J. G.

425

GUILELMI OUGHTRED AETONENSIS,

quondam Collegii Regalis in CANTABRIGIA Socii,

CLAVIS MATHEMATICÆ DENVO LIMATA,

Sive potius

FABRICATA.

Cum aliis quibusdam ejusdem Commentationibus, quæ in sequenti pagina recensentur.

Editio tertia auctior & emendatior.

OXONIÆ,
Excudebat LEON. LICHFIELD, Veneunt apud THO. ROBINSON. 1652.

Tractatus, qui ſequuntur, hi ſunt.

AD LECTOREM.

Conscripsi olim in Familia Illustrissimi nuper Comitis *Arundeliæ* & *Surriæ*; cum ex filiis ejus alteri in disciplinis Mathematicis exponendis deservierim, ordinem quendam, qui mihi ad mysteria Mathematica videbatur appositissimus, ut studiosorum, qui ipsum secuturi sunt, animi scientiis illis, non leviter & superficie tenùs tingantur, sed intimè & radicitùs imbuantur. Hunc meum ordinem multorum virorum doctorum, maximè verò nobilissimi illius eruditissimíque Dni *Caroli Cavendish* hortatu, in publicum sub titulo *CLAVIS MATHEMATICÆ* primò emisi. Tractatus quidem ille, non methodo (sicut vulgò fit) Synthetica, per Theoremata atque Problemata longo verborum ambitu descriptus, sed via inventionis Analytica, (ita ut totus sit quasi demonstratio continua nexibus firmissimis compaginata) & non tam verbis quàm rerum speciebus depictus, primo adspectu difficultatem peperit in multis, qui forma tradendi insitata territi, Chimæram aut Sphyngem aliquam imaginabantur: Verùm ſiquis, præjudicii hæc terriculamenta adſpernatus, attentè præſentíque animo hanc viam ingrediatur, rem videbit maximè facilem & conſpicuam. Nam ſpecioſus hic atque ſymbolicus modus, nec memoriam verborum multiplicitate torquet, nec phantaſiam rerum multarum comparatione atque dijudicatione onerat ac diſtrahit; ſed operationis atque argumentationis totius proceſſum conſpectui repræſentans: Theorema denique profert, non uni tantum genti intelligendum, ſed omnium, quotquot ſunt ubique terrarum, nationum linguis (modò de notis conſtet) efferendum.

Animi quidem mei ſenſus & votum, tum in prima Clavis meæ formatione, tum in ſecunda limatione, ſive potius nova fabricatione, fuit, ut Matheſeos ſtudioſis quaſi Ariadnes filum porrigerem, quo ad intima harum ſcientiarum adyta deducantur, & ad optimos antiquiſſimóſque Authores, *Euclidem*, *Archimedem*, *Apollonium Pergæum* magnum illum Geometram, *Diophantum*, ac reliquos, facilius penitiúſque intelligendos dirigantur; eorumque non propoſitiones modo addiſcant, quod pleriſque Mathematicis ſcientiæ quaſi culmen eſt & faſtigium; Sed etiam percipiant qua ſolertia, quibus æquationum, interpretationum, comparationum, reductionum, converſionum, atque diſquiſitionum moliminibus priſci illi heroës ſcientiam hanc pulcherrimam ornaverint, auxerint, invenerint.

Mihi quidem in illis legendis verſanti, & demonſtrationes ingenioſiſſimas ex incogitatis & inexpectatis,

ſed divino quodam artificio conquiſitis, principiis adeò affabrè concinnatas animadvertenti admirantíque ſtupor incidit, unde tanta exiſteret imaginationis vis, quæ tam immenſam conſequentiarum molem ſuſtinere poſſet, faceréque ut tot res, tam longe diſſitæ animo ſimul obverſentur, & quaſi ultrò in argumenti unius ſtructuram coëant atque conſidant.

Quapropter ut ipſas res clariùs intuerer, propoſitiones & demonſtrationes verborum integumentis exutas, brevibus tantùm ſymbolis ac notis oculis etiam ipſis uno obtutu perſpiciendas deſignavi. Tum Theorematum affectiones varias in æqualitate, proportione, affinitate, atque dependentia, conferendo nova elicere tentavi. Denique quæſtiones conſimiles problematicè fingendo, eaſque quaſi jam confectas, via Analytica in ſua principia reſolvendo, rationes ac media, quibus conſtruantur inveſtigavi. Hinc tandem (non niſi plurimorum annorum uſu atque experientia) præceptorum illa qualiſcunque ſeges emerſit.

Non erat mihi animus, jam ad extremam ſenectutem appropinquanti, poſt *primam* hujuſce Clavis Editionem, in hanc iterum arenam prodiiſſe. Sed Venerabilis Vir Dn: *Sethus Ward*, Collegii Sidneienſis in Academia Cantabrigienſi tum Socius, nunc in Oxonienſi Profeſſor Aſtronomiæ Savilianus, Vir prudens, pius, ingenuus, nec Matheſi ſolùm, ſed & omni politioris literaturæ genere cultiſſimus, (qui primus Cantabrigiæ Clavis meæ uſum expoſuit) mei videndi & cognoſcendi deſiderio, domi me latitantem longo itinere

itinere perquisivit; cujus importuno hortatui, ut libellum illum sub *secunda* lima correctiorem auctiorémque quorundam, ex multis quæ apud me erant, adjectione ederem, resistendi facultas non erat. Accessit & alter hortator vehemens Dn. *Carolus Scarbrough* Doctor Medicinæ, suavissimis moribus, perspicacissimóque ingenio Vir, cujus tanta est in Mathesi solertia, & supra fidem fælix tenaxque memoria, ut omnes Euclidis, Archimedis, aliorúmque nonnullorum ex antiquis propositiones & demonstrationes recitare ordine & in usum proferre potis sit. Horum ego duorum judicio de meis lubens acquiesco, Ii enim sunt quos celeberrimæ totius Europæ Academiæ, Mathematicarum aliarúmque artium humaniorum Professores meritò amplexentur.

Quod autem a mendis illis Typographicis, quibus priores nimium scatebant, repurgata hæc *tertia* editio exhibeatur (quod in hujusmodi scriptis maximi sit momenti) curæ illud debetur Venerabilis Viri Dn. *Joannis Wallis*, Collegii Emanuëlensis Cantabrigiæ non ita pridem Alumni; deinde Collegii Reginalis ibidem Socii; nunc apud Oxonienses Geometriæ Professoris Saviliani; Viri ingenui, pii, industrii, in omni reconditiore literatura versatissimi, in rebus Mathematicis admodum perspicacis, & in enodatione explicationéque Scriptorum intricatissimis *Zipherarum* involucris occultatorum (quod ingenii subtilissimi argumentum est) ad miraculum fælicis. Huic enim ille editioni adornandæ ultrò se offerens, & Calculi maximam partem examinavit, & Operas perpetuo auxilio, atque assidua inspectione adjuvit.

Denique

Denique non sine piaculo omittam amantissimum mei Dn. *Robertum Wood* Collegii Lincolniensis Socium, Philosophiæ atque Medicinæ studiosum, Virum optimum atque doctissimum, qui non calamo solùm, & scriptorum examinatione, nequid fortè mihi in computationibus erroris exciderit, amicum præstitit officium, sed etiam bene maximam horum partem Anglicè non ita pridem edendam transtulit.

Partem autem illam quæ Geometricam Horologiorum Sciotericorum rationem tradit, ex Anglico idiomate in Latinum vertit Dn: *Christophorus Wren*, Collegii Wadhamensis Commensalis Generosus, Admirando prorsus ingenio Juvenis, qui nondum sexdecim annos natus, Astronomiam, Gnomonicam, Staticam, Mechanicam præclaris inventis auxit, ab eoque tempore continuo augere pergit; & revera is est à quo magna possum (neque frustra) propediem exspectare.

Huic Clavi Mathematicæ, post primam editionem, accedit I, Affectarum quovis modo Æquationum in numeris luculenta resolutio. II, Elementi Euclidis Decimi declaratio. III, Elementorum Euclidis Decimi tertii & Decimi quarti de Solidis Regularibus illustratio. IV, Sex Theorematum fundamentalium circa Anatocismum inventio. V, Regulæ falsæ positionis demonstratio Analytica. VI, Theorematum Archimedis de Sphæra & Cylindro declaratio. VII, Horologia Scioterica in Plano, Geometrica delineandi Methodus. Ultimò, inveniet etiam hîc lector Logisticæ decimalis (quam præ sexagenaria illa Mathematices studiosis, præsertim

in

in computationibus Astronomicis, commendatam esse cupio) regulas breves interſertas: una cum Multiplicationis & Diviſionis contractione admodum neceſſaria: Et Logarithmorum uſum, quantum ſatis eſt.

Horum ego pleraque cum ante plurimos annos, in gratiam & uſum nobiliſſimi eruditiſſimíque Domini *Gerardi* Domini *Aungier* Baronis de *Longford*, hominis veræ pii atque Christiani, doctíque non modò ſermonis utriuſque linguæ, ſed & Hebraïcæ aliarúmque linguarum Orientalium, ac utriuſque philoſophiæ, & de me optimè meriti, ſcripſerim; jure eum ſuo reticendo fraudare pro piaculo duxerim. Is enim eſt, quo fautore atque Mœcenate gloriari pro ſummo honore habeam.

I.

Index Capitum.

I. CLAVIS MATHEMATICAE.

II. De

VIII. Ho-

Index Capitum.

CLAVIS

CLAVIS MATHEMATICÆ DENUO LIMATA.

CAP. I. *De Notatione.*

1. TAbella admodum utilis, non modò pro numerorum Notatione, quam primâ facie exhibet; sed etiam in omni computatione per numeros tum communes, tum figuratos, tum artificiales, qui vulgò Logarithmi dicuntur.

Integri. Partes.

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	&c.
M	M	M	M	M	M	M	C	X	I	X	C	M	M	M	M	M	M	M	
M	M	M	M	C	X	I						I	X	C	M	M	M	M	
M	C	X	I												I	X	C	M	

2. In hâc tabellâ numeri ſuperiores ſunt Indices ſive exponentes terminorum utrinque ab unitate continuè proportionalium; affirmativi in integris, negativi in partibus. Eſtque progreſſio in decuplâ ratione versùs ſiniſtram, & in ſubdecuplâ versùs dextram; ſicut literæ numerales ſubſcriptæ oſtendunt.

 Eſt

Eſt igitur progreſſio ab unitate in integris, 1, 10, 100, 1000, 10000: Et in partibus, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$: Et ſic in infinitum.

3. Atque hoc modo in omni aliâ Progreſſione, terminis ab unitate quacunque ratione ſive creſcentibus, ſive decreſcentibus, Indices ſui erunt apponendi.

4. Tabellam quidem in decimali ratione ordinavi, tum ut numerorum quorumcunque (ſive Integri ſint, ſive partes, ſive mixti) valores per gradus & periodos æſtimentur: tum quia Logiſtica hæc decimalis ſexagenariâ, in computationibus Aſtronomicis, multò facilior eſt atque concinnior. Hoc planè perſpexit, quicunque is fuit, qui primus canonem Sinuum à ſemidiametro 60, ad 1 cum circulis annexis, revocavit. Utinam idem etiam in aliis canonibus fieret.

5. Partes decimales ſcribuntur in unâ lineâ cum integris, diſtinguuntur autem lineolâ rectangulari, quæ idcircò *ſeparatrix* dicitur. Et quemadmodum in integris, quilibet ab unitatum loco gradus augetur verſùs ſiniſtram decuplando: ſic in partibus decimalibus, quilibet ab unitatum loco gradus minuitur verſus dextram ſubdecuplando.

6. Partes decimales denominationem ſuam ſortiuntur à loco figuræ ſuæ ultimæ: ut 0|5 ſunt 5 decimæ partes: 0|56 ſunt 56 centeſimæ partes: 0|056 ſunt 56 milleſimæ partes, & ſic de reliquis omnibus.

7. Circuli ante integros, vel poſt partes decimales nihil valent: at verò poſt integros, & ante partes decimales (hoc eſt, utrinque lineæ ſeparatrici proximi) vim ſuam retinent: nam gradus conſtituunt quibus figurarum valores cenſentur: ut 0005, ſignificant tantummodo 5: & 0|500, 5 ſunt decimæ partes.

8. Quare in partibus decimalibus ſcribendis, linea ſeparatrix ſemper apponatur; & loci, ſi qui ſunt, vacui, circulis ſuppleantur: ut 0|00005 ſunt 5 centies milleſimæ partes.

9. Signum addendi ſive affirmationis eſt + plus, ſive pl: ut 34, vel + 34.

10. Signum minuendi ſive negationis eſt — minus, ſive mi: ut —34, negantur omninò eſſe.

11. Pertinet autem ſignum ad magnitudinem ſequentem, cui præfigitur. Et omnis magnitudo, cui non eſt præfixum ſignum negationis, intelligitur eſſe affirmata, & habere ſignum +, licet non ſit expreſſum.

12. Et nota quod ſignis + & - utor, quando ſimplex magnitudo affirmatur vel negatur de ſimplice: ſignis autem pl: & mi: quando magnitudo compoſita affirmatur vel negatur de ſimplice, vel ſimplex de compoſitâ.

13. Magnitudines denotari poſſunt vel numeris menſuram ipſarum ſignificantibus, vel etiam ſpeciebus: ut linea longa ſeptem uncias, deſignatur vel per 7; vel per unam aliquam literam aut notam, A, B, C, &c; vel per duas literas terminis lineæ adſcriptas, AB, BC, CD, &c. pro libitu: modò memoriâ teneas pro quâ magnitudine ſpecies quælibet ſtatuitur.

14. Speciosa hæc Arithmetica arti Analyticæ (per quam ex sumptione quæsiti, tanquam noti, investigatur quæsitum) multo accommodatior est, quam illa numerosa. Nam in numerosâ, numeri à novo, quem proferunt, ita absorbentur, ut penitus dispareant, nec ullum sui vestigium relinquant: At in speciosâ, permanent species sine aliquâ mutatione, specimen exhibentes totius operationis: unde non solùm in quæsiti notitiam ducunt, sed etiam Theorema generale pro solutione consimilium quæstionum, in aliis magnitudinibus datis, edocent.

Cap. II. *De Additione.*

1. NUmerus inventus per Additionem, dicitur Summa, vel Aggregatum. Ut 3 & 7 constituunt 10.

2. Additio incipit ad dextram, & summas singulorum locorum particulares inventas subscribit, in locis suis propriis.

3. In Additione omnes numeri dati simul æquantur Summæ.

Exempla

Exempla Additionis.

		l.	s.	d.
79403	3794|236	17	13	4
8956	584|3	9	16	7
67293	947|08	238	09	6
5087	4720|7439	70	00	10
160739	48|5	48	10	3
	10094 8599	384	10	6

4. Additio speciosa conjungit omnes magnitudines datas servatis signis

ad	3A	A	5 A	3 A	A
adde	A	-A	—3	—5A	E
Sũma	3A+A	A-A	5A - 3 A	3 A - 5 A	A+E
hoc est	4A	o	2A	- 2 A	

			Sic in Indicum Additione		
ad	A+B	A+B		3	$\bar{3}$
adde	A-B	A-C		$\bar{2}$	2
Summa	2 A	2 A + B - C		1	$\bar{1}$

Cap. III. *De Subductione.*

1. NUmerus inventus per Subductionem dicitur Reliquus, vel Differentia, vel Excessus. Ut è 7 tolle 3, restat 4.

2. Subductio incipit ad dextram, & differentias ſingulorum locorum particulares inventas ſubſcribit, in locis ſuis propriis.

3. In Subductione, numerus ſubducendus, unà cum differentiâ, æquatur numero ex quo.

Exempla Subductionis.

		l.	s.	d.
347206836	3794|236	17	13	4
6807592	947|08	9	16	7
340399244	2847|156	7	16	9

4. Subductio *ſpecioſa* conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus ſignis magnitudinis ſubducendæ.

Ex	4 A	3 A	5 A	A
tolle	A	-5 A	-3 A	E
Reſtat	4 A-A	3 A-5 A	5 A+3 A	A-E
hoc eſt	3 A	-2 A	8 A	

Ex	A	A	Sic in Indi-	$\bar{3}$	$\bar{3}$
tolle	B+C	B-C	cum ſub-	$\bar{2}$	2
Reſtat	A-B-C	A-B+C	ductione.	5	$\bar{5}$

Cap. IV. *De Multiplicatione.*

1. NUmerus inventus per Multiplicationem, dicitur Factus, vel Productus, vel Rectangulum, vel Planum. Nam unus è numeris propoſitis habetur

betur pro longitudine, alter pro latitudine: & numeri propoſiti dicuntur Factores atque Latera. Maxima quippe binarum magnitudinum poteſtas, eſt figura ex ipſis compoſita, cujus anguli ſunt recti, & latera parallela.

2. Multiplicatio incipit ad dextram, & ſingulas figuras unius numeri dati, in ſingulas alterius figuras ducit: & factos demum, habitâ locorum ratione, in unam ſummam colligit. Et ſi partes decimales numeris propoſitis ſint admixtæ, è toto facto tot locos lineâ ſeparatrice abſcindit, quot ſunt loci partium in utroque factore. Nam in Multiplicatione Index cujuſque particularis figuræ facti, invenitur addendo Indices figurarum multiplicatæ & multiplicantis, Sic 58|73 ductus in 600, facit 35238. Nam Index figuræ 6 in 600, eſt 2: & Index ultimæ figuræ 3 in 58|73 eſt $\bar{2}$. addantur Indicès 2 & $\bar{2}$, extabit 0 pro Indice ultimæ figuræ facti 35238: quæ idcircò pertinet ad locum unitatum. Et conſimilis reliquarum figurarum in facto cenſura gradualis inſtitui poterit.

3. Si è numeris propoſitis, unus, vel uterque, adjunctos habeat ad dextram circulos: omiſſis circulis, fiat ipſorum numerorum Multiplicatio: & facto demùm tot inſuper integrorum loci accenſeantur, quot ſunt omiſſi circuli in utroque factore.

4. In Multiplicatione eſt, ut unitas, ad unum è factoribus: Sic alter è factoribus, ad factum. Ut ſi ducatur 4 in 6 fiet 24: Eſt igitur 1. 4: : 6.24: vel 1.6 : : 4.24.

Exempla Multiplicationis.

4576	580|34
892	47|5
9152	290170
41184	406238
36608	232136
4081792	27566|150

358	5873
600	600
214800	35238

5. Contractio Multiplicationis, in Logistica valdè utilis, sic est. Si instituto tuo sufficiat habere factum non integrum, sed multatum aliquot ex ultimis figuris: statues unitatis locum minoris numeri, sub illâ figurâ majoris, cujus Index æqualis sit numero figurarum, vel abscindendarum in integris vel relinquendarum in partibus decimalibus: Et reliquas figuras minoris numeri, sub numero majore ordine inde contrario. Tum in multiplicando incipies ubique ad illam figuram majoris numeri, quæ est supra eam figuram minoris, quâ multiplicatur: habitâ tamen ratione incrementi, quod ex subsequentibus figuris majoris numeri suppeditatur. Hujus compendii casus sunt quatuor.

Casus I. Si velis factum habere purum à partibus: Statues unitatis locum minoris sub unitatis loco

co majoris. Ut in exemplo, ubi 246|914 ductus in 35|27 producit 8708 integros, abscissis omnibus partibus decimalibus.

246|914
72|53
7407
1235
49
17
8708

Casus II. Si velis habere factum cum locis aliquot partium, puta quatuor: Statues unitatis locum minoris numeri sub quarto loco partium majoris. Ut in priore exemplo, factus erit 8708|6568 mixtus cum quatuor locis partium.

246|914
72|53
74074200
12345700
493828
172840
8708|6568

Casus III. Si velis factum multatum aliquot locis integrorum, puta quinque: statues unitatis locum minoris numeri loco quinto ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo, ubi 80902 sinus graduum 54 multiplicandus est per 39875 sinum maximæ declinationis 23° 36: prodibit 32260 sinus declinationis solis ad ♉ 24°.

80902
57893
24271
7281
647
57
4
32260

Casus

Caſus IV. Si velis factum multatum locis integrorum, puta quinque, reparari aliquot locis partium, puta quatuor. Quia $5-4=1$: Statues unitatis locum minoris numeri uno loco ante unitatis locū majoris. Ut in exemplo ubi ſinus 42262 multiplicatur per 0,0064, ita ut abſciſſis à facto quinque figuris ultimis, reſtituantur quatuor loci partium: Factus erit 0,0027.

$$\begin{array}{r} 42262 \\ 46000 \\ \hline 25 \\ 2 \\ \hline 0{,}0027 \end{array}$$

6. Multiplicatio *ſpecioſa* connectit utramque magnitudinem propoſitam cum notâ in vel ×: vel plerumque abſque notâ, ſi magnitudines denotentur unicâ literâ. Et, ſi ſigna ſint ſimilia, producta magnitudo erit affirmata: ſin diverſa, negata. Effertur autem per in.

Et nota, quòd A in A, ſive A×A, ſive A A, eſt Aq. AAA ſive AqA, eſt Ac. AAAA, ſive Aq Aq, ſive AcA, eſt Aqq. AAAAA, ſive AcAq, ſive AqqA, eſt Aqc. AAAAAA, ſive Ac Ac, ſive Aqq Aq, ſive AqcA, eſt Acc, &c. Nam poteſtas quælibet ſuperior fit ex duabus inferioribus, quarum dimenſiones ſimul æquantur numero dimenſionum ſuperioris. Quot autem magnitudines ſunt quæ multiplicantur, totidem ſunt dimenſiones.

Duc	A	A+E	A−E	A+E+I	B+1
in	E	B	B	Z	A
fiet	AE	BA+BE	BA−BE	ZA+ZE+ZI	BA+A

Duc	3A	AE	AE	A+E	A+E
in	2A	A	AE	A+E	A−E
fiet	6Aq	AqE	AqEq	Aq+AE +AE+Eq Aq+2AE+Eq	Aq+AE −AE −Eq Aq−Eq

Ad hunc etiam modum Multiplicatio fiet ſi magnitudines conſtent binis literis. Ut ſi latus AB+CD multiplicandum ſit in ſe, producetur quadratum ABq+2AB×CD+CDq.

Cap. V. *De Diviſione.*

1. Numerus inventus per Diviſionem dicitur Quotus, vel etiam Parabola: quia oritur ex applicatione numeri plani ad longitudinem datam, ut inveniatur latitudo congrua. Et ſi numerus ad numerum applicetur cum lineolâ interjectâ, oſtendit quod numerus ille ſuperior dividendus ſit per inferiorem, ad quem applicatur: ut $\frac{12}{4}$ & $\frac{5}{12}$.

2. Diviſio incipit ad ſiniſtram: & poſtquam ex dividendo ſufficientem diviſori dividuum diſtinxerit, & ſub ipſo diviſorem ſubſcripſerit, vel ſaltem ſubſcriptum cogitaverit: ſingulas figuras diviſoris ex ſingulis ipſius dividui figuris ſupra ſtantibus, æqualiter, quoties fieri poterit, tollit: Tum diviſore per quotum inventum multiplicato, factoque ablato ex dividuo, diviſorem in locum proximè ſequentem promovet, novamque uti prius diviſionem inſtituit; donec totum dividendum percurrerit. Quilibet au-

tem quotus particularis inuentus, ejuſdem debet eſſe loci, ſive gradus, cujus eſt figura dividendi, quæ ſtat, vel cogitatur ſtare ſupra unitatis locum diviſoris. Nam in Diviſione, Index cujuſque particularis figuræ Quoti, invenitur tollendo Indicem figuræ diviſoris ex Indice figuræ diviſæ. Sic 171|4 diviſus per 857, dat 0|2 pro Quoto. Index enim primæ figuræ dividuæ 17 eſt 1; & Index primæ figuræ diviſoris 8 eſt 2: Tollatur 2 ex 1, reſtabit ī pro Indice primæ figuræ: quæ idcircò pertinet ad locum primum partium decimalium.

3. Et ſi diviſor adjunctos ſibi habeat ad dextram circulos: omiſſis circulis, & abſciſſis totidem ultimis figuris dividendi, in numeris reliquis fiat diviſio. In fine autem diviſionis reſtituendi ſunt, tum omiſſi circuli tum figuræ abſciſſæ.

4. In Diviſione eſt, ut Diviſor ad unitatem, ſic dividuus ad Quotum: vel ut dividuus ad diviſorem, ſic Quotus ad unitatem. Ut diviſo 24 per 6, quotus erit 4: Eſt igitur 6.1::24.4: Item 24.6::4.1.

5. Si magnitudo facta ſit ex duabus magnitudinibus, una ex iis ipſam per alteram metietur.

6. In Multiplicatione, atque Diviſione, unitas nihil mutat.

7. Si numerus numerum multiplicet, idemque factum dividat, nihil fit. Nam quod multiplicatio conficit, Diviſio diſſolvit. Quare in applicatione magnitudinis ad magnitudinem, ſi eadem magnitudo ſit tum ſupra lineam, tum infra, expungatur utrobique.

Exempla

Exempla Diviſionis.

12
8921317
297) 187135078 (630084 $\frac{127}{297}$
178213768
892118
2901
435257

580|34) 27566150 (475
23213680
406237
2901

187135075 (630084 $\frac{127}{297}$
297
1782
893
297
891
2507
297
2376
1315
297
1188
127

6|000) 4320765 (7201275

8. Ali-

8. Aliquando numerus aliquis dividi poſtulatur per numerum irrationalem, vel infinitum, ſive integer ſit, ſive mixtus. Atque in hoc caſu, ſumptis, quot opus eſt, è primoribus figuris diviſoris pro primo diviſore, per ipſas divides numerum propoſitum: deinde pro ſingulis particularibus diviſionibus ſubſequentibus, diviſorem minues amputando verſus ſiniſtram totidem ultimas figuras, donec quotum ſatis amplum inveneris: ut ſi dividantur 467023 per numerum infinitum 357(0926425, Quotus erit 1307(80 ferè.

17
303
2803
109930
357(09 26425) 467023 (1307 80---
357093
107127
2500
286

Pulcherrima hæc eſt Diviſionis contractio, & maximi uſus in computationibus Aſtronomicis. Ut ſi per 137638 dividendus ſit 126223 ductus in ſinum totum, hoc eſt auctum quinque circulis: Appones tantummodò unum circulum: & pro quatuor reliquis minues diviſorem. Ut
137638) 1262230 (91707.

9. Diviſio *ſpecioſa* ſtatuit magnitudinem dividentem ſub dividendâ, cum lineolâ interjectâ: tum conſiderat

ſiderat an magnitudo aliqua utramque communitèr multiplicaverit; atque ipſam utrobique expungit. Diviſio autem in iiſdem ſignis dat +, in diverſis -: autem per ad.

Applica	AE	BAc	BA+A	BA-CA	6Aq	ſcil. $\frac{2 \times 3\ Aq}{3\ A}$
ad	A	Aq	A	B-C	3A	
Oritur	E	BA	B+1	A	2A	2 A

Cap. VI. *De Proportione.*

1. Si è quatuor numeris datis, primus ita ſe habeat ad ſecundum, ut tertius ad quartum: dicuntur quatuor illi numeri eſſe proportionales. Numerorum autem ad ſe invicem habitudo invenitur dividendo antecedentem per conſequentem: ut 31 ad 7 ratio eſt $4\frac{3}{7}$, hoc eſt quadrupla ſupertripartiens ſeptimas.

2. Quare ſi numerus duos numeros multiplicet, facti erunt multiplicatis proportionales. Et ſi numerus duos numeros dividat, quoti erunt diviſis proportionales.

Ut 4 × $\begin{cases} 7.\ 28. \\ 9.\ 36. \end{cases}$ & 4) $\begin{matrix} 28\ (7. \\ 36\ (9. \end{matrix}$

Item A × $\begin{cases} B.\ BA. \\ C.CA. \end{cases}$ & A) $\begin{matrix} BA.\ B. \\ CA.C. \end{matrix}$

3. Quare ſi quatuor numeri ſint proportionales, factus ab extremis æquatur facto à mediis. 7. 9 :: 7×4. 9×4 :: 28. 36. At 7×9×4 = 9×7×4.

4. Hinc ſequitur aurea (quæ dicitur) regula Proportionis.

portionis. Si è tribus numeris datis, rectangulum ſub ſecundo & tertio applicetur ad primum: hoc eſt, ſi ſecundus multiplicet tertium, & primus dividat factum: quotus erit tribus datis quartus proportionalis. Tres numeri dati ſunto 7, 9, 28: & pro quarto quæſito ſtatuatur Q. Eſt igitur 7. 9 :: 28. Q. Quare $7Q = 9 \times 28$. Ideoque $\frac{9 \times 28}{7} = Q$. Item 5. 12 :: 8. $\frac{8 \times 12}{5}$, hoc eſt $19\frac{1}{5}$.

5. E tribus numeris datis ad quartum Proportionalem inveniendum, duo primi innuunt rationem, & reliquus ingreditur quæſtionem; eſtque in Proportione Directâ primus terminus (ſive Diviſor) homogeneus ei per quem fit quæſtio: At in Proportione Reciprocâ primus terminus (ſive Diviſor) ipſe eſt per quem fit quæſtio.

6. Directa quidem Proportio eſt, quando terminus is per quem fit quæſtio, quô major eſt, eô quartum majorem requirit: & quo minor eô minorem.

7. Reciproca Proportio eſt, quando terminus is per quem fit quæſtio, quô major eſt, eô quartum minorem requirit: & quô minor, eô majorem.

8. Proportio continua ∺ eſt, quando termini omnes medii inter primum & ultimum, rationum ſunt tum conſequentes, tum antecedentes. Ut 8, 12, 18, 27, ſunt ∺. Nam 8. 12 :: 12. 18 :: 18. 27.

Item $\alpha, \beta, \frac{\beta q}{\alpha}, \frac{\beta c}{\alpha q}, \frac{\beta qq}{\alpha c}, \frac{\beta qc}{\alpha qq}$, &c. ſunt ∺

Quare ſi in hâc ſerie ultimus terminus ſit ω, & ſumma omnium terminorum totius progreſſionis ſit Z: erit $Z - \omega$ ſumma omnium antecedentium: & $Z - \alpha$ ſumma omnium conſequentium.

9. Si

9. Si quatuor magnitudines ſint proportionales, A. α :: B. β: etiam alternè, & inverſè, & compoſitè, & diviſim, & converſè, & mixtim proportionales erunt,

	A. α ::	B. β.
alternè,	A. B ::	α. β.
inverſè,	α. A ::	β. B.
compoſitè,	A+α. α ::	B+β. β.
vel,	A+B. B ::	$\alpha+\beta$. β.
diviſim,	A−α. α ::	B−β. β.
vel,	A−B. B ::	$\alpha-\beta$. β.
converſè,	A. A ± α ::	B. B ± β.
vel,	A. A ± B ::	α. $\alpha \pm \beta$.
mixtim,	A+α. A−α ::	B+β. B−β.
vel,	A+B. A−B ::	$\alpha+\beta$. $\alpha-\beta$.

10. Si quotlibet magnitudines ſint proportionales, erit ut unus antecedens, ad ſuum conſequentem; ſic ſumma antecedentium, ad ſummam conſequentium. Eſto A. α :: B. β :: C. γ :: D. δ: erit A. α :: A + B + C + D. $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Nam $\begin{cases} \text{A. } \alpha :: \text{B. } \beta. \ \text{\& compoſitè} \\ \text{A+B. } \alpha+\beta :: (\text{B. }\beta ::)\ \text{C. } \gamma \ \text{\&} \\ \text{A+B+C. } \alpha+\beta+\gamma :: (\text{C. }\gamma ::)\ \text{D. } \delta. \ \text{\&c.} \end{cases}$

Item in ∺, α. β :: $Z-\omega$. $Z-\alpha$. Quare $\alpha Z - \alpha q = \beta Z - \beta\omega$. vel $\beta Z - \alpha Z = \beta\omega - \alpha q$.

Hinc obitèr liquet inventio ſummæ omnium terminorum ∺, ſive Progreſſionis Geometricæ: per hanc Regulam $\left\{ \frac{\beta\omega - \alpha q}{\beta - \alpha} = Z. \right.$

11. Si plurium proportionum antecedentes ſint æquales; erit ut unus antecedens, ad ſummam ſuorum conſequentium: Sic alter antecedens ad ſummam

C ſuorum

ſuorum. Eſto A. B:: $\alpha.\beta$: & A. C:: $\alpha.\gamma$:: & A. D:: $\alpha.\delta$: erit A. B+C+D:: $\alpha.\beta+\gamma+\delta$. Liquet ex priore demonſtratione, terminis alternè poſitis.

12. Si binarum rationum conſequentes ſint æquales, ſunt ut antecedentes. Si verò antecedentes ſint æquales, ſunt reciprocè ut conſequentes.

$\frac{7}{1}.\frac{9}{1}: 7.9.$ Et $\frac{1}{9}.\frac{1}{7}:: 7.9.$

13. Si bis quatuor magnitudines ſint ſimiliter proportionales; ipſarum etiam tum ſummæ, tum differentiæ proportionales erunt.

14. Si quatuor magnitudines proportionales, per alias quatuor magnitudines proportionales multiplicentur, vel dividantur: etiam Factæ, vel Quotæ, proportionales erunt. Sequitur ex 3.

15. Ratio antecedentis ad conſequentem componitur, vel ex ratione antecedentis ad tertium, & tertii ad conſequentem: vel ex ratione tertii ad conſequentem, & antecedentis ad tertium. Ut

$$7.9::\times\begin{cases}7.\ A.\\ A.\ 9.\end{cases}\quad \text{Item } 7.9::\times\begin{cases}A.\ 9.\\ 7.\ A.\end{cases}$$

16. Inventio quarti proportionalis in computationibus Aſtronomicis.

Si 100000 ſit primus terminus, invenitur quartus per 5; Cap. 4. Caſ. 3. Ut

100000. 80902:: 39875.32260.

Si 100000 ſit ſecundus terminus, invenitur quartus per 8, Cap. 5. Ut

137638. 100000:: 126223.91707.

17. Inventio partis proportionalis ex datâ differentiâ duorum numerorum in Canone Proſthaphæreſeωn.

In tabulis Prutenicis, Ad epicyli primi Lunæ Anomaliam Gr: 62, Proſthaph: ablativa eſt Gr: 4|1786. & Differentia ibidem Gr: 0|0433: Quanta ejus pars debetur Anomaliæ Gr: 62|5667? Dic

1. 0|0433 :: 0|5667. 0|0245 : per cap. 4: ſect. 5. Caſ. II. Tum 4|1786 + 0|0245 = 4|2031: quæ eſt Proſthaph: correcta.

Et contrà ſi quæratur Anomalia primi Epicycli Lunæ, congruens Proſthaphæreſi Grad: 4|2031. Proximè minor in Canone eſt Gr: 4|1786, reſpondens Anomaliæ Gr: 62: Eſtque Differentia ibidem Gr: 0|0433. Eſt autem 4|2031 − 4|1786 = 0|0245. Dic

0|0433. 0|0245 :: 1. 0|566+, partes adjungendæ Gr: 62. Eritque Anomalia quæſita Gr: 62|566+.

18. Converſio partium Sexageſimarum in Decimales & contra Decimalium in Sexageſimales.

Partes Sexageſimæ, puta 45, convertuntur in Decimales, dividendo per 60. Et contra partes Decimales, puta 0|75, convertuntur in Sexageſimas, multiplicando per 60.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ut } 6|0.\ 4|5 :: 1.\ 0|75.\\ \&\ 1.\ 0|75 :: 60.\ 45.\end{array}\right\}\text{Nam}$$

Diviſio per 60, removet lineam ſeparatricem uno loco verſus ſiniſtram, & inſuper dividit per 6. Et Multiplicatio per 60, promovet lineam ſeparatricem uno loco verſus dextram, & inſuper multiplicat per 6. Quæ regula notatu digna eſt.

Si verò plures sint species Sexagesimales annexæ Integris, puta 127° 32′ 00″ 09‴ 45⁗: hoc uteris compendio. Sub Integris 127 statue species Sexagesimales descensu obliquo: Tum facto initio ad infimam, singulas divide continuè per 6: Et quotos suprascriptos ordini proximo superiori adjunges, donec ad Integros perveneris.

127(5333784722 × 6
′32(002708333
″00(1625
‴09(75
6) IV45

Et contra, si partes Decimales dentur, puta 127(5333784722: multiplicabis ipsas continuè per 6; & factos subtus scribes, amputato in singulis ordinibus uno loco versùs dextram; ut descensus obliquus compleatur. Intuere diligenter exemplum.

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus, puta Grad: 236(4276, convertuntur in partes Decimales diei; dividendo per 360, hoc est 6×60. Et contra, partes Decimales Diei puta 0(6567433: convertuntur in Gradus, multiplicando per 360. hoc est 60×6. Intuere diligenter exemplum.

6) 236(4276
60) 39(4046 ×6
0(6567433: ×60

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus puta Grad: 236(4276 convertuntur in Horas dividendo per 15, hoc est, 3×5.

3) 236(4276
5) 78(8092 ×3
15(76184 ×5

Et

Et contra, Horæ cum partibus Decimalibus, puta 15(76184 convertuntur in Gradus, multiplicando per 15, hoc est, 5×3.

Horæ cum partibus decimalibus, puta Ho: 15(76184 convertuntur in partes Decimales Diei, dividendo per 24, hoc est, 4×6.

Et contra partes Decimales Diei, puta 0(6567433+, convertuntur in Horas, multiplicando per 24, hoc est, 6×4.

4) 15(76184
6) 3(94046 ×4
0(6567433: ×6

Summa collecta, puta 191374, convertitur in expansam, dividendo continuè per 60, & contrà summa eadem expansa, 53 09 34, convertitur in collectam multiplicando continuè per 60.

Notandum autem hic est, quod si summa collecta sit unitatum, scil: 191374°; expansa erit 53″ 09′ 34°, hoc est 53 Sexagenæ secundæ, 9 Sexag: 1æ, & 34 unitates. Si verò summa collecta sit sexagesimarum secundarum, scil: 191374″; expansa erit 53° 09′ 34″.

19137(4
60) 318(9(3 ×60
53(0

19. Illa quidem proportio, rationum fuit æqualitas & dicitur Geometrica, est autem alia proportio Arithmetica, quæ est æqualitas differentiarum: nempe quando in quatuor terminis, eadem est differentia tertii & quarti, quæ est primi & secundi. Ut 7.4:12.9 vel 7.7-3: 12. 12-3. Arithmeticè proportionales sunt.

20. Quare

20. Quare è quatuor numeris Arithmeticè proportionalibus, ſumma extremorum æquatur ſummæ mediorum $7 + 12 - 3 = 7 - 3 + 12$.

21. Et ſi è tribus numeris datis ſecundus addatur tertio, & primus tollatur è ſumma: reliquus erit quartus Arithmeticè proportionalis. Ut ſi dentur 7, 4, & 12: erit $12 + 4 - 7 = 9$, qui quartus eſt quæſitus.

22. Eſt etiam proportio Arithmetica continua, ſive Progreſſio, quando omnes termini à primo eâdem continuè exſurgunt differentia: Ut 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c. Differentia communis omnium eſt 3. Nam in hâc ſerie, primus (& quaſi radix) eſt 4: ſecundus conſtat ex primo & differentiâ unâ: Tertius conſtat ex primo & differentiis duabus: Et generaliter quilibet terminus conſtat ex primo & ex ſummâ differentiarum, quarum numerus uno minor eſt quam numerus terminorum: Exempli gratia, terminus decimus tertius conſlabitur ex primo & differentiis duodecim, quarum ſumma eſt 36. Eſt igitur $4 + 36$, hoc eſt 40, terminus decimus tertius.

