in singulis locis fuerint.

PONATVR numerus boum 1 ℞. Ergo iuxta fluuium Alpheum fuerunt $\frac{1}{2}$ ℞ boum: Et circa collem Saturni $\frac{1}{8}$ ℞. At iuxta Taraxippi extrema $\frac{1}{12}$ ℞. Circa verò Elidem montem $\frac{1}{20}$ ℞. Et in Arcadia $\frac{1}{30}$ ℞. & apud Augeam 50. boues. quæ omnes partes conficiunt $\frac{19}{24}$ ℞ + 50. summam æqualem 1 ℞. Ablatis igitur $\frac{19}{24}$ ℞ vtrobique, æqualitas erit inter 50. & $\frac{5}{24}$ ℞. Diuisis ergo 50. per $\frac{5}{24}$. fiet 1 ℞. 240. pro numero omnium boum. quorum semissis 120. fuit circa fluuium Alpheum: & 30. boues nimirum $\frac{1}{8}$. circa collem Saturni: Et $\frac{1}{12}$. nimirum 20. iuxta Taraxippi extrema: At iuxta Elidem montem 12. nimirum $\frac{1}{20}$. in Arcadia denique boues 8. pars videlicet $\frac{1}{30}$. Atque omnes hi boues cum 50. qui prope Augeam fuerunt, faciunt 240.

III. 3. LEONIS AENEI CANALES.

Τρίτον.

Χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιὰ
Καὶ στόμα σὺν δὲ θέναρ δεξιτεροῖο ποδός.
Πλήθει δὲ κρατῆρα δύ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαιὸν τριατοῖς, καὶ πισύρεσσι θέναρ.
Ἄρκιον ἓξ ὥραις πλῆσαι στόμα, σὺν δ' ἅμα πάντα,
Καὶ στόμα, καὶ γλῆναι, καὶ θέναρ, εἰπὲ πόσον.

AENEVS ego sum Leo: canales verò mihi sunt oculi duo: & os cum palma dextri pedis. Implent craterem eundem, dexter quidem oculus duobus diebus: sinister verò tribus: Et palma quatuor diebus: Porro sex horis os implere eum potest. Hæc igitur simul omnia & os, & oculi, & palma, dic quanto tempore eundem craterem impleant?

PONATVR pro tempore 1 ℞, horarum. atque dicatur.

Hor.	Crater.	Hor.	Crater
48			$\frac{1}{48}$ ℞
72	1	1 ℞?	$\frac{1}{72}$ ℞
96			$\frac{1}{96}$ ℞
6			$\frac{1}{6}$ ℞

Si 48.

Si 48. horis impletur 1. Crater, in 1 ℞ horarum implebitur $\frac{1}{48}$ ℞ Crateris: & sic de reliquis, vt in regula trium quater adhibita vides. Atque omnes hæ partes faciunt $\frac{61}{288}$ ℞. vnius Crateris, æquales 1. Crateri. Si igitur 1. diuidatur per $\frac{61}{288}$. fiet 1 ℞. $\frac{288}{61}$. hoc est, Horæ $4\frac{44}{61}$. quibus Crater implebitur. quod probatur. vt hic vides.

Hor.	Crater.	Hor.	Crater
48			$\frac{6}{61}$
72	1	$4\frac{44}{61}$?	$\frac{3}{61}$
96			$\frac{4}{61}$
6			$\frac{48}{61}$

Nam si oculus dexter 48. horis implet 1. Craterem, horis $4\frac{44}{61}$. implebunt $\frac{6}{61}$. Crateris vnius, &c. atque omnes istæ partes Crateris conficiunt vnam craterem.

4. *DE STATVIS ZETHI, AMPHIONIS, ac matris ipsorum Antiopes.* IIII.

Τέταρτον.

Ἄμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν,
Ζῆθός τε χ' ὡ ξυνάιμος, ἢν δὲ μοῦ λάβῃς
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦδ' Ἀμφίονος
Ἓξ πάντ' ἀνευρὼν, μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

AMBO quidem nos viginti minas appendimus, Zethus pariter, & meus consanguineus. At si de meis minis tertiam partem: minarum verò Amphionis quartam sumpseris, sex in summa inuentis, matris pondus reperies. Quæstio est, quot minas tum Zethus, tum Amphion eius consanguineus appenderit.

PONE pro Zetho 1 ℞ minarum: ideóque pro Amphione minas 20 — 1 ℞. faciésque tertiam partem Zethi $\frac{1}{3}$ ℞, & quartam partem Amphionis 5 — $\frac{1}{4}$ ℞, quæ summam faciunt 5 + $\frac{1}{12}$ ℞ æqualem 6. Ablatis igitur 5. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{12}$ ℞. & 1. Diuisa ergo 1. per $\frac{1}{12}$. fiet 1 ℞. 12. atque tot minarum fuit statua Zethi. Amphionis verò 8. & Antiopes 6. quæ minæ omnes faciunt 26.

V. 5. EVCLIDIS GEOMETRICVM.

Ευκλείδου Γεωμετρικόν.
Ημίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον,
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθει φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη.
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠύτε κούρη:
Εἰ μέτρον ἔμοι δοίης: διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε Γεωμετρίης ἐπίιστορ.

IBANT Mulus, & Asina vinum portantes: Asina autem ex dolore ponderis sui ingemiscebat. Qua re visa, Mulus grauiter ingemiscentem Asinam sic interrogauit. Mater cur ita lamentaris, cur puellæ instar lachrymas fundis? Mensuram mihi vnam si dederis, duplo, quam tu, plus sustulero: sin verò tu à me vnam acceperis, idem planè, quod ego, pondus feres. Mensuram itaque peritissime Geometer dicas volo.

Alia versio.

Mulæ, Asinæque duos imponit seruulus vtres
Impletos vino, segnémque vt vidit Asellam
Pondere defessam vestigia figere tarda
Mula rogat: Quid chara parens cunctare, gemisque?
Vnam ex vtre tuo mensuram si mihi reddas,
Duplum oneris tunc ipsa feram: Sed si tibi tradam
Vnam mensuram, fient æqualia vtrique
Pondera. Mensuras dic docte Geometer istas.

Alia versio.

Mulus portabat vinum comitatus Asella.
Hæc oneris quæritur pondera vasta sui.
Ille graues matris gemitus miratur, & inquit,
Cur adeò lachrymis lumina mœsta fluunt?
Mollities teneras, mater, decet illa puellas,
Quas premit insuetus, debilitátque labor.

Vnam

Vnam mensuram, si nostros fundis in vtres,
Ipse tui vini pondera dupla feram:
Si vnam contra nostro de fasce leuabis
Partem, tunc æquum pondus vterque feret.
Dic mihi mensuras, ô docte Geometer istas,
Non aliter Phœbi nomine dignus eris.

PONE pro mensuris muli $1x$. ac proinde pro mensuris asinæ $\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$. Ita enim si mulo dederit 1. mensuram, habebit mulus $1x+1$. quod pondus duplum erit reliquo ponderi asinæ, nimirum $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. At si mulus asinæ det 1. mensuram, erit reliquum pondus muli $1x-1$. æquale ponderi asinæ, quod tunc erit $\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$. Addatur 1. vtrobique, fietque æquatio inter $1x$. & $\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$. Ablataque $\frac{1}{2}x$. vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{1}{2}x$. & $3\frac{1}{2}$. Diuisis igitur $3\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{2}$. fiet $1x\ \frac{14}{2}$. hoc est, 7. pro mensuris muli. Asina ergo habens $\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$. portabit mensuras $3\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. nimirum 5. quod probatur. Nam si mulo det asina 1. mensuram, habebit mulus 8. mensuras, quæ duplæ sunt 4. mensurarum, quæ asinæ supersunt. At si mulus det asinæ mensuram 1. portabit vterque 6. mensuras.

FINIS.