23. Si in Progreſſione Arithmetica, primus terminus addatur ultimo, & ſumma ducatur in numerum terminorum: factus erit duplicata ſumma totius Progreſſionis: Nempe $40 + 4$ in $13 = 572$, quæ ſumma eſt terminorum duplicata.

24. Si ſupra ſeriem terminorum in Progreſſione Geometrica, ſtatuatur pro Indicibus, ſeries terminorum qualiumcunque Progreſſionis Arithmeticæ: quibuſlibet quatuor numeris in Arithmetica proportione reſpondebunt quatuor numeri Geometricè proportionales.

Indices,	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.
Termini,	5.	15.	45.	135.	405.	1215.	3645.	10935.

Quia $10 + 16 - 6 = 20$; Erit $\frac{45 \times 1215}{5} = 10935$.

Atque hinc patet inventio termini cujuſvis in Progreſſione Geometrica.

25. Eſt etiam tertia Proportio, Muſica dicta, Quando in quatuor numeris, eſt ut Primus ad Quartum: ſic differentia primi & ſecundi, ad differentiam Tertii & Quarti. Ut 5, 8, 12, 30, ſunt muſicè proportionales: quia $5.\,30 :: 8-5.\,30-12 :: 3.\,18$. Item in ſpeciebus A, M, N, E; Eſto $A.\,E :: M-A.\,E-N$. Quare $AE - AN = ME - AE$. Terminis hiſce rité ordinatis Regula erit, $\frac{AN}{2A-M} = E$. & $\frac{EM}{2E-N} = A$.

In verbis ſic, Si rectangulum ſub primo & tertio dividatur per exceſſum primi duplicati ſupra ſecundum: quotus erit quartus in Muſica proportione. Quare oportet terminos ſic dari, ut primus duplicatus excedat ſecundum.

Cap. VII.

DE MAXIMA COMMUNI MENSURA: quâ numeri dati reducuntur ad minimos terminos ejuſdem rationis.

1. Maxima duorum numerorum communis menſura invenitur perpetua diviſione majoris per minorem, & diviſoris per reliquum. Nam diviſor ille qui primus dividuum ſuum metitur, abſq; ullo

ullo reliquo, maxima erit utriuſque numeri dati communis menſura. Ut numerorum 899 & 744 maxima menſura invenietur 31.

$$\begin{array}{l} \quad\quad 31 \quad 124 \quad 155 \\ 31)\ \cancel{124})\ \cancel{155})\ \cancel{744})\ \cancel{899}(\cancel{1}(\cancel{4}(\cancel{1}(\cancel{4} \\ \quad\quad \cancel{124}\ \cancel{124}\ \cancel{620}\ \cancel{744} \end{array}$$

2. Numerorum reductio ad minimos terminos ejuſdem rationis fit dividendo utrumque per maximam ipſorum communem menſuram. Ut 899 & 744 reducuntur ad 29 & 24, qui minimi ſunt termini in eadem ratione, diviſo utroque per 31 maximam utriuſque menſuram. Sic $\frac{3Aq}{6A}$ reducuntur ad $\frac{A}{2}$ dividendo utrumque terminum per 3A. Et $\frac{4Acc}{6Aqq}$ reducitur ad $\frac{2Aq}{3}$ dividendo per 2Aqq. Item $\frac{BA}{B}$ reducitur ad A, dividendo utrumque per B. Nam quod multiplicatio conficit, diviſio diſſolvit.

3. Quare, Si maxima duorum numerorum communis menſura ſit 1: dicuntur duo illi numeri primi inter ſe: ſuntque minimi in eadem ratione, ut 29 & 24.

4. Si numerus, primus ſit ad utrumque factorem, primus erit ad factum.

Hinc proportionis operatio fieri ſæpenumero poteſt facilior, ut in exemplo.

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ \cancel{3} & 2 & & 5 \\ \cancel{12}. & 8 :: & \cancel{15}. & 10. \end{array}$$

5. Memento autem diligenter, *Quotieſcunque fractio aliqua, ſive ratio, proponitur, ut ipſam primò ad minimos terminos reducas*, ut $\frac{744}{899}$ fiant $\frac{24}{29}$.

C A P.

C A P. VIII.

De PARTIBUS: *quæ etiam fractiones, ſive numeri fracti, dicuntur.*

1. VNitas (ſive integrum unum quodque) concipi mente poteſt in quotcunque æquales partes diviſibilis: quæ quidem partes denominationem ex numero ſuo, quem unitas continet, ſortiuntur: ut ſi unitas intelligatur dividi in binas æquales partes, dicuntur ſecundæ; ſi in tres, tertiæ: & ſic de reliquis.

2. Scribuntur partes duobus terminis cum lineola interjecta: quorum inferior denotat unitatem diviſam in totidem æquales partes; & dicitur Denominator. Superior verò oſtendit quot ex partibus illis ſignificantur; atque ideò dicitur Numerator. Ut $\left.\begin{array}{l}4 \text{ numerator} \\ 5 \text{ denominator}\end{array}\right\}$ ſignificant quatuor quintas partes, ſive quatuor partes unius integri diviſi quinquifariam.

3. *Quam igitur rationem habet numerator ad denominatorem, eandem habet quantitas ſignificata ad unitatem.* 4.5 :: $\frac{4}{5}$.1. R,S :: $\frac{R}{S}$.1.

4. Et quia ratio quævis terminis innumeris ſimiliter ſeſe adinvicem habentibus (quorum quidem maximi dari nequeunt) poterit exprimi: ſequitur partes etiam eaſdem, non iiſdem ſolummodò numeris, ſed aliis infinitis, poſſe deſignari. Ut quincuncem ſignificant non modo $\frac{5}{12}$, qui minimi ſunt termini in eadem

ratione

ratione, ſed etiam $\frac{10}{24}, \frac{20}{48}, \frac{25}{60}, \frac{45}{108}$: & quotcunque alii numeri fiunt multiplicando 5 & 12 in alium quemvis numerum, per 2 cap. 6.

5. Quare æqualium partium, ſive fractionum, termini ſunt proportionales, & contra.

6. Item, ſi partium numerator minor ſit denominatore, partes ſunt unitate minores: ſi æqualis, ſignificant unitatem: et ſi major, partes unitatem excedunt, eâdem ratione, quâ denominator à numeratore ſuperatur. Reducuntur autem ad unitates dividendo numeratorem per denominatorem: ut $\frac{31}{7}$ ſunt $4\frac{3}{7}$ item $\frac{CR+SA}{R}$ eſt $C+\frac{SA}{R}$. Et contra integri, ſive unitates reſolvuntur in partes cujuſque generis multiplicando unitates per denominatorem earundem partium, ut 1 fiet $\frac{2}{2}$, vel $\frac{3}{3}$, &c. & $4\frac{3}{7}$ fient $\frac{28+3}{7}$, hoc eſt $\frac{31}{7}$. Item $C+\frac{SA}{R}$ fiet $\frac{CR+SA}{R}$

CAP. IX.

DE ADDITIONE ET *Subductione Partium.*

1. SI partes propoſitæ diverſarum ſint ſpecierum: Primò reducendæ ſunt ad eandem denominationem, dividendo denominatores per maximam ipſorum communem menſuram; & multiplicando terminos per alternos quotos. Deinde in numeratoribus

ribus partium inventarum ejuſdem denominationis additio vel ſubductio inſtituenda eſt. Et ſummæ denique, vel differentiæ, communis ille denominator ſubſcribendus.

2 Et ſi integri partibus ſint immixti, ſeorſim tamen ſunt numerandi. Exempli gratia: Ex $6\frac{1}{18}$ tollatur $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$. Primò addendæ ſunt $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$ eruntque 2 & $\frac{39+28}{48}$ vel $\frac{67}{48}$, nempe $3\frac{19}{48}$: quibus demptis è $6\frac{1}{18}$ reſtabunt $2\frac{95}{144}$ ut in exemplo

$$\begin{array}{ccc} & 67 & \\ & 39+28 & \\ \cancel{13} & & \cancel{7} \\ - & 2 & - \\ 4)\ \cancel{16} & & \cancel{12} \\ 4 & & 3 \\ & \underbrace{\qquad}_{48} & \end{array} \quad \text{eſt} \quad \begin{array}{ccc} 57 & & 8 \\ \cancel{19} & & 1 \\ 3\ - & \text{è}\ 6 & - \\ \cancel{48} & & \cancel{18} \\ 6)\ 8 & & 3 \\ & \underbrace{\qquad\qquad}_{144} & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{è}\ 5\,\frac{152}{144} = 6\,\frac{8}{144} \\ -\ \text{tolle} \\ 3\,\frac{57}{144} \\ \text{manet} \\ 2\,\frac{95}{144} \end{array}$$

Adde $\frac{A}{B}$ & Z, ſumma $\frac{A+ZB}{B}$

Ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$, reſtat $\frac{CA-Bq}{BC}$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{BE+DA} \\ B & +\ D \\ C)\ CA & CE \\ A & E \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad}_{CAE}} \end{array}$$

Cap. X.

DE MULTIPLICATIONE ET *Divisione Partium.*

1. MUltiplicatio comparat heterologos terminos (hoc est reducit ad minimos) & multiplicat homologos.

2. Divisio comparat homologos terminos, & multiplicat heterologos.

3. Et si integri partibus sint immixti, resolvendi sunt integri in partes.

Exempla Multiplicationis.

$\underset{4}{\overset{1}{\frac{\cancel{9}}{\cancel{16}}}}$ in $\underset{3}{\overset{5}{\frac{\cancel{20}}{\cancel{27}}}}$ fit $\frac{5}{12}$ | $\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{9}$ in $\frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}}$ fit $\frac{20}{27}$ | $\frac{5}{1}$ in $3\,\frac{\overset{13}{\cancel{1}}}{4}$ fit $\frac{65}{4}$ ($16\frac{1}{4}$

$\frac{A}{B}$ in B fit A | $\frac{A}{B}$ in Z fit $\frac{ZA}{B}$ | $\frac{A}{B}$ in $\frac{ZA}{C}$ fit $\frac{ZAq}{BC}$

Exempla divisionis.

$\underset{4}{\overset{3}{\frac{\cancel{9}}{\cancel{16}}}}$) $\underset{7}{\overset{5}{\frac{\cancel{15}}{\cancel{28}}}}$ ($\frac{20}{21}$ | $\frac{8}{\underset{3}{\cancel{15}}}$) $\cancel{7}\,\underset{1}{\overset{37}{\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}}}$ ($\frac{111}{8}$ ($13\frac{7}{8}$ | $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4}$) $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{1}$ ($\frac{12}{1}$

$\frac{D}{1}$) $\frac{Aq}{B}$ ($\frac{Aq}{DB}$ | $\frac{A}{D}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{BCD}{A}$ | $\frac{A}{B}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{BqC}{A}$

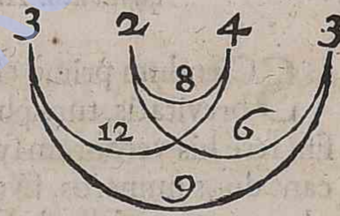
$\frac{B}{A}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{CA}{1}$ | $\frac{Ac}{C}$) $\frac{Bc}{D}$ ($\frac{BcC}{DAc}$

4. Quis

4. Quis numerus est $\frac{2}{7}$ è 21? Multiplica 21 per $\frac{2}{7}$. Nam 1. $\frac{2}{7}$::21.6. vel 7.2::21.6.

5. Cujus numeri 6 continet $\frac{2}{7}$? Divide 6 per $\frac{2}{7}$. Nam $\frac{2}{7}$. 1::6.21. vel 2.7::6.21.

6. Apud antiquos Musicæ Scriptores, termini multiplicandi in rationum sive continuatione, sive imminutione, connectuntur lineolis curvis, in hunc modum: si rationes sint 3 ad 2, & 4 ad 3.



7. Rationum continuatio fit per Multiplicationem ipsarum, ac si essent fractiones. Continuentur rationes 3 ad 2, & 4 ad 3: idem est ac si dicatur, multiplicentur $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, fientque $\frac{12}{6}$, quæ dupla est ratio. Quare ratio sesquialtera continuata cum ratione sesquitertiâ facit duplam: vel, ut loquuntur Musici, ex diapente & diatessaron fit diapason.

8. Rationum imminutio fit per Divisionem: ut è ratione 3 ad 2 detrahenda sit 4 ad 3: Idem est ac si jubeatur $\frac{3}{2}$ dividi per $\frac{4}{3}$ restabitque $\frac{9}{8}$: nam $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$ ratio sesquioctava: quæ mensura est Toni integri. Unde dicunt Musici quod differentia inter diapente & diatessaron est Tonus. Ut in hâc lineâ sive chordâ divisâ in duodecim partes.

12 9 8 6 0

Cap.

CAP. XI.

Exempla aliquot facillima, quibus quæ hactenus tradita sunt familiaria redduntur: Et via ad Æquationem Analyticam sternitur.

1. Sciendum primò est, quod in sequentibus, tum brevitatis, tum phantasiæ juvandæ gratia, passim ferè his verborum symbolis utor. A & E significant duos numeros, sive magnitudines; quorum A plerumque major est, E minor. Æ rectangulum sub ipsis. Z est summa. X differentia. Zq summæ quadratum. Xq differentiæ quadratum. $\mathbb{Z}$ summa quadratorum. $\mathbb{X}$ differentia quadratorum $\mathcal{Z}$ summa cuborum. $\mathcal{X}$ differentia cuborum. A, M, E, sunt tres continuè proportionales: A, M, N, E, quatuor. Q: C: Q Q: QC: &c. præfixæ magnitudinibus inter duo utrinq; puncta inclusis, significant illiusmodi potestates. √ denotat radicem sive latus potestatis simplicis, si non intercedant duo puncta: Si vero potestas duobus utrinque punctis includatur, significat latus ipsius universale: quod etiam aliter per literam b vel r describi solet, ut √b latus est Binomii, & √r latus Residui sive Apotomes. $=$ nota est æqualitatis.

2. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum major est A, minor E: quænam est ipsornm summa? quæ differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia? quæ summæ & differentiæ ipsorum summa? quæ summæ & differentiæ ipsorum differentia? quod summæ & differentiæ ipsorum rectangulum? quod summæ quadratum? quod differentiæ quadratum? quæ quadratorum summæ & differentiæ summa? quæ quadratorum summæ & differentiæ differentia? quod quadratum rectanguli?

Z est A + E. X est A-E. Æ est AE.

$\mathbb{Z} = Aq + Eq.$ $\mathbb{X} = Aq - Eq.$

$Z + X = 2A$ $Z - X = 2E.$

$\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}X = A.$ $\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}X = E.$

$ZX = Aq - Eq = \mathbb{X}.$ $Zq.\mathbb{X} :: \mathbb{Z}.X.$

$Zq = Aq + 2AE + Eq = \mathbb{Z} + 2Æ.$

$Xq = Aq - 2AE + Eq = \mathbb{Z} - 2Æ.$

$Zq + Xq = 2Aq + 2Eq = 2\mathbb{Z}.$

$Zq - Xq = 4AE.$ $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = Æ.$

$Æq = AqEq.$

3. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum summa est Z, & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$E = Z - A.$ $X = 2A - Z.$ $Æ = ZA - Aq.$

$\mathbb{Z} = Zq - 2ZA + 2Aq.$ $\mathbb{X} = 2ZA - Zq.$

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$A = Z - E.$ $X = Z - 2E.$ $Æ = ZE - Eq.$

$\mathbb{Z} = Zq - 2ZE + 2Eq.$ $\mathbb{X} = Zq - 2ZE.$

4. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum differentia est X, & major ex ipsis ponitur A: quisnam

nam est minor? quæ ipsorum summa? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$$E = A - X. \qquad Z = 2A - X. \qquad \text{Æ} = Aq - XA.$$
$$Z = 2Aq - 2XA + Xq. \qquad X = 2XA - Xq.$$

Si vero minor ex ipsis ponatur E.

$$A = E + X \qquad Z = 2E + X. \qquad \text{Æ} = Eq + XE.$$
$$Z = 2Eq + 2XE + Xq. \qquad X = 2XE + Xq.$$

5. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum major ad minorem, rationem habet R ad S; & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia.

$$E = \frac{SA.}{R} \qquad Z = \frac{RA+SA.}{R} \qquad X = \frac{RA - SA.}{R}$$
$$\text{Æ} = \frac{SAq.}{R} \qquad Z = \frac{RqAq+SqAq.}{Rq} \qquad X = \frac{RqAq - SqAq.}{Rq}$$

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$$A = \frac{RE.}{S} \qquad Z = \frac{RE+SE.}{S} \qquad X = \frac{RE - SE.}{S}$$
$$\text{Æ} = \frac{REq.}{S} \qquad Z = \frac{RqEq+SqEq.}{Sq} \qquad X = \frac{RqEq - SqEq.}{Sq}$$

6. Sunt

6. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum rectangulum est Æ; & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$$E = \frac{\text{Æ}.}{A} \qquad Z = \frac{Aq+\text{Æ}.}{A} \qquad X = \frac{Aq-\text{Æ}.}{A}$$
$$Z = \frac{Aqq+\text{Æ}q.}{Aq} \qquad X = \frac{Aqq-\text{Æ}q.}{Aq.}$$

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$$A = \frac{\text{Æ}.}{E} \qquad Z = \frac{\text{Æ}+Eq.}{E} \qquad X = \frac{\text{Æ}-Eq.}{E}$$
$$Z = \frac{\text{Æ}q+Eqq.}{Eq} \qquad X = \frac{\text{Æ}q-Eqq.}{Eq}$$

7. Atque ex his comparatis multæ æqualitates oriuntur. Exempla sumemus in summa & Differentia.

$$Z = A+E = 2A-X = 2E+X = \frac{Aq+\text{Æ}}{A} = \frac{\text{Æ}+Eq}{E} \text{ \&c.}$$

$$X = A-E = 2A-Z = Z-2E = \frac{Aq-\text{Æ}}{A} = \frac{\text{Æ}-Eq}{E} \text{ \&c.}$$

Hoc modo etiam in reliquis comparationes poterunt institui, quibus eadem magnitudo multas admittet interpretationes atque diversitates.

D CAP.

Cap. XII.

DE GENESI, ET ANALYSI POTESTATUM.

1. QUia omnia resolvuntur in easdem partes, ex quibus coagmentantur: primò scire oportet ex quibus partibus quælibet potestas constituitur. Potestates autem fiunt à radice aliquoties in se multiplicatâ. Nam latus in se ductum facit quadratum: Quadratum ductum in latus facit cubum: Cubus ductus in latus suum facit quadrato-quadratum, quæ potestas est quartana [4]: hæc iterum ducta in latus facit quadrato-cubum, scilicet quintanam [5]: Et sic ulteriùs progrediēdo fiunt potestates sextana [6], septimana [7], octavana [8], nonana [9], decumana [10], & reliquæ, pro numero dimensionum suarum, ex quibus componuntur.

2. Quare potestatum à radice singulari, quæ unica figura, sive nota, constat, procreatio nihil habet difficultatis.

TA-

TABULA PRIOR POTESTATUM A RADICE SINGULARI.

L N	[2] q	[3] c	[4] qq	[5] qc	[6] cc	[7] qqc	[8] qcc
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721

3 Quæ

3. Quæ verò à radice binarum notarum exſurgunt, hunc habent ortus ſui modum.

Geneſis poteſtatum à radice binomia.

$$
\begin{array}{l}
A+E \\
A+E \\
\hline
Aq+AE \\
\quad +AE+Eq \\
\hline
Aq+2AE+Eq. \quad \text{Quadratum} \\
A+E \\
\hline
Ac+2AqE+AEq \\
\quad +AqE+2AEq+Ec \\
\hline
Ac+3AqE+3AEq+Ec. \quad \text{Cubus} \\
A+E \\
\hline
Aqq+3AcE+3AqEq+AEc \\
\quad +AcE+3AqEq+3AEc+Eqq \\
\hline
Aqq+4AcE+6AqEq+4AEc+Eqq. \quad \text{Quadrato-quadrat.} \\
A+E \quad \&c.
\end{array}
$$

4. Atque hoc artificio conficietur tabula poteſtatum aſcendentium in ſcala à radice binomia: quæ *POSTERIOR* vocetur.

A E

Latus ſive numerus.

	A	E									
[2]	Aq	2AE	Eq								
[3]	Ac	3AqE	3AEq	Ec							
[4]	Aqq	4AcE	6AqEq	4AEc	Eqq						
[5]	Aqc	5AqqE	10AcEq	10AqEc	5AEqq	Eqc					
[6]	Acc	6AqcE	15AqqEq	20AcEc	15AqEqq	6AEqc	Ecc				
[7]	Aqqc	7AccE	21AqcEq	35AqqEc	35AcEqq	21AqEqc	7AEcc	Eqqc			
[8]	Aqcc	8AqqcE	28AccEq	56AqcEc	70AqqEqq	56AcEqc	28AqEcc	8AEqqc	Eqcc		
[9]	Accc	9AqccE	36AqqcEq	84AccEc	126AqcEqq	126AqqEqc	84AcEcc	36AqEqqc	9AEqcc	Eccc	
[10]	Aqqcc	10AcccE	45AqccEq	120AqqcEc	210AccEqq	252AqcEqc	210AqqEcc	120AcEqqc	45AqEqcc	10AEccc	Eqqcc

5. Quælibet ſpecies intermedia cujuſque ordinis componitur ex duabus ſpeciebus ordinis præcedentis utrinque proximis: nempe A poteſtate ſuperioris ſpeciei, & E poteſtate inferioris. Numerus etiam affigendus ex utroque numero iiſdem affixo, aggregatur. Quare continuari facile poterit hæc tabula ulterius pro libitu.

6. In hâc tabulâ duæ extremæ poteſtates ſingulorum generum ſunt diagonales: & ſpecies intermediæ ſunt complementa: quibus affixæ ſunt *unciæ*, oſtendentes numerum complementorum in conſtitutione cujuſque poteſtatis ſumendorum. Complementa autem omnia, cum E poteſtate, Gnomon non ineptè dici poterit.

7. Ex hâc tabulâ etiam liquet, quod quadratum à radice binarum notarum conſtat ex diagonalibus quadratis utriuſq; notæ, & duplice rectangulo ſub ipſis notis. Cubus autem conſtat ex cubis diagonalibus & triplice ſolido ſub quadrato majoris notæ & notâ minore, & triplice item ſolido ſub majore notâ & quadrato minoris. Quod ſimiliter de reliquis quoque poteſtatibus eſt efferendum.

8. Oſtendit inſuper plena hæc myſteriis pulcherrimis tabella, in numeroſa poteſtate, ſedes tum poteſtatum ſingularium ſive diagonalium, tum cujuſque ſpeciei complementorum. Nam cùm inter bina quadrata unica eſt ſpecies, quadratorum ſedes unicum interponent pro complementis locum. Et cùm inter binos cubos duæ ſunt complementorum ſpecies, cuborum ſedes binos interponent locos complementis ſuis ordine diſtribuendos.

CAP.

CAP. XIII.

His itaque præmiſſis ad GENESIN *Poteſtatum accedamus.*

1. PRoponatur Geneſis quadrati à latere 57. major igitur nota A eſt 5, minor E eſt 7. Scribantur 5 & 7 intermiſſo unius gradus ſpatio: & linea ſub ipſis ducatur. Sub 5 ſtatuatur quadratum ſuum 25: & ſub 7 ſuum 49. tum duplicetur 5, & multiplicetur per 7, fietque duplum rectangulum 70, ponendum loco intermedio. addantur omnia ſuis quæque locis: ſumma erit 3249 pro quadrato lateris 57 quæſito.

5	7		
25		Aq	
7	0	2AE	gnomon
	49	Eq	
32	49		

2. Proponatur iterum Geneſis cubi à latere 57 ſcribantur 5 & 7 intermiſſo duorum graduum ſpatio: & linea ſub ipſis ducatur. ſub 5 ſtatuatur cubus ſuus 125: & ſub 7 ſuus 343. tum quadratum à 5 triplicetur, & multiplicetur per 7, fietque triplum ſolidum majus 525, ponendum loco priore intermedio: item triplicetur 5, & multiplicetur per 49 quadratum à 7, fietque triplum ſolidum minus 735, ponendum loco

5	7		
125	Ac		
52	5	3AqE	
7	35	3AEq	gnomon.
	343	Ec	
185	193		

loco intermedio secundo. addantur omnia suis quæque locis: summa erit 185193 pro cubo lateris 57 quæsito.

3. Si latus propositum constet pluribus figuris, ut 57209: Primò potestas duarum primarum figurarum 57 quærenda est. Deinde sumptis 57 pro A, & figura 2 sequente pro E: quæratur potestas ipsius eodem, qui ante ostensus est tabellæ ordine. Quod etiam in reliquis figuris singulatim est faciendum.

5	7	2	0	9		Radix.
25		Aq				
7	0	2Æ	gnomon.			
	49	q				
32	49		Aq			
	22	8	2Æ	gnomon.		
		4	Eq			
32	71	84	00		Aq	
	1	02	96	0	2Æ	gnomon.
				81	Eq	
32	72	86	96	81		Quadrat.

57

5	7	2	0	9		Radix.
125		Ac				
52	5	3AqE	Gnomon.			
7	35	3AEq				
	343	Ec				
185	193		Ac			
1	949	4	3AqE	Gnomon.		
	6	84	3AEq			
		8	Ec			
187	149	248	000		Ac	
	88	339	680	0	3AqE	Gnomon.
		13	899	60	3AEq	
				729	Ec	
187	237	601	580	329		Cubus.

4. Ex his, quæ jam declarata sunt, non difficile erit reliquas etiam omnes superiorum generum potestates progignere: modò in ipsarum genitura inferiorum omnium ad ipsas adscendentium potestatum genesis instituatur: sicut in cubi genesi jam factum vides.

CAP.

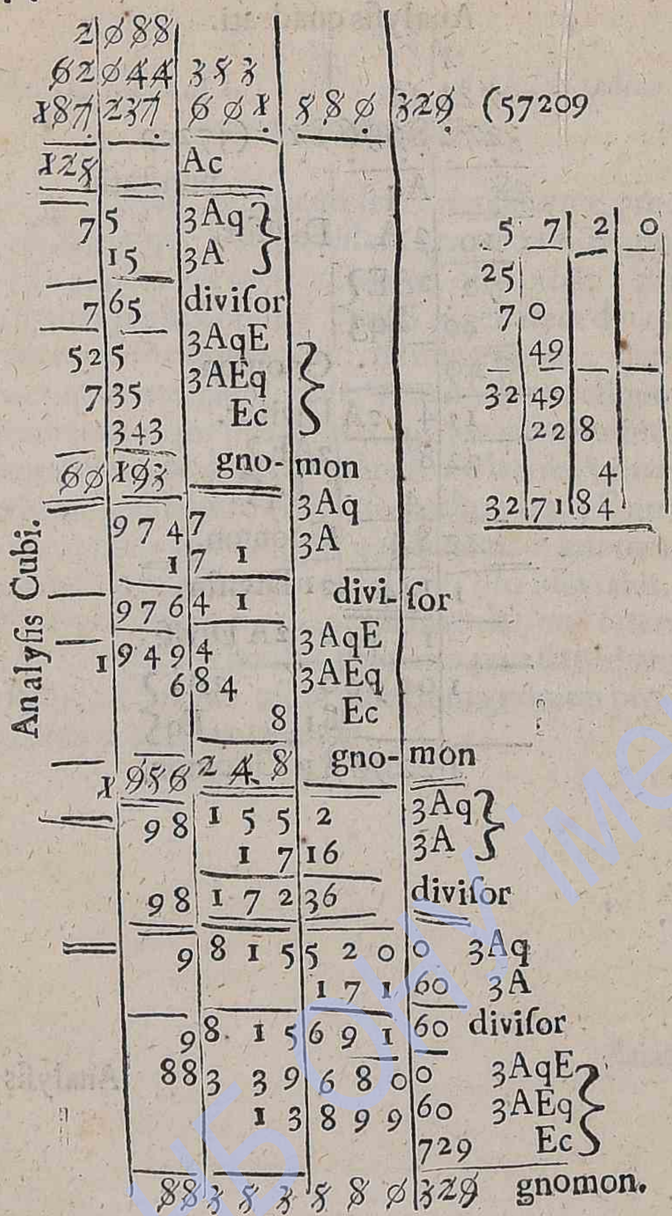
Cap. XIV.

Sequitur ANALYSIS: quæ eſt eductio radicis ex numeroſa poteſtate data.

1. ANalyſis, poſtquam ſedes poteſtatum, pro ſuo quaſque juxta tabulam genere, punctis, poſito primo puncto ſub loco unitatum, diſtinxerit: primò ex figuris primi à ſiniſtra puncti poteſtatem diagonalem comprehenſam tollit: latuſque ipſius, quod A vocetur, in margine ſcribit. tum numero reliquo, ad proximum uſque punctum (qui gnomonem intelligitur continere) per diviſorem ex latere A invento legitimè conflatum, diviſo, ſecundum latus E quærit & in margine ſcribit: per quod demùm gnomonem perficit: perfectumque ex reliquo illo ſubtrahit. Et ſic integra duorum primorum ſingularium laterum, in duobus primis punctis contenta, poteſtate dempta, reſtabit ad tertium uſque punctum gnomon pro tertio latere ſimiliter eruendo.

Analyſis quadrati.

1		
723	02	
3272	869681	(57209 punctatio
28	Aq	
10	2 A	Diviſor.
70	2AE }	
49	Eq }	
749		Gnomon.
11	4 2A	Diviſor.
22	8	2AE }
	4	Eq }
22	84	Gnomon.
1	144	21 Diviſor.
	1144	0 2A Diviſ:
1	0296	0 2AE }
		81 Eq }
1	0296	81 Gnomon.



2. Si numerus propositus non sit verus sui generis figuratus, sed peracta Analysi aliquid restet: punctationes circulorum pro suo genere, quot opus erit, statuendæ sunt: & continuanda Analysis post lineam separatricem.

3. Ex his etiam quæ declarata sunt, non difficile erit ope tabellæ radices ex superioribus potestatibus omnibus educere.

CAP. XV.
DE LATERIBUS SURDIS.

1. SI quotlibet numeri sint continuè proportionales: Erit ut primus ad ultimum, sic potestas primi æquimultiplicata numero terminorum minus uno, ad potestatem similem secundi. Sunto quatuor ∺ A,M,N,E

Quia $\left\{\begin{array}{l} A.M::A.M \\ M.N::A.M \\ N.E::A.M \end{array}\right\}$ Erit per Multiplicationem A.E::Ac.Mc.

2. Numeri plani vel solidi similes sunt, quorum latera homologa sunt proportionalia.

3. Numeri plani similes sunt in duplicatâ ratione (hoc est, ut quadrata) homologorum laterum. Sunt igitur numeri plani similes, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Item numeri solidi similes sunt in triplicatâ ratione (hoc est, ut Cubi) homologorum laterum. Sunt igitur numeri solidi similes, ut numerus Cubicus ad numerum Cubicum.

4. Et generaliter omnes figurati ſimiles plurium dimenſionum, ſunt in ratione homologorum laterum, æquimultiplicatâ numero dimenſionum, ex quibus componuntur. Dimenſiones ſunto quatuor, nempe A B C D unius, & E F G H alterius, in ratione R ad S.

$$\text{Quia}\left\{\begin{array}{l} A.\ E :: R.S \\ B.\ F :: R.S \\ C.G :: R.S \\ D.H :: R.S \end{array}\right\}\ \text{Erit per multiplicationem } ABCD.\ EFGH :: Rqq.\ Sqq.$$

5. Si numerus non ſit verus ſui generis figuratus, latus ejus dicitur ſurdum. & ſic notatur, $\surd q6$, $\surd c4$, $\surd qq20$, $\surd qc13$: hoc eſt latus quadrati 6, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13. &c.

6. Latera ſurda commenſurabilia ſunt, quorum numeri ad minimos terminos reducti, fiunt veri ſui generis figurati: ſuntque idcirco ut numerus ad numerum, ut $\surd q12$ & $\surd q147$ reducta ad minimos terminos per $\surd q3$ maximam utriuſque communem menſuram, fiunt $\surd q4$ & $\surd q49$, hoc eſt 2 & 7: quare cum $\surd q12$ & $\surd q147$ ſint ut 2 ad 7, erunt commenſurabilia. Sic $\surd c40$ & $\surd c1715$ ſunt ut 2 ad 7, quoniam diviſa per maximam ſuam communem menſuram $\surd c5$, fiunt $\surd c8$ & $\surd c343$; ideoque commenſurabilia.

7. Adduntur autem, atque ſubtrahuntur, latera ſurda commenſurabilia, ſi ſummæ, vel differentiæ, numerorum ipſis ſimilium inventorum homogenea poteſtas

poteſtas ducatur in communem ipſorum menſuram. Ut $\surd q147 + \surd q12$ eſt $\surd q243$; hoc eſt latus quadrati à $7+2$ (nempe 81) ductum in $\surd q3$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\surd q147 - \surd q12$ eſt $\surd q75$; hoc eſt latus quadrati à $7-2$ (nempe 25) ductum etiam in $\surd q3$.

Item $\surd c1715 + \surd c40$ eſt $\surd c3645$, hoc eſt latus cubi $7+2$ (nempe 729) ductum in $\surd c5$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\surd c1715 - \surd c40$ eſt $\surd c625$, hoc eſt latus cubi à $7-2$ ductum etiam in $\surd c5$.

Additionis & ſubductionis operatio talis eſt.

$$\surd q3)\begin{array}{l}\surd q147\ (\surd q49.7 \\ \underline{\surd q12\ (\surd q4.2.}\end{array}\qquad \surd c5)\begin{array}{l}\surd c1715\ (\surd c343.\ 7 \\ \underline{\surd c40\ (\surd c8.\ 2}\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \surd q243 & \surd q81.9 & \text{ſumma} & \surd c3645 & \surd c729.\ 9 \\ \surd q75 & \surd q25.5 & \text{differ.} & \surd c625 & \surd c125.\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \surd 12 + \surd \frac{27}{4} & \surd \frac{245}{12} + \surd \frac{5}{12} \\ \text{vel} & \\ \surd \frac{48}{4} + \surd \frac{27}{4} & \surd 5)\begin{array}{l}\surd 245\ (\surd 49.\ 7 \\ \surd 5\ (\surd 1.\ 1\end{array} \\ \surd 3)\begin{array}{l}\surd 48\ (\surd 16.\ 4 \\ \surd 27\ (\surd 9.\ 3\end{array} & \surd \frac{320}{12}\quad \surd 64.\ 8 \\ \surd \frac{147}{4}\quad \surd 49.7 & \surd \frac{180}{12}\quad \surd 36.\ 6 \\ \surd \frac{3}{4}\quad \surd 1.\ 1 & \end{array}$$

8. Latera verò ſurda incommenſurabilia, atque heterogenea, adduntur, vel ſubtrahuntur, ſignis + vel − ut $\surd q7 + \surd q4$. & $\surd c10 - \surd c5$.

9. Si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum multiplicetur, factus erit numerus

ejuſdem

ejuſdem generis figuratus, cujus latus æquale eſt facto à lateribus numerorum multiplicatorum. Et ſi numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum dividatur, quotus erit numerus ejuſdem generis figuratus, cujus latus æquale eſt quoto lateris Dividendi ad Diviſoris latus applicati. Ut factus à numeris cubicis 343 & 27 eſt 9261, numerus etiam cubicus, cujus latus eſt 7×3. Item $\sqrt{q}\,\frac{AqEq}{Bq}$ eſt $\frac{AB.}{B.}$

10. Quare laterum ſurdorum homogeneorum multiplicatio, & diviſio, procreat latus etiam ſurdum homogeneum: ut $\sqrt{q}7$ in $\sqrt{q}3$ eſt $\sqrt{q}21$. Et $\sqrt{q}7)\,\sqrt{q}21\,(\sqrt{q}3$: vel $\sqrt{q}\frac{21}{7}$ eſt $\sqrt{q}3$. Item $\sqrt{q}A$ in $\sqrt{q}E$ eſt $\sqrt{q}AE$. Et $\sqrt{q}A)\,\sqrt{q}AE\,(\sqrt{q}E$: vel $\sqrt{q}\,\frac{AE}{A}$ eſt $\sqrt{q}E$.

11. Latera verò heterogenea non multiplicantur, vel dividuntur, niſi prius ad idem genus reducuntur, quod fit dividendo indices utriuſque poteſtatis propoſitæ per maximam ipſorum communem menſuram: & multiplicando tum Indices per alternos quotos: tum ipſas poteſtates in ſpecies alternis quotis cognomines. Ut ſi ad multiplicandum vel dividendum, proponatur $\sqrt{qq}10$ & $\sqrt{cc}7$. Primò reducuntur ad $\sqrt{cccc}\,1000$, & $\sqrt{cccc}49$: cubando 10, & quadrando 7: Tum demùm fiat multiplicatio, vel diviſio. Sic etiam $\sqrt{qq}A$, & $\sqrt{cc}Bq$ reducuntur ad $\sqrt{cccc}Ac$, & $\sqrt{cccc}Bqq$: uti planiùs apparebit per praxim, quæ hic apponitur.

[2]

$\sqrt{[12]}1000 \quad \sqrt{[12]}49 \qquad \sqrt{[12]}Ac \; \sqrt{[12]}Bqq$

$[2])\,\sqrt{[4]}10 \quad \sqrt{[6]}7 \; [2])\,\sqrt{[4]}A \quad \sqrt{[6]}Bq$

$[2] \qquad [3] \qquad [2] \qquad [3]$

Rurſus ſi $\sqrt{c}32$ duplicandum ſit, vel multiplicandum per 2: pro 2 ſumatur $\sqrt{c}8$: & per ipſum multiplicetur $\sqrt{c}32$; fietque $\sqrt{c}256$, æquivalens bis $\sqrt{c}32$.

Item ſi dimidiandum ſit $\sqrt{c}32$, vel dividendum per 2: pro 2 ſumatur $\sqrt{c}8$: & per ipſum dividatur $\sqrt{c}32$; orieturque $\sqrt{c}\frac{32}{8}$; hoc eſt $\sqrt{c}4$, æquivalens $\frac{1}{2}\sqrt{c}32$.

Sic etiam $\frac{2}{7}\sqrt{q}Aq$, fiet $\sqrt{q}\frac{4}{49}Aq$, hoc eſt $\frac{2}{7}A$.

12. Si latus poteſtatis multiplicandum ſit ſecundùm exigentiam ſuæ ſpeciei: deleatur nota ſpeciei lateralis: ut Q: $\sqrt{q}64$, vel C: $\sqrt{c}64$, eſt 64.

13. Et ſi latus poteſtatis, cujus index eſt numerus compoſitus, multiplicandum ſit ſecundùm exigentiam alterutrius ſpeciei componentis: latus alterius ſpeciei numero ſpeciali ſolùm præfigatur: ut Q: $\sqrt{cc}64$ eſt $\sqrt{c}64$ & C. $\sqrt{cc}64$ eſt $\sqrt{q}64$. Nam $\sqrt{cc}$ eſt $\sqrt{[2 \times 3]}$.

14. Si magnitudo plurium nominum, ducatur in ſeipſam, cum uno ex ſuis ſignis mutato; expurgabitur unum nomen. Ut $3+\sqrt{5}+\sqrt{2}$ in $3+\sqrt{5}-\sqrt{2}$, fiet $12+\sqrt{180}$.

E CAP.

CAP. XVI.

DE ÆQUATIONE. & *De quæstionibus per Æquationem solvendis.*

1. Quotiescunque problema aliquod, sive quæstio, proponitur: Puta præstitum esse quod postulatur: aptâque adhibita ratiocinatione, pro quæsita magnitudine ponatur A, vel alia aliqua vocalis: pro magnitudinibus autem datis consonantes: quò facilius magnitudines datæ ab incertis dignoscantur.

2. Deinde magnitudines, tam datæ, quam quæsitæ, secundum conditionem quæstioni convenientem, efformentur atque comparentur, addendo, subtrahendo, multiplicando, & dividendo donec tandem aliquid inveniatur magnitudini, de qua quæritur, vel suæ, ad quam ascendet, potestati æquale.

3. Et quia in omni ferè æquatione, ubi primò ex involucris quæstionis effulget, nota cum ignotis confunduntur: termini ipsius ita sunt ordinandi, ut quæ in data habentur mensura, faciant unam partem, & quæ ignota quæruntur, alteram. Quod quo artificio fiat, regulæ quinque sequentes commonstrabunt.

4. Primò si magnitudo quæsita, vel aliquis ejus gradus, sit in fractione: fiat omnium magnitudinum ad unam denominationem reductio: ut, omisso communi illo denominatore, in solis numeratoribus æquatio censeatur. Ut $A - C = \frac{Aq+Bq}{D} + B + C$: Erit $DA - DC = Aq + Bq + DB + DC$.

5. Secundò, si quæ in data habentur mensura, immisceantur

misceantur

misceantur cum quæsitis: *fiat transpositio magnitudinum ex una parte in aliam sub contrario signo.* Ut $DA - DC = Aq + Bq + DB + DC$: Et transpositis DC & Aq, erit $DA - Aq = 2DC + DB + Bq$. Quæ etiam regula in omni transpositione servanda est.

6. Tertiò, si species altissima quæsitæ magnitudinis ducatur in magnitudinem aliquam datam; fiat omnium magnitudinum æquationis ad illam communis applicatio. Ut $BAq + BqA = Zc$, erit $Aq + BA = \frac{Zc}{B}$.

7. Quartò, si contingat omnes datas magnitudines duci in gradum aliquem magnitudinis quæsitæ: fiat omnium, per applicationem ad minimam speciem, secundum ordinem tabellæ, communis depressio. Ut $Aqq + BAc = ZqAq$, erit $Aq + BA = Zq$, expuncto in singulis Aq. Atque hoc modo æquatio quælibet proposita poterit deprimi, sive reduci ad minores species; Si terminorum omnium fiat ad eundem gradum communis applicatio. Ut $Ac + XAq = Nc$, divisa per A, fiet $Aq + XA = \frac{Nc}{A}$: at divisa per Aq, fiet $A + X = \frac{Nc}{Aq}$ Quæ quidem operatio in numerosa affectarum æquationum resolutione usus erit non contemnendi: quia latus quæsitum faciliùs æstimatur in minoribus potestatibus, quam in majoribus.

8. Quintò, si magnitudo aliqua sit latus surdum: æquatio in ipsis potestatibus est instituenda. Ut $\sqrt{q}BA + B = C$: vel per transpositionem $\sqrt{q}BA = C - B$. Ideoque ipsorum quadrata, $BA = Cq - 2CB + Bq$: vel $A = \frac{Cq - 2CB + Bq}{B}$.

Item

Item $\sqrt{u}: BA+CA: -D = B$. Vel $\sqrt{u}: BA+CA: = D+B$. Ideoque & ipſorum quadrata $BA+CA = Bq+2BD+Dq$: vel $A = \frac{Bq+2BD+Dq.}{B+C}$ Denique

$\sqrt{q}\frac{A}{3} = \sqrt{c}2A$: vel per 11 c15, $\sqrt{qc}\frac{Ac}{27} = \sqrt{qc}4Aq$. quare $Ac = 108Aq$. Et $A = 108$.

9. Æquationum, in quibus ſunt tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes, conſtitutio liquebit ex ſect: 2, 3, 4, capitis 11: Nam quia

$Z - A = E$: ducatur utraque pars in A.
$Z - E = A$: ducatur utraque pars in E.
$A - X = E$: ducatur utraque pars in A.
$E + X = A$: ducatur utraque pars in E.

Et ſimiliter fiat in Z & X, &c.

Atque hac multiplicatione hujuſmodi orientur æquationes.

$ZA-Aq = Æ$	$Aq-XA = Æ$
$ZAq-Aqq = Æq$	$Aqq-XAq = Æq$
$ZAc-Acc = Æc$	$Acc-XAc = Æc$
&c	&c
$ZE-Eq = Æ$	$Eq+XE = Æ$
$ZEq-Eqq = Æq$	$Eqq+XEq = Æq$
$ZEc-Ecc = Æc$	$Ecc+XEc = Æc$
&c	&c

Quotieſcunque igitur proponitur Æquatio conſtans ex tribus ſpeciebus æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentibus: Cogitabis magnitudinem abſolutam

tam datam, eſſe rectangulum ſub duabus magnitudinibus quæſitis, ſive latera ſint, ſive quadrata, ſive Cubi, &c: qualis ſcil: eſt poteſtas mediæ ſpeciei. In media autem ſpecie, ſi altiſſima ſpecies ſit negata, coëfficientem eſſe ſummam magnitudinum quæſitarum; Et de utrâque exponi. At ſi altiſſima ſpecies ſit affirmata, coëfficientem eſſe magnitudinum quæſitarum differentiam; ipſam autem ſpeciem exponi de majore, negatam; vel de minore, affirmatam.

Tum datis binarum magnitudinum ſumma & rectangulo, datur earundem differentia: vel data differentia & rectangulo, datur ſumma. Nam per 2 Cap: XI.

$$\left.\begin{array}{l} Q: \frac{1}{2}Z: -Æ = Q: \frac{1}{2}X \\ Q: \frac{1}{2}X: +Æ = Q: \frac{1}{2}Z \end{array}\right\} \text{quare} \left\{\begin{array}{l} \sqrt{u}: \frac{1}{4}Zq - Æ: = \frac{1}{2}X. \\ \sqrt{u}: \frac{1}{4}Xq + Æ: = \frac{1}{2}Z. \end{array}\right.$$

Denique datis binarum magnitudinum $\frac{1}{2}Z$ & $\frac{1}{2}X$, dantur ipſæ magnitudines; hiſce duabus Regulis.

I Reg. $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{u}: \frac{1}{4}Zq - Æ: (\frac{1}{2}X) = \begin{matrix} A. \\ E. \end{matrix}$

II Reg. $\sqrt{u}: \frac{1}{4}Xq + Æ: (\frac{1}{2}Z) \pm \frac{1}{2}X = \begin{matrix} A. \\ E. \end{matrix}$

Atque hæ duæ ſunt regulæ pro ſolutione Æquationis cujuſque: in qua ſunt tres ſpecies, æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes.

10. GENESIS ſex Binomiorum ex lateribus ſuis ſurdis. Regula eſt, $Z + 2Æ = Zq$.
In Apotomis verò, $Z - 2Æ = Xq$.

Exempl: I. Quadretur Binomium $4 + \sqrt{11}$. Hîc Z eſt $16+11$, hoc eſt 27. Et Æ eſt $\sqrt{16} \times \sqrt{11}$, hoc eſt $\sqrt{176}$: cujus duplum eſt $\sqrt{704}$. Quadratum igitur erit $27 + \sqrt{704}$. Quod dicitur Binomium I.

Exempl:

Exempl: II. Quadretur Bimediale prius, $\sqrt{qq}\,12 + \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$. Hîc Z est $\sqrt{12} + \sqrt{\frac{27}{4}}$, vel $\sqrt{\frac{48}{4}} + \sqrt{\frac{27}{4}}$; hoc est $\sqrt{\frac{147}{4}}$, per 7, Cap: XV. Et Æ est $\sqrt{qq}\,12 \times \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$. vel $\sqrt{qq}\,3 \times \sqrt{qq}\,27$; hoc est, $\sqrt{qq}\,81$, scil: 3: cujus duplum est 6. Quadratum igitur erit $\sqrt{\frac{147}{4}} + 6$: Quod dicitur Binomium II.

Exempl: III. Quadretur Bimediale posterius $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} + \sqrt{qq}\,15$. Hîc Z est $\sqrt{\frac{80}{3}} + \sqrt{15}$, vel $\sqrt{\frac{80}{3}} + \sqrt{\frac{45}{3}}$; hoc est $\sqrt{\frac{245}{3}}$, per 7, Cap. XV. Et Æ est $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} \times \sqrt{qq}\,15$, vel $\sqrt{qq}\,80 + \sqrt{qq}\,5$; hoc est $\sqrt{qq}\,400$, scil: $\sqrt{20}$: cujus duplum est $\sqrt{80}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{\frac{245}{3}} + \sqrt{80}$. Quod dicitur Binomium III.

In tribus reliquis, quæ constant ex radicibus Binomii & Residui connexis, ut $\sqrt{b}$: A+E: pl $\sqrt{r}$: A-E: perspicuum est Z esse 2A: & Æ esse $\sqrt{}$: Aq-Eq: quare

Exempl: IV. Quadretur Major, $\sqrt{b}: \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}$: pl $\sqrt{r}: \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}$. Hîc Z est $\frac{7}{2} + \frac{7}{2}$, hoc est, 7. & Æ est $\sqrt{u}: \frac{49}{4} - \frac{29}{4}$: hoc est, $\sqrt{\frac{20}{4}}$, scil: $\sqrt{5}$: cujus duplum est $\sqrt{20}$. Quadratum igitur erit $7 + \sqrt{20}$. Quod dicitur Binomium IV.

Exempl: V. Quadretur Potens rationale cum mediali, $\sqrt{b}$: $\sqrt{5} + 1$: pl $\sqrt{r}$: $\sqrt{5} - 1$. Hîc Z est $\sqrt{5} + \sqrt{5}$; hoc est, $\sqrt{20}$. Et Æ est $\sqrt{}$: 5-1: hoc est, $\sqrt{4}$, scil: 2: cujus duplum est 4. Quadratum igitur erit $\sqrt{20} + 4$. Quod dicitur Binomium V.

Exempl: VI. Quadretur Potens duo medialia, $\sqrt{b}$: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$: pl $\sqrt{r}$: $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. Hîc Z est $\sqrt{5} + \sqrt{5}$, hoc est, $\sqrt{20}$. Et Æ est $\sqrt{}$: 5-3: hoc est, $\sqrt{2}$: cujus duplum est $\sqrt{8}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{20} + \sqrt{8}$. Quod dicitur Binomium VI.

11. ANALYSIS. In Binomio igitur quadra-

tico,

tico, majus nomen est Z: & minus nomen 2Æ. At in 2 Cap. XI, ordinatum est, $\frac{1}{4}$Zq-Æ $= \frac{1}{4}$Xq: scil: $\frac{1}{4}$Q: A+E:-Æ $= \frac{1}{4}$Q: A-E. Quare si pro A & E sumantur ipsarum quadrata Aq & Eq, erit $\frac{1}{4}$Q: Aq+Eq:-AqEq $= \frac{1}{4}$Q: Aq-Eq: hoc est, $\frac{1}{4}$Zq-Æq $= \frac{1}{4}$Xq, ex quo Theoremate pro Analysi Binomii deducitur hæc Regula.

$$\tfrac{1}{2}Z \pm \sqrt{q}\!:\tfrac{1}{4}Zq - \text{Æ}q\!:(\tfrac{1}{2}X) = \begin{matrix} Aq. \\ Eq. \end{matrix}$$

Exempl: I. Quæratur latus Binomii I, $27 + \sqrt{704}$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\frac{27}{2}$: & Æ est $\sqrt{\frac{704}{4}}$: & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est $\frac{729}{4} - \frac{704}{4}$; hoc est, $\frac{25}{4}$: cujus latus $\frac{5}{2}$ est $\frac{1}{2}$X. At per Reg: $\frac{27}{2} \pm \frac{5}{2} = \left.\begin{matrix} 16. & 4 \\ 11. & \sqrt{11} \end{matrix}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $4 + \sqrt{11}$. Et dicitur Binomium I.

Exempl: II. Quæratur latus Binomii II, $\sqrt{\frac{147}{4}} + 6$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\sqrt{\frac{147}{16}}$: Et Æ est 3. & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est $\frac{147}{16} - (9)\,\frac{144}{16}$; hoc est, $\frac{3}{16}$: cujus latus $\sqrt{\frac{3}{16}}$ est $\frac{1}{2}$X. At per Reg: $\sqrt{\frac{147}{16}} \pm \sqrt{\frac{3}{16}} = \left.\begin{matrix} \sqrt{12}. & \sqrt{qq}\,12. \\ \sqrt{\frac{27}{4}}. & \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}. \end{matrix}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{qq}\,12 + \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$. Et dicitur Bimediale prius.

Exempl: III. Quæratur latus Binomii III, $\sqrt{\frac{245}{3}} + \sqrt{80}$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\sqrt{\frac{245}{12}}$: & Æ est $\sqrt{20}$. & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est $\frac{245}{12} - (20)\,\frac{240}{12}$; hoc est, $\frac{5}{12}$: cujus latus $\sqrt{\frac{5}{12}}$ est $\frac{1}{2}$X. At per Regul: $\sqrt{\frac{245}{12}} \pm \sqrt{\frac{5}{12}} = \left.\begin{matrix} \sqrt{\frac{80}{3}}. & \sqrt{qq}\,\frac{80}{3} \\ \sqrt{15}. & \sqrt{qq}\,15 \end{matrix}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} + \sqrt{qq}\,15$. Et dicitur Bimediale posterius.

Exempl: IV. Quæratur latus Binomii IV, $7 + \sqrt{20}$; nempe Z,+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\frac{7}{2}$: & Æ est $\sqrt{5}$: & $\frac{1}{4}$Zq-Æq

est

est $\frac{49}{4}-(5)\frac{20}{4}$; hoc est; $\frac{29}{4}$: cujus latus $\sqrt{\frac{29}{4}}$ est $\frac{1}{2}$X. At per

$$\text{Reg.}\ \tfrac{7}{2} \pm \sqrt{\tfrac{29}{4}} = \left.\begin{array}{l} \tfrac{7}{2}+\sqrt{\tfrac{29}{4}}\ \sqrt{b}:\tfrac{7}{2}+\sqrt{\tfrac{29}{4}} \\ \tfrac{7}{2}-\sqrt{\tfrac{29}{4}}\ \sqrt{r}:\tfrac{7}{2}-\sqrt{\tfrac{29}{4}} \end{array}\right\}$$

Latus igitur quæsitum est $\sqrt{b}:\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}}$ pl $\sqrt{r}:\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}}$: & dicitur Major.

Exempl: V. Quæratur latus Binomii V, $\sqrt{20}+4$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}\sqrt{20}$ est $\sqrt{5}$: & Æ est 2: & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est 5-4; hoc est 1, cujus latus 1 est $\frac{1}{2}$X.

$$\text{At per Reg:}\ \sqrt{5}\pm 1 = \left.\begin{array}{l} \sqrt{5}+1.\ \sqrt{b}:\sqrt{5}+1 \\ \sqrt{5}-1.\ \sqrt{r}:\sqrt{5}-1 \end{array}\right\}$$

Latus igitur quæsitum est $\sqrt{b}:\sqrt{5}+1$: pl $\sqrt{r}:\sqrt{5}-1$, Et dicitur Potens rationale cum mediali.

Exempl: VI. Quæratur latus Binomii VI, $\sqrt{20}+\sqrt{8}$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\sqrt{5}$: & Æ est $\sqrt{2}$: Et $\frac{1}{4}$Zq-Æq est 5-2; hoc est 3: cujus latus $\sqrt{3}$ est $\frac{1}{2}$X. At per

$$\text{Regul:}\ \sqrt{5}\pm\sqrt{3} = \left.\begin{array}{l} \sqrt{5}+3.\ \sqrt{b}:\sqrt{5}+\sqrt{3}. \\ \sqrt{5}-3.\ \sqrt{r}:\sqrt{5}-\sqrt{3}. \end{array}\right\}$$

Latus igitur quæsitum est $\sqrt{b}:\sqrt{5}+\sqrt{3}$: pl $\sqrt{r}:\sqrt{5}-\sqrt{3}$. Et dicitur Potens duo medialia.

12. Atque hîc obiter trianguli rectanguli plani Genesis se offert. Quia Zq=Xq+4AE, nempe Hq=Bq+Cq, per 47 e 1: Propositis binis quibuscunque lineis sive numeris A & E, trianguli rectanguli latera erunt, A+E, A-E, $\sqrt{4AE}$: vel etiam (mutatis A & E in Aq & Eq) Aq+Eq. Aq-Eq. 2AE, (scil: $\sqrt{4AqEq}$.) Ut si proponantur duo numeri 2 & 1: latera erunt 3, 1, $\sqrt{8}$: nempe 2+1, 2-1, $\sqrt{4\times2\times1}$. vel etiam 5, 3, 4: nempe 4+1, 4-1, 2×1 bis.

13. Datis binis triangulis, rectangulis, H, B, C: & h, b, c: tertium ex ipsis fabricare: idque dupliciter,

$$\text{I. Quia}\ \left.\begin{array}{l} \text{Bq}=\text{Hq}-\text{Cq} \\ \text{Et bq}=\text{hq}-\text{cq} \end{array}\right\}\ \text{Multiplicentur invicem;}$$

Eritque

Eritque Bqbq=Hqhq+Cqcq mi Hqcq+Cqhq.
At Hqhq+Cqcq+2HChc=Q:Hh+Cc:
Et Hqcq+Cqhq+2HChc=Q:Hc+Ch:
Subducatur unum quadratum ex altero: & erit,
Bqbq=Q:Hh+Cc: mi Q:Hc+Ch:
Et sic inventum est ex his triangulum tertium,
Bb. Hh+Cc. Hc+Ch. Hæc Regula sit I.

Enunciatur autem verbis sic. Pro trianguli novi base, sumatur rectangulum sub basibus: Pro hypotenusa, rectangulum sub hypotenusis auctum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub hypotenusa primi & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & hypotenusa secundi.

$$\text{II}^{\text{o}}\ \text{quia}\ \left.\begin{array}{l} \text{Hq}=\text{Bq}+\text{Cq} \\ \text{Et hq}=\text{bq}+\text{cq} \end{array}\right\}\ \text{Multiplicentur invicem}$$

Eritque Hqhq=Bqbq+Cqcq pl. Bqcq+Cqbq.
At Bqbq+Cqcq 2BCbc=Q:Bb-Cc:
Et Bqcq+Cqbq+2BCbc=Q:Bc+Cb:
Addantur hæc duo quadrata: & erit
Hqhq=Q:Bb-Cc: pl Q:Bc+Cb.
Et sic inventum est ex his triangulum tertium,
Hh. Bb-Cc. Bc+Cb. Hæc Regula sit II.

Enunciatur autem verbis sic. Pro trianguli novi hypotenusa, sumatur rectangulum sub hypotenusis. Pro base, rectangulum sub basibus minutum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub base primi, & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & base secundi.

14. Si trianguli rectanguli latera continuè multiplicentur juxta binas regulas modò inventas: Prima multiplicatio triangulum producet bicompositum: secunda

ſecunda tricompoſitum : tertia quadricompoſitum: & ſic ulterius.

Exempl. Reg. I. Bb. Hh+Cc. Hc+Ch.

B. H. C. trianguli ſimpli.

B. H. C

Bq. Hq+Cq. 2HC. triang. bicompoſit.

B . H . C.

Bc. Hc+HCq. 2HqC

2HCq. HqC+Cc.

Bc. Hc+3HCq. 3HqC+Cc. tri compoſit.

B . H . C

Bqq. Hqq+3HqCq. 3HcC+HCc

Cqq+3HqCq. HcC+3HCc.

Bqq. Hqq+6HqCq+Cqq. 4HcC+4HCc.

B . H . C (quadricomp.

&c.

Exempl. Reg. II. Hh.Bb-Cc. Bc+Cb.

H. B. C. trianguli ſimpli.

H. B. C.

Hq. Bq-Cq. 2BC: triang. bicompoſit.

H. B . C

Hc. Bc-BCq. 2BqC

—2BCq. BqC-Cc

Hc. Bc-3BCq. 3BqC-Cc: tri-compoſit.

H . B . C

Hqq. Bqq-3BqCq. 3BcC-BCc

Cqq-3BqCq. BcC-3BCc

Hqq. Bqq-6BqCq+Cqq. 4BcC —4BCc.

H . B . C (quadri comp.

&c.

CAP.

CAP. XVII.

Alia tabulæ poſterioris in Cap. 12. inſpectio, quoad Æquationes.

1. A Binomia radice A+E, poteſtatum ſpecies omnes ſunt affirmatæ. A Reſiduo verò poteſtatum ſpecies omnes ſunt alternatim negatæ, ut Q: A-E: eſt Aq--2AE+Eq. Et C: A-E: eſt Ac -3AqE+3AEq-Ec. Et QQ: A-E: eſt Aqq-4AcE+6AqEq-4AEc+Eqq. &c. Adeò ut ſi poteſtatis cujuſvis ſpecies alternatim ſumptæ, in duas ſummas aggregentur: harum ſummarum connexio cum ſigno radicis, erit radicis ipſius poteſtas. Atque hæc eſt Binomiorum, ac Reſiduorum, Quadraticorum, Cubicorum, aliorumque conſtitutio.

2. Quare nominum Binomii, vel Reſidui cujuſque differentia, eſt homogenea poteſtas differentiæ nominum radicis. ſcil: Ac+3AEq mi 3AqE+Ec, vel Ac+3AEq-3AqE-Ec, eſt C : A-E.

3. Et Quadratorum è nominibus Binomii vel Reſidui cujuſq; differentia, eſt homogenea poteſtas differentiæ quadratorum è nominibus radicis. ſcil: Q: Ac+3AEq: mi Q: 3AqE+Ec eſt C: Aq-Eq.

Nam per exampl: Reg: I, in 14, Cap: XVI, ſi cogitetur A hypothenuſa trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq-Eq quadratum baſis; hoc Theorema aliter ſymbolis explicabitur ſic: Q: Hc+3HCq: mi Q: 3HqC+Cc: = C. Bq: = Q: Bc: ergo

4. At ſi ſpecies in nominibus aggregatæ, ipſæ eti-

am

am alternatim adfirmentur,& negentur : Quadratorum è nominibus ſumma, eſt homogenea poteſtas ſummæ quadratorum è nominibus radicis. Scil:Q: Ac-3AEq.pl Q: 3AqE-Ec: eſt C: Aq†Eq.

Nam per exempl: Reg. II,in 14,Cap.XVI,ſi cogitetur A baſis trianguli rectanguli; & E cathetus ; & Aq†Eq quadratum hypotenuſæ; hoc Theorema aliter ſymbolis explicabitur ſic: Q: Bc-3BCq: pl Q: 3BqC-Cc:=C:Hq:=Q: Hc. Ergo

5. Omnes cujuſque ordinis intermediæ ſpecies, ſunt etiam poteſtates mediorum inter A & E proportionalium. ſcil. inter Ac & Ec,ſunt duæ mediæ proportionales,AqE & AEq: qui etiam cubi ſunt ex M & N. Quare A,√cAqE, √cAEq, E, ſunt continuè proportionales : nempe A, M, N, E. Nam AqE= AMN=Mc: & AEq=MNE=Nc. Atque hinc patet inventio quotlibet mediorum proportionalium inter A & E:ut ſi velis quinque medios proportionales,poteſtates erunt $\boxed{6}$ ſive cc,quarum Index unitate excedit numerum quæſitorum mediorum: Eruntque A,√cc AqcE,√ccAqqEq, √ccAcEc, √cc Aq Eqq, √ccAEqc, E, ∺

6· Omnis media ſpecies in unoquoque genere,fit ex duabus nominum radicis poteſtatibus, quarum Indices ſimul, æquales ſunt Indici ejuſdem generis: mediæ autē ipſius ſpeciei ab extremis ſuis diſtantiæ, æquales erunt Indicibus alternarum facientium: & facientibus ſuis in communi angulo reſpondent. Scil: AqEc generis quadrato-cubici, fit ex Aq in Ec, quibus in communi angulo reſpondent. Eſtque ab Aqc tertia : & ab Eqc ſecunda.

Conſect.

Conſect, Atque hinc facile erit radicis Binomiæ datæ poteſtatem quamlibet (inventis omnibus mediis inter poteſtates nominum extremas) conſtruere. Ut in exemplo, ſi radicis Binomiæ A†√Æ quæratur Quadrato-Cubus : erit Aqc† 10 ÆAc† 5 ÆqA plus? 5 √ÆAqcc† 10√ÆcAqq† √Æqc: Quod Binomium eſt Quadrato-Cubic.

Aqc
Aqq 5√ÆAqcc
Ac 10ÆAc
Aq 10√ÆcAqq
A 5ÆqA
√Æ √Æqc
Æ
√Æc
Æq

7. Si ſpecies aliqua multiplicetur in Æ, producta magnitudo erit media ſpecies collateralis, in ordine alternè ſequente, atque eadem numero à ſuis extremis. Ut Ac×Æ, eſt AqqE,quæ prima eſt ab Aqc, & quarta ab Eqc. Sic AcE×Æ, eſt Aqq Eq,quæ ab Acc ſecunda eſt, & ab Ecc quarta. Et ſimiliter de reliquis.

8. Si ſpecies aliqua multiplicetur per A—E vel X, producta magnitudo erit differentia inter duas ſpecies ordinis ſequentis utrinque proximas. Ut AcX= Aqq—AcE. AqEX=AcE—AqEq. AEqX=AqEq —AEc. EcX=AEc—Eqq. Quare

Si omnes cujuſvis ordinis ſpecies multiplicentur per X,producetur differentia duarum poteſtatum extremarum ordinis proximi ſuperioris. Ut ex Ac† AqE†AEq†Ec, ductus in X, fiet Aqq-Eqq.

9. In ordinibus Indicum imparium (l,c,qc,&c.) ſumma duarum extremarum poteſtatum; at in ordinibus Indicum parium (q, qq, cc, &c) differentia earundem; fit ex A†E ducta in ſingulas ſpecies ordinis

nis minoris præcedentis, alternatim adfirmatas & negatas. Ut $Ac+Ec$, fit ex $Aq-AE+Eq$, ductis in $A+E$. Item $Aqq-Eqq$, fit ex $Ac-AqE+AEq-Ec$, ductis in $A+E$.

10. Si eadem magnitudo multiplicetur in duas magnitudines contrarias: magnitudines ex ipsis factæ erunt etiam contrariæ. Ut $Aq-2AE+Eq$ ductæ in $A-E$, fient $Ac-3AqE+3AEq-Ec$. At vero eædem ductæ in $-A+E$, fient $-Ac+3AqE-3AEq+Ec$.

11. Unciæ sive numeri speciebus præfixi, sunt figuræ numerariæ. Nam omnes sub A & E, sunt radices. Omnes sub Aq & Eq, sunt triangulares. Omnes sub Ac & Ec, sunt pyramidales. Omnes sub Aqq & Eqq, sunt triangulo-triangulares. Omnes sub Aqc & Eqc, sunt triangulo-pyramidales. Omnes sub Acc & Ecc, sunt pyramidi-pyramidales, &c.

12. Si radix tribus constet nominibus, A, E, I, Quadratum $\left\{ \begin{array}{l} Aq,\ 2AE, \\ Eq,\ 2EI, \\ Iq,\ 2AI, \end{array} \right\}$ Cubus $\left\{ \begin{array}{l} Ac,\ Ec,\ Ic, \\ 3AqE,\ 3AEq: \\ 3AqI,\ 3AIq, \\ 3EqI,\ 3EIq, \\ 6AEI. \end{array} \right.$

Et nota quòd si in aliqua specie, numerus laterum negatorum sit impar; species illa erit negata. Ut $Q: A+E-I: = Aq+2AE+Eq-2EI+Iq-2AI$. Et $C: A+E-I: = Ac+3AqE+3AEq+Ec-3EqI+3EIq-Ic-3AqI+3AIq-6AEI$.

CAP.

CAP. XVIII.

Penus Analytica.

1. Ex primis ac facillimis æquationibus, quæ nihil aliud sunt, quàm vel terminorum expositiones, vel simplices affectiones (quales sunt illæ capitis XI, $\frac{1}{2}Z-E=\frac{1}{2}X$: & $\frac{1}{2}X+E=\frac{1}{2}Z$: & reliquæ ejusmodi) innumeræ aliæ deducuntur, per Additionem, Subductionem, Multiplicationem, Divisionem, Transpositionem, atque Interpretationem: sumendo id quod alteri inventum est æquale, loco ejus cui æquatur. quæ quidem Analytica supellex est, non minùs pretiosa, quàm copiosa. Quarum ergo præcipuas aliquot, & maximè necessarias adscribam: plures Analytices studiosus pro suo exercitio excogitabit. Et ubicunque sive in Arithmetica, sive in Geometria, sive in alia aliqua arte, inciderit in magnitudinem aliquam, cui altera æqualis esse intelligitur; æqualitatem illam quibuscunque poterit modis atque comparationibus, torquebit, discutiet, variabit, ut novum inde artis instrumentum inveniat: quod postea in penu servabit: & ubicunque poterit in usum proferet, ad artis subsidium atque augmentum.

2.

2. $Q{:}1{:}=9Q{:}\frac{1}{3}$. &c. $C{:}1{:}=27\,C\frac{1}{3}{:}$ &c.
$Q{:}1{:}=\frac{1}{9}Q{:}3$. &c. $C{:}1{:}=\frac{1}{27}C{:}3{:}$&c.
$Q{:}1{:}=\frac{9}{4}Q{:}\frac{2}{3}$. &c. $C{:}1{:}=\frac{27}{8}C{:}\frac{2}{3}{:}$&c.
$\frac{2}{5}Q{:}1{:}=\frac{2}{5}\times\frac{9}{4}Q{:}\frac{2}{3}{:}$ &c. $\frac{2}{5}C{:}1{:}=\frac{2}{5}\times\frac{27}{8}C{:}\frac{2}{3}{:}$&c.
$\frac{2}{3}Q{:}4{:}=\frac{2\times16}{3}Q{:}1$. &c. $\frac{2}{3}C{:}4{:}=\frac{2\times64}{3}C{:}1{:}$&c

3. Si linea biſecetur, & ſecùs; rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus, æquatur differentiæ quadratorum biſegmenti atque interſegmenti: hoc eſt ſemiſummæ atque ſemidifferentiæ ſegmentorum. 5 e 2. $AE=Q{:}\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E{:}\,mi\,Q{:}\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E{:}$ Et hoc eſt, $AE=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq$.

4. Si linea biſecta augeatur; rectangulum ſub tota aucta & augmento, æquatur differentiæ quadratorum biſegmenti aucti, atque biſegmenti. 6 e 2. $A+E$ in $E=Q{:}\frac{1}{2}A+E{:}\,mi\,Q{:}\frac{1}{2}A$. Et $A+E$ in $A=Q{:}\frac{1}{2}E+A{:}\,mi\,Q{:}\frac{1}{2}E$.

Datis igitur ſumma trium $\div\!\!\div$ $(Aq+AE+Eq)$ cum alterutro extremorum, dantur duo reliqui. Sic
$\surd u{:}Aq+Æ+Eq-\frac{3}{4}Aq{:}\,mi\,\frac{1}{2}A=E$.
$\surd u{:}Aq+Æ+Eq-\frac{3}{4}Eq{:}\,mi\,\frac{1}{2}E=A$.
Nam $Q{:}\frac{1}{2}A+E{:}=\frac{1}{4}Aq+AE+Eq$.
Et $Q{:}\frac{1}{2}E+A{:}=Aq+AE+\frac{1}{4}Eq$.

5. Si linea ſecetur utcunque; ſumma quadratorum totius, & unius ſegmenti, æquatur aggregato quadrati alterius ſegmenti, & duplicis rectanguli ſub tota & priore ſegmento, 7 e 2. $Zq+Aq=2ZA+Eq$. Et $Zq+Eq=2ZE+Aq$. Quare $2ZA+Eq-Aq=Zq=2ZE+Aq-Eq$.

6. Si linea utcunque ſecta, augeatur alterutro ſegmento; Quadruplex rectangulum ſub ſecta, & ſegmento

mento augente, æquatur differentiæ quadratorum totius auctæ, & alterius ſegmenti. 8 e 2.
$Q{:}Z+E{:}-Aq=4ZE$. Et $Q{:}Z+A{:}-Eq=4ZA$.

7. Si linea biſecetur, & ſecus; ſumma quadratorum ſegmentorum inæqualium, æquatur duplicatæ ſummæ quadratorum biſegmenti, & interſegmenti. 9 e 2. $Aq+Eq=2Q{:}\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E{:}+2Q{:}\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$.

8. Si linea biſecta augeatur; ſumma quadratorum totius auctæ & augmenti, æquatur duplicatæ ſummæ quadratorum biſegmenti aucti, & biſegmenti. 10 e 2.
$Q{:}A+E{:}+Eq=2Q{:}\frac{1}{2}A+E{:}+2Q{:}\frac{1}{2}A$.
$Q{:}A+E{:}+Aq=2Q{:}\frac{1}{2}E+A{:}+2Q{:}\frac{1}{2}E$.

9. $Aq=ZA-AE=XA+AE=\frac{1}{2}ZA+\frac{1}{2}XA=Q{:}Z-E{:}=Q{:}E+X{:}=Z-Eq=Eq+X$.
Et $Eq=ZE-AE=AE-XE=\frac{1}{2}ZE-\frac{1}{2}XE=Q{:}Z-A{:}=Q{:}A-X{:}=Z-Aq=Aq-X$.

10. $Æ=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq=ZA-Aq=ZE-Eq=Aq-XA=Eq+XE=\frac{1}{2}Zq-\frac{1}{2}Z=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}Xq=\frac{1}{2}ZA-\frac{1}{2}XA=\frac{1}{2}ZE+\frac{1}{2}XE$.

11. $Z=Aq+Eq=Zq-2AE=2AE+Xq=ZE+XA=ZA-XE=2Q{:}\frac{1}{2}Z{:}+2Q{:}\frac{1}{2}Z-E{:}=Q{:}A-2N{:}+Q{:}2M-E{:}=\frac{1}{2}Zq+\frac{1}{2}Xq=2Q{:}\frac{1}{2}Z{:}+2Q{:}\frac{1}{2}X{:}$ Conſectarium ex his duabus ultimis æquationibus: Si magnitudo conſtet ex quadratis binarum magnitudinum: ejus etiam duplum conſtabit ex duobus quadratis, ſummæ ſcil: & Differentiæ. Et dimidium ejus conſtabit ex duobus quadratis, ſemiſummæ ſcil: & Semidifferentiæ.

Et X.=Aq-Eq=ZX=2ZA-Zq=Zq-2ZE
=2XA-Xq=2XE+Xq=ZA--ZE=XA+XE=Zq
-2ZE=ZA+XE-2Æ=XA+2Æ--ZE=Q:A+2N: mi
Q:2M+E.

12. Q:$\frac{1}{2}$A+$\frac{1}{2}$E:=Q:$\frac{1}{2}$A-$\frac{1}{2}$E:+Æ. } Nam $\frac{1}{4}$Zq
Et Q:$\frac{1}{2}$A-$\frac{1}{2}$E:=Q:$\frac{1}{2}$A+$\frac{1}{2}$E:-Æ. } =$\frac{1}{4}$Xq+Æ.

13. 2A+2E in A=2Aq+2AE=Zq+X.
Et 2A-2E in A=2Aq-2AE=X.+Xq.
Et 2A+2E in E=2AE+2Eq=Zq-X.
Et 2A-2E in E=2AE-2Eq=X.-Xq.

14. X.q=ZqXq=Z.+2Æ in Z.-2Æ=Zq-4AqEq.

15. ZÆ=AqE+AEq. Et XÆ=AqE-AEq.
Et Z.Æ=AcE+AEc. Et X.Æ=AcE-AEc.
Quare Z+3ZÆ=Zc. Et Z-3XÆ=Xc.
Et Z.Z=Z+ZÆ=Ac+AqE+AEq+Ec.
Et Z.X=X-XÆ=Ac-AqE+AEq-Ec.
Et X.Z=X+XÆ=Ac+AqE-AEq-Ec.
Et X.X=Z-ZÆ=Ac-AqE-AEq+Ec.
Hinc Z.Z+X.X=2Z. Et X.Z+Z.X=2X.
Et Z.Z-X.X=2ZÆ. Et X.Z-Z.X=2XÆ.

16. Si in circulo ſit 7.22::δ.π::113.355: erit
δ.π::2R.P:periph. Et π.δ::$\frac{1}{2}$P. R: ſemidiam.
δ.π::Rq. Circul. Et π.δ::$\frac{1}{4}$Pq. Circul.
δ.π::2Rc. Cylind. Et πq.δq::$\frac{1}{4}$Pc. Cylind.
δ.π::$\frac{4}{3}$Rc. Sphær. Et πq.δq::$\frac{1}{6}$Pc. Sphær.
δ.π::$\frac{2}{3}$Rc. Con. Et πq.δq::$\frac{1}{12}$Pc. Con.

17. Ad hæc oportet futuurm Analyſtam Geometrica iſta, tum theoremata, tum problemata non ignorare.

Theor: 1. Triangula ſunt æqualia: Si in utroque, vel tria latera; vel duo latera cum angulo comprehenſo

vel duo latera cum angulo eidem lateri oppoſito, modo angulus reliquo lateri oppoſitus ſit homogeneus; vel duo anguli cum latere interjacente; vel duo anguli cum latere eidem ſubtenſo; æquentur. 4,8,26, e 1.

Theor: 2. Triangula plana ſunt ſimilia: Si vel ſint æquiangula; vel lateribus omnibus proportionalia; vel habeant unum angulum æqualem, & alterum angulum crurum proportionalium, & angulum tertium homogeneum. 4,5,6,7, e 6.

Theor: 3. In omni triangulo, majus latus majorem angulum ſubtendit; & minus minorem; & æquale æqualem. 18, 19 e 1.

Theor: 4. Duæ rectæ lineæ ſunt parallelæ: Si recta ipſas ſecans æquales fecerit, vel angulos alternos; vel externum & internum oppoſitum; vel duos internos ex eâdem parte duobus rectis. Et contra. 27, 28,29,30, e 1. Nam lineæ rectæ parallelæ ſunt inſtar unius lineæ latæ.

Theor: 5. Trianguli tres anguli ſimul, æquantur duobus rectis: Et externus angulus duobus internis oppoſitis. 32 e 1.

Theor: 6. Si rectam in circulo inſcriptam, recta è centro biſecet: ad angulos rectos ipſam ſecat. 3 e 3.

Theor: 7. Perpendicularis ſuper finem diametri, circulum tangit. 16,18,19, e 3.

Theor. 8. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam. 20 e 3.

Theor: 9. In eodem, vel æqualibus circulis, anguli ſuper æqualibus peripheriis, ſunt æquales. 21 e 3.

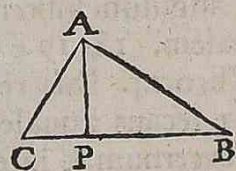
Theor: 10. Angulus in ſemicirculo eſt rectus 31 e 3.

Theor. 11. Si è puncto in peripheria circuli ducantur binæ rectæ lineæ, una circulum tangens, altera ſecans: anguli inter ipſas comprehenſi menſura, æqualis erit ſemiperipheriæ abſciſſæ. pro 32 e 3.

Theor. 12. Triangula, ſive parallelogramma, æquialta, vel inter eaſdem parallelas, ſunt ut baſes. 35, 36, 37, 38, e 1. & 1 e 6.

Theor. 13. Recta biſecans angulum trianguli, ſecat baſem ratione crurum 3 e 6.

Theor: 14. Triangulum rectangulum quodvis notetur literis A B C: ſic ut A ſit angulus rectus: & BA Baſis: & CA Cathetus: BC Hypotenuſa.



Theor. 15. In triangulo rectangulo plano, perpendicularis ex angulo recto in Hypotenuſā, dividit triangulū in duo triangula, tum toti, tū ſibi ipſis ſimilia. 8 e 6.

BC. BA. CA :: BA. BP. AP :: CA. AP. CP.
Hypotenuſæ   Baſes   Catheti.

Unde ſequitur.

1° Perpendicularem eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta Hypotenuſæ. Ideoque quadratum perpendicularis æquale eſſe rectangulo ſub ſegmētis. Scil: ∺ BP, AP, CP. Et APq = BP × CP.

2° Baſem eſſe mediam proportionalem inter Hypotenuſam, & ſegmentum Hypotenuſæ Baſi conterminum. Scil: ∺ BC, BA, BP.

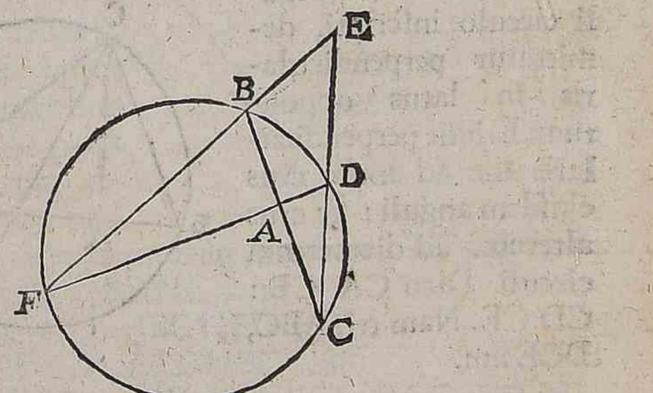
3° Cathetum eſſe mediam proportionalem inter Hypotenuſam, & ſegmentum Hypotenuſæ Catheto conterminum. Scil: ∺ BC, CA, CP.

4° Baſis & Catheti quadrata, eſſe ut ſegmenta Hypotenuſæ contermina. BP. CP :: BAq. CAq. Nam BP. CP :: BC × BP. BC × CP :: BAq. CAq.

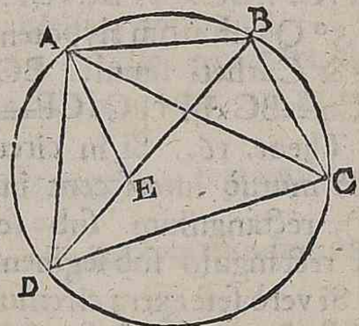
5° Quadratum Hypotenuſæ æquari quadratis Baſis & Catheti ſimul. BCq = BAq + CAq. Nam BCq = BC × BP + BC × CP = BAq + CAq.

Theor. 16. Si in circulo duæ rectæ inſcriptæ ſeſe mutuò interſecent intra circulum (in puncto A); rectangulum ſub ſegmentis unius, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis alterius. 35 e 3.

Si verò ſeſe extra circulum interſecent (in puncto E) Rectangula ſub ſegmentis utriuſque à puncto ad convexum & concavum circuli, ſunt æqualia. 36 & 37 e 3. Dico primò AB × AC = AD × AF. Nam tri: BAF, DAC ſim. Dico ſecundo EB × EF = ED × EC. Nam tri: BEC, BEF ſim.

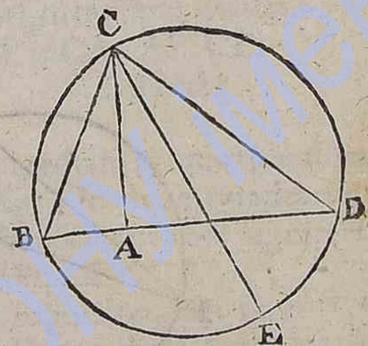


Theo: 17. Quadrilateri in circulo inſcripti anguli interiores oppoſiti ſimul æquantur duobus rectis, 22 e 3. Et ſi ducantur duo diagonii, rectangulum ſub diagoniis, æquale erit duobus rectangulis ſub lateribus oppoſitis, Dico $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ Nã ſumpto ang: $DAE = CAB$; erunt tri: ACB, ADE ſim. & ADC, AEB ſim.



$$\text{quare}\left\{\begin{array}{l} AC.\ CB :: AD.\ DE \\ AC.\ CD :: AB.\ BE \end{array}\right\}\text{ergo,}$$

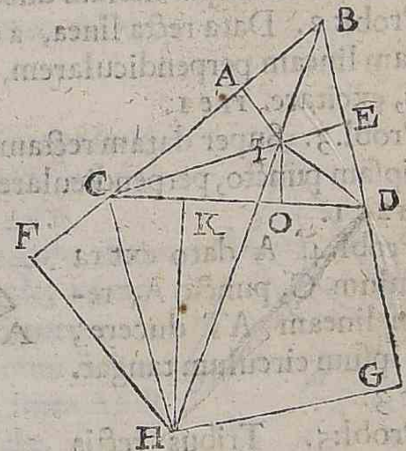
Theor: 18. Si ex angulo quovis trianguli circulo inſcripti, demittatur perpendicularis in latus oppoſitum: Erit ut perpendicularis illa, ad unum crus ejuſdem anguli: ſic crus alterum, ad diametrum circuli. Dico CA. CB:: CD.CE. Nam tri: ABC, DCE ſim.



Theor: 19. Triangula unum angulum æqualem habentia

habentia, rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur. 23 e 6.

Theor: 20. Si ſemiſumma trium laterum trianguli plani, & tres differentiæ trium laterum ab illa ſemiſumma, continuè inter ſe multiplicentur: Vel aliter, ſi trianguli quovis latere ſumpto pro baſe, & reliquis duobus pro cruribus; Rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia ſummæ crurum & baſis, ducatur in rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia baſis & differentiæ crurum: Facti latus quadratum æquale erit areæ trianguli. Eſto triangulum BCD, cujus crura ſint BC & BD, & baſis CD. Biſecentur tres anguli rectis BI, CI, DI, concurrentibus in I: unde in latera ad angulos rectos ducantur IA, IE, IO. Sunt igitur intra triangulum BCD, tria paria triangulorum æqualium. Quare ſi cruri BC adjungantur in directum, $CF = DE$; erit $BF = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CD$:



Et $BA = BF - CD = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CD$:

Et $AC = BF - BD = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}BD$:

Et $CF = BF - BC = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD$. Menſuratis $BC = BF$: erit $CK = CF$: ducantur perpendiculares FH, GH,

vid. Tartaglia

GH,KH: Et protrahatur BI in H. Quia ang. FCK+FHK= 2 Rect=FCK+ACO. Et ang:ACO+AIO= 2 Rect: Erunt quadrangula FCKH, AIOC sim. Et tri:CFH, IAC sim. Sunt etiam tri: BAI, BFH sim. His expositis, Dico quadratum areæ trianguli, nempe BFq×IAq=BF×BA×AC×CF.

$\left.\begin{array}{l}\text{Nam IA.BA::FH.BF}\\ \text{Et IA.AC::CF.FH}\end{array}\right\}$ propter tri: sim.

Quare per multipl: IAq×BF=BA×AC×CF.

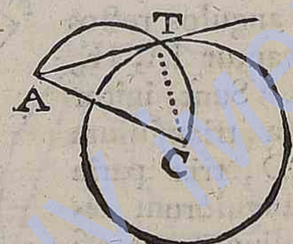
Ducatur utraque pars in BF, eritque &c.

Probl:1. A dato puncto, vel ad datam distantiam, datæ rectæ lineæ parallelam ducere. 31 e 1.

Probl: 2. Data recta linea, à dato in ea puncto, rectam lineam perpendicularem, sive ad angulos rectos, excitare. 11 e 1.

Probl.3. Super datam rectam lineam, à dato extra ipsam puncto, perpendicularem rectam demittere. 12 e 1.

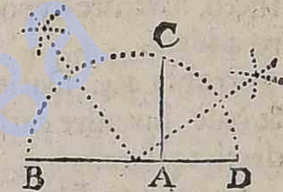
Probl.4. A dato extra circulum C, puncto A, rectam lineam AT ducere, quę ipsum circulum tangat. 17 e 3.



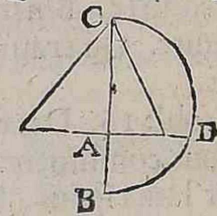
Probl:5. Tribus rectis lineis datis, quartam proportionalem adinvenire. 12 e 6.

Probl.6.

Probl: 6. Datis duabus rectis lineis AB, AD, mediam continuè proportionalem AC, adinvenire. 13 e 6.



Probl: 7. Datis duabus rectis lineis AB,AC, vel AD, AC, tertiam continuè proportionalem AD, vel AB, adinvenire. 11 e 6.

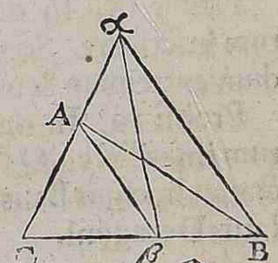


Probl: 8. Dato triangulo, cujus altitudo est AC, & semibasis AB, æquale quadratum ADq, constituere.

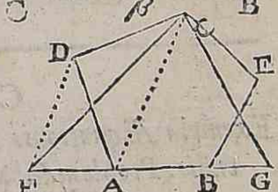
Probl: 9. Dato rectangulo aliud rectangulum æquale, ad datum latus, statuere. 14 e 6.

Probl: 10. Triangulo dato aliud triangulum æquale, ad datam altitudinem constituere.

Ex punctis altitudinum A & α, in angulos oppositos lineæ Aβ & αB, ductæ, sint parallelæ.



Probl: 11. Dato polygono æquale triangulum constituere.



Probl: 12. Datis tribus punctis, non in directum positis, ducere circumferentiam. 25 e 3.

Probl: 13.

Probl: 13. Datis trianguli rectanguli baſe & Catheto, invenire hypotenuſam; vel quadratum quadrato addere.

Probl: 14. Datis trianguli rectanguli hypotenuſa & baſe, invenire cathetum; vel quadratum ex quadrato tollere.

Probl: 15. Binarum figurarum ſimilium rationem invenire. Quæratur tertia proportionalis. $Aq.Mq::A.E.$

Probl: 16. Datæ figuræ ſimilem figuram, in data ratione conſtituere. Quæratur media proportionalis inter latus ipſius, & latus ſimile. $R.\sqrt{RS}::A.M.$ Ratio fig: ſit R. S.

Probl: 17. In dato circulo hexagonum ordinatum inſcribere. 15 e 4.

Probl: 18. In dato circulo Decagonum ordinatum inſcribere. Secetur ſemidiameter circuli ſecundum extremam & mediam rationem, per 11 e 2.

Probl: 19. In dato circulo Pentagonum ordinatum inſcribere. Quæratur Hypotenuſa trianguli rectanguli, cujus Baſis ſit latus Hexagoni, & Cathetus latus Decagoni.

CAP. XIX.

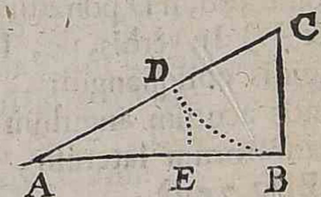
Exempla Æquationis Analyticæ, pro Theorematibus inveniendis, Problematibusq; ſolvendis. ad quem quaſi ſcopum præcepta hactenus tradita præcipuè collineantur.

Probl: I. Inventio 11 e 2. Nempe, Data recta linea B ſecetur ſic ut rectangulum ſub tota B, & minore

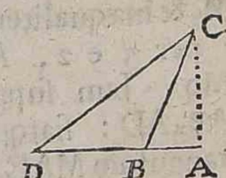
minore ſegmento, æquetur quadrato majoris ſegmenti.

Ponatur majus ſegmentum A : minus erit B-A. ducatur B-A in B : fietque $Bq-BA=Aq$: vel $Aq+BA=Bq$. Quare $\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq.-\frac{1}{2}B=A$, per 9 cap. 16. Quod Theorema verbis enunciatur ſic : Si quadrato lineæ datæ, addatur quadrati ipſius quadrans : & è latere quadrato ſummæ ; tollatur ſemis lineæ datæ : reliquum erit ſegmentum majus.

Geometricè autem conſtruetur, ſic, Fiat $AB=B$: eique ad angulos rectos ſtatuatur $BC=\frac{1}{2}B$: & ducatur Hypotenuſa AC : erit $AC=\sqrt{u}:Bq+\frac{1}{4}Bq$. Abſcindatur $CD=BC$. Eritque reſiduum $AD=\sqrt{u}:Bq+\frac{1}{4}Bq:-\frac{1}{2}B$ Denique menſuretur $AE=AD$, pro majore ſegmento.



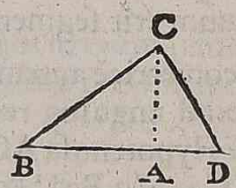
Probl: II. Inventio 12 e 2. Nempe comparatio Baſis obtuſi anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD : cujus angulus interior ad B, ſit obtuſus : hujus Baſis eſt DC: & latera BD, BC. Hîc $BCq-BAq=CAq=DCq$ ($-DAq$, per 4 e 2) $-BDq-2BD\times BA-BAq$. quare $BCq+BDq=DCq-2BD\times BA$.



Quod theorema verbis enuntiatur, ſic : In amblygoniis triangulis, quadratum lateris ſubtendentis obtuſum angulum, excedit ſummam quadratorum laterum eundem comprehendentium, duplice rectangulo ſub

ſub uno laterum circa obtuſum angulum, & ſegmento ipſius (continuati) inter obtuſum angulum & perpendiculum.

Probl: III. Inventio 13 e 2. Nempe comparatio Baſis acuti anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, ſit acutus. hujus Baſis eſt DC: & latera BC, BD.



Hîc $BCq - BAq = CAq = DCq$ ($- DAq$, per 7 e 2) $- BDq + 2BD \times BA - BAq$. Quare $BCq + BDq = DCq + 2BD \times BA$. (Eodem prorſus modo procederet Demonſtratio, ſi D ponatur inter B & A.) In verbis, ſic, In triangulis obliquangulis, quadratum lateris ſubtendentis acutum angulum, minus eſt quam ſumma quadratorum laterum, &c. ($2BD \times BA - BAq + DAq = BDq$, 7 e 2)

Probl: IV. Inventio 14 e 2: Nempe quadrati æqualis rectangulo $AB \times AD$. Eſto $AB + AD = 2BM$. Quare $AB + AD$ ſecetur æqualiter in M, & inæqualiter in A. Erit igitur per 5 e 2, $AB \times AD = BMq - AMq$. Jam ſupponatur $ACq = AB \times AD$: fiatque triangulum rectangulum MAC cujus hypotenuſa $CM = BM$ ſemiſummæ laterum; & baſis AM ſemidifferentiæ laterum: Cathetus erit AC latus quadrati quæſiti, per 48 e 1.

Inventio areæ trianguli plani.

Probl: V. Attulit ad me amicus quidam meus, vir doctus,

doctus, Theorema de areâ trianguli plani; atque ut id examinarem, & demonſtratione munirem, poſtulavit. Erat autem Theorema, prout memini (nam multi jam elapſi ſunt anni) hàc ferè formâ, licet non in iiſdem literis.

In triangulo plano cujus latera ſunt A, E, B;
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{8}BqEq - \frac{1}{16}Eqq \\ \frac{1}{8}EqAq - \frac{1}{16}Aqq \\ \frac{1}{8}AqBq - \frac{1}{16}Bqq \end{array}\right\}$$
æquantur quadrato areæ trianguli.

Poſtquam aliquamdiu mecum cogitaſſem, occurrit mihi 17, c 18, Theor: 20, quod commodiſſimum huic nodo ſolvendo duxi. Nam ſi trianguli duo crura ſint A, E; & baſis B: inde liquebit, quod $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}E$, in $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E$, æquatur quadrato areæ trianguli. Factâ igitur harum quatuor magnitudinum continuâ multiplicatione; prodibit $\frac{1}{8}AqEq + \frac{1}{8}AqBq + \frac{1}{8}EqBq - \frac{1}{16}Aqq - \frac{1}{16}Eqq - \frac{1}{16}Bqq$. Quod eſt ipſum Theorema propoſitum.

Atque hinc non ſolum poſtulato ſatisfeci; ſed etiam quatuor alia Theoremata effectu faciliora exhibui.

Nam quia $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}B$.

Et $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}B$.

Et quia $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}X$:

Et $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}X$.

Erit $\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}B$ in $\frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}B = \frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Bq$.

Et $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}X$ in $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}X = \frac{1}{4}Bq - \frac{1}{4}Xq$.

Liquet igitur primò, $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bb - \frac{1}{4}Xq = Q$: areæ trianguli. In verbis ſic, Si quadrans differentiæ quadratorum ſummæ crurum & baſis ducatur in quadrantem differentiæ quadratorum baſis & differentiæ crurum;

crurum; producta magnitudo æqualis erit quadrato Areæ trianguli.

Deinde quia $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bq - \frac{1}{4}Xq = \frac{1}{16}ZqBq + \frac{1}{16}BqXq - \frac{1}{16}Bqq - \frac{1}{16}ZqXq$: Liquet secundò, $Zq + Xq - Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$ mi $\frac{1}{16}ZqXq = Q$: Areæ trianguli.

Item quia $Zq + Xq = 2Z$, per 11, c. 18: Et $ZqXq = Xq$, per 14, c. 18: Liquet tertiò $2Z - Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$ mi $Q: \frac{1}{4}X = Q$: Areæ trianguli.

Denique ex his comparatis, erit quartò $\left\{ \frac{2ZBq - Bqq - Xq}{16} = Q \right.$: Areæ tri.

Hæc posteriora Theoremata verbis facilè enuntiantur.

Probl: IV. Problematum circa Progressionem Arithmeticam solutio in viginti Propositionibus. Symbola verborum hæc sint: α primus terminus minimus. ω ultimus maximus. T numerus terminorum. X differentia communis. Z summa omnium terminorum. Est igitur $T - 1$ numerus differentiarum: ideoque $TX - X = \omega - \alpha$, summa differentiarum.

Datis tribus ex quinque illis α, ω, T, X Z, invenire duo reliqua per viginti propositiones sequentes (tot enim sunt varietates) hoc ordine.

Datis	Quæruntur	Per Propositi:
α, ω, T	Z & X	1 & 2
α, ω, X	T & Z	3 & 4
α, ω, Z	T & X	5 & 6
α, T, X	ω & Z	7 & 8
α, T, Z	ω & X	9 & 10

Datis

Datis	Quæruntur	Per Proposition:
α, X, Z	ω & T	11 & 12
ω, T, X	α & Z	13 & 14
ω, T, Z	α & X	15 & 16
ω, X, Z	α & T	17 & 18
T, A, Z	α & ω	19 & 20

Prop: I. $T\omega + T\alpha = 2Z$.

II. $\frac{\omega - \alpha}{T - 1} = X$.

III. $\frac{\omega - \alpha}{X} + 1 = T$. per 2.

IV. $\frac{\omega q - \alpha q}{X} + \omega + \alpha = 2Z$. per 1. 3.

V. $\frac{2Z}{\omega + \alpha} = T$. per 1.

VI. $\frac{\omega q - \alpha q}{2Z - \omega - \alpha} = X$. per 4.

VII. $TX - X + \alpha = \omega$. per 2.

VIII. $TX - X + 2\alpha$ in $T = 2Z$. per 1 & 7.

IX. $\frac{2Z - T\alpha}{T} =$. per 1.

X. $\frac{2Z - 2T\alpha}{Tq - T} = X$. per 2. 8.

XI.

XI. $\sqrt{u}: \alpha q - \alpha X + \frac{1}{4}Xq + 2ZX : -\frac{1}{2}X = \omega$. per 4.

XII. $\sqrt{u}: \frac{\alpha q - \alpha X + \frac{1}{4}Xq + 2ZX}{Xq} : -\alpha + \frac{1}{2}X = T$. per 8.

XIII. $\omega + X - TX = \alpha$. per 7.

XIV. $2\omega + X - TX$ in $T = 2Z$. per 1 & 13.

XV. $\frac{2Z}{T} - \omega = \alpha$. per 9.

XVI. $\frac{2T\omega - 2Z}{Tq - T} = X$. per 14.

XVII. $\frac{1}{2}X \pm \sqrt{u}: \omega q + \omega X + \frac{1}{4}Xq - 2ZX : = \alpha$. per 4.
prout α contigerit $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XVIII. $\frac{\omega + \frac{1}{2}X}{X} \mp \sqrt{u}: \frac{\omega q + \omega X + \frac{1}{4}Xq - 2ZX}{Xq} : = T$. per 14.
prout α contigerit $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XIX. $\frac{2Z}{2T} - \frac{TX}{2} + \frac{X}{2} = \alpha$. per 10.

XX. $\frac{2Z}{2T} + \frac{TX}{2} - \frac{X}{2} = \omega$. per 16.

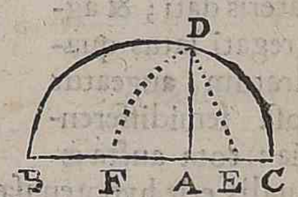
Probl:

Probl.VII. Euclides 11 e 2, docuit secare lineam datam, sic, ut rectangulum sub tota & minore segmento, æquetur quadrato majoris segmenti: quæ sectio est penè divina. Proponatur jam illud problema generaliter; Data linea AB ita secetur, ut rectangulum sub tota AB, & minore segmento, ad quadratum majoris segmenti, rationem quamcunque possibilem datam habeat: puta R ad S.

Primo fiat R.S::AB.AC: qui quartus sit proportionalis: tum pro majore segmento ponatur A: minus segmentum erit AB-A: quod ductum in AB, dabit rectangulum $ABq - AB \times A$. Erit igitur AB . AC::ABq $-AB \times A$. Aq. Ideoque per 3 cap. 6, $ABq \times AC - AB \times AC \times A = AB \times Aq$. Et divisis omnibus per AB, erit $AB \times AC - AC \times A = Aq$: vel $Aq + AC \times A = AB \times AC$. Et per 9 cap. 16, invenitur $\sqrt{u}: \frac{1}{4}ACq + AB \times AC : -\frac{1}{2}AC = A$.

Hoc theorema inventum, verbis sic enunciatur: Si ad quadratum semissis quarti proportionalis, adjungatur rectangulum sub linea recta data, & quarto illo proportionali; Et ex latere quadrato summæ tollatur semis quarti proportionalis: Reliquum erit segmentum majus.

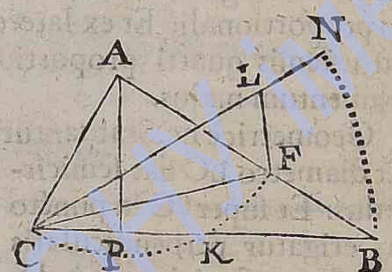
Geometricè sic. Statuantur AB & AC in directum: Et diametro BC fiat semicirculus: Et super BC in puncto A, erigatur perpendicularis AD, secans semicirculũ in D. tum bisecta AC in E, mensuretur EF=ED. Dico lineam AB sic secari in puncto F



G ut

ut ſit R. S :: AB*BF. AFq. Nam AC*AF+AC*BF =AC*AB=ADq=CF*AF , per 6 e 2,=AC*AF+AFq. Quare AC*BF=AFq. Atqui AB. AC :: AB*BF. AC*BF. Ergo,

Prob. VIII. Dato latere alterutro trianguli rectanguli (in quo perpendicularis ex angulo recto ſecat hypotenuſam) una cum BK differentia ſegmentorum hypotenuſæ, invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum. Primò detur latus minus CA. Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC : in quo è vertice in hypotenuſam demittatur perpendicularis AP, ſecans hypotenuſam in BP & CP ſegmenta. Eſt autem $CP = \frac{BC-BK}{2}$. Quia eſt BC. CA :: CA. $\frac{BC-BK}{2}$ erit $\frac{BCq-BC*BK}{2} = CAq$: vel BCq −BK * BC =2CAq. quare per 9 c 16, $\sqrt{q}$: $\frac{1}{4}$BKq +2CAq : +$\frac{1}{2}$BK= BC. Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic : Si quadratum ſemidifferentiæ ſegmentorum hypotenuſæ addatur duobus quadratis lateris dati ; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa ſemidifferentia : tota aucta æqualis erit hypotenuſæ.



Geometricè

Geometricè ſic. Sumpta AF= AC; Ducatur CF: ipſique perpendicularis $FL = \frac{BK.}{2}$ & extendatur CL ad N, ut LN= $\frac{1}{2}$BK. Erit CN =BC. quare inſcribatur circulo CK= CN-BK : & producatur, &c. Nam CFq =2CAq. & CLq =2CAq+$\frac{1}{4}$BKq. Ergo,

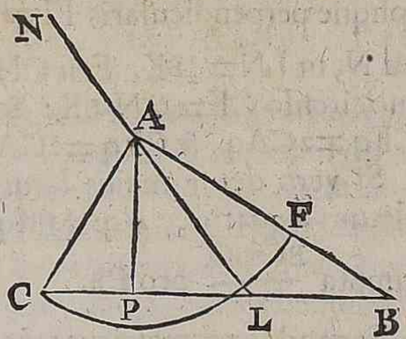
Si verò detur majus latus BA : hujuſmodi invenietur æquatio, $\sqrt{q}$: $\frac{1}{4}$BKq+2BAq : − $\frac{1}{2}$BK = BC. ſumpta $\frac{BC+BK}{2}$ pro PB.

Et modus geometricus priori non abſimilis.

Probl: IX. Datis differentia laterum trianguli rectanguli BF, & perpendiculari AP ab angulo recto in hypotenuſam: invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur : ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 7 e 2. 2BA* AF + BFq =BAq + AFq ; Ideoque BFq = (ABq+ AFq, hoc eſt) BCq-(BA*2CA. hoc eſt) BC*2AP , quia BC. CA :: BA. AP. Erit BCq − 2AP*BC = BFq. quare per 9 c 16. $\sqrt{q}$: APq+BFq : +AP = BC.

Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si quadrato perpendicularis addatur quadratum differentiæ laterum; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa perpendiculari: tota aucta æqualis erit hypotenuſæ.

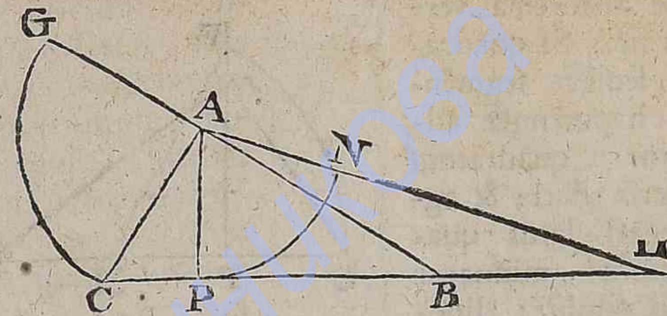


Geometricè ſic. Fiat $PL = BF$. Et extendatur LA ad N, ut $AN = AP$. Erit $LN = BC$. Diametro igitur BC deſcribatur ſemicirculus; in quo ſtatuatur perpendicularis æqualis datæ AP. Et ducantur BA, & CA.

Probl: X. Datis ſumma laterum trianguli rectanguli, BG, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenuſam, AP: invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 4 e 2, $BGq = (BAq + GAq$, hoc eſt) $BCq +$ ($2BA \times CA$, hoc eſt) $2AP \times BC$, quia $BC . CA :: BA . AP$. Erit $BCq + 2AP \times BC = BGq$. quare per 9 c 16, $\sqrt{q}: APq + BGq : - AP = BC$.

Enunciatur



Enunciatur autem hoc theorema ſic. Si quadrato perpendicularis addatur quadratum ſummæ laterum; & aggregati latus quadratum minuatur ipſa perpendiculari: linea reliqua æqualis erit hypotenuſæ.

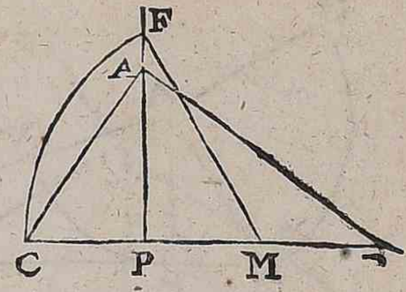
Geometricè ſic. Fiat $PL = BG$ & ducatur AL: ex qua abſcindatur $AN = AP$. Erit $LN = BC$. Diametro igitur BC deſcribatur ſemicirculus, &c.

Probl: XI. Datis trianguli rectanguli latere alterutro, CA, & alterno ſegmento hypotenuſæ BP: invenire tum alterum ſegmentum, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt $BP + CP . CA :: CA . CP$. Erit $BP \times CP + CPq = CAq$. quare per 9 c 16, $\sqrt{q}: \frac{1}{4} BPq + CAq : - \frac{1}{2} BP = CP$.

G 3 Enunciatur

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Si quadrato semissis segmenti hypotenusæ addatur quadratum lateris dati; & aggregati latus quadratum minuatur ipso semisse: linea reliqua erit alterum hypotenusæ segmentum.



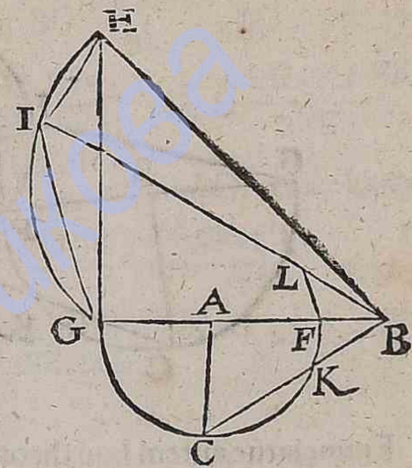
Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BP & PF = CA & bisecta BP in M, ducatur MF: cui mensuretur æqualis MC. Inventum est igitur CP alterum segmentum: & BC tota hypotenusa. Diametro BC describatur semicirculus: in quo inscribantur CA, & BA.

Probl: XII. Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & summa laterum, BG: invenire tum differentiam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BG. BK :: BC. BF: est etiam BGq. BKq :: (BCq, hoc est) BAq + CAq. BFq. Item 2BGq-BKq. BKq :: (2BAq +2CAq — BFq hoc est) BGq. BFq: Nam per 8 c 18 2BAq+ 2CAq = BGq + BFq. quare $\surd$q: 2BGq — BKq. BG :: BK. BF :: BG. BC.

Enunciatur autem hoc Theorema verbis sic. Si

Si è quadrato summæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ segmentorum hypotenusæ: Erit, ut latus quadratum reliqui, ad summam laterum; sic differentia segmentorum hypotenusæ, ad differentiam laterum, & sic summa laterũ ad hypotenusam.

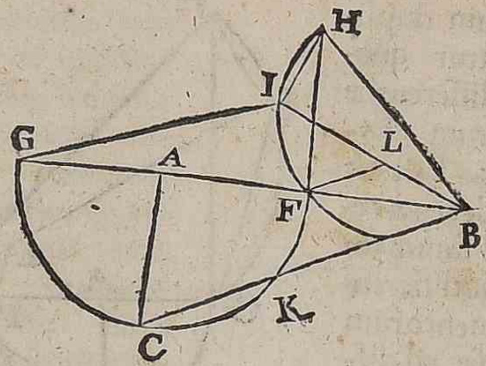


Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BG & GH = BG. tum diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI = BK: & ducatur BI. Est igitur BI = $\surd$q: 2BGq — BKq. fiat etiam BL = BK. Ducatur GI: eique parallela LF. Ergo inventa est BF differentia laterum.

Probl: XIII. Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & differentia laterum BF: invenire tum summam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BF. BK :: BC. BG: est etiam BFq. BKq :: (BCq, hoc est) BAq +CAq. BGq. Item 2BFq — BKq. BKq :: (2BAq +2CAq — BGq, hoc est) BFq. BGq: Nam per 8 c 18 2BAq+2CAq = BGq+BFq. Quare $\surd$q: 2BFq — BKq. BF :: BK. BG :: BF. BC.

 Enunciatur



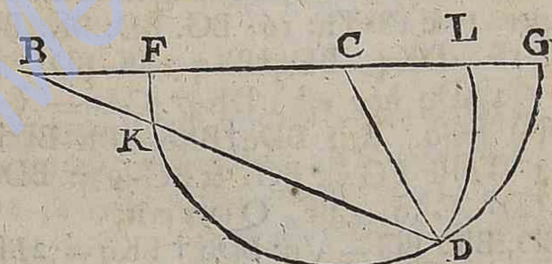
Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Si è quadrato differentiæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ ſegmentorum hypotenuſæ. Erit, ut latus quadratum reliqui, ad differentiam laterum; ſic differentia ſegmentorum hypotenuſæ, ad ſummam laterum: & ſic differentia laterum, ad hypotenuſam.

Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BF & $FH = BF$. tum diametro BH deſcribatur ſemicirculus, in quo inſcribatur $BI = BK$: & ducatur HI. Eſt igitur $HI = \sqrt{q}: 2BFq - BKq$. fiat $BL = HI$. Ducatur FL: eique parallela IG. Ergo inventa eſt BG ſumma laterum.

Probl. XIV. Datis trianguli plani cujuſcunq; differentia laterum FB, differentia ſegmentorum baſis BK, & differentia inter majus latus & baſem CL: invenire tum baſem, tum ſummam laterum, tum ipſum triangulum. Et primò ſit exceſſus penes baſem. Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitq; triangulum BCD.

Quo-

Quoniam eſt FB. BK::BD. $\frac{BK \times BD}{BF} = BG$, per 17 c 18, Th: 16. Erit $\frac{BK \times BD - BFq}{BF} = FG$: & $\frac{BK \times BD - BF}{2FB} = CF$. adde BF, & $\frac{BK \times BD + BFq}{2BF} = BC$. tolle hanc ex BD, & $\frac{2BF \times BD - BK \times BD - BFq}{2BF} = \frac{2BF \times CL}{2BF}$: Quare $2BF \times BD - BK \times BD = 2BF \times CL + BFq$. & per 3 c 6. $2BF - BK . 2CL + BF :: BF . BD :: BK . BG$.



Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. ut differentia inter differentiam laterum duplicatam, & differentiam ſegmentorum baſis, eſt ad aggregatum differentiæ inter majus latus & baſim duplicatæ & differentiæ laterum; ſic differentia laterum, ad baſem: & ſic differentia ſegmentorum baſis, ad ſummam laterum.

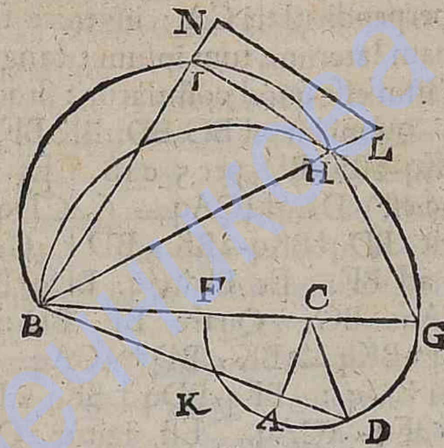
Geometrica praxis facilior eſt, quàm ut neceſſe ſit apponi.

Si verò exceſſus fuerit penes majus latus: theorema erit, $BK - 2BF . 2CL - BF :: BF . BD :: BK . BG$.

Hujus theorematis investigationem; & problematis quo è datis trianguli plani cujuscunq; summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & differentia inter majus latus & basem CL. postulatur invenire tum basem, tum differentiam laterum, solutionem, omitto; ut habeant studiosi analyseos, quo solertiam suam exerceant.

Probl. XV. Datis trianguli plani cujuscunq; summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, tum differentiam laterum, tum ipsum triangulum. Puta factũ esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam per 17 c 18 Th: 16. BG. BD::BK. BF. Et per 5 c 18, DKq = BDq + BKq - 2BK × BD. Et per 47 e 1 (4ADq hoc est) DKq + 4CAq = (4CDq, hoc est) FGq. Erit BDq + BKq - 2BK × BD + 4CAq = FGq. Tolle FG ex BG: & BG - √q: BDq + BKq - 2BK × BD + 4CAq: = BF. Quare erit,
BG. BD::BK. BG - √q: BDq + BKq - 2BK × BD + 4CAq. Et per 3 c 6, BK × BD = BGq - √q: BGq × BDq + BGq × BKq - BGq × 2BK × BD + BGq × 4CAq. Est igitur per 8 c 16, Q: BGq - BK × BD, hoc est, BGqq - BGq × 2BK × BD + BKq × BDq = BGq × BDq + BGq × BKq - BGq × 2BK × BD + BGq × 4CAq. Ideóque BGq × BDq - BKq × BDq = BGqq - BGq × BKq - BGq × 4CAq. vel etiam, BGq - BKq in BDq = BGq - BKq - 4CAq in BGq. Ergo √q: BGq - BKq. √q: BGq - BKq - 4CAq :: BG. BD::BK. BF.

Enuncia-



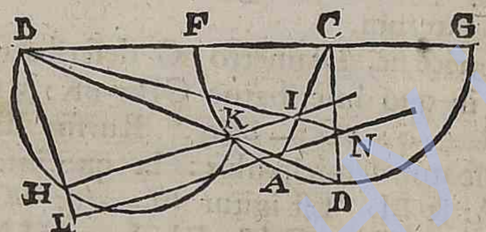
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic, Ut latus quadratum differentiæ inter quadrata summæ laterum, & differentiæ segmentorum basis, est ad latus quadratum ejusdem differentiæ multatæ quadrato perpendiculi duplicati; sic summa laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad differentiam laterum.

Geometricè sic. Diametro BG describatur semicirculus: in quo inscribatur GH = BK: & BH. Est igitur BH = √q: BGq - BKq. Rursus diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI = 2CA: & BI. Est igitur BI = √q: BGq - BKq - 4CAq. Fiat BL = BG: & ab L ducatur LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est BN = BD.

Probl. XVI. Datis trianguli plani cujuscunque differentia

differentia laterum BF, differentia ſegmentorum baſis BK, & perpendiculari CA : invenire tum baſem, tum ſummam laterum, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur : ſitque triangulum BCD. Quoniam eſt $BG.BD::BK.BF$. Et $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD$, per 5 c 18. Et per 47 e 1, ($4ADq$, hoc eſt) $DKq + 4CAq =$ ($4CDq$, hoc eſt) FGq. Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Adde FG ad BF: Et $BF + \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = BG$. Quare $BF.\ BD :: BK.\ BF + \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq$. Item $BK \times BD = BFq + \sqrt{q}: BFq \times BDq + BFq \times BKq - BFq \times 2BK \times BD + BFq \times 4CAq$. Eſt igitur $Q: BK \times BD - BFq$, hoc eſt, $BKq \times BDq - \overline{BFq \times 2BK \times BD} + BFqq = BFq \times BDq + BFq \times BKq - \overline{BFq \times 2BK \times BD} + BFq \times 4CAq$. Ideoque $BKq \times BDq - BFq \times BDq = BFq \times BKq - BFqq + BFq \times 4CAq$. vel etiam $BKq - BFq$ in $BDq = BKq - BFq + 4CAq$ in BFq. Ergo $\sqrt{q}: BKq - BFq.\ \sqrt{q}: BKq - BFq + 4CAq :: BF.BD::BK.BG$.



Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. ut latus quadratum differentiæ inter quadrata differentiæ ſegmentorum baſis, & differentiæ laterum, eſt ad latus quadratum ejuſdem differentiæ auctæ quadra-

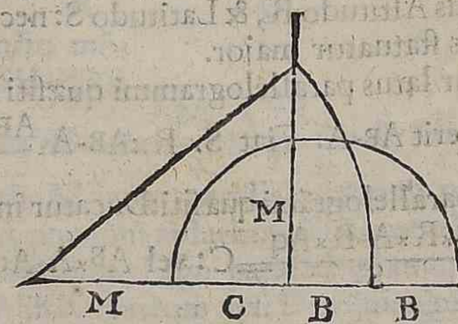
to

to perpendiculi duplicati; ſic differentia laterum, ad baſem : & ſic differentia ſegmentorum baſis, ad ſummam laterum.

Geometricè ſic. Diametro BK deſcribatur circulus: in quo inſcribatur $KH = BF$: & BH. Eſt igitur $BH = \sqrt{q}: BKq - BFq$. Fiat $BHL = BF$: & $HKI = 2CA$. Ducatur BI. Eſt igitur $BI = \sqrt{q}: BKq - BFq + 4CAq$. Ducatur etiam LN parallela ipſi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa eſt $BN = BD$.

Probl: XVII. Datis in triangulo rectangulo differentia inter baſem & hypotenuſam B, & differentia inter cathetum & hypotenuſam C: invenire tum hypotenuſam, tum ipſum triangulum.

Pro hypotenuſa ponatur A. Baſis erit $A - B$. & Cathetus $A - C$. & per 47 e 1, Cathetus eſt $\sqrt{q}: 2BA - Bq$. quare $\sqrt{q}: 2BA - Bq. = A - C$. Et $2BA - Bq = Aq - 2CA + Cq$. vel $2B + 2C$ in A mi $Aq = Bq + Cq$. Ergo per 9 c 16, $B + C + \sqrt{q}: 2BC = A$, hypotenuſæ.



Enunci-

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Aggregatum utriusque differentiæ (tum basis tum catheti) ab hypotenusa; unâ cum $\sqrt{q}$ duplicis rectanguli sub ipsis differentiis, æquatur hypotenusæ.

Geometricè sic. Ducatur linea infinita in qua mensurentur B,B, & C. hac diametro fiat semicirculus. Et in communi B & C termino statuatur ad angulos rectos linea M. Est igitur $Mq = 2BC$. mensuretur etiam M in linea infinita post C. Et semidiametro $M+C+B$ describatur arcus donec concurrat cum linea M perpendiculari producta. tum à puncto concursus ad centrum illius arcus ducatur linea pro hypotenusa. Et descriptum erit triangulum rectangulum quæsitum.

Probl. XVIII. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum adplicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis alteri parallelogrammo D dato. Oportet autem datum rectilineum non majus esse eo, quod ad dimidium applicatur. Prop: est 28 e 6.

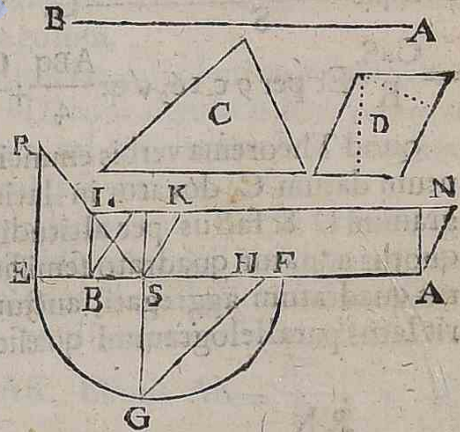
In parallelogrammo D, notetur lineis perpendicularibus ejus Altitudo R, & Latitudo S: nec refert utra ex ipsis statuatur major.

Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A: portio ablatitia erit AB-A. Fiat $S.\ R :: AB - A.\ \frac{AB \times R - R \times A}{S}$ altitudo parallelogrãmi quæsiti: Ducatur in A latus: eritque $\frac{AB \times R \times A - R \times Aq}{S} = C$: vel $AB \times A - Aq = \frac{C \times S}{R}$

Et

Et per 9, Cap. 16, $\frac{AB}{2} + \sqrt{q}\,\frac{ABq}{4} - \frac{C \times S}{R} = A.$

Quod Theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum C datum ducatur in latitudinem parallelogrammi D; & factus dividatur per altitudinem: & quotus ex quadrato semissis lineæ AB datæ auferatur: latus quadratum reliqui auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.



Geometricè sic: Fiat $ER = \sqrt{q}C$. Tum $R.S :: ER.ES$ Statuantur ER & ES ad angulos rectos: Sumptaque $SF = ER$, diametro EF describatur semicirculus: in quo erectâ perpendiculari SG erit $SGq = \frac{C \times S}{R}$ Ex G puncto mensuretur $GH = \frac{1}{2}AB = HB$: erit $HS = \sqrt{:}\,\frac{ABq}{4} - \frac{C \times S}{R}$. cui si adjungas $HA = \frac{1}{2}AB$; erit AS latus parallelogrammi quæsiti. Et $BS = AB - A$ portioni ablatitiæ. Et BL parallela lineæ ER, erit altitudo. Ergò parallelogrammum quæsitum est ASKN, factum ipsi D æquiangulum.

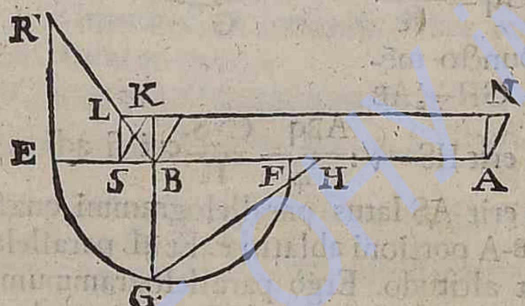
Probl. XIX. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo

rectilineo C æquale parallelogrammũ applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo D dato, Prop: est 29 e 6.

In parallelogrammo D notetur Altitudo & Latitudo, sicut in præcedente.

Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A : Portio adjectitia erit A-AB. Fiat S.R::A-AB. $\frac{R\times A-AB\times R}{S}$ altitudo parallelogrãmi quæsiti. Ducatur in A latus: Eritque $\frac{R\times Aq-AB\times R\times A}{S}=C$. vel $Aq - AB\times A = \frac{C\times S}{R}$ Et per 9 c 16, $\sqrt{q}:\frac{ABq}{4}+\frac{C\times S}{R}:+\frac{AB}{2}=A$.

Quod Theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum datum C ducatur in latitudinem parallelogrammi D & factus per altitudinem dividatur: & quotus addatur quadrato semissis lineæ AB datæ: Latus quadratum aggregati, auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.



Geometricè sic. Fiat $ER=\sqrt{q}C$. Tũ R.S::ER.EB.

Statu-

Statuantur ER & EB ad angulos rectos: Sumptaque BF=ER, diametro EF describatur semicirculus: in quo erecta perpendiculari BG, erit $BGq=\frac{C\times S}{R}$. Esto $BH=\frac{1}{2}AB=AH$. Et ducatur $GH=\sqrt{q}:\frac{ABq}{4}+\frac{C\times S}{R}:=HS$: Est igitur AS=A lateri parallelogrammi quæsiti: Et BS=A-AB portioni adjectitiæ. Et altitudo erit SL parallela lineæ ER. Ergo parallelogrammum quæsitum est, ASKN factum ipsi D æquiangulum.

Probl. XX. Datis trianguli plani cujuscunq; duobus lateribus BC, BD, cum angulo B intercepto: invenire tertium latus, vel datis tribus lateribus: invenire angulum B, uni ipsorum oppositum.

Esto factum quod postulatur: sitque triangulum BCD. Centro B, semidiametro BC, describatur arcus CK: & perpendicularis CA. Est igitur KD differentia laterum: & AK similis sinui verso anguli B. Nam Rad. svB::BK. AK. Estque $AK=\frac{BK\times svB}{Rad.}$ Est autem etiam $AK=BK\mp BA$: ut ex schematibus comparatis liquet.

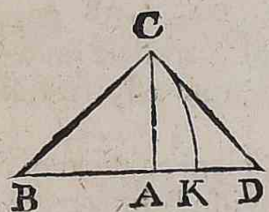
Et quia BDq+BKq=tum

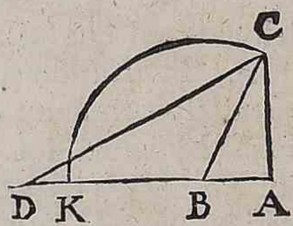
$$\left\{\begin{array}{l} 2BD\times BK+KDq. \text{ per 5 c 18} \\ CDq\pm 2BD\times BA. \text{ per 2,3, c 19.} \end{array}\right\}$$

Erit $2BD\times BK+KDq=CDq\pm 2BD\times BA$. Quare $2BD\times BK\mp 2BD\times BA$. hoc est, $2BD\times AK+KDq=CDq$. at verò $2BD\times AK=\frac{2BD\times BC\times svB}{Rad.}$

 Ergo

Ergo $\frac{2BD \times BC \times sv B}{Rad:} + KDq = CDq$. Quod est theorema primum. Et $\frac{CDq\text{-}KDq \text{ in } Rad:}{2BD \times BC} = sv\,B$. quod est theorema secundum.





Enunciatur quidem verbis primum theorema sic: Si duplicatum rectangulum sub lateribus datis ducatur in sinum versum anguli intercepti: & factus dividatur per Radium: Quotus auctus quadrato differentiæ laterum æqualis erit quadrato tertii lateris.

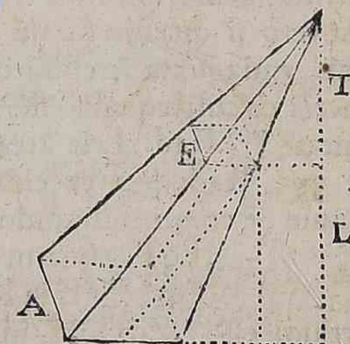
Secundum verò sic: Si differentia quadratorum lateris oppositi, & differentiæ laterum, ducatur in Radium; & factus dividatur per duplicatum rectangulum sub lateribus continentibus: quotus æqualis erit sinui verso anguli quæsiti.

Probl. XXI. Datis frusti Pyramidis utraq; base Aq, Eq, & altitudine L: invenire mensuram frusti.

Prænoscendum est ex 7 & 10 e 12. quod parallelepipedon æquatur tribus pyramidibus; Et Cylindrus æquatur tribus conis, ejusdē basis & altitudinis. Estque altitudo pyramidis abscissæ (T) primò quærenda,

renda, sic, A — E.E::L.T. Quare $\frac{LE}{X} = T$. Et altitudo totius pyramidis est L+T. Item pyramis tota tripla est AqL+AqT. Et pyramis abscissa tripla est EqT. Ergo triplum frustrum pyramidis est AqL+AqT-EqT.

Hoc theorema ostendit unum modum commensurandi frustum pyramidis: Enuntiatur autem verbis sic.



Si solidum sub base majore & tota altitudine multetur solido sub base minore & altitudine pyramidis abscissæ: reliqui triens æqualis erit frusto.

Rursus quia 2 c 11. Aq - Eq = ZX: & T = $\frac{LE}{X}$ Erit AqL+ (ZEL, hoc est per 3 e 2) AEL +EqL = AqL+AqT-EqT. Ergo triplex frustum pyramidis est etiam Aq+Eq+AE in L. hoc theorema docet alterum modum commensurandi frusti: enunciatur autem verbis sic.

Si aggregatum utriusque basis frusti pyramidis, & mediæ inter ipsas proportionalis, ducatur in altitudinem frusti: facti triens æqualis erit frusto.

Item quia per 2 c 11, 2Aq+2Eq=Zq+Xq: Erit

rit ZqL+XqL+2AEL æquale ſex fruſtis. at per 11 e 18. Xq+2AE=Z. Ergo Zq+Z in L æquale eſt ſex fruſtis pyramidis. Atque hoc Theorema docet tertium modum commenſurandi fruſti pyramidis. Enunciatur autem verbis ſic. Si ad aggregatum baſium addatur quadratum aggregati laterum quadratorum utriuſque baſis, & ſumma eorundem ducatur in altitudinem fruſti:facti ſextans ęqualis erit fruſto.

At verò ſi quæſtio ſit de commenſurando fruſto Coni. Quia juxta Archimedæum inventum, ſemiperipheria circuli æqualis eſt $\frac{22}{7}$ Radii ferè: vel magis accuratè $\frac{355}{113}$ Rad: Erit area circuli $\frac{355}{113}$ Rad: q. Et 113. 355::Rad: q. area circuli. Quare Theorema primum de commenſurando fruſto coni, eſt $\frac{355}{452}$ AqL $+\frac{355}{452}$ AqT$-\frac{355}{452}$EqT, æquatur triplo fruſto. Secundum eſt $\frac{355}{452}$Aq$+\frac{355}{452}$Eq$+\frac{355}{452}$ AE in L, æquatur triplo fruſto, Tertium eſt $\frac{355}{452}$Zq$+\frac{355}{452}$Z in L, æquatur ſextuplo fruſto Coni.

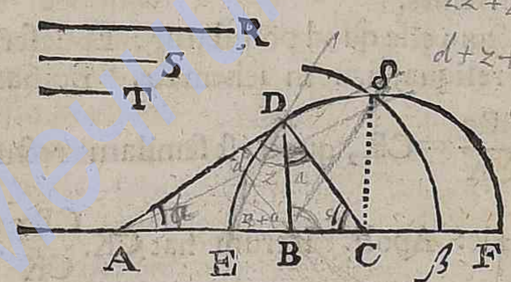
Probl: XXII. Problema Apolonii Pergæi ἐν ἀναλυομένῳ τόπῳ. Datis in plano duobus punctis A,B, deſcribere circulum, in cujus circumferentiam rectæ lineæ AD,BD, ab iiſdem punctis ductæ, datam habeant rationem R ad S.

Puta factum eſſe quod quæritur: ſitq; circuli quæſiti centrum C in eadem recta linea cum punctis A,B; & ſemidiameter CD. Fiat R.S::S.T. Quia triangula duo ACD,DCB (ubicunq; ſumitur punctum D) ſunt ut AC ad BC: Et latera DA,DB, communi angulo C ſimiliter oppoſita, ſunt in ratione R ad S:& latus CD utriq; commune: Non difficile erit concipere triangula ipſa ACD,DCB eſſe ſimilia. Quare R, S::DA.

DB

DB::AC. DC::DC.BC. Et per 1 c 15, AC. BC::Rq. Sq::R.T. Si igitur pro BC ponatur A: Erit AB+A. A::R. T. Et AB×T+T×A=R×A: vel $\frac{AB\times T}{R-T}$ =A. Denique √:AC×BC:=DC.

d+z+a=2r-a-c
2z+2a = 2r-c
d+z+2a = 2r-c
2z=d+z
z=d.



Quæ enunciatur verbis ſic. Si punctorum intervallum ducatur in tertiũ rationis datæ terminis proportionalem: & factus dividatur per exceſſum termini primi ſupra tertium: Quotus æqualis erit diſtantiæ puncti citerioris à centro. Et latus quadratum rectanguli ſub utraq; diſtantia à centro, æquatur ſemidiametro. Geometrica effectio facillima eſt.

Probl. XXIII. Datis dolii, ſive vaſis vinarii, longitudine interna 2CL,& ſemidiametris tum medii CB, tum baſis LD: invenire dolii ipſius capacitatem. Eſt quidem dolium fruſtum ſphæroideos, quæ ſit revolutione ſemiſſis ellipſeos ſuper diametrum ſuam tranſverſam ſive axim. Ad menſuram autem fruſti inveniendam, tum totius ſphæroideos, tum abſciſſarum portionum menſuras ſciri oportet: harum enim menſurarum differentia eſt menſura fruſti.

Soliditas totius ſphæroideos eſt $\frac{355}{113}$ BCq in $\frac{2}{3}$ IK: qui duplus eſt conus baſis BCB, & altitudinis IK:

Archim: de conoid: & ſphæroid: prop. 29.

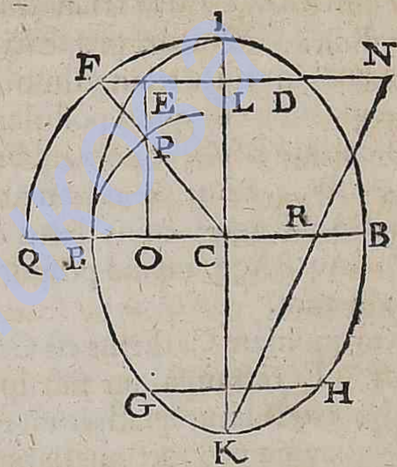
Soliditas verò portionis IED abſciſſæ habetur ſic: LK.LK+KC::$\frac{3}{1}\frac{5}{4}\frac{5}{2}$LDq in $\frac{1}{3}$LI. Soliditas quæſita. Ibid. prop. 31.

Deſideratur autem adhuc (qui hujus negocii præcipuus eſt cardo) diameter tranſverſa ſive axis IK: quem ſic invenies.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: Et deſcribatur ellipſis: & reliqua; ſicut in ſchemate. Et fiat CK. CB::CB.$\frac{CBq}{CK}$=CR, quod eſt ſemilatus rectum per 13 l 1 conic: Apoll. Iterum fiat CK.$\frac{CBq}{CK}$:: CK +CL.$\frac{CBq \text{ in } CK+CL}{CKq}$=LN. ducatur in IL, hoc eſt CK−CL (quod idem eſt ac ſi ducatur CBq in CKq-CLq per 11 c 18) fietque $\frac{CBq \times CKq - CBq \times CLq}{CKq}$ =LEq. per 13 l 1 conic: Apoll. Ergo $\sqrt{q}\,\frac{CBq \times CLq}{CBq - LEq}$ =CK, ſemi-axi; hoc eſt $\frac{CB \times CL}{OP}$=CK.

Quod

Quod theorema verbis enuntiatur ſic. Si quadratum ſemidiametri medii dolii ducatur in quadratum dimidiatæ longitudinis: & factus dividatur per differentiam quadratorum à ſemidiametris medii & baſis: quoti latus quadratum erit ſemiaxis ſphæroïdeos.



Geometricè ſic. Ducatur EO parallela axi. Et ſemidiametro CP=CB fiat arcus ſecans ipſam EO in P. continuetur CP donec concurrat cum baſe LE producta in F. Erit CF æqualis ſemiaxi quæſito. Aliter quia CP=CB: & CO=LE: erit ($\sqrt{u}$: CBq -LEq) OP.CB::CL.CF=CK.

Conſectarium. Atque hinc patet meridianos in Analemmate eſſe veras Ellipſes. verbi gratia, cogitetur quadrans Analemmatis CIFQ. in quo deſcripta ſit Ellipſis IEB. Dico eandem eſſe Meridianum. Nam cum CQ ſit quadrans Æquinoctialis, & FL quadrans paralleli: ſitq; meridianorum proprium ſecare Æquinoctialem, & omnes circulos ipſi parallelos, in ſegmenta ſimilia, per 10, l 2 Theod: de ſphæra. Si igitur conſtiterit eſſe CQ.CB::LF.LE: Ellipſis IEB ſecans ipſos erit meridianus. At verò CF=CQ: & CP =CB: & OC=LE: Eſtque CF.CP::LF.OC. Ergo, Probl. XXIV. Datis trianguli rectanguli hypotenusa BC, & CM mediâ proportionali inter basem & cathetum; invenire triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitq; triangulum rectangulum BAC. Quoniam basis est BA, Cathetus erit $\surd q{:}BCq-BAq{:}$ & rectangulum sub ipsis $\surd q{:}BCq\times BAq-BAqq{:}$ cujus latus quadratum est $\surd qq{:}BCq\times BAq-BAqq{:}$ media proportionalis inter basem & Cathetum.

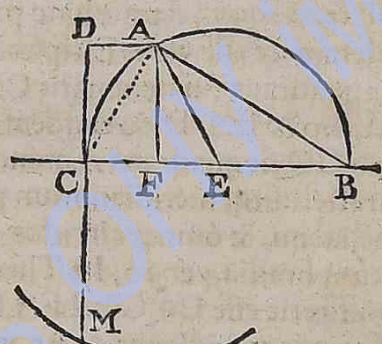
Item quoniam Cathetus est CA, Basis erit $\surd q{:}BCq-CAq$. Et rectangulum sub ipsis, $\surd q{:}BCq\times CAq-CAqq{:}$ cujus latus quadratum est $\surd qq{:}BCq\times CAq-CAqq{:}$ media proportionalis inter basem & Cathetũ.

Quare $BCq\times BAq-BAqq=CMqq$. Et

$$BCq\times CAq-CAqq=CMqq.$$

Ergo per 9 c 16, $\frac{1}{2}BCq\pm\surd q{:}\frac{1}{4}BCqq-CMqq.=\left.\begin{matrix}BAq\\CAq\end{matrix}\right\}$

Quod Theorema enuntiatur verbis sic. Si dimidiato hypotenusæ quadrato, latus quadratum excessus quadratis quadrato-quadrati hypotenusę supra quadrato-quadratum medii proportionalis inter basem & Cathetum, addatur; aggregatum erit basis quadratum: sin auferatur, reliquum erit quadratum Catheti.



Geometricè sic. Dimetro BC, & centro E medio, describatur semicirculus: Tum fiat BC. CM :: CM. CD =AF

=AF perpendic: intra semicirculum. Est igitur $BC\times AF=CMq$. compleatur triangulum BAC Nam $\frac{1}{4}BCq\,(AEq)-AFq=EFq$.

Quare $\frac{1}{2}BC\pm(EF)\surd q{:}\frac{1}{4}BCq-AFq{:}=\left\{\begin{matrix}BF.\\CF.\end{matrix}\right.$

Ducantur omnia in BC : fietque

$$\frac{1}{2}BCq\pm\surd q{:}\frac{1}{4}BCqq-(BCq\times AFq)\,CMqq{:}=\left\{\begin{matrix}BC\times BF=BAq.\\BC\times CF=CAq.\end{matrix}\right.$$

Probl. XXV. Datis trianguli rectanguli base BA, & AM mediâ proportionali inter hypotenusam & Cathetum, invenire triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam Cathetus est CA, hypotenusa erit $\surd q{:}BAq+CAq{:}$ Et media inter ipsas proportionalis $\surd qq{:}CAqq+BAq\times CAq$.

Item quoniam hypotenusa est BC, cathetus erit $\surd q{:}BCq-BAq{:}$ Et media inter ipsas proportionalis $\surd qq{:}BCqq-BAq\times BCq$.

Quare $CAqq+BAq\times CAq=AMqq$. Et

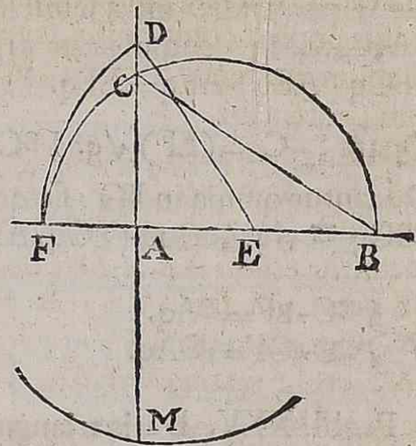
$BCqq-BAq\times CAq=AMqq$. Ergò per 9 c 16

$$\surd q{:}\frac{1}{4}BAqq+AMqq{:}\mp\frac{1}{2}BAq=\left\{\begin{matrix}CAq.\\BCq.\end{matrix}\right.$$

Quod Theorema verbis enuntiatur sic. Si lateri quadrato summæ ex quadrante quadrato-quadrati basis, & quadrato-quadrati mediæ proportionalis inter hypotenusam & Cathetum, dimidiatum basis quadratum auferatur, reliquum erit Catheti quadratum: sin addatur, aggregatum erit quadratum hypotenusæ.

Geometricè

Geometricè ſic. Fiat BA. AM:: AM. AD perpendic: eſt igitur $BA \times AD = MAq$. ex medio baſis puncto E ad perpendicularem AD, ducatur $ED = EF$. Et diametro BF deſcribatur ſemicirculus ſecans AD in C. Tum ducta BC compleatur triangulum BAC. Nam $\frac{1}{4}BAq + ADq = EFq$.



Quare $\sqrt{q}\!: \frac{1}{4}BAq + ADq\!: \mp \frac{1}{2}BA = \left\{\begin{matrix} AF. \\ BF. \end{matrix}\right.$

Ducantur omnia in BA: fietque

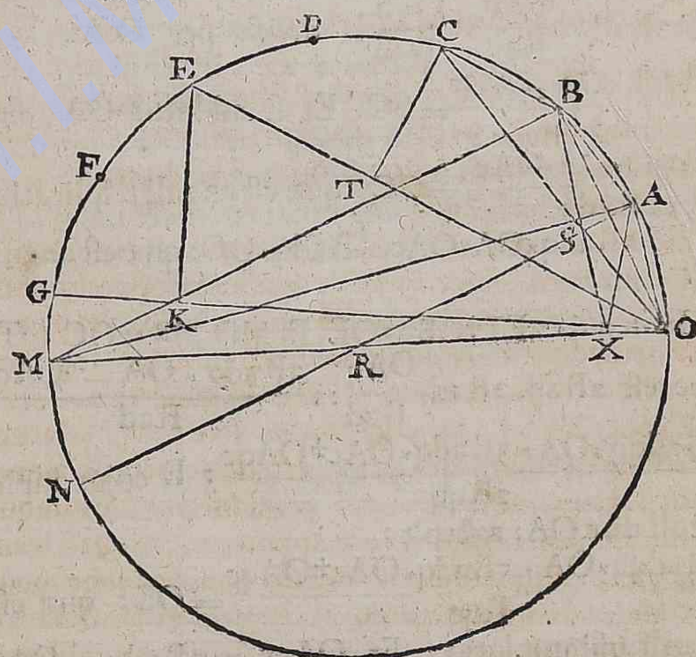
$$\sqrt{q}\!: \tfrac{1}{4}BAqq + (BAq \times ADq)\, AMqq\!: \mp \tfrac{1}{2}BAq = \left\{\begin{matrix} BA \times AF = CAq. \\ BA \times BF = BCq. \end{matrix}\right.$$

Conſectarium. Atque ex his duabus proportionibus patet æquationum, in quibus ſunt tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes, quarum ſuprema ſit quadrato-quadratica, effectio Geometrica.

Probl: XXVI. De angulorum ſive peripheriarum biſectione, triſectione, quinquiſectione, ſeptiſectione, pauca etiam, ad Analytices præſtantiam, uſumque admirandum, oſtendendum, apponam. Geometricam quidem praxim adhuc inventam non habent: ſicut nec Meſolabium inventum eſt. At verò in Sectione 15 Cap. XVIII, Æquationes quaſdam Cubicas prælibavi; qua

qua etiam ſolertia, alias innumeras Analytices ſtudioſus poterit comminiſci, quarum fortaſſe ope meſolabium hactenus tenebris obvolutum, in lucem tandem proferatur.

Diſtinguantur in peripheria ſeptem æquales partes ab O fine diametri literis A B C D E F G: ducantur ſubtenſæ, ſicut fit in ſchemate. Sumatur $MX = MB$. ducantur etiam AX & XB; & diameter NRA; & ad OE perpendicularis CT; & ad OG perpendicularis EK. Quoniam per 17 Cap. XVIII, Theor: 1, $AB = AX$: erunt triangula BMX, ORA, OAX, ſimilia; ideoque $\frac{OAq}{Rad.} = OX$. Sunt etiam triangula OAB,



ARM,

ARM, similia. Et per 47 e 1, $MA = \sqrt{q}: 4Radq - OAq$.

His sic præmissis, erit RA. MA, hoc est, Rad. $\sqrt{q}: 4Radq - OAq :: OA. OB$. Ergo

$$\frac{4Radq \times OAq - OAqq}{Radq} = OBq:$$ quæ est anguli duplicatio.

Et $4Radq \times OAq - OAqq = Radq \times OBq$: quæ est anguli bisectio.

Deinde quia $OS = OA$. & $SA = OX$. & $NS = MX = MB$. Erit per 17 e 18. Th: 16. $\frac{NS \times SA}{OS} = SC$: hoc est $2Rad - \frac{OAq}{Rad}$ in $\frac{OAq}{Rad}$, divisa per OA, vel

$$\frac{2Radq \times OA - AOc}{Radq} = SC.$$ Et si addatur OA, fiet

$$\frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq} = OC:$$ quæ est anguli triplicatio.

Et $3Radq \times OA - OAc = Radq \times OC$: quæ est anguli trisectio.

Item quia $2ET + CB = OE$. Et $MO. MB :: OC. OT$: hoc est $2Rad. 2Rad - \frac{OAq}{Rad} :: \frac{3Radq \times OA - OAc}{Rad}$.

$$\frac{6Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{2Rqq}:$$ E cujus duplo si tollatur OA: restabit

$$\frac{5Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{Rqq} = OE:$$ quæ est anguli quintuplatio. Et $OAqc - 5Radq \times OAc$

+5

$+5Radqq \times OA = Radqq \times OE$: quæ est anguli quinquisectio.

Atque hac forma progredi licet ad Septisectionem inveniendam, Nempe $7Rcc \times OA - 14Rqq \times OAc + 7Rq \times OAqc + OAqqc = Rcc \times OG$.

Nam $MO. MB :: OE. OK$. Et $2OK - OC = OG$. Operationem studiosis relinquo.

Verùm quia Radius ponitur 1, quæ in Multiplicatione & Divisione, nihil mutat: idcircò in hisce omnibus Æquationibus, Radius cum omnibus suis potestatibus, omitti poterit.

Sed quo artificio istiusmodi operosæ Æquationes (in quibus non sunt tantùm tres species æqualiter in ordine scalæ ascendentes) solvantur, quanquàm non est hujus instituti docere: tamen quod in hoc negotio in usum nobilissimi doctissimique Domini Gerardi Aungier, Domini Aungier & Baronis de Longford, ante plurimos annos, commentus sum, in gratiam studiosorum Mathematices, qua possum brevitate, in lucem proferre non pigebit.

SOLI DEO GLORIA.

DE ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIONE IN NUMERIS.

1\. COnstruendæ Æquationis affectæ modus. Sumatur, ut lubet, pro B, 3: pro Cq, 16: pro Dc, 125: pro Fqq, 1296: &c. Nec refert utrum numeri sumpti sint verè figurati necne. Sitque ex his Coëfficientibus construenda Æquatio Quadrato-cubica. Ea pro modo Tabulæ Analyticæ posterioris in ordine Quadrato-cubico, conflata, esto Lqc-5BLqq+10CqLc—10DcLq+5FqqL= Gqc. Quæ in numeris, statuendo L (radicem) 47, erit 1qc-15qq+160c-1250q+6480l= 170304782. vel omissa *unciarum* distinctione, pro 15qq, dic BLqq, pro 160c, dic CqLc; pro 1250q, dic DcLq; & pro 6480l, dic FqqL. Nam si L sit 47; erit Lq = 2209: & Lc = 103823: & Lqq = 4879681: & Lqc = 229345007.

Constructionis

Constructionis hujus Practica.

BL qq 15 × 4879681	229345007 -73195215	Lqc
Cq Lc 160 × 103823	156149792 +16611680	
Dc Lq 1250 × 2209	172761472 — 2761250	
Fqq L 6480 × 47	170000222 + 304560	
	170304782	Gqc

2\. Proponatur Æquatio quæcunque, puta modò inventam.
1qc-15qq+160c-1250q+6480l= 170304782:
Vel numeris in symbola mutatis,
Lqc-BLqq+CqLc—DcLq+FqqL= Gqc:
Et si plures essent affectionum Species, consequenter efferri poterunt per Hcc, Kqqc, Mqcc, Nccc, & sic ulterius.

3\. Radicis L ex his investigandæ duæ erunt partes, nempe A latus primum, & E latus secundum, sive subsequens quodlibet. Quare L= A+E: & omnes potestates ex L, æqualiter consimilibus potestatibus ex A+E: v. g. Lq= Aq+2AE+Eq: & Lc =Ac+3AqE +3AEq+Ec. &c.

Qui igitur numerosam hanc potestatum affectarum resolutionem cupit addiscere, eum in purarum potestatum Genesi & Analysi, bene versatum esse oportet.

4\. In Æquatione propositâ, potestas resolvenda 170304782, sive Gqc, est Quadrato-cubica, cujus etiam

etiam generis ſunt ſingulæ affectionum Species. Nam Heterogenea inter ſe nec addi poſſunt, nec ſubtrahi.

5. Quare in ſingulis affectionibus duo ſunt conſideranda, Gradus affectionis, & Coëfficiens: ut in 15qq, affectionis gradus eſt Quadrato-quadraticus, & coëfficiens 15, lateralis: In 160 c, affectionis Gradus eſt cubicus, & Coëfficiens 160, Quadraticus: In 1250q, affectionis Gradus eſt Quadraticus, & coëfficiens 1250, cubicus: denique in 6480 l, affectionis gradus eſt lateralis, & coëfficiens 6480, quadrato-quadraticus: ſicut ex utraque Æquationis deſignatione comparata clariſſimè liquebit. Atque hinc duo oriuntur Conſectaria pro laterum ſingularium extractione.

6. Primum Conſectarium eſt, Si coëfficientis pro ſua ſpecie, radix, ducta in affectionis gradum, multiplicet ipſum coëfficientem: factus erit ejuſdem generis cum poteſtate reſolvenda: Ut in præcedente Æquatione, ſi latus 15 quadrato-quadraticè multiplicatum, ducatur in 15; & ſi √q 160 cubatum, ducatur in Quadratum 160; & ſi √c 1250 quadratum, ducatur in cubum 1250; denique ſi √qq 6480 ducatur in Quadrato-quadratum 6480; ex ſingulis hiſce multiplicationibus emerget numerus Quadrato-cubicus. *Atque hæc multiplicatio Analytica, modus eſt reducendi coëfficientem quemlibet ad ſpeciem poteſtatis reſolvendæ*, in lateris primi ſingularis extractione uſitatiſſimus.

7. Unde etiam clariſſimè liquet, quod ſi numerus ex coëfficientibus hoc modo reductis, atque comparatis, emergens, minor ſit poteſtate reſolvenda, latus ipſius etiam minus eſt latere poteſtatis reſolvendæ; Si verò major, eſt majus; & ſi æqualis, æquale. In hac igitur

igitur Æquatione, 1qc-15qq+160c-1250q+6480l =170304782; vel 170304782+15qq-160c+1250q -6480l=1qc; ſi tum coëfficiens lateralis 15, tum √q160, tum √c 1250, tum √qq 6480, Quadrato-cubentur; prodibunt quatuor affectionum ſpecies homogeneæ, nempe 7593.., 3238.., 1450.., 0581.., Quod quidem per Logarithmos facillime fit, ſatiſque pro propoſito accuratè. Operationis ratio, ex fine hujus Tractatus (ubi de Logarithmorum notitiâ pauca traduntur) petenda, ſic eſt. (Vide Sect: 27, una cum pag: 149, &c.)

Logarithmi. Numeri Coëfficientes.
1) 2) 3) 4) ſunt dimenſiones in Coëfficiente.

Logarithmi.		Numeri Coëfficientes.
1) 5 * 1, 17609		15 qq
5, 88045		+ 7593..
2) 2, 20412		160 c
5 * 1, 10206.	12,65	
5, 51030		-3238..
3) 3, 09691		1250 q
5 * 1, 03230.	10 8-	
5, 16150		+ 1450..
4) 3, 81157		6480 l
5 * 0, 95280.	8,97	
4, 76445		-0581..

In Æquatione inter propoſitâ, ſpeciebus pro ſignorum

I

rum ratione in unam ſummam aggregatis, erit 170304700+759300 − 323800+145000 − 058100 = 1qc = 170827100. Quod etiam in aliis æquationibus ſimiliter fieri poterit.

8. Secundum eſt, Si poteſtas reſolvenda per Coëfficientem dividatur, quotus ad ipſum affectionis gradum referretur: hoc eſt, quotus erit latus, ſi affectio ſit ſub latere; vel quadratum, ſi ſub quadrato; & ſic de reliquis gradibus: Ut in priore Æquatione, ſi 170304782 dividatur per 15, quotus erit quadratoquadraticus; ſi per 160, quotus erit cubicus; ſi per 1250, quotus erit Quadraticus; ſi denique per 6480, quotus erit lateralis. Quare non ſemper ipſe quotus, ſed ipſius plerumque radix pro affectionis gradu, erit latus ſingulare eliciendum.

9. In ſecundæ etiam radicis inveſtigatione hoc teneri debet; quòd pro numero figurarum in quoto cenſendus fere erit ejus gradus: ut ſi quotus unicâ conſtet figura, ſit latus; Si duabus, Quadratum; ſi tribus, cubus, &c. Et ſi quotus ſuperet 5, vel 50, vel 500, &c. ad gradum fortaſſe ſequentem, in grandioribus præſertim affectionibus, poterit extendi. Atque *hæ ſunt diviſionis Analyticæ leges.*

10. Nec in iſtiuſmodi *Multiplicatione* atque *Diviſione*, totam poteſtatem reſolvendam, cum toto Coëfficiente, percurrere opus erit; Sed ſolummodo ad punctum congruens proximum.

11. Nam in reſolutione affectarum Æquationum punctationes omnes graduum fieri debent, in poteſtate reſolvendâ, ſicut in puris: Supremi quidem gradus ſupra: reliquorum verò infrà. Coëfficientes etiam,

pro

pro ſuâ quiſque ſpecie, punctandi ſunt. Prioris exempli punctationes ſic erunt,

1qc − 15qq + 160c − 1250q + 06410l = 170304782

12. Debet autem regulariter (præſertim ſi Coëfficiens ſit negativus) numerus punctorum in ſingulis eſſe æqualis. Quare ſi poteſtas reſolvenda puncta plura, ſive pauciora habeat ſupra ſe, quam Coëfficiens; tot deficienti præponantur circuli, ut puncta utrobiq; poſſint eſſe æqualia. Et in ſingulis lateribus eruendis punctum coëfficientis lateri illi proprium, ad parile poteſtatis reſolvendæ punctum ſuperius, accommodandum eſt: quod quidem fiet, ſi unitatis locus in coëfficiente, ad puncta poteſtatis inferiora gradui ſuo convenientia, ordine dimoveantur.

13. Si Coëfficiens aliquis ſit fractio, ſive latus ſurdum; reducatur ad integros cum partibus decimalibus.

14. Et ſi opus ſit radicis eductionem in partibus decimalibus perſequi: poſt lineam ſeparatricem circulos quot viſum erit adſcribes, eoſque ſupra & ſubtus, punctis conſimiliter inſignire perges.

15. Tabula oſtendens tum *Diviſores*, tum *Gnomones*, pro laterum ſingularium in Æquationibus affectis inveſtigatione; collecta & continuanda ex tabella Analytica poſteriore. Et nota, quod Coëfficientis cujuſque ſpecies omnes ſunt affirmatæ, ſi ipſa ſit affirmata; negatæ vero, ſi negata.

 Pro

Pro primo Latere	Pro lateribus fingularibus fequentibus, ad complendum *Gnomonem*.	
Aq BA	2AE . Eq BE .	=Cq
Ac BAq CqA	3AqE . 3AEq . Ec B2AE . BEq . CqE .	=Dc
Aqq BAc CqAq DcA	4AcE . 6AqEq . 4AEc . Eqq B3AqE . B3AEq . BEc . Cq2AE . CqEq. DcE .	=Fqq
Aqc BAqq CqAc DcAq FqqA	5AqqE . [10AcEq . 10AqEc. 5AEqq . Eqc B4AcE . B6AqEq. B4AEc. BEqq . Cq3AqE . Cq3AE . CqEc. Dc2AE . DcEq . FqqE . &c.	=Gqc

16.

16. *Divifores* ubique fumuntur ex iis, quæ in data habentur menfura, jufto ordine difpofitis, atque aggregatis, habita fignorum ratione.

17. Si Æquationis alicujus fuprema poteftas fit negativa, Æquatio illa eft ambigua.

18. Latus fingulare primum elicitur ex his *Regulis*, defumptis ex duobus confectariis in Sect. 6. & 8.

Prima. Si Coëfficiens ita longè in pofteriora decedit, ut vix ad primum poteftatis refolvendæ punctum pertingat; nec (Analyticè etiam reductus) enormem in illo mutationem faciat: in extractione lateris fingularis primi, negligi omninò poterit.

Secunda. Si Coëfficiens in anteriora prorumpit, fitque affirmativus: devolvendus eft in puncta confequentia, donec locus divifioni fiat. Per quam divifionem quotus inventus ad gradum affectionis revifionem ferretur. Quod etiam in extractione minoris radicis Æquationis ambiguæ intelligi debet.

Tertia. Si vero negativus fit, & pluribus conftet punctis, quam poteftas refolvenda; fuppleantur loci deficientes circulis præfixis: & pro latere primo fingulari, fumatur ipfa coëfficientis, pro fuo genere, radix.

Quarta. Si utrobique puncta fint æqualia, & numeri in primo tum coëfficientis, tum poteftatis refolvendæ, puncto, non multum difcrepent: Coëfficiens per radicem fuam, pro fpecie qua punctatur, fub congruente puncto extractam, ad poteftatis fpeciem (per Analyticam multiplicationem) reductus, poteftati refolvendæ addatur, fi fit negativus; vel auferatur, fi affirmativus. Nam fi fit Ac+CqA=Dc, erit Ac =Dc

$= Dc \mp CqA$. At ſi Æquationis ambiguæ latus majus quæratur, Poteſtas reſolvenda è coëfficiente reducto auferatur. Nam ſi ſit $CqA - Ac = Dc$, erit $Ac = CqA - Dc$. Tum ſummæ vel differentiæ radix, erit latus primum eliciendum. Et nota, quod Æquationis ambiguæ latus majus, aliquando per diviſionem; aliquando per extractionem radicis è coëfficiente; ſed plerumque per reductionem coëfficientis inveſtigatur.

19. Atque his præceptis ſolerter perpenſis, Illud demùm verum latus ſingulare primum erit, quod primò omnium talem exhibet diagonalem, qui unà cum coëfficientibus, ſicut Æquationis conditio poſtulat, juxta tabellam præcedentem, multiplicatis; omnibuſque in unam ſummam (diligente ubique tum ſignorum, tum ſedium, reſpectu habito) aggregatis; numerum profert poteſtate reſolvendâ, unde ſubtrahendus eſt, non majorem. Notandum autem eſt, quòd numerus negativus quantuſcunque, minor eſt omni tum affirmativo, tum negativo minore: ut -4 minor eſt quam 1, & quam -1. Item quod ſubductio mutat ſignum numeri ſubducendi: ut ex 4 tolle 6, reſtat $4-6$, hoc eſt -2. Et ex -4 tolle -6, reſtat $-4+6$, hoc eſt 2. Denique ex 4 tolle -6, reſtat $4+6$, hoc eſt 10. Quare in lateris primi ſingularis extractione, tentandum aliquoties eſt, donec latus verum inveneris; quod per proximè majus, certiſſimè agnoſces.

20. In conſtitutione diviſoris pro ſecundo latere inveſtigando; Coëfficientis ductæ in gradum quemlibet, ſedes ordinari debet ſecundum proprii gradus punctationem; hoc eſt, Coëfficientis ſub latere ſedes

diſtabit verſus ſiniſtram, à puncto ſive ſede ipſius Coëfficientis, uno loco: Coëfficientis ſub quadrato ſedes, duobus locis: ſub cubo, tribus: &c. Et ob vitandam confuſionem, utile erit in reſiduo poteſtatis reſolvendæ, punctationes illas, quæ præſenti radici eruendæ inſerviunt, ſolas diſtinguere.

21. Tum latus ſingulare ſecundum elicietur ſic: Diviſores cujuſque generis, ex tabula præcedente inventi, & juſto ordine diſpoſiti, in unam ſummam aggregentur; & per totalem illum diviſorem, reliquum poteſtatis reſolvendæ dividatur. Nam quotus juxta diviſionis Analyticæ leges (ſi id uſus exigat) perpenſus, dabit latus ſingulare ſecundum eliciendum. Cæterùm in hac inveſtigatione multotiès, præſertim ſi magnitudinum dividentium negativarum aggregatum, aggregato affirmativarum penè æquetur (adeò ut Diviſor Reliquo poteſtatis reſolvendæ minor admodum ſit) maxima ineſt lubricitas: quam tamen Analyſta ſagax facile effugiet.

22. Hæc igitur Regula eſto perpetua. Illud demùm verum latus ſingulare ſecundum eſt; quod primò omnium talem exhibet *Gnomonem*, conſtantem ex complementis cujuſque generis, & Coëfficientibus, ſicut Æquationis conditio poſtulat, juxta tabulam præcedentem, multiplicatis; omnibuſq; in unam ſummam, diligente ubique tum ſignorum, tum ſedium, habita ratione, aggregatis; qui *Gnomon* non major ſit poteſtate reſolvenda unde ſubtrahendus eſt. Quare tentandum aliquoties eſt, donec latus verum inveneris: quod etiam per proximè majus, certiſſime agnoſces.

23. Latera omnia ſingularia poſt ſecundum, per Diviſionem ſimplicem facillimè acquiruntur.

24. Si affectiones ſint compoſitæ ex affirmativis, & negativis: antecedentia præcepta mixtim ſunt cum ſolertia & judicio uſurpanda. Et in lateribus æſtimandis præponderabit ſemper affectio major, minori. Verùm totum hoc negotium Analyticum, quod verbis enarrare difficillimum foret, frequens exercitatio, tum in Geneſi, tum in Analyſi poteſtatum cujuſque generis, facile ſatis reddet, atque familiare.

25. Sed quia ſuperiùs aliquoties dictum eſt, tentatu opus eſſe; quod quidem in affectionibus multiplicibus, & ubi gradus ſunt elatiores, valde laborioſum erit: apponam hic, coronidis loco, duos modos ejuſmodi tentamenti levandi: unum per Depreſſionem, ex Cap. XVI. Sect. 7. *Clavis*: alterum per Canonem Logarithmorum 10000. In utroque autem ſi Æquatio fuerit ambigua, ſigna ejus omnia erunt mutanda. Notandum etiam hîc eſt, quod numerus negativus quantuſcunque, minor eſt omni tum affirmativo, tum negativo minore.

26. Inventio laterum ſingularium per Depreſſionem. Si latus primum quæratur: In ſingulis Æquationis datæ ſpeciebus abſcindantur lineâ ſeparatrice omnia puncta poſt primum. Deinde applicentur omnes ſpecies ad latus; hoc eſt, deprimantur uno gradu.

Exempl: I. 1qq-72c+238600l=8725815. Hæc Deprimendo fiet 1c+2386-72q=L) 8725.
Eſto A 4. Erit 4) 8725 (2181, juſtus.

Et

Et + 64 + 2386 − 1152 = 1874, minor juſto.
Eſto A 5. Erit 5) 8725 (1745, juſtus.
Et + 125 + 2386 − 1800 = 1836; major juſto.
Latus igitur verum A = 5-1, hoc eſt, 4.

Exempl: II. De Æquatione ambigua. 1c-3257l = -45744. Hæc deprimendo fiet 1q-325 = L) -457.
Eſto A 4. Erit 4) − 457 (− 114, juſtus.
Et + 16 − 325 = -165, minor juſto.
Eſto A 5. Erit 5) − 457 (− 91, juſtus.
Et + 25 − 325 = − 75, major juſto.
Latus igitur verum A = 5 − 1, hoc eſt, 4.

Si latus ſecundum quæratur: In ſingulis ſpeciebus abſcindantur omnia puncta poſt ſecundum. Deinde applicentur omnes ſpecies ad quadratum; hoc eſt, deprimantur duobus gradibus. Ut in Exemplo I.

1qq − 72c + 238600l = 8725815. Hæc Deprimendo fiet 1q+L) 238600-72l = Q) 8725815.
Eſto A 47: erit 2209) 8725815 (3949. Juſtus.
Et 2209+5077 − 3384 = 3896. minor juſto.
Eſto A 48: erit 2304) 8725815 (3787. Juſtus.
Et 2304+4971-3456 = 3819: major juſto.
Latus igitur verum eſt 48 − 1, hoc eſt, 47.

27. Inventio lateris ſingularis ſecundi per *Logarithmos*.

Index Logarithmi cujuſque deſumitur ex tabella in initio *Clav:* pro diſtantia primæ ſuæ figuræ, ante vel poſt locum unitatum, cujus Index eſt 0. Eædem igitur figuræ, eodem ordine diſpoſitæ, eundem habent Logarithmum: Indices vero diverſi eſſe poſſunt. Ut

numeri

numeri 436, Log: eſt 2,6394865 at numeri 43600, eſt 4,6394865. & numeri 4|36, Log: eſt 0,6394865. Denique numeri 0 00436, Log: eſt $\bar{3}$,6394865.

Summa duorum Logarithmorum, Logarithmus eſt facti à valoribus: differentia autem, Logarithmus eſt quoti. Ut quia 4(36×9=39(24 hujus Log: 1,5937290=0,6394865+0,9542425. Et quia 9)39(24(4(36: hujus Log: 0,6394865=1,5937290 −0,9542425.

Logarithmus lateris, ductus in numerum dimenſionum cujuſq; poteſtatis, eſt ejuſdem poteſtatis Logarithmus: Ut quia numeri 436, Log: eſt 2,6394865: Erit 2,6394865×2=Log: Q: 436. Et 2,6394865×3 =C: 436: Et 2,6394865×4=QQ: 436. &c.

Logarithmus poteſtatis cujuſque diviſus per numerum dimenſionum ſuarum, exhibet Logarithmum radicis ſuæ.

Si in Serie Geometricè continuè proportionalium Logarithmus primi termini tollatur è Logarithmo ſecundi, reliquus erit Logarithmus rationis: qui, ſi in numerum terminorum minus uno (qui numerus eſt rationum) ducatur; deindeq; Logarithmo primi termini augeatur; Logarithmus erit termini ultimi.

28. Atque hæc de Logarithmorum notitia ſatis ſunto: quibus intellectis, reliquam operationem, exempla ſequentia diligenter inſpecta, facilem reddent: In qua etiam omnes punctationes, poſt duas primas, linea ſeparatrice abſcindendæ ſunt.

Ex-

Exempl: I. 1qq-72c+238600l=8725815. Juſtus. Sunto duo prima latera ſingularia.

		−72	+238600
47.	1,67209 | 8	1,85733	5,37767
Cu:	5,01629	5,01629	1,67210
QQ:	6,68839	6,87362	7,04977
	+4880…	−7475…	+11213…

Et +4880… +11213… −7475… =+8618…, minor juſto.

48.	1,68124 | 1	1,85733	5,37767
Cu.	5,04372	5,04372	1,68124
QQ.	6,72496	6,90105	7,05891
	+5308…	−7963…	+11455…

Et +5308+11455−7963 =+8800… major juſto. Radix igitur vera erit 48−1, hoc eſt, 47.

Exempl: II. 1c −3257l = −45744. Juſtus. Sunto duo prima latera ſingularia

		−3257
48.	1,68124 | 1	3,51282
Cu.	5,04372	1,68124
	+1106	5,19406
		−1563

major.)

+1106 −1563 = −457, minor juſto, (ſaltem non

49.	1,69019 6	3,51282
Cu.	5,07059	1,69020
	+1176	5,20302
		−1596

+1176 −1596 = −420; major juſto. Radix igitur vera erit 49 −1, hoc eſt, 48.

Latus ſecundum inveſtigari poterit per Logarithmos, etiam Depreſſione præcedente. Ut in Exemplo V. 1qq − 1246,00q = 0897,26256. Hæc quadraticè depreſſa fiet 1q − 1246 = Q) 8972,6.

Supponatur duo prima latera ſingularia,

8972|6|

34.	1,53148	3,95337
Q.	3,06296	3,06296
+ 1156		0,89041 : valor 7,76 Juſtus.

+ 1156 − 1246 = −90: minor juſto.

36.	1,55630	3,95337
Q.	3,11260	3,11260
+ 1296		0,84077 : valor 6,93 Juſtus.

+ 1296 − 1246 = +50: major juſto.

Radix igitur vera cadit inter 34 & 36.

Atque hoc modò in XXVIII Sectionibus, ſive Præceptis (qui numerus eſt perfectus) doctrinam de Æquationum affectarum reſolutione in numeris, adjuvante Deo omnium bonorum Datore, expedivi: Ejus igitur ſit omnis laus, honor, & gloria in ſempiternum. A M E N.

Exempla

Exempla quædam Æquationum Reſolutarum in Numeris.

ÆQuationum Quadraticarum, omniumque in quibus ſunt tres ſpecies in ordine ſcalæ æqualiter adſcendentes, Analyſi ſuperſedebo: quia in cap. XVI. Sect. 9. *Clavis*, modus facilior traditus eſt, quàm per generalem hanc methodum præſtari poterit: Et ad Exempla Æquationum aliter affectarum progrediar. Denique in fine, Notas ad Exempla, ſubjungam; in quibus operationis ratio, in laterum ſingularium inveſtigatione, ex præceptis ſuperiùs traditis, aperietur.

Initium faciam à Reſolutione numeroſæ Æquationis primò conſtitutæ, Nempe

1qc − 15qq + 160c − 1250q + 6480l = 170304782.

Hoc eſt, Lqc − BLqq + CqLc − DcLq + FqqL = Gqc

Exemplum

Exemplum I.

1qc-15qq+160c —1250q+064 801 =170304782.
Hoc est, Lqc-BLqq+CqLc-DcLq+FqqL =Gqc.

1703	04782	(47
1	5	—B
1	250	—Dc
1	60	Cq
	6480	Fqq
1024		Aqc
102	40	CqAc
2	5920	FqqA
+ 1128	9920	
384	0	—BAqq
20	000	—DcAq
—404	000	
724	9920	*Ablatit.*
R 978	05582	
128	0	5Aqq
6	40	10Ac
	160	10Aq
	20	5A
7	680	Cq3Aq
	1920	Cq3A
	160	Cq
	6480	Fqq

+ 1

+142	50040	
38	40	-B4Ac
1	440	-B6Aq
	240	-B4A
	15	-B
1	0000	-Dc2A
	1250	-Dc
—40	87665	
+101	62375	*Divisor.*
896	0	5AqqE
313	60	10AcEq
54	880	10AqEc
4	8020	5AEqq
	16807	Eqc
53	760	Cq3AqE
9	4080	Cq3AEq
	54880	CqEc
	45360	FqqE
+1333	62047	
268	80	-B4AcE
70	560	-B6AqEq
8	2320	-B4AEc
	36015	-BEqq
7	0000	-Dc2AE
	61250	-DcEq
-355	56465	
+978	05582	*Ablatit.*

Exemplum

Exemplum II.

1c+420000l=247651713

Hoc est, Lc+CqL=Dc.

	247651713	(417
	420000	Cq
	64	Ac
	1680000	CqA
	2320000	*Ablatit.*
R	15651713	
	48	3Aq
	12	3A
	420000	Cq
	912000	*Divisor.*
	48	3AqE
	12	3AEq
	1	Ec
	420000	CqE
	912100	*Ablatit.*
R	6530713	
	5043	3Aq
	123	3A
	4200000	Cq
	9255530	*Divisor.*
	35301	3AqE
	6027	3AEq
	343	Ec
	29400000	CqE
	6530713	*Ablatit.*

4 | 1
16 | 8
 | 1
1681

Exem-

Exemplum III.

1c+1007q=247617936,

Hoc est, Lc+BLq=Dc.

	247617936	(417
	1007	B
	64	Ac
	16112	BAq
	22512	*Ablatit.*
R	2249793б	
	48	3Aq.
	12	3A
	8056	B2A
	1007	B
	130767	*Divisor.*
	48	3AqE
	12	3AEq
	1	Ec
	8056	B2AE
	1007	BEq
	130777	*Ablatit.*
R	9420236	
	5043	3Aq
	123	3A
	82574	2BA
	1007	B
	1332277	*Divisor.*
	35301	3AqE
	6027	3AEq
	343	Ec
	578018	B2AE
	49343	BEq
	9420236	*Ablatit.*

41 | 1
16 | 8
 | 1
1681

K

Exempl. IV.

Exemplum IV.

1qq--44299005 l = 022252086

Lqq — Dc L = Fqq.

0	2225	2086	(354
--44	2990	05	—Dc
+81			Aqq
--132	8970	15	—DcA
--51	8970	15	*Ablatit.*
R 52	1195	3586	
10	8		4Ac
	54		6Aq
	12		4A
+11	352		
--4	4299	005	—Dc
+6	9220	995	*Divisor.*
54	0		4AcE
13	50		6AqEq
1	500		4AE
	625		Eqq
+69	0625		
--22	1495	025	—DcE
+469	1299	75	*Ablatit.*
R 5	2065	3836	
+1	2793	7395	*Divisor.*
+5	2065	3836	*Ablatit.*

Exemplum

Exemplum V.

1qq-124600q = 08972 6256, Lqq-CqLq = Fqq.

0	8972	6256	(354
-12	4600		-Cq
+81			Aqq
-112	1400		-CqAq
-31	1400		*Ablatit*
R 32	0372	6256	
10	8		4Ac
	54		6Aq
	12		4A
+11	352		
7	4760	0	-Cq2A
	1246	00	-Cq
-7	6006	00	
+3	7514	00	*Divisor*
54	0		4AcE
13	50		6AqEq
1	500		4AEc
	625		Eqq
+69	0625		
373	800	0	-Cq2AE
3	1150	00	-CqEq
-40	4950	00	
+28	5675	00	*Ablatit*
R 3	4697	6256	
	8489	1800	*Divisor*
+3	4697	6256	*Ablatit*

Exemp. VI.

Exemplum VI.

1qq − 340c = 62106096

Lqq − BLc = Fqq.

6	2 1 0 6	6 0 9 6	(354
--3	4 0		--B
†81			Aqq
--91	8 0		BAc
--10	8 0		*Ablatit.*
R 17	0 1 0 6	6 0 9 6	
10	8		4Ac
	5 4		6Aq
	1 2		4A
† 11	3 5 2		
9	1 8 0		-B3Aq
	3 0 6 0		-B3A
	3 4	0	-B
--9	4 8 9 4	0	
† 1	8 6 2 6	0	*Divisor.*
54	0		4AcE
13	5 0		6AqEq
1	5 0 0		4AEc
	6 2 5		Eqq
† 69	0 6 2 5		
45	9 0 0		-B3AqE
7	6 5 0 0		-B3AEq
	4 2 5 0	0	-BEc
-- 53	9 7 5 0	0	
† 15	0 8 7 5	0	*Ablatit.*
R 1	9 2 3 1	6 0 9 6	
†	4 6 9 2	9 0 6 0	*Divisor.*
† 1	9 2 3 1	6 0 9 6	*Ablatit.*

Exemplum VII.

1qq − 77108000l = 085530576 Lqq − DcL = Fqq.

0	8 5 5 3	0 5 7 6	(426
--77	1 0 8 0	0 0	—Dc
+256			Aqq
--308	4 3 2 0	0 0	—DcA
--52	4 3 2 0	0 0	*Ablatit.*
R 53	2 8 7 3	0 5 7 6	
25	6		4Ac
	9 6		6Aq
	1 6		4A
+ 26	5 7 6		
--7	7 1 0 8	0 0 0	—Dc
+ 18	8 6 5 2	0 0 0	*Divisor.*
51	2		4AcE
3	8 4		6AqEq
	1 2 8		4AE
	1 6		Eqq
+ 55	1 6 9 6		
-- 15	4 2 1 6	0 0 0	—DcE
+ 39	7 4 8 0	0 0 0	*Ablatit.*
R 13	5 3 9 3	0 5 7 6	
† 2	2 0 3 0	4 0 8 0	*Divisor.*
† 13	5 3 9 3	0 5 7 6	*Ablatit.*

4 . 2
16
16
4
1764

4 . . 2
646 8
948
74088

Exemplum VIII.

32001 — 1c = 46577 Æquatio est ambigua.

CqL — Lc = Dc

(47 *Radix major.*

46	577	
32	00	Cq
--64		-Ac
+128	00	CqA
+64	00	*Ablatit.*
R -17	423	
4	8	-3Aq
	12	-3A
-4	92	
+3	200	Cq
--1	720	*Divisor.*
33	6	-3AqE
5	88	-3AEq
	343	-Ec
--39	823	
+22	400	CqE
-17	423	*Ablatit.*
R 00	000	

Exemplum IX.

32001 — 1c = 46577

(157 *Radix minor.*

46	577	Dc	
32	00	Cq	
--1		Ac	
+32	00	CqA	
31	00	*Ablatit.*	
R 15	577		
	3	3Aq	
	3	3A	
--	33		
+3	200	Cq	
2	870	*Divisor.*	
1	5	-3AqE	
	75	-3AEq	
	125	-Ec	
--2	375		
+16	000	CqE	
13	625	*Ablatit.*	
R 1	952	000	
	252	05	*Divisor.*
	745	107	*Ablatit.*
R 1	206	893	000 &c.

Exemplum X.

5 3 q — 1 c = 1 3 2 5 4 Æquatio est
BLq — Lc = Dc ambigua.

1 3 2 5 4	(47 Radix major.
5 3	B
— 6 4	-Ac
+ 8 4 8	BAq
+ 2 0 8	*Ablatit*
R -- 7 5 4 6	
4 8	-3Aq
1 2	-3A
-- 4 9 2	
4 2 4	B2A
5 3	B
+ 4 2 9 3	
— 6 2 7	*Divisor*
3 3 6	-3AqE
5 8 8	-3AEq
3 4 3	-Ec
-- 3 9 8 2 3	
2 9 6 8	B2AE
2 5 9 7	BEq
+ 3 2 2 7 7	
-- 7 5 4 6	*Ablatit*
R 0 0 0 0	

Exemplum XI.

5 3 q — 1 c = 1 3 2 5 4

1 3 2 5 4	Dc (20/05 Radix minor.
5 3	B
-- 8	-Ac
2 1 2	BAq
1 3 2	*Ablatit.*
R 5 4 0 0 0 0 0 0	
-- 1 2 0 0 0 0	--3Aq
-- 6 0 0	--3A
-- 1 2 0 0 6 0 0	
2 1 2 0 0	B2A
5 3	B
+ 2 1 2 0 5 3	
9 1 9 9 3 0	*Divisor.*
-- 6 0 0 0 0 0	--3AqE
-- 1 5 0 0 0	--3AEq
1 2 5	--Ec
-- 6 0 1 5 0 1 2 5	
1 0 6 0 0 0	B2AE
1 3 2 5	BEq
1 0 6 1 3 2 5	
4 5 9 8 2 3 7 5	*Ablatit.*
R 8 0 1 7 6 2 5 0 0 0	&c.

Exemplum XII.

600341 − 1c = 1023768

CqL − Lc = Dc.

	1023768	(236 Radix major.
	60034	Cq
	−8	-Ac
+	1200688	CqA
+	400688	*Ablatit*
R	-2983032	
	12	-3Aq
	6	-3A
	--126	
+	60034	Cq
−	65966	*Divisor*
	36	-3AqE
	54	-3AEq
	27	Ec
	-4167	
	+180102	CqE
	-236598	*Ablatit*
R--	617052	
	--96366	*Divisor*
	617052	*Ablatit*

Exem. XIII.

Exemplum XIII.

600341 − 1c = 1023768

	1023768	(171_5 Radix minor.
	60034	Cq
	-1	-Ac
+	60034	CqA
+	59934	*Ablatit*
R	424428	
	3	--3Aq
	3	--3A
	-33	
	+60034	Cq
	59704	*Divisor*
	21	--3AqE
	147	--3AEq
	343	--Ec
	-3913	
+	420238	CqE
+	416325	*Ablatit*
R	+8103000	
	591619	*Divisor*
	6016189	*Ablatit*
R	2086811000	
	59156257	*Divisor*
	1775556903	*Ablatit*
R	311254097000	
	59153637 91	*Divisor*
	295767161625	*Ablatit*
R	15486936375000 &c.	

Exemplum XIV.

1qq -- 72c + 2386001 = 87258157056

Lqq -- BLc + DcL = Fqq.

	8 7 2	5 8 1 5	7 0 5 6	(476
	-- 7	2		--B
+	2 3 8	6 0 0		Dc
	2 5 6			Aqq
	9 5 4	4 0 0		DcA
+	1 2 1 0	4 0 0		
	-- 4 6 0	8		BAc
+	7 4 9	6 0 0		*Ablatit.*
R	1 2 2	9 8 1 5	7 0 5 6	
	2 5	6		4Ac
		9 6		6Aq
		1 6		4A
	2 3	8 6 0 0		Dc
+	5 0	4 3 6 0		
	3 4	5 6		--B3Aq
		8 6 4		--B3A
		7 2		--B
	-- 3 5	4 3 1 2		
+	1 5	0 0 4 8		*Divisor.*
	1 7 9	2		4AcE
	4 7	0 4		6AqEq
	5	4 8 8		4AEc
		2 4 0 1		Eqq
	1 6 7	0 2 0 0		DcE
+	3 9 8	9 8 8 1		
	2 4 1	9 2		-B3AqE
	4 2	3 3 6		-B3AEq
	2	4 6 9 6		-BEc
	-- 2 8 6	7 2 5 6		
	1 1 2	2 6 2 5		*Ablatit.*
R	1 0	7 1 9 0	7 0 5 6	
	1	7 6 9 8	8 0 8	*Divisor.*
	1 0	7 1 9 0	7 0 5 6	*Ablatit.*

Exempl. XV.

Exemplum XV. Trisectionis.

3l — 1c = 1,2586407821 00 CqL — Lc = Dc.

	1 2 5 8 6 4 0 7 8 2 1	(0,4499 Subtensa Gr: 26.
	3 3	Cq
	- 6 4	-Ac
+	1 2	CqA
	1 1 3 6	*Ablatit.*
R	1 2 2 6 4 0	
	4 8	-3Aq
	1 2	-3A
	-4 9 2	
	+3	Cq
	2 5 0 8	*Divisor*
	1 9 2	-3AqE
	1 9 2	-3AEq
	6 4	-Ec
	- 2 1 1 8 4	
+	1 2	CqE
	9 8 8 1 6	*Ablatit*
R	2 3 8 2 4 7 8 2	
	2 4 1 7 8 8	*Divisor*
	2 1 6 6 5 1 5 1	*Ablatit*
R	2 1 5 9 6 3 1 1 0 0	
	2 3 9 5 0 6 2 3	*Divisor*
	2 1 5 4 5 8 5 5 0 1	*Ablatit*
R	0 5 0 4 5 5 9 9 0 0 0	

Exem. XVI.

Exemplum XVI. Quinquisectionis.

1qc-5c+5l = 1,14715287270209 2

Lqc-CqLc+FqqL = Gqc.

1	14715	28727	02092	
+	5	Fqq		
	-5	-Cq		
	32	Aqc		
1	0	FqqA		
+1	00032			
	-40	CqAc		
	96032	*Ablatit*		
R	18683	28727		
	8	0	5Aqq	
		80	10Ac	
		40	10Aq	
		10	5A	
	5		Fqq	
	+5008	8410		
	60		-Cq3Aq	
	30		-Cq3A	
		5	-Cq	
	-630	5		
	+4378	3410	*Divisor*	
	32	0	5AqE	
	4	80	10AEq	
	2	560	10AqEc	
		2560	5AEqq	
		1024	Eqc	
	20		FqqE	
+	20039	62624		

(0,2437
Subtensa
Gr: 14.

	240			-Cq3Aq	E
	480			-Cq3AE	q
	32	0		CqEc	
	-2912	0			
	17127	62624	*Ablatit.*		
R	1555	66103	02092		
	414	9122			*Divisor.*
	1242	65012	09443		*Ablatit.*
R	313	01090	92649	00000	

Notæ

Notæ in Exempla præcedentia.

IN Exemplis Sectionum 26 & 28, Numerum Juſtum voco eum, qui oritur ex applicatione poteſtatis Reſolvendæ ad gradum lateris ſuppoſiti, per quem facta eſt Depreſſio. Hæc enim menſura eſt, cui reliquæ ſpecies omnes legitimè aggregatæ, deberent eſſe æquales. Ut in Exemplo 1° Sectionis 26, 1c+238|6 −7|2q=L) 872|5. Si pro latere primo ſupponatur 5: Oportet eſſe C:5:+238|6−7|2Q:5:=872|5 diviſum per 5: hoc eſt 125+238|6−(7|2×25) 180, nempe 183|6 æqualem eſſe 174|5 Juſto. At major eſt: ideoque latus verum minus eſt quàm 5. Supponatur igitur iterùm 4: Et periculum fac, an C: 4:+238|6 −7|2Q: 4: æquetur 872|5 diviſo per 4.

Cæterùm nè in his Exemplis, ſicut etiam in ſequentibus, tentamenta hæc caſu merè fortuito ſuſcipiantur; Monendum erit.

Primò, ſi lateris eruti homogenea poteſtas excedat poteſtatem Reſolvendam; vel, ſi magnitudines augentes poteſtatem Reſolvendam, excedant eas quæ imminuunt: Latus A verum minus (ut plurimùm) erit latere eruto: Sin aliter, majus. Ut in hac Æquatione, 12+260000l=180931713.

Secundò, Si Diviſores ſub eodem ſigno cum Reliquo poteſtatis Reſolvendæ, excedant eos, qui ſunt ſub ſigno diverſo: Latus E verum (ut plurimum) minus erit quam Quotus: ſin aliter, majus: Ut in hac Æquatione, 1568 l−1c=21952. Idem etiam accidit in Æquationibus ambiguis, quando Reliquum poteſtatis Reſolvendæ eſt affirmativum: ut in hac Æquatione, 6768 l−1c=214273. Harum trium Æquationum ſolutio in praxi, poſt Notas oſtendetur.

Tertiò, Si poſt hæc Monita, nihilominus ſubſit dubitatio; tentamentum à 5 commodiſſimè erit inchoandum: Atque inde per numeros impares continuanda inquiſitio: ſive ea per Depreſſionem fiat, ſive per Logarithmos.

His præmonitis, reſtat ut Exempla ipſa diſcutiamus.

Ad Exempl: I. √qc1703 eſt 4+, per Sect: 18, Reg: 1. Nam ut ex Sect: 7. apparet, per Coëfficientes Analyticè reductos, non fit in primo puncto notabilis immutatio. Quare latus A verum erit 4.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 9: quia Diviſores ſub ſigno + (quod ſignum eſt ipſius Reſidui) excedunt eos qui ſunt ſub ſigno −.

Ad Exempl: II. 42) 247(6−, per Sect: 18, Reg: 2. Nam 42 Analyticè reductus, per Sect: 6 & 8, fit 252: major quàm 247. Eſtque Latus A verum minus quàm 6; quia C: 6−: excedit 247|6.

Ad Exempl: III. 10) 247 (24+=Q: 5−: per Sect: 18, Reg: 2. At 10 Q: 5:=250 ⊏ 247|6. monit: 1.

Ad Exempl: IV. √c44|3 eſt 3+, per Sect: 18, Reg: 3. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 8−, per Monit: 2.

Ad Exempl: V. √q12(4 est 3+, per Sect: 18, Reg: 3. Quare latus A verum est 3.

Latus E verum minus est quàm Quotus 9-, per Monit: 2.

Ad Exemp: VI. Coëfficiens lateralis 3(4 quadratoquadraticè multiplicatus, & auctus 6(2, fit 140, QQ: 3+: per Sect: 18, Reg: 4. Quare latus A verum est 3.

Latus E verum minus est quam Quotus 9 −, per Monit: 2.

Ad Exempl: VII. √c77 est 4, per Sect: 18, Reg: 3. Quare latus A verum est 4.

Ad Exempl: VIII. √q32 est 5(65, in 32 fit 180(8 mi 46(5, restat 144, C: 5: per Sect: 18, Reg: 4. At 144 excedit 46(5. Quare Latus A verum minus est quàm 5, per Monit: 1.

Latus E verum minus est quam Quotus 10, per Monit: 2.

Ad Exempl: IX, XI, XIII. Solutio facillima est per Divisionem, juxta Sect: 18, Reg: 3.

Ad Exempl: X. C: 5: est 125, mi 13, restat 112, C: 5 − : per Sect: 18, Reg: 4, At 112 excedit 13. Quare latus A verum minus est quam 5, per Monit: 1.

Latus E verum minus est quàm Quotus 12, per Monit: 2.

Ad Exempl: XII. √q6 est 2+, in 6 fit 12, mi 1, restat 11, C: 2(5 per Sect: 18, Reg: 4. At 11 excedit 1. Quare latus A verum paulò minus quam 2+, per Monit: 1.

Latus E verum minus est quàm Quotus 5-, per Monit: 2.

Ad

Ad Exempl: XIV. QQ: 7(2: est −2687. Et √c238(6 est 6(2, cujus QQ est + 1480. Tum − 2687 + 1480 = − 1207: Hic additus ad 872, dat 2079, QQ: 6+: per Sect: 18, Reg: 4. Et quia adjectitius −2687 major est quam ablatitius + 1480, erit latus A verum minus quàm 6, per Monit: 1.

Latus E verum minus est quam Quotus 9, per Monit: 2.

Ad Exempl: XV, XVI, Quia in utroque Æquationis ambiguæ Radix minor quæritur, nec obstant Coëfficientes etiam reducti, Analysis per Divisionem fiet, juxta Sect: 18, Reg: 1.

 Praxis

Praxis Exempli in Monito primo.

1c+26,0000=180931713.

1809 (4, latus A

260 Cq.

√q26 est 5, in 26 fit 130, tollatur ex 180, restat 50, C:3+: qui minor est quam 180. Quare latus A verum majus est quàm 3.

Praxis Exempli in Monito secundo.

15681-1c=21952

21	952	(28, Duo prima latera.
15	68	Cq
--8		Ac
+ 31	63	CqA
+ 23	36	*Ablat*
R - 1	408	
1	2	-3Aq
	6	-3A
- 1	26	
+ 1	568	Cq
+	308	*Divisor*

Signum R est -. At - 1(26 minor est quam + 1(568. Quare latus E verum majus est quam Quotus 4.

Praxis

Praxis Exempli posterioris in Monito secundo.

67681-1c=214273.

214	273	(47, Duo prima latera.
67	68	Cq
- 64		-Ac
+ 270	72	CqA
+ 206	72	*Ablat*
R + 7	553	
4	8	-3Aq
	12	-3A
--4	92	
+ 6	768	Cq
+ 1	848	*Divisor*

Signum R est +. At Divisor ex A lateris gradibus negativus, minor est Divisore Coëfficiente affirmativo; hoc est--4(92 minor est quam + 6(768. quare latus E verum majus erit quam Quotus 4.

De Logarithmis.

In Sectione XXVII. Logarithmorum doctrinam paucis tradidi: Sed satis luculentèr præsertim pro tribus prioribus Numerationis speciebus, scilicet Additione, Subductione, & Multiplicatione.

Operatio quidem in Addendo & Subtrahendo, si Indices sint affirmativi, à communi integrorum viâ nihil differt: parum etiam si sint negativi, ut ex his Exemplis apparet,

Inventio

Inventio fractionum $\left\{\begin{array}{l} \frac{13}{17}.\ 1,11394. \\ \\ 17.\ 1,23045. \end{array}\right.$ Et $\left\{\begin{array}{l} \frac{15}{32}.\ 1,17609 \\ \\ 32.\ 1,50515 \end{array}\right.$

Log: $\bar{1},88349$ Log: $\bar{1},67194$

Additio. Subductio.

$$\begin{array}{r|l} \text{Ad} & \bar{1},88349 \\ \text{adde} & \bar{1},67194 \\ \hline \text{Sum} & \bar{1},55543 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \text{Ex} & \bar{1},88349 \\ \text{tolle} & \bar{1},67194 \\ \hline \text{Rest} & 0,21155 \end{array}$$

Multiplicatio.

$$\begin{array}{rl} \text{Lateris} & 0\lfloor 0064 \\ 3 \times & \bar{3},80614 \\ \text{Cubus} & \bar{7},41842 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Lateris} & 0\lfloor 0064 \\ 2 \times & \bar{3},80614 \\ \text{Quadr:} & \bar{5},61228 \end{array}$$

Divisionis Logarithmi Indicem habentis negativum, per 2, 3, 4, 5, &c. difficultas constat in investigatione Indicis Quoti. Cui rei hæc inservit Tabella.

Divisores.		
2)	$\bar{1}.\bar{2}$	$\bar{1}$
	$\bar{3}.\bar{4}$	$\bar{2}$
	$\bar{5}.\bar{6}$	$\bar{3}$
	$\bar{7}.\bar{8}$	$\bar{4}$
3)	$\bar{1}.\bar{2}.\bar{3}$	$\bar{1}$
	$\bar{4}.\bar{5}.\bar{6}$	$\bar{2}$
&c	$\bar{7}.\bar{8}.\bar{9}$	$\bar{3}$
4)	$\bar{1}.\bar{2}.\bar{3}.\bar{4}$	$\bar{1}$
	$\bar{5}.\bar{6}.\bar{7}.\bar{8}$	$\bar{2}$
5)	$\bar{1}.\bar{2}.\bar{3}.\bar{4}.\bar{5}$	$\bar{1}$
	$\bar{6}.\bar{7}.\bar{8}.\bar{9}.\overline{10}$	$\bar{2}$
	40.30.20.10.0	

In

In hac Tabella Divisores sunt à sinistrâ intra lineam flexam.

Tum versùs dextram sequuntur Logarithmorum dividendorum Indices negativi.

His in singulis ordinibus collaterales adstant Quotorum Indices etiam negativi.

Subtùs autem qui scribuntur numeri, 0, 10, 20, 30, 40, Ostendunt numeros addendos primæ figuræ Logarithmi dividendi, cujus Index negativus invenitur supra in eâdem columnâ, juxta Divisorem. Ut si Logarithmus $\bar{7},41842$ postuletur dividi per 3: Quæratur $\bar{7}$ juxta 3) dabiturque collateralis $\bar{3}$, pro Indice Quoti: Et numerus 20 subtùs; qui additus figuræ dividuæ primæ 4, reddit ipsum 24: in quo Divisor 3 octiès continetur.

Divisio.

$$\begin{array}{rl} 3) & \bar{7},41842 \\ \text{Latus} & \bar{3},80614 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 2) & \bar{5},61228 \\ \text{Latus,} & \bar{3},80614 \end{array}$$

FINIS.

ELEMENTI DECIMI

EUCLIDIS

DECLARATIO.

Necnon

De SOLIDIS REGULARIBUS

TRACTATUS.

Authore

GUILELMO OUGHTREDO

ANGLO.

OXONIÆ,

Excudebat LEON. LICHFIELD, Veneunt apud THO. ROBINSON. *Anno Dom.* 1652.

Notæ seu symbola quibus in sequentibus utor:

Æquale =. Simile *Sim.*
Majus ⊏. Proxime majus ⊏.
Minus ⊐. Proxime minus ⊐.
Non majus ⊏. Æquale vel minus ⊏.
Non minus ⊐. Æquale vel majus ⊐.
Proportio, sive ratio æqualis ::
Major ratio. Minor ratio.
Continuè proportionales ∴.
Commensurabilia.
Incommensurabilia.
Commensurabilia potentiâ.
Incommensurabilia potentiâ.
Rationale, ῥητὸν, R, vel.
Irrationale, ἄλογον.
Medium sive mediale
Linea secta secundum extremam & mediam rationem } s
Major ejus portio σ
Minor ejus portio τ.
Z est A + E. ʒ est a + e.
X est A-E. ϰ est a-e

Z est Aq+Eq. ꝣ est aq + eq.
X. est Aq-Eq. ꝣ est aq-eq.
Æ est AE Erectang. æ est a e rectangulum.
▯ rectangulum. ▫ quadratum.
△ Triang. ♃ latus, sive radix.
m media proportionalis.
∽ est differentia duarum magnitudinum, ut B ∽ C significet vel B-C, vel C-B. in 113, 114 e 10.

ELEMENTI DECIMI
EVCLIDIS
Declaratio.

AD def: 1. Eandem mensuram duas magnitudines metiri, tum dicit, quando ipsarum quoti mensuras certas, & veris numeris explicabiles habent. Commensurabiles igitur magnitudines sunt, quarum ratio in veris numeris dari poterit: quales sunt in genere quadratico, radices quadratæ planorum similium: & in genere cubico, radices cubicæ solidorum similium. Exempli gratiâ, in planis 18 & 50, nempe 3×6, & 5×10, similibus (est enim 3.6::5.10) √q 18, & √q50 sunt latera cōmensurabilia; quia divisa per √q2 maximam eorum communem mensuram, dant √q 9 & √q 25, hoc est 3 & 5. Sunt igitur √q 18 & √q 50 in ratione 3 ad 5. Quippe 18 & 50 sunt ut Q. Q.

Ad def: 2. √q 12 & √q 64 sunt latera incommensurabilia: nam quamvis ad minores terminos poterint reduci per √q 4 maximam eorum communem mensuram; fientque √q 3 & √q 16: non tamen dicuntur commenſurabilia; quia non ſunt ut numerus ad numerum. Eſt enim $\sqrt{q}\,3$ numerus non verus, ſed ſurdus. Quippe 12 & 64 non ſunt ut Q. Q.

Ad def: 3. At vero linearum ſive laterum $\sqrt{q}\,12$ & $\sqrt{q}\,64$, quadrata 12 & 64 ſunt commenſurabilia; quia area 1 utrumque metitur: nam area 12, aream 1 continet duodecies; & area 64, ipſam aream 1, continet ſexagies & quater. Quare quadrata illorum laterum ſunt in ratione 12 ad 64. Atque hinc ſequitur, quod omne latus ſurdum generis quadratici numero rationali, ſive vero cuicunque, potentiâ eſt commenſurabile: modo ſi intelligantur ejuſdem eſſe generis ſive dimenſionis: At ſi unum ex iis intelligatur eſſe latus ſive linea, & alterum planum ſive ſuperficies, non erunt commenſurabilia potentiâ.

Ad def: 4. Sunt igitur lineæ potentiâ incommenſurabiles diverſorum generum: nempe una lateralis, altera quadratica; vel una quadratica, altera quadratoquadratica. Exempli gratia, laterum $\sqrt{q}\,3$ & $\sqrt{q}\,2$ quadrata ſunt 3 & 2: & inter ipſa planum medium proportionale $\sqrt{q}\,6$. Quare plana ſive potentiæ 3 & 2 incommenſurabilia ſunt ad planum $\sqrt{q}\,6$. Ideoque ipſorum latera $\sqrt{q}\,3$ & $\sqrt{q}\,2$ ad $\sqrt{qq}\,6$ ſunt incommenſurabilia etiam potentiâ. Atque hujuſmodi media proportionalia tum plana, tum latera, Euclides poſtea Media ſive Medialia nuncupat.

$\sqrt{q}3.$		$\sqrt{q}2.$
3.	$\sqrt{q}6.$	2.
$\sqrt{q}3.$	$\sqrt{qq}6.$	$\sqrt{q}2.$

Ad def. 5. Si linea propoſita vero numero ſit explicabilis; omnes lineæ veris numeris explicabiles ſunt

ſunt ipſi commenſurabiles. Si verò linea propoſita ſit latus ſurdum, puta $\sqrt{q}\,3$, linea illi quacunque ratione commenſurabilis invenitur per proportionem. Ut ſi ratio data ſit 2 ad 5: Dic $2.\,5 :: \sqrt{q}3.\ \sqrt{q}\,\frac{75}{4}$.

Dicitur ῥητὴ, ſive rationalis, linea vero numero explicabilis; ratione cujus aliæ lineæ ad ipſam comparatæ, conſiderantur vel commenſurabiles vel incommenſurabiles, idque longitudine vel potentiâ.

Atque his bene perſpectis, reliquæ definitiones nihil habebunt difficultatis.

Sequuntur Lemmata.

1. Rectangulum ſub ρτ & ρτ eſt ρτ. Nam irrationalium aggregatio quantacunque non mutat ſpeciem.

2. Si linea Z ſecetur inæqualiter in A & E, erit Z-2AE=Xq. Et Z+2AE=Zq.

3. Si linea Z componatur tum ex A+E, tum ex a+e: erit Z-ℨ=2æ-2Æ. Nam Z+2Æ=ℨ+2æ.

Item, ſi linea X conſtituatur tum ex A-E, tum ex a-e: erit Z-ℨ=2Æ-2æ Nam Z-2Æ=ℨ-2æ.

4. A.E::Aq Æ::Æ. Eq.

5. Si A & E ſint ⊐: erunt 1°, Aq, Eq, Z, X ⊏: ideoque ſimul ρτ vel μτ.

Erunt 2°, Aq, Eq, Z, X ⊏ 2Æ. per 4.

Erunt 3°, Z, 2Æ, Zq, Xq ⊏

Erunt 4°, X, 2Æ, Zq, Xq ⊏. Nam Zq=Z+2Æ: & Xq=Z-2Æ. & Zq=4Æ+Xq.

6. Si A & E ⊐, erunt Aq, Eq, Zq, Æ, Z, X, Xq ⊏.

Propositiones Elementi Xi.

9. Novem priores propositiones docent lineas commensurabiles esse, ut numerus ad numerum, atq; ideo eorum quadrata esse, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. In incommensurabilibus autem contra esse. Earum enim quadrata non sunt ut Q.Q. √q45 & √q20 sunt lineæ commensurabiles, quia ipsarum quadrata 45 & 20 sunt ut 9 & 4, numeri quadrati, quorum radices sunt 3 & 2, sunt igitur √q45 & √q20 in ratione 3 ad 2.

Coroll: ad 9. Lineæ ⊏⊐ sunt etiam ⊓: at non contra. Sed lineæ ⊏⊐ non sunt idcirco ⊓.

10. Si sit B.C::D.F. sintque B, C ⊏⊐ vel ⊏⊐: etiam D,F ⊏⊐ vel ⊏⊐ erunt.

12.14. Si B ⊏⊐ C, & C, D ⊏⊐ vel ⊏⊐, etiam B,D ⊏⊐ vel ⊏⊐ erunt.

13. Si B ⊏⊐ D; & C ⊏⊐ D: erit B ⊏⊐ C.

Coroll: ad 14. Si B ⊏⊐ C; at B ⊏⊐ D, & C ⊏⊐ F: erit D ⊏⊐ F.

16.17. A,E,Z sunt simul ⊏⊐ vel ⊏⊐.

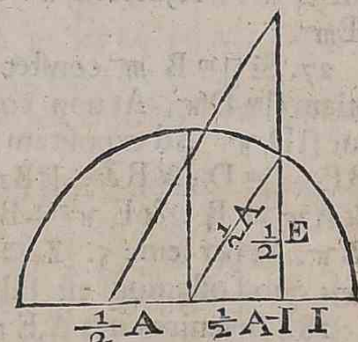
11. Invenire B, D ⊏⊐: & B, C ⊓. Sumantur duo aliqui numeri 3 & 2, qui non sint ut Q.Q. fiatque 3.2::B.F: Item B.D::D.F. Quare B.F::Bq.Dq. At B,F non sunt Q.Q: ideoque nec Bq.Dq sunt ut Q.Q. Ergo B,D ⊏⊐ per 9.

Iterum fiat B.C::C.D: sunt igitur Bq,Cq ⊏⊐: quare B,C ⊓. √q 3. √qq 6. √q 2.

Coroll: ad 11. m̃ inter duas ⊏⊐, est utrivis ipsarum ⊓; & ϰ, si alterutra ex iis sit ϰ.

15. Si sit A. E:: a. e. & sit A ⊏⊐ √q: Aq-Eq; scil. X.: erit etiam a ⊏⊐ √q: aq-eq: scil. Ꝣ. Nam Aq. Eq::aq. eq: quare Aq. Aq-Eq::aq.aq-eq. Ergo per 10.

18.19. Si sint duæ lineæ A & E: adplicetur autem ad A rectangulum æquale quadrato semissis E, deficiens figura quadrata: hoc est, dividatur A in duas partes A-I & I, sic ut ▯m segmentorum æquetur □o ½E; nempe AI-Iq = ¼Eq. & sint segmenta A-I & I ⊏⊐.



Erit etiã A ⊏⊐ √q:Aq-Eq. & conversè: & contra. Nã per 47 e 1, ¼Aq-¼Eq = Q: ½A-I: quare √q:Aq-Eq: est A-2I. At per 16 & hypoth. A-2I, & A sunt ⊏⊐.

22.23. Ex A, E ϰ ⊓ fit Æ ϰ, scil. m̃: & √qÆ, est ϰ & m̃, (vide annotata ad def. 4). Nam A. E:: Aq. Æ. quare Æ ⊏⊐ Aq ϰ, erit ϰ. Est etiam Æ m̃. Nam si A sit √q3, & E √q2; erit Æ √q6 planum, cujus radix est √qq6. At vero tum quadrata 3, √q6, 2; tum ipsorum radices √q3, √qq6, √q2 sunt ∸ & in neutris medius terminus est ejusdem rationis sive commensurationis cum suis extremis, sed utrique incommensurabilis.

24. Si B sit ⊓ saltem ipsi C m̃, erit etiam B m̃. Nam ad expositam R per 23, fiat RD = Cq m̃, & RF = Bq. Quare RD ⊏⊐ RF: ideoque F, D ϰ ⊏⊐. Est autem per 23, R ⊏⊐ D: idcirco etiam R ⊏⊐ F. Ergo Bq m̃: atque ipsa B m̃.

20.21.25. Ex A,E ϰ ⊏⊐, fit Æ similiter ϰ: & conversè

versè. Et ex A, E mr̃ ⊓, fit Æ mr̃ : & conversè. Nam A.E::Aq. Æ. At Aq est ϰ vel mr̃. ergo & Æ similiter ϰ vel mr̃, per 24.

26. Ex A, E mr̃ ⊐, fit Æ ϰ vel mr̃. Nam ad expositam R, fiat RB=Aq : & RC=Æ : & RD=Eq. Sunt igitur B,D, ϰ ⊓, per 23. Et quia C est m÷ inter B & D erit Cq ϰ ideoque & ipsa C ϰ. Si igitur C ϰ ⊓ R, erit Æ ϰ. Si vero C ϰ ⊓ R, erit & Æ mr̃.

27. Si □m B mr̃ constet ex □o C mr̃, & □ D : erit etiam □m D ϰ. At non conversè. Nam aliter fingatur □ D ϰ. Ad expositam R fiat RA=□m C mr̃ ; & RE=□m D ; & RZ=□B mr̃. Erit igitur Z ϰ ⊓ R : & A ϰ ⊓ R : & E ϰ ⊓ R. Quare A,E ϰ ⊓. Estque Z ϰ. At per lem : 5. Z ⊓ Zq. Est igitur Zq ϰ, & Z ϰ : quod ostensum est falsum. Ergo.

28. Invenire duas A,E mr̃ ⊐, ita ut Æ sit ϰ. Sumantur B,C ϰ ⊐ : fiatque B. A::A.C::C.E. Dico I°, A,E mr̃ : Nam Aq=BC mr̃, per 22. estque B.C::A.E. Dico II° A, E mr̃ ⊐ : Nam B.C::A. E. Quare per 24. Dico III° Æ ϰ : Nam AE=Cq ϰ.

29. Invenire duas A,E mr̃ ⊐, ita ut Æ sit mr̃. Sumantur B,C,D ϰ ⊐ : fiatque B.E::E.D::A.C. Dico I°, A,E mr̃ : Nam Eq=BD mr̃. Dico II°, A,E mr̃ ⊐ : Nam D.C::E.A. Dico III°, Æ mr̃ : Nam AE=BC mr̃.

Exemplum pro 28. B 2. C √q3. A √qq 12. E √qq 27/4. AE 3.

Exemplum pro 29. B √q5. C 2. D √q3. E √qq15. A √qq 80/3. AE √ 20.

30. Invenire duas A,E ϰ ⊐, ita ut A ⊓ sit √qX. Sumantur duo numeri quadrati aq, eq ; ita ut aq-eq non sit Q. Tum expositâ A ϰ, fiat aq.aq-eq:: Aq.Eq. Erit igitur etiam aq. eq::Aq. X., per 19 e 5.

Dico I°, A,E ϰ ⊐ : Nam Aq,Eq non sunt ut Q.Q.

Dico II°, A ⊓ √qX. : Nam sunt ut Q.Q.

Exemplum pro 30. Aq & aq sunt 9. eq & X. 4.

31. Inuenire duas A, E ϰ ⊐, ita ut A ⊓ √qX. Sumantur duo numeri aq, eq, quadrati ; ita ut aq+eq non sit Q. Tum exposita A ϰ, fiat aq+eq.aq::Aq.Eq. Erit igitur aq+eq. eq::Aq. X., per 19 e 5.

Dico I°, A, E ϰ ⊐ : Nam Aq, Eq non sunt ut Q. Q.

Dico II°, A ⊓ √qX. : Nam Aq, X. non sunt ut Q.Q.

Exemplum pro 31 aq & eq 4. eq & X. 1.

32. Invenire duas A, E mr̃ ⊐, ita ut Æ sit ϰ ; & A ⊓ √qX. Sumantur per 30, duæ a, e ϰ ⊐, ita ut a ⊓ √q: aq-eq. fiatque a. A::A. e::e. E. Dico I°, A,E mr̃ ⊐, per 22 & 24. Nam Aq=ae mr̃ : & a.e:: A. E, ⊐. Dico II°, Æ ϰ : Nam AE=eq ϰ. Dico III°, A ⊓ √qX., per 15. Nam a ⊓ √q : aq-eq. Exemplum a 2. e √q3. A √qq 12. E √qq 27/4.

Quod si per 31, Sumerentur a,e ϰ ⊐ ; ita ut a ⊓ √q: aq-eq : Inventæ fuerint A, E mr̃ ⊐, ita ut Æ sit ϰ ; & A ⊓ √qX.

Exemplum a √q5. e 2. A √q 20. E √q 64/5.

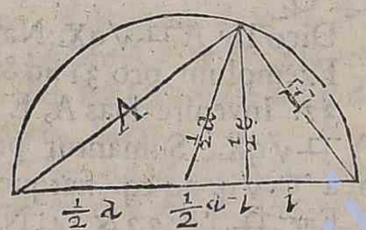
33. Invenire duas A, E mr̃ ⊐, ita ut Æ sit mr̃ ; & A ⊓ √qX. Sumantur per 30, duæ a, e ϰ ⊐ ; ita ut a ⊓ sit √q:aq-eq: & sumatur i ϰ ⊐ utrique a,e: fiatque a. A::A.i::e. E. Dico I°, A, E mr̃ ⊐ : Nam Aq=a i mr̃ : Estque a. e::A. E. Dico II° Æ mr̃. Nam AE=ie mr̃. Dico III°, A ⊓ √qX. : Nam a ⊓ √q: aq-eq : quare per 15.

Exemplum a 2. e √q 5. i √q 2. A√qq 8. E√qq ½.
Quod si per 31, sumerentur a, e ɤ ꟻ, ita ut a ⊓ √q: aq-eq: Inventæ fuerint A, E mr ꟻ, ita ut Æ sit mr: & A ⊓ √qX..

Exemplum, a √q 5. e 2. A √qq 20. E√qq 16/5.

Præparatio ad propositiones 34, 35 ; 36, demonstrandas in tribus lemmatibus.

Lemma primum. Si ad a adplicetur rectangulum æquale Q.½e, deficiens figura quadratâ: divisâ scil. a in a-i & i; ita ut a-i. ½e::½e. i. Erit ½ a-i=√u: ¼aq-¼eq: sicut in schemate apparet, Atq; per hanc interpretationē, a-i=½a+√u:¼aq-¼eq. & i=½a-√u: ¼aq-¼eq. Et quia Aq=Q: a-i:+¼eq. & Eq=iq+¼eq. Nempe Q.½a ±√u:¼aq-¼eq:+¼eq. Hac adhibita interpretatione



Erit A=√u:½aq+√u:¼aqq-¼aqeq.

Et E=√u:½aq--√u:¼aqq--¼aqeq.

Nam in quadratione lineæ ½a. ±√u: ¼aq --¼eq. Z est ¼aq+¼aq--¼eq. Et Æ est √u:1/16 aqq-1/16 aqeq: quod duplicatum fiet √u:¼aqq-¼aqeq. huic si adjungatur+¼eq; abolebitur alterum -¼eq.

Lemma secundum: a--i.i::Aq.Eq, ⊓.

Nam a.A::A.a--i } Quare { a.a--i::aq. Aq.
Et a. E::E.i } { a. i::aq. Eq.

Lemma tertium: a.A::E.½e.

34. Invenire duas A,E ꟻ, ita ut Z sit ɤ, & Æ mr. Sumantur per 31, a, e ɤ ꟻ, ita ut a ⊓ √q: aq-eq: &

& ex ipsis inveniantur A,E, Sicut in *Lem. pri.*

Dico I° A,E ꟻ: Nam per *Lem. sec.* Aq,Eq ⊓.

Dico II° Z ɤ: Nam in 31, A, E (quibus hic respondent a,e) sunt ɤ ꟻ.

Dico III°, Æ mr. Nam per *Lem. tert.* AE=½ a e mr.

35. Invenire duas A,E ꟻ, ita ut Z sit mr, & Æ ɤ. Sumantur per 32, a,e mr ꟻ, ita ut æ sit ɤ, et a ⊓ √q: aq--eq: Et ex ipsis inveniantur A, E, sicut in *lem. pri.*

Dico I° A,E ꟻ, per *Lem. secun.*

Dico II°, Z mr, per 32.

Dico III°, Æ ɤ: Nam per *lem. tert.* AE=½ a e. ɤ.

36. Invenire duas A,E ꟻ, ita in Z et Æ sint mr. Sumantur per 33, a,e mr ꟻ, ita ut æ mr, et a ⊓ √q: aq--eq. & ex ipsis inveniantur A, E, sicut in *Lem. pri.*

Dico I°, A,E ꟻ, per *lem. sec.*

Dico II° Z mr, per 33.

Dico III°, Æ mr: per *lem. tert.* Consulatur etiam Schema pro hisce tribus propositionibus.

Coroll: ad 36: Hinc inveniri possunt duæ lineæ mr ꟻ, scil. √q Z, & √q Æ.

Principium Senariorum per Compositionem.

37. Si sumantur a, e ɤ ꟻ; tota a + e hoc est ʒ, erit ɤ; vocaturque *Binomium*, scil. 2ℓ *Bin.* I. Nam per lemma 5, ʒq ⊓ ʒ ɤ.

2+√q3. Cujus Q: est 7 + √q48.

38. Si sumantur a, e mr ꟻ (per 28) ita ut æ sit ɤ, tota

tota ʒ erit ˁɣ ; vocaturque *Bimediale* prius, fcil : ℨ *Bin*: II. Nam per lemma 5, ʒq ⊐ æ ɣ.

√qq12 + √qq$\frac{27}{4}$. Cujus Q: eft √q$\frac{147}{4}$ + 6.

39. Si (per 29) fumantur a, e m~ ꟼ, ita ut æ fit m~ : tota ʒ erit ˁɣ ; vocaturque *Bimediale* pofterius, fcil : ℨ *Bin* : III. Nam ʒq, hoc eft $ʒ_1$ + 2æ, eft ˁɣ. Nam expofitâ R, fiat RT=ʒq; & RP=$ʒ_1$ m~, per 16 & 24 : Erit RT-RP=2æ. Sunt autem per lem: 5, RP & RT-RP m~ ⊐ : Quare P, T-P ɣ ⊐ ad R. Et per 37, T eft ˁɣ. Et per lem: 1, RT hoc eft ʒ q ˁɣ.

√qq$\frac{80}{3}$ + √qq 15. Cujus Q: eft √q$\frac{145}{3}$. + √q80.

40. Si (per 34) fumantur a, e ꟼ, ita ut $ʒ_1$ fit ɣ, & æ m~ ; tota ʒ erit ˁɣ ; vocaturque Major, fcil : ℨ *Bin* : IV. Nam per lem: 6, ʒq ⊐ $ʒ_1$ ɣ. √u : $\frac{5}{2}$ + √q $\frac{5}{4}$. pl: √u: $\frac{5}{2}$ - √$\frac{5}{4}$. Q. eft 5 + √q 20.

41. Si (per 35) fumantur a, e ꟼ, ita ut $ʒ_1$, fit m~, & æ ɣ ; tota ʒ erit ˁɣ, vocaturque *Potens rationale & mediale*, fcil. ℨ *Bin:* V. Nam per lem. 6, ʒq ⊐ æ ɣ.

√u: √q5 + 1 : pl: √u: √q5-1. Q. eft √q 20 + 4.

42. Si (per 36) a, e ꟼ, ita ut $ʒ_1$ & æ fint m~ ⊐ ; tota ʒ erit ˁɣ, vocaturque *Potens duo medialia*. Scil. ℨ *Bin*. VI. Nam ʒq, hoc eft $ʒ_1$ + 2æ eft ˁɣ. Expofita enim R, fiant RT=ʒq, & RP=$ʒ_1$. erit RT-RP =2æ. Sunt autem RT. & RT-RP m~ ⊐ Quare per 22, P, T-P ɣ ⊐ ad R. Et per 37 T eft ˁɣ. Et per lem. 1, RT hoc eft ʒq ˁɣ. Ergo ʒ ˁɣ.

√u: √q5 + √q3 : pl: √u: √q5 - √q3. Q. eft √q20 + √q8

43.44.45.46.47.48. Neque ulla ex dictis fex lineis ˁɣ, ʒ poteft dividi in fua nomina a, e, præterquam in uno eodemque puncto. Nam aliter dividatur iterũ ʒ in fua nomina A, E. Erit (per lem. 3) Z-$ʒ_1$=2æ-2Æ.

2Æ. At (per 37 & 40) in ℨ *Bin*. I, IV. Z-$ʒ_1$ eft ɣ; & 2æ-2Æ m~, per 27. Et (per 38 & 41) in ℨ *Bin*. II, V, Z--$ʒ_1$ eft m~; & 2æ--2Æ ɣ. Quare eadem quantitas erit ɣ & ˁɣ Quod eft abfurdum. In ℨ vero *Bin*. III, VI, Quoniam in 39 & 42, fi fupponatur ˁɣ ʒ dividi in a, e ; fiatque RT=ʒ q, & RP=$ʒ_1$, & RT-RP=2æ; demonftratum eft ˁɣ T dividi in nomina P, T-P ɣ ⊐. Item fi iterum fupponatur ˁɣ ʒ dividi in A, E, alia nomina ; fiatque RT=ʒq, & RS=Z & RT-RS =2Æ ; fimiliter demonftrabitur ˁɣ T. dividi iterum in nomina S & T-S ɣ ⊐, diverfa ab iis P & T-P. quod eft contra priorem partem hujus demonftrationis. Eft enim ˁɣ T *Binomium*.

Definitiones	&	Proprietates	
ℨ *Binom. & Apotom.*		*Binomiorum & Apotom.*	
I a, e ɣ ꟼ : æ m~		A ⊐ √qX.. A ⊐ R	ꟼ ɣ
II a, e m~ ꟼ : æ ɣ		A ⊐ √qX.. E ⊐ R	
III a, e m~ ꟼ : æ m~		A ⊐ √qX.. A, E ⊐ R	
IV a, e ꟼ : $ʒ_1$ ɣ : æ m~		A ⊐ √qX.. A ⊐ R	A, E
V a, e ꟼ : $ʒ_1$ m~ : æ ɣ		A ⊐ √qX.. E ⊐ R	
VI a, e ꟼ : $ʒ_1$ & æ m~ ⊐		A ⊐ √qX.. A, E ⊐ R	

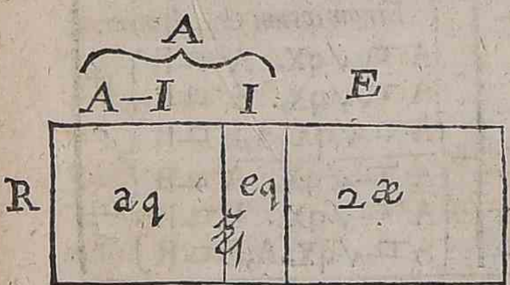
49.50.51.52.53.54. Invenire fex *Binomia* A+E. Sumatur N [9] & dividatur tum in 5 & [4] tum in 6 & 3 : & exponatur R. [9] [4] fcil : numeri quadrati.

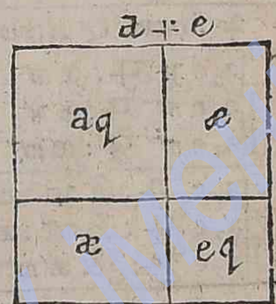
Pro *Bin*. I. IV Sit A ⊐ R ; fiatque [9]. $\frac{5}{6}$ :: Aq. Eq.

Pro *Bin*. II. V. Sit E ⊐ R; fiatque $\frac{5}{6}$. [9] :: Eq. Aq.

Pro *Bin*. III. VI. Sumatur tertius N 2, qui nec ad ad 9, nec ad 5, nec ad 6, ut Q.Q. fiatque 2. [9] :: Rq. Aqϒ. Deinde [9]. 5/6 :: Aq.Eq: qui non sunt ut Q.Q. Quare in omnibus sex sunt Aq, Eq, ϒ⊐⊏; & A, E ϒ⊤⊢. Item quia 9-5=4; & 9-6=3, erit [9].[4]/3 :: Aq.X.: ideoq; A, √X.⊐⊏,⊐⊏.

55.56.57.58.59.60. Si singula sex *Binomia* A+E ducantur in expositum R, √q: AR+ER: constituet ordine singulas species 2æ *Binom.* Nam (consideratis prius intentè proprietatibus cujusque tum *Binomii*, tum 2æ *Bin.* in tabella præmissa) dividatur A in A-I & I, ita ut AI-Iq=¼Eq. Erit igitur A-I. ½E :: ½E.I. fiat etiam aq=AR-IR: & eq=IR.





Probatur 1°, a+e esse √q: AR+ER. Est enim AR-IR. ½ER :: ½ER.IR: Item aq.æ::æ.eq. Quare ½ER=æ. Ergo Q. a+e:=AR+ER.

Probatur 11°, In tribus prioribus *Binom*: a, e esse ⊤⊢. Nam quia (per 18) AR-IR ⊐⊏ IR, erit AR-IR

⊐⊏

⊐⊏ AR: at (per *lem.* 5.) AR ⊤⊢ ER: ergo AR-IR ⊤⊢ ER: hoc est aq ⊤⊢ æ: Est autem aq. æ:: a.e.

In tribus posterioribus *Binom*: a, e esse ⊤⊢. Nam (per 19) AR-IR, IR, hoc est aq, eq ⊐⊏.

Probatur 111°, In *Binom*: I. a, e esse ϒ. Nam AR-IR, IR, hoc est aq, eq ⊐⊏ sunt AR ϒ.

In *Bin*: II, a,e esse μ: Nam quia A-I, I ⊐⊏ A ⊤⊢ R; Erit AR-IR, IR, hoc est aq, eq μ: at a, e ⊤⊢. Item æ esse ϒ: Nam 2æ=ERϒ.

In *Bin*: III, a, e esse μ, ut ante. Item æ esse ϒ: Nam ER, hoc est 2æ, μ, quia E ϒ ⊐⊏ R.

In *Bin*: IV. aq+eq, hoc est AR, esse ϒ. Nam A ϒ ⊐⊏ R. Item 2æ, hoc est ER, esse μ: ut ante.

In *Bin*: V. aq+eq, hoc est AR, esse μ Nam A ϒ ⊤⊢. Item 2æ, hoc est ER, esse ϒ. Nam E ϒ ⊐⊏ R.

In *Bin*: VI, aq+eq, hoc est AR; Item 2æ, hoc est ER, esse μ. Nam A, E ϒ ⊐⊏ R.

Atque in omnibus his tribus posterioribus liquet a & e esse ⊤⊢, quia aq, eq ⊐⊏.

Consect: Latus quadratum singulorum *Binomiorum* A+E constituet ordine singulas species 2æ *Bin*: a+e. Nam posita R. esse 1, nihil per multiplicationem immutabitur. Unde majus quadratum erit A-I cujus latus est a: & minus I, cujus latus est e. Ostensum autem est ad prop. 34, in lem. pri: A-I esse ½A+√u:¼Aq-¼Eq. Et I esse ½A-√u:¼Aq-¼Eq. Atque hinc patet Analysis *Binomii*: cujus hæc est regula.

Si è quadrato semissis nominis majoris tollatur quadratum semissis nominis minoris; & latus quadratum excessus semissi nominis majoris addatur;

B dabit

dabit quadratum majus: sin detrahitur, minus.

Si igitur semis nominis majoris, & latus quadratum excessus, sint commensurabiles, 2ę *Bin:* erit bimembre. Si incommensurabiles, quadrimembre.

61. 62. 63. 64. 65. 66. Si quadratum ex ⋎ a + e, 2ę *Bin:* aliqua, ad expositam R applicetur; latitudinem faciet A+E, idem *Binomium*. Nam (sicut in Schemate ad 55) fiat AR+ER = Q: a+e: Et AR-IR = aq. Et IR = eq: ideoque ER = 2æ. Probatur I°.

In tribus prioribus *Binomiis*, A esse ⊓ √qX: Nam a, e ⊓̶; quare AR-IR, IR ⊓. Ergo per 18.

In tribus posterioribus *Binomiis*, A esse ⊓̶ √qX: Nam a, e sunt ⊓̶: quare AR-IR, IR ⊓̶. Ergo.

Probatur II°, A,E esse ⋎ ⊓̶, &c. Nam in *Bin:* I. A est ⋎ ⊓ R; & E ⋎ ⊓̶ R: est enim AR, hoc est aq+eq ⋎. & ER, hoc est 2æ ⊓̶ aq+eq, per lem. 5.

In *Bin:* II, E est ⋎ ⊓ R: & A ⋎ ⊓̶ R. Est enim ER, hoc est 2æ ⋎: Et AR, hoc est, aq+eq, ⊓̶ æ, per lem. 5.

In *Bin:* III, A & E sunt ⋎ ⊓̶ R: Est enim AR, hoc est ℨ: & ER, hoc est, 2æ, ㎡.

In *Bin:* IV, A est ⋎ ⊓ R: & E ⋎ ⊓̶ R: est etiam AR, hoc est ℨ, ⋎; & ER, hoc est, 2æ, ㎡. Et

In *Bin:* V. VI, similiter ex proprietatibus eorum poterit argui.

67. Si *Binomio* alicui A+E ⊓ sit B+C; Erit etiam *Binomium* ordine idem. Nam fiat A+E. B+C:: A.B::E.C, ⊓, & quia A, E, ⋎ ⊓̶, etiam B,C ⋎ ⊓̶. per 14. & 16. Item per 15, Si A, √q: Aq-Eq ⊓ sit vel ⊓̶; Erit etiam B, √q: Bq-Cq: ⊓ vel ⊓̶.

68. Si

68. Si in 2ę *Bin:* II. III, a+e ⊓ b+c: Erit *Bimediale* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c::a.b::e.c, ⊓. Sunt autem a, e ㎡ ⊓̶: Ergo b, c, ㎡ ⊓̶ per 24. Item a.c::aq. æ. Et b.c::bq.bc: quare aq.bq::æ.bc, ⊓. Ergo si æ ⋎ sit vel ㎡; Etiam bc ⋎ vel ㎡ erit.

69. 70. 71. Si in tribus posterioribus 2ę *Bin:* a+e ⊓̶ b+c: Erit 2ę *Bin:* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c::a.b::e.c, ⊓̶ saltem. Sunt autem a, e ⊓̶. Ergo b, c ⊓̶. Item quia aq. bq:: eq. cq:: aq+eq. bq+cq, ⊓̶ saltem. Si aq+eq ⋎ vel ㎡; etiam bq+cq. erit ⋎ vel ㎡. Denique quia aq.æ:: a.e:: b.c::bq.bc; erit aq.bq::æ.bc, ⊓̶ saltem. Si æ ⋎ sit vel ㎡; etiam bc ⋎ vel ㎡ erit.

72. 73. Si duo spacia ℨ & 2æ componantur, quorum unum est ⋎, & alterum mediale; sitque ⋎ majus; recta totum spacium potens erit 2ę *Bin:* I. vel IV. Sin ㎡ majus; recta totum spacium potens erit 2ę *Bin:* II, vel V. Si vero duo spacia ㎡ ⊓̶ componantur: recta totum spacium potens erit 2ę *Bin:* III, vel VI. Nam si ad expositam R adplicetur AR+ER = ℨ + 2æ, conjunctim & seorsim, nempe AR = ℨ: & ER = 2æ; sive unum ex ipsis sit ⋎, & alterum ㎡: sive utrumque ㎡ ⊓. Clarum erit AR, ER esse ⊓; ideoque A, E, ⋎ ⊓̶. Quare si A ⊓ √qX, erit A+E unum ex tribus prioribus *Binomiis*. Si verò A ⊓̶ √qX, erit A+E unum ex tribus posterioribus *Binomiis*. Quodcunque autem ex ipsis sex fuerit; latus illius (quod etiam est √u: ℨ+2æ:) erit 2ę *Bin:* ordine idem. per 55.56.57.58.59.60.

Principium Senariorum per detractionem.

74, 75, 76, 77, 78, 79. Si ab a majore nomine
cujusvis ꝛe *Bin:* auferatur e nomen minus. Reli-
quum a-e erit ℞, ꝛe *Apotome* ejusdem ordinis: vo-
caturque *vel Apotome*, *vel Residuum mediale primum*,
vel Residuum mediale secundum, *vel Minor*, *vel Cum ra-
tionali totum mediale faciens*, *vel Cum mediali totum me-
diale faciens*.

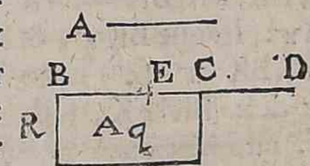
Nam Idem probari potest de Ȣq, quod de ʒq pro-
batum fuit, in 37, 38, 40, 41. Sed pro ꝛe *Apot*: III.
vel VI, ad expositam R, fiant RP=Ȣq: & RT=ʒ:
Et RT-RP=2æ. Et reliqua fiant sicut in 39. & 42.
Nam ʒ-2æ=Ȣq.

80, 81, 82, 83, 84, 85. Lineis hisce sex ℞ a-e, ꝛe
Apot: una tantum congruit recta linea e, pro minore
nomine. Nam aliter constituatur linea Ȣ, nempe
a-e, etiam ex A-E. Per lem: 3, Z-ʒ=2Æ-2æ:
At in ꝛe *Apot*: I. IV, Z-ʒ est ℞, & 2Æ-2æ est mr.
Et in ꝛe *Apot*: II. V, Z-ʒ est mr: & 2Æ-2æ est ℞
(per 37, 38, 40, 41:) quare eadem quantitas est ℞ &
℞: quod est absurdum: In ꝛe vero *Apot*: III. VI.
Quoniam (sicut est in 45 & 48) Si supponatur ℞Ȣ
constitui ex a, e; fiatque RP=Ȣq; RT=ʒ: &
RT-RP=2æ: demonstratum est ℞P constitui ex
nominibus T, T-P, ℞ꟻ. Item si iterum suppona-
tur ℞Ȣ constitui ex A, E, aliis nominibus; fiatque
RP=Ȣq: RC=ʒ: & RC-RP=2æ. Similiter
demonstrabitur ℞P constitui ex nominibus C, C-P
(diversis a T & T-P) ℞ꟻ. Quod est contra prio-
rem

rem partem hujus demonstrationis. Est enim ℞P
Apotome.

86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111. demonstrantur verbatim fere de Ȣ sicut de ʒ: 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73.

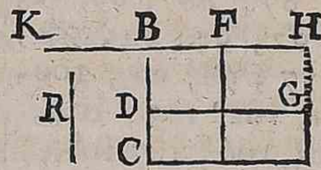
112. Eadem linea ℞ non est *Apotome*, & *Bino-
mium*. Nam esto A *Apotome*, puta ꝛe *Apot*: I: Expo-
sitâ R, fiat R×BC=Aq. quare per 98 & 61, BC erit
Apotome I; ei congruat CD. Sunt igitur BD, CD
℞ꟻ; & majus nomen BD⊓R. Rursus ponatur A
Binomium, puta *Rad*: *Bin*: I, fiatque R×BC=Aq: Erit
per 61 BC *Bin*: I: cujus no-
mina sint BE, CE, ℞ꟻ; &
BE⊓R. Sunt igitur & per
16, BD, BE, ED ℞⊓:
ideoque ED, CD ℞ꟻ:
quare CE *Apot*: ℞. At CE fuit
& ℞. Quod est absurdum.



113, 114. Rq applicatum ad *Binomium*, la-
titudinem facit *Apotomen*. Sed applicatum ad *Apo-
tomen*, latitudinem facit *Binomium*. Utrobique au-
tem nomina sunt ⊓ proportionalia, & utriusque
ordo idem. Nam in utroque Schemate, fiat BC×BF
=Rq=DC×BH ℞⊓. Est igitur BC.DC:: BH.BF:
Et (BC ∽ DC) BD. DC:: (BH ∽ BF) FH. BF. His sic
ordinatis,

Pro 113, Esto *Binomium* aliquod BC, scil:
BD+DC: fiatque FH-BF. BF:: BF. BK. Est igitur
(BF

(BF+BK) FK. BK:: FH. BF:: BD. DC, ᴦ⊐. Quare FK, BK⊐. Item (FK+FH) HK. FK:: (BK+BF) FK. BK, ⊐. Et HK. BK:: HKq. FKq:: FKq. BKq ⊓. Unde & per 16, HK, BK, BH⊓: At BH ᴦ: quare HK, BK ᴦ⊓: Et FK, BK ᴦ⊐.



Ergo per def: FK-BK, ſcil. BF eſt *Apotome*.

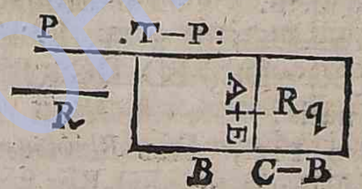
Pro 114. Eſto *Apotome* aliqua BC, ſcil. DC-BD: fiatque FH. BF:: HK. FK:: (FH-HK. BF-FK) FK. BK:: FH. BF:: BD. DC ᴦ⊐. Quare HK. FK:: FK. BK ⊐: Et HKq, FKq ⊓. Unde & per 16, HK, BK, BH ⊓. At BHᴦ: Itaque BK ᴦ, & FK, BK ᴦ⊐. Ergo per def: BK+FK, ſcil. BF. eſt *Binomium*.

Secundò DC, BK ⊓: Et BD, FK ⊓. Nam BK ⊓BH ⊓DC. Et DC. BK:: BD. FK. Ergo

Tertio Proportionalia.

Quarto ſunt in eodem ordine; per 15 & 14.

115. Si *Apotomes* T-P, & *Binomii* A+E nomina ſint ⊓ & proportionalia: Nempe T. A ⊓:: P. E ⊓: Dico ▯ T-P in A+E eſſe ᴦ. Nam expoſita R, fiat A+E in C-B=Rq. Eſt igitur C-B *Apotome*; Et A. C ⊓:: E. B ⊓. per 113: Quare

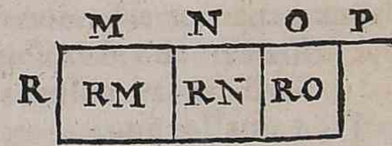


C. T.

C. T ⊓:: C-B. T-P ⊓:: A+E in C-B ᴦ. A+E in T-P etiam ᴦ. Et √q: A+E in T-P: ᴦ.

116. A Mediali M fieri poterunt innumeræ lineæ ᴦ, quæ nec Mediæ ſunt, nec ullæ ex bis ſenis antedictis. Nam expoſita R, fiat MR; & ſit N=√q MR. Dico N eſſe ᴦ, per lem: 1: at nec mediale; per 23: nec ullam ex bis ſenis, per 61, 62, 63, 64, 65, 66, & 98, 99, 100, 101, 102, 103.

Deinde fiat RN. & ſit O=√q RN: Dico O ᴦ nec Mediale eſſe, nec ullam ex bis ſenis illis.



Tertio fiat OR, & ſit P=√q OR: Dico P ᴦ eſſe nec Mediale, nec ullam, &c. Et ſic in infinitum. Neque etiam ᴦ N, O ſunt eædem. Nam N=√q MR. & O=√q NR: &c.

117. Diameter quadrati eſt lateri incommenſurabilis: Nam alias ſi ſit ⊓: eſto Diameter ad Latus, ut numerus D ad numerum L; ſintque minimi termini in eadem ratione: Et ipſorum quadrata ſunt verè numeri quadrati. At verò L non poteſt eſſe 1; quia quadratum diametri ad quadratum lateris eſt ut 2 ad 1: ideoque 2 eſſet numerus verè quadratus. Nec poteſt L eſſe numerus aliquis multitudinis: quia cùm ſit Dq. Lq:: 2. 1; & Lq metiatur Dq; etiam L. metietur D: ideoque D & L non erunt rationis ſuæ termini minimi: Eſt enim numerus multitudinis maxima uniuſque communis menſura.

Finis Elementi decimi EUCLIDIS.

De Solidis Regularibus, *Tractatus*.

1. FIGURA quævis polygona rectilinea dividitur in triangula duobus pauciora, quam est numerus laterum. Nempe quadrangulum dividitur in duo triangula: quinquangulum in tria, &c.

2. Quare si è numero laterum tollatur 2, & reliquus duplicetur: vel si è numero laterum duplicato tollatur 4: habebis *summam angulorum rectorum* in rectilinea quavis figura interius comprehensorum. Sic triangulum intra se continet duos rectos: quadrangulum quatuor, quinquangulum sex: &c.

3. Figuræ autem cujusvis rectilineæ anguli exteriores omnes æquantur quatuor rectis.

4. Quare si quatuor anguli recti dividantur per numerum laterum, sive angulorum: quotus erit quantitas *unius anguli exterioris*, in figura rectilinea ordinata. Sic angulus exterior in trigono ordinato est $\frac{4}{3}$ recti, sive grad. $\frac{360}{3}$, in tetragono ordinato $\frac{4}{4}$ recti, sive gradus $\frac{360}{4}$: in pentagono ordinato $\frac{4}{5}$ recti, sive gradus $\frac{360}{5}$, &c.

5. Si quantitas anguli exterioris tollatur ex duobus rectis: vel si summa angulorum rectorum interiorum dividatur in numerum laterum: habebis quantitatem *unius anguli interioris*, in figura rectilinea ordinata.

dinata. Sequitur pars prior ex 4: posterior ex 2. Exempli gratia, In octogono ordinato, anguli unius exterioris quantitas est $2\text{-}\frac{4}{8}$ vel Gra: $180\text{-}\frac{360}{8}$. Item 8)12(1 $\frac{1}{2}$ recti: vel Gra: 8)12×90(135.

6. Numerus angulorum planorum in solido quovis regulari, invenitur multiplicando numerum angulorum planorum unius basis in numerum basium. Nempe anguli plani sunt, in (4), 3×4: in (6), 4×6: in (8), 3×8: in (20), 3×20: in (12), 5×12.

7. Numerus angulorum solidorum in solido quovis regulari, invenitur dividendo numerum angulorum planorum in solido illo, per numerum angulorum planorum circa unū angulum solidum. Nempe anguli solidi sunt in (4), $\frac{3\times4}{3}$: in (6), $\frac{4\times6}{3}$: in (8) $\frac{3\times8}{4}$: in (20), $\frac{3\times20}{5}$: in (12), $\frac{5\times12}{5}$.

8. Numerus linearum lateralium in solido quovis regulari, est semis numeri angulorum planorum in illo solido. Atque hic etiam est numerus rectangulorum, sub latere, & lineâ perpendiculari è centro basis in latus. Nam unaquæque linea lateralis duobus inservit angulis.

9. Quare rectangulum sub latere, & linea perpendiculari è centro basis in latus, est superficiei totius, in (4), $\frac{1}{6}$: in (6) & (8), $\frac{1}{12}$: in (20) & (12), $\frac{1}{30}$. Est 6 & 7 e 14.

10. Solidum quodque regulare æquale est superficiei suæ trienti ducto in lineam perpendicularem è centro suo in basem.

11. Si linea ς secetur secundum extremam & mediam

diam rationem, ut σ sit majus segmentum, & τ minus: Dico σq = ςτ = στ+τq. per 11 & 3 e 2.

12. Q: $\frac{1}{2}$ς+σ: = 5Q: $\frac{1}{2}$ς. Nempe $\frac{1}{4}$ςq+ςσ+ (σq) ςτ. Est 1 & 2 e 13.

13. Q: $\frac{1}{2}$σ+τ: = 5Q: $\frac{1}{2}$σ. Nempe $\frac{1}{4}$σq+ (στ+τq) ςτ. Est 3 e 13.

Quare σ.τ :: τ.σ-τ. Nam (per 11.) σq-στ = τq.

14. ςq+τq = 3σq. Nempe σq+ (2στ+τq+τq) 2ςτ. Est 4 e 13.

15. ς+σ.ς :: ς.σ. Nempe ς+σ.ς :: σ+τ.σ. Est 5 e 13.

16. Si ς sit ℌ, σ erit *Apotome*. Nam quia per 13, $\frac{1}{2}$ς+σ. $\frac{1}{2}$ς :: √q5.1: Erunt σ+$\frac{1}{2}$ς, $\frac{1}{2}$ς ℌ ꝗ, per def: 6 e 10. Et per 37 e 10, erit σ+$\frac{1}{2}$ς+$\frac{1}{2}$ς *Binomium*. Ergo per 74 e 10, σ+$\frac{1}{2}$ς-$\frac{1}{2}$ς *Apotome*, hoc est σ.

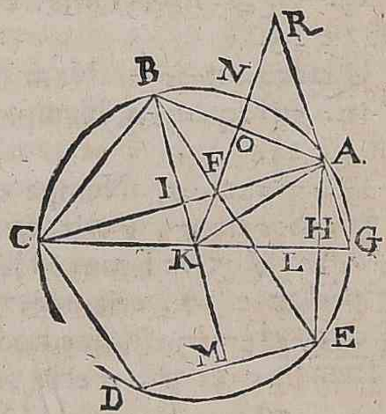
Item si ς sit ℌ, τ erit *Apotome*. Nam per 61 & 98 e 10, $\frac{\sigma q}{\varsigma ℌ}$ (hoc est τ) *Apotome*. vide 14. Est 6 e 13.

17. Si ς sit subtendens angulum pentagoni ordinati; erit σ latus pentagoni. Dico in Schemate, AC. CF :: CF. AF: Et CF = CB = AB. Nam quia trianguli BCF, omnes tres ang: = $\frac{10}{5}$ recti: è quibus ang: BCF = $\frac{2}{5}$ recti; & ang: CBF = $\frac{4}{5}$ recti: tertius igitur ang: CFB = $\frac{4}{5}$ recti: quare CF = CB = AB. Et quia liquet tri: ACB, BAF sim: Erit AC.AB :: AB. AF: Ergo. Est 8 e 13.

Consect. Et si ex angulo B per centrum, ad oppositum latus pentagoni, ducatur BKM, secans ipsam AC in I: secabitur etiam linea BM secundum extremam & mediam rationem in puncto I. Nam quia in tri: EBM, lateri EM parallela est FI: erit per 2 e 6, IM. IB :: FE. BF :: CF. FA. Ergo.

18. Si

18. Si circuli alicujus radius σ, erit τ latus decagoni. Nam quia arcus ABC=2GAN, erit ang: RKG=KGA=KAG: ideoque tri: RGK, KAG ſim. Eſtque RG KG:: KG. AG. Atque AR =KG, quia ang: $\frac{1}{2}$RKG=KRG. Secatur igitur RG ſecundum mediam & extremam rationem in puncto A. Ergo latus decagoni AG eſt minus ſegmentum. Eſt 9 e 13. Quare etiam ſi ς ſit Radius, erit σ latus decagoni.



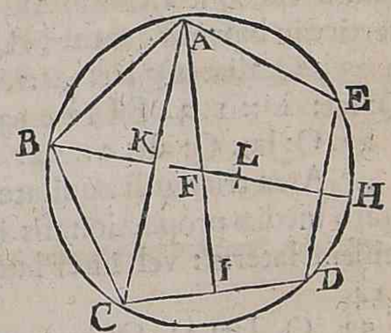
19. Perpendicularis KH vel KO, a centro in latus pentagoni ordinati, æquatur ſemiſummæ Radii & lateris decagoni, Nempe KO=$\frac{1}{2}$RG=$\frac{1}{2}$KR. Nam quia KR=RG; ſublato utrinque radio, manebit RN=AG. Eſtque KO=RO, per 2 e 3. Eſt 1 e 14.

20. Quadratum lateris pentagoni ordinati, minus quadrato Radii, æquatur quadrato lateris decagoni: Nempe AEq-KGq=AGq. Nam quia AHq+GHq =AGq: Et quia KG ſecatur med: & extr: ratione in L; eſtque KL=AG: Erit AEq+GLq=4AGq: Et per 14, KGq+GLq=3AGq. Fiat ſubductio. Eſt 10 e 13.

21. Quadratum lateris pentagoni, plus quadrato lineæ

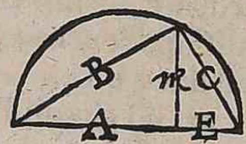
lineæ ſubtendentis angulum pentagoni, æquatur quinque quadratis Radii. Nempe in ſchemate præcedente, AEq+CAq=5KGq. Nam CAq+AGq= 4KGq: & per 23, AEq-AGq=KGq. Fiat additio. Eſt hæc 3 e 14.

22. Si circuli Radius ſit rationalis, latus pentagoni inſcripti erit irrationale, Nempe Minor. Nam quia triang: rect: AIC, AKF ſim: erit CI. $\frac{1}{2}$AC::KF. $\frac{1}{2}$AF: ideoque 2CI. CK::KF. $\frac{1}{4}$AF=FL, qui quadrans eſt Radii: Et CD+CK. CK:: KL. FL. At per 17, ſi CD ſit σ, CK erit $\frac{1}{2}\varsigma$: quare ſi FK ſit σ, FL erit $\frac{1}{2}\varsigma$: & per 12, KLq=5FLq. Eſt autem BLq=25FLq: quare BL. KL:: $\sqrt{q}$25. $\sqrt{q}$5, ϒ ꟻ, per def: 6 e 10: Et ſic ipſorum quadrata: unde etiam BLq. BLq-KLq:: 25. (25-5) 20:: 5. 4: Et BL. $\sqrt{u}$: BLq-KLq:: $\sqrt{q}$5. 2, ⊓. Quare BL-KL, nempe BK eſt ϒ *Apotom*: IV, per def: & 47 e 10: quippe oſtenſum eſt, A, E ϒ ꟻ; A⊓-$\sqrt{}$X; & A⊓R. Item BCq= BKq+CKq=BKq+BK×BH (per 35 e 3) =ϒBK×ϒ BH. Ergo per 95 e 10, BC eſt ♃ *Apot.* IV, hoc eſt Minor. Eſt 11 e 13.



23. In

23. In triang. rect. cujus Hypotenusa Z dividitur in segmenta A,E, perpendiculari ex angulo recto demisso, Erit 1°, ZA=Bq: & ZE=Cq. & AE=mq.



II°, A.E::Aq.mq::mq. Eq:: Bq. Cq.

III, Z. A:: Zq.Bq:: Bq.Aq::Cq. mq.

IV°, Z.E::Zq.Cq::Cq.Eq:: Bq.m q.

24. Si triangulum æquilaterum inscribatur circulo: 1° perpendicularis è centro in latus æquatur $\frac{1}{2}$ Radii. Ideoque altitudo Δi, sive perpendicularis è vertice in basem æquatur $\frac{3}{2}$ Radii.

2°, Q: dia. Q: lat: Δi:: 4.3: ideoque Q: Rad. Q: lat: Δi:: 1.3. Est 12 e 13.

3°, Q: lat. Q: alt: Δ::4.3. sc: 3. $\frac{9}{4}$. Est 12 e 14.

4°, Area trianguli æquilateri $\sqrt{\frac{27}{16}}$, æquatur quadrato mediæ proportionalis inter altitudinem & semissem lateris: vel inter latus & $\frac{1}{2}$ altitud. Est 29 e 14.

5°. Q. lat: Δi. Q: perpend: à cent: in bas:: 3. $\frac{1}{4}$. Est 18 e 14.

25. Si quadratum inscribatur circulo: latus ipsius erit $\sqrt{2}$: Et Q: lat: □i. Q: dia: : 1.2.

26. Si eidem circulo inscribatur, tum triangulum æquilaterum, tum quadratum: 1°, Q: lat: Δi. Q: lat: □i::3.2: per 24 2°, & 25. Est 16 e 14.

2°, Q: alt: Δi. Q: lat: □i:: 9.8: per 24 3°, & 26 1°.

3°, Δ. □:: $\sqrt{27}$. 8: scil: $\sqrt{\frac{27}{16}}$. $\sqrt{4}$.

27. Latera quinque solidorum regularium expo-

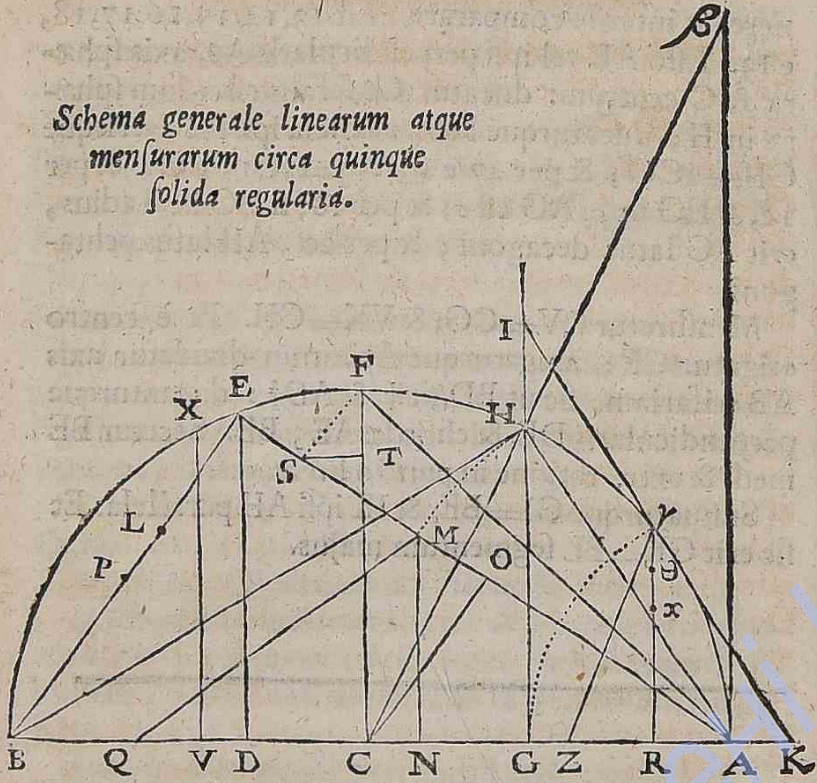
nere,

nere, & inter se comparare. Est 13,14,15,16,17,18, e 13. Esto AB vel ipsi perpendicularis Aβ, axis sphæræ,& C centrum: ducatur Cβ secans circulum sphæræ in H; ducaturque HG parallela ipsi Aβ: eritque GH=2CG; & per 47 e 1, Rq=5Q: $\frac{1}{2}$ HG; & per 12, si HG sit ς, AG est σ; & per 18, si HG sit Radius, erit AG latus decagoni; & per 20, AH latus pentagoni.

Mensuretur CV=CG; & VX=GH. Et è centro erigatur CF; jungaturque AF. tum dividatur axis AB trifariam, sic ut BD sit $\frac{1}{3}$, & AD$\frac{2}{3}$: ducanturque perpendicularis DE, & chordæ AE, BE. Secetur BE med: & extr: ratione in puncto L.

Statuaturque GI=BE; & IK ipsi AH parallela: Et sic erit GK=BL segmentum majus.

Schema



Schema generale linearum atque menſurarum circa quinque ſolida regularia.

His diligenter memoriæ mandatis, ad ipſa quinque corpora regularia declaranda pergemus.

28. De Tetraëdro. Latus (4) eſt AE; & DE Radius circuli ambientis baſem ipſius triangulam. Nam per 23 IV°, AEq. DEq::AB. BD::3.1::Q: lat. Δ^{i}. Q: Rad: per 24 2°. Et CD & perpendicularis è centro ſphæræ in baſem, ſcil: $\frac{1}{6}$ axis. Et $\frac{1}{2}$ DE eſt perpendicularis è centro baſis in latus, per 24 1°.

29. De Hexaëdro. Latus (6) Eſt BE vel GI. Nam per

per 23 IV, ABq.BEq::AB.BD::3.1. Et quia per 23 II°, AEq=2BEq: erit ABq=3BEq (hoc eſt quadratũ diagonii Cubi æquatur tribus quadratis lateris): Eſtque per 25, Q:lat:□^{i}. Q:dia circ::1.2::BEq AEq. Quare $\frac{1}{2}$AE eſt Radius circuli ambientis baſem triangulam (6). Liquet etiam quod $\frac{1}{2}$BE æquatur perpendiculari, tum è centro ſphæræ in baſem, tum è centro baſis in latus. Denique quia ABq.BEq::6.2::Q: axis. Q:lat:(6): Erit 2 Q: axis=6Q:lat(6); quæ ſuperficies eſt Cubica.

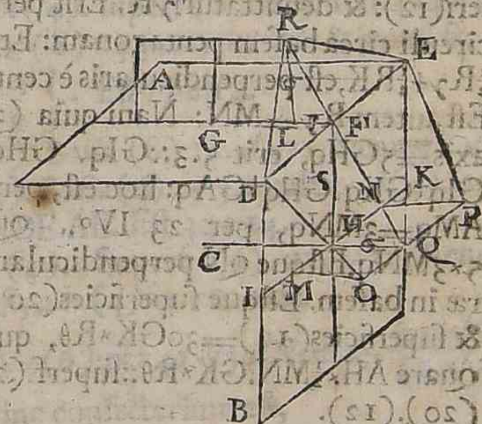
30. De Octaëdro. Latus(8) eſt AF vel AS. Nam(8) conſtat duabus pyramidibus quadrangulis, quarum altitudo eſt ſemiaxis: & Q: axis. Q:lat (8) ::2.1. Et quia per 24 2°, Q:latΔ^{i}, quod eſt Q:lat(8). Q:diam: circuli ambientis::3.4. Erit Q: axis. Q: diam::3.2. Ductaq; ST parallela axi, quia ASq.CTq::ABq.BEq::3.1: Eſtque ASq=AFq=$\frac{1}{2}$ABq: quare CTq=$\frac{1}{2}$BEq=$\frac{1}{4}$AEq: ideoque CT=$\frac{1}{2}$AE; qui radius eſt circuli ambientis tum baſem(6), tum baſem (8). Et ſi AS vel AF ſit latus Δ^{i}, erit CT Radius circuli ambientis per 24 2°: Et $\frac{1}{2}$CT perpendicularis è centro Δ^{i} in latus, per 24 1°. Eſt autẽ ſuperficies (6)=12BE×$\frac{1}{2}$BE: & ſuperficies (8)=12AF×$\frac{1}{2}$CT, quod ſatis liquet: Quare BE×$\frac{1}{2}$BE. AF×$\frac{1}{2}$CT::ſuperf:(6). ſuperf:(8):: (6).(8)::BE.AC. Eſt 27 e 14. Quoniam AFq.ACq:: BEq. CTq=$\frac{1}{2}$BEq.

31. De Icoſaëdro. Latus(20) eſt AH vel AM. Nam Radiis GH & VX æqualibus cogitentur duo circuli deſcribi, perpendiculariter inſiſtentes plano AHXB: atque in ipſis includi, tum pentagonum ordinatum lateris AH, tum decagonum lateris AG: ſic ut pun-

ctum H ſit angulus pentagoni, & X decagoni: unde anguli pentagoni in uno circulo perpendiculariter imminebunt angulis decagoni in altero, ad diſtantiam GV = GH. Et è ſingulis angulis unius pentagoni ducantur duæ hypotenuſæ ad angulos alterius utrinque proximos: Item ex ſingulis angulis utriuſque pentagoni, in proximum axis terminum A vel B, ducantur hypotenuſæ: quæ quidem omnes, hypotenuſæ erunt triangulorum rectangulorum, quorum Cathetus æqualis eſt Radio GH, & baſis lateri decagoni AG; ideoque ſingulæ æquales lateri pentagoni AH. Quare deſcripta erit figura conſtans 20 triangulis æquilateris & æqualibus. Includi autem angulos illos omnes ſphæra, patet ex angulo H: nam circumvolutus ſemicirculus AHXB reliquos ſimiliter angulos perſtringet. Eſt igitur GH Radius circuli ambientis pentagonum (20); & ψ quia 5.1::CHq GHq: eſt autem CH = $\frac{1}{2}$AB, & CG = $\frac{1}{2}$GH: Atque idcirco AH latus(20) eſt ψ, nempe Minor, per 25. Tum demiſſa MN perpendiculari in axem, ſtatuatur MQ = AC, $\frac{1}{2}$ axis: erit MN Radius circuli circa baſem, per 24 2°; quia AM.MN::AE.DE::3.1. Et $\frac{1}{2}$ MN perpendicularis è centro baſis in latus, per 24 1°: Et NQ perpendicularis è centro ſphæræ in baſem; quia ibi Q eſt inſtar centri ſphæræ. Denique BEq. GHq::5. 3: Nam BEq. ABq::1.3: & AEq. GHq::CHq. CGq::5.1.

32. De Dodecaëdro. Latus (12) eſt BL vel GK, in præcedente ſchemate: & BE vel GI (latus (6)) ſubtendit angulum baſis pentagonæ (12). Nam in ſequente ſchemate, deſcribantur duæ baſes (6), AD, EB

EB, quarum commune latus eſt DE; & centrum ſphæræ C; & centrum baſis unius G, alterius H. A centro G ducatur GF perpendicularis lateri DE; & per centrum H ducatur IHK ipſi DE parallela. Erunt igitur GF, HI, HK, ſemiſſes lateris (6): ſecentur ſingulæ in στ punctis L,M,N; ut majus ſegmentum ſit ubique centro proximum: & in punctis L,M,N, erigantur tres perpendiculares LR, MO, NP, æquales ipſi majori ſegmento: & ducatur OP, latus (12): eſt enim IK.OP::ς.σ::BE.BL, ſchematis præcedentis. Ducantur etiam DO, DR, EP, ER, quæ cum OP includunt pentagonum, baſem quidem (12). Nam



1°, Pentagonum DOPER eſt in uno plano: Eſt enim RFQ una recta linea, per 32 e 6.

2°, Eſt æquilaterum: eſt enim DOq = MOq pl. DI q+Mq, hoc eſt, 3MOq, per 14. At etiam 4MOq = OPq. Et ſic de cæteris.

3°, Eſt equiangulum. Eſt enim DPq = DIq pl. INq+NPq, hoc eſt, 3DIq, per 15 & 14. At etiam 4DIq = DEq. Et ſic de cæteris.

4°, Circumſcribitur ſphæra; Eſt enim CPq = CQq+QPq, hoc eſt, 3CHq, per 15 & 14. At

 Q:

Q: axis. Q: lat(6) :: 3.1 :: Q: $\frac{1}{2}$axis. Q: $\frac{1}{2}$ lat(6). Et ſic de reliquis.

5°, Circa (6) deſcribentur 12 ejuſmodi pentagona: Cum enim per II, ſint in (6) latera 12; unicuique lateri ſuum adhærebit pentagonum; ſicut intuenti perſpicuum erit.

6°, Latus (12) eſt Apotome: Eſt enim DE latus (6) ɤ ⊤ axi: at per 16, ſi ς (DE) ſit ɤ, σ (OP) erit Apotome.

His ſic oſtenſis, ad prius illud ſchema redeundum denuò erit: In quo menſuretur Kγ=KG=BI. lateri(12): & demittatur γR. Erit per 20, γR Radius circuli circa baſem pentagonam: Et per 19, Rθ, ſcil. $\frac{1}{2}$Rγ+$\frac{1}{2}$RK, eſt perpendicularis è centro baſis in latus. Eſt autem Rγ=MN: Nam quia (3BEq) 3GIq=Q: axis=5GHq, erit 5.3 :: GIq. GHq :: GKq. GAq :: GIq+GKq. GHq+GAq: hoc eſt, per 17 & 21: 5Rγq. AMq=3MNq, per 23 IV°. Quare 3×5Rγq=5×3MNq. Eſtque QN perpendicularis à centro ſphæræ in baſem. Eſtque ſuperficies(20)=30 AH×$\frac{1}{2}$MN: & ſuperficies(12)=30GK×Rθ, quod ſatis conſtat. Quare AH×$\frac{1}{2}$MN. GK×Rθ :: ſuperf. (20). ſuperf. (12) :: (20). (12).

33. Si axis ſphæræ æqualis ſit, tum $\sqrt{}$u: ςq+σq unius lineæ, tum $\sqrt{}$u: ςq+τq alterius lineæ: erit σ latus (20); & τ latus (12). Nam in Schemate priore generali, ς.σ :: GH. AG :: BH. AH: At ABq=BHq+AHq. Item ABq=3BEq=Q: BE+BL: pl BLq: hoc eſt 3ςq=Q: ς+σ: pl σq. Eſt enim σq=ςτ. Eſt 23 e 14.

34. $\sqrt{}$u: ςq+σq. $\sqrt{}$u: ςq+τq :: lat (6). lat (20) hoc eſt, Kγ. Zγ :: BE. AH, vel GI. AM: ſecta ſcil. KZ=Rγ med: & extr: ratione in puncto R. Nam per 23 IV°,

AMq=3Rγq: Et per 17, Zγq=3RKq. Quare AM. Zγ :: Rγ. RK :: ς.σ :: GI. KG. Eſt 10 e 14.

35. Latus (6). Latus (20) :: ſuperf (12). ſuperf (20). hoc eſt GI. AM :: KG×Rθ. AM×$\frac{1}{2}$Rγ. Nam KG×Rθ=GI×$\frac{1}{2}$Rγ. Eſt enim GI. KG :: ς.σ :: Rγ+RK. Rγ :: ($\frac{1}{2}$Rγ+$\frac{1}{2}$RK) Rθ. $\frac{1}{2}$Rγ, per 18. Eſt 9 e 14.

36. Q: perpendic: è centro ſphæræ in baſem (4). Q: perpend: è centro ſpæræ in baſem (8) :: 1.3 :: CDq. $\frac{1}{4}$BEq.

37. Q: lat (4). Q: lat (8) :: Baſis (4). Baſis (8). Nam AEq ABq :: 2.3: Et ABq. AFq :: 4.2. Eſt 14 e 14. Hinc conſectarium eſt,

quod, Superf (4). ſuperf (8) :: 2.3: ſcil. 4×4. 8×3.

38. Q: (4). Q: (8) :: 4. 27. per 36 & conſect: 37 Nempe × $\left\{\begin{matrix} 1.3 \\ 4.9 \end{matrix}\right\}$. Eſt 17 e 14.

39. Baſis (6). Baſis (8) :: 8. $\sqrt{27}$: Nempe $\frac{4}{3}$. $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

40. Baſis (4). Baſis (6) :: $\sqrt{3}$.2 :: altit: Δ^i(4). latus Δ^i(4): nempe $\frac{1}{2}$BE. AE. Eſt 30 e 14.

41. Superf (4). Superf (6) :: 1. $\sqrt{3}$: Nempe $\sqrt{\frac{4}{3}}$×4. 8: hoc eſt, Δ^m (4)×4. 2Q: axis.

42. Tria (4)=(6): per 41 & 36: Nempe × $\left\{\begin{matrix} 1.\sqrt{3} \\ 1.\sqrt{3} \end{matrix}\right\}$ eſt 32 e 14. Hinc conſectarium eſt,

quod $\left\{\begin{array}{l} \text{Priſma baſis \& altitudinis (4)=(6). Et} \\ \text{Pyramis baſis \& altitudinis (6)=(4).} \end{array}\right.$

43. (8). 3 (4) :: latus (8). latus (4): Nempe 2. ($\sqrt{\frac{16}{27}}$×3) $\sqrt{\frac{16}{3}}$ :: $\sqrt{2}$. $\sqrt{\frac{8}{3}}$. Eſt 22 e 14.

44. Si latus (8)=$\sqrt{}$u: σq+τq, erit latus (20)=$\sqrt{2\tau q}$. Nam BH+HA ſecatur med: & extr: ratione in H: Eſtque 2σq+2 =2AFq=ABq=

BH

BHq+AHq. Ergo AHq$=2\tau$q. Est 24 e 14.

45. Si latus (8)$=\sqrt{}$u: $\frac{1}{2}\varsigma$q$+\frac{1}{2}\tau$q, Erit latus (12) $=\tau$. Nam GI+GH secatur med. & extre: ratione in G: Estque ςq$+\tau$q$=2$AFq$=$ABq$=3$GIq$=$Q: GI+GK:+GKq. Ergo GKq$=\tau$q. Est hæc 25 e 14.

46. Si latus (4)$=\sqrt{}$u: σq$+\tau$q, erit latus (20) $=\sqrt{\frac{3}{2}}\tau$q. Nam BH+HA secatur media & extr: ratione in H: & $\frac{3}{2}\sigma$q$+\frac{3}{2}\tau$q$=\frac{3}{2}$AEq$=$ABq$=$BHq +AHq. Ergo AHq$=\frac{3}{2}\tau$q. Est hæc 26 e 14.

47. Si latus (6)$=\sqrt{}$u: σq$+\tau$q, erit latus (20) $=\sqrt{3}\tau$q. Nam BH+AH secatur med. & extr. ratione in H: & 3σq$+3\tau$q$=3$ GIq$=$ABq$=$BHq+AHq. Ergo AHq$=3\tau$q

48. Si latus (6)$=\sqrt{}$u: ςq$+\tau$q, erit latus (12) $=\sqrt{3}\tau$q. Nam GI+GK secatur med. & extrem. ratione in H: & 3ςq$+\sigma$q$=3$GIq$=$Q: GI+GK:+GKq. Ergo GKq$=3\tau$q.

49. Si axis sphæræ sit ϰ, superficies tum (4), tum (8), erit m. Nam quia 3. 2 :: Q:axis. AEq: erit Q: lat. (4)$=\frac{2}{3}$Q:axis: est etiam Q:lat. (8)$=\frac{1}{2}$Q:axis: scil. utrumque ϰ: quare & ipsorum latera sunt ϰ. At in Δ^o, per 24 3°, Latus. altitud :: 2. $\sqrt{3}$, ϰ ꝟ. ergo per 22 e 10, area Δ^i est m. Est 13 e 14.

Notandum autem, quod in his quæ tum de elemento X, tum de V corporibus regular. scripta sunt, propositionum numerus est juxta Ch. Clavium.

Corporum

Corporum quinque regularium mensuræ, ad axem sphæræ 2. Consulatur Schema generale.

I. *In Tetraëdro.*

AE latus (4), est $\sqrt{\frac{8}{3}}$: 1,632932.

DE semidiameter circuli ambientis basem triangulam (4), est $\sqrt{\frac{8}{9}}$: 0,942809.

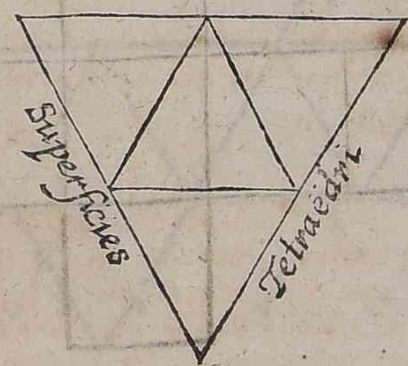
Altitudo basis (4), est 1,414213.

Area basis (4), est 1,154657.

Superficies (4), est 4,618628.

CD perpendicularis è centro sphæræ in basem (4), est $\frac{1}{3}$, 0,333333.

Soliditas (4), est 0,513216.

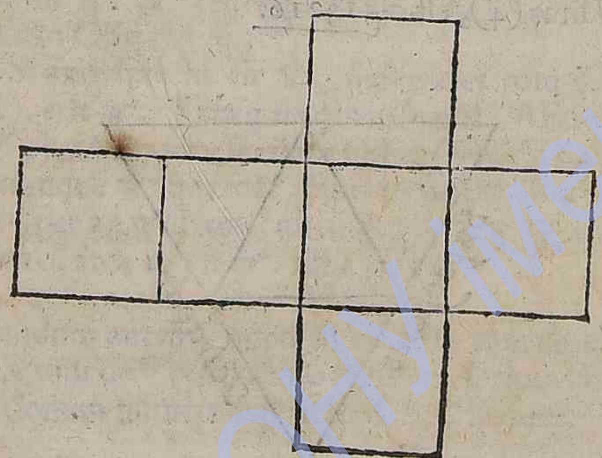


II.

II. *In Hexaëdro.*

BE latus (6), est $\sqrt{\frac{4}{3}}$; 1|154700.
CT est semidiameter circuli ambientis basem quadrangulam (6), $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0|816490.
Area basis (6), est $\frac{4}{3}$: 1|333333.
Superficies (6), est 8: Nempe bina quadrata axis sphæræ.
$\frac{1}{2}$BE perpendicularis è centro sphæræ in Basem (6) est $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|577175.
Soliditas (6), est 1|539600.

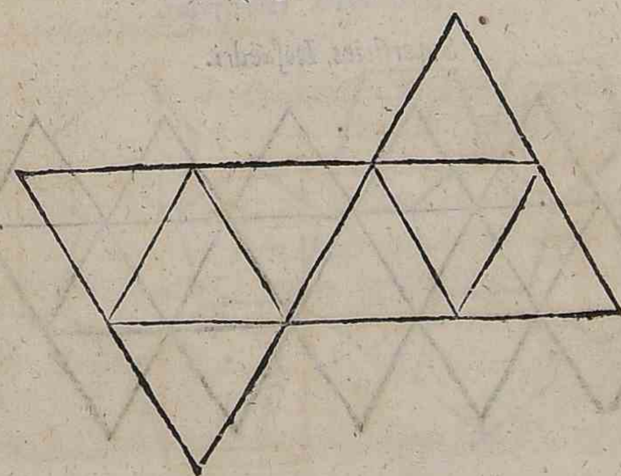
Superficies Hexaëdri.



III. *In Octaëdro.*

AF latus (8), est $\sqrt{2}$: 1|414213.
CT est semidiameter circuli ambientis basem triangulam (8), est $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0|816490.
Altitudo basis (8), est 1|224735.
Area basis (8), est 0|866018.
Superficies (8), est 6|928144.
$\frac{1}{2}$ BE perpendicularis è centro sphæræ in basem (8), est $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|577175.
Soliditas (8), est 1|333333.

Superficies Octaëdri.



IV. *In Icosaëdro.*

AH latus (20), est $\sqrt{u:\ 2 - \sqrt{\tfrac{4}{5}}}$: 1(05573.
MN=Rγ semidiameter circuli ambientis basem triangulam (20), est $\sqrt{u:\ \tfrac{2}{3} - \sqrt{\tfrac{4}{45}}}$: 0(607062.
Altitudo basis (20), est 0(910593.
Area basis (20) est 0(503362.
Superficies (20), est 10(067240.
QN perpendicularis è centro sphæræ in basem (20), est $\sqrt{u:\ \tfrac{1}{3} + \sqrt{\tfrac{4}{45}}}$: 0(794654.
Soliditas (20), est 2(666658.
GH semidiameter circuli ambientis pentagonum (20), est $\sqrt{\tfrac{4}{5}}$: 0(894427.

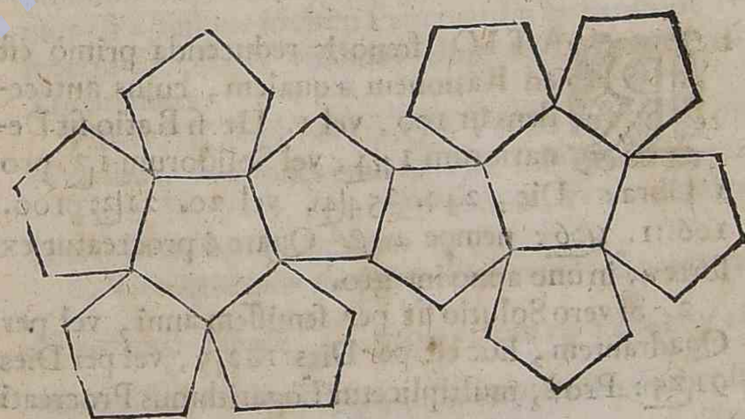
Superficies Icosaëdri.

V.

V. *In Dodecaëdro.*

GK=BL latus (12), est $\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}$: 0(713642.
Rγ=MN semidiameter circuli ambientis basem quinquangulam (12), est $\sqrt{u:\ \tfrac{2}{3} - \sqrt{\tfrac{4}{45}}}$: 0(607062.
Rθ=$\tfrac{1}{2}$Rγ+$\tfrac{1}{2}$RK, perpendicularis è centro basis in latus, est 0(49112.
Area basis (12), est 0(876211.
Superficies (12), est 10(514532.
QN perpendicularis è centro sphæræ in basem (12), est $\sqrt{u:\ \tfrac{1}{3} + \sqrt{\tfrac{4}{45}}}$: 0(794654.
Soliditas (12), est 2(785137.

Superficies Dodecaëdri.



F I N I S.

DE ANATOCISMO,
SIVE
USURA COMPOSITA.

Hoc est, Sex Theorematum fundamentalium, quibus Quæstiones omnes circa Anatocismum, facili negotio, solvi poterunt, investigatio Analytica.

Notandum autem est, quod Solidus Anglicus continet 12 Denarios: Et Libra sive Mina continet 20 Solidos; Denarios verò 240.

1. RATIO fœnoris reducenda primò est ad Rationem æqualem, cujus antecedens sit 100, vel 1. Ut si Ratio sit Denariorum 14,4, vel Solidorum 1,2. pro 1 Libra: Dic, 240. 254,4, vel 20. 21,2:: 100. 106::1. 1,06: nempe α. β. Quare β procreatur ex sorte α, in uno anno integro.

2. Si vero Solutio sit per semissem anni, vel per Quadrantem, hoc est per Dies 182,5, vel per Dies 91,25: Pro β, multiplicetur Logarithmus Procreati annui per $\frac{1}{2}$ vel per $\frac{1}{4}$: Sive & per $\frac{182,5}{365}$ vel per $\frac{91,25}{365}$ Perperam enim vulgò sumitur $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{4}$ annui fœnoris.

3. Quia

3. Quia in progressione, numerus Rationum unitate minor est, quàm N numerus terminorum, sive Solutionum; erit numerus Rationum N-1. Item Logarithmus β ductus id N-1, erit Logarithmus ω ultimi termini. Denique Logarithmus β ductus in N, erit Logarithmus $\beta\omega$, hoc est, ipsius β multiplicati in se continuè pro numero Solutionum.

4. Quare $\beta\omega$ procreatur ex α sorte, sive 1 lb, elocata pro N vicibus. Hinc Duo oriuntur Theoremata.

Theo: I. 1 lb. $\beta\omega$:: Q lb. Q lb cum lucro in N vicibus.

Theo: II. $\beta\omega$. 1 lb:: Q lb post N vices. valor præsens.

5. Deinde quia $\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}$, hoc est, $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}=Z$, summæ omnium terminorum Progressionis (quorum ultimus est ω) estque idcirco Procreatum ex Pensione 1 lb intermissa pro N vicibus: Hinc duo oriuntur alia Theoremata.

Theo: III. β-1. $\beta\omega$-1:: Q lb Pensio intermissa pro N vicibus. Pensiones cum fœnore solvendæ in fine.

Theo: IV. $\beta\omega$-1. β-1:: Q lb futura. Pensio æquivalens solvenda in N vicibus.

6. Denique quia $\beta\omega$ procreatur ex 1 lb elocata pro N vicibus: Estque $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$ procreatum ex Pensione 1 lb intermissa pro N vicibus; quod in pecuniis numeratis æquivalet pretio Pensionis: Dic, $\beta\omega$. 1 lb:: $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$. $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1 \text{ in } \beta\omega}$: Unde igitur in N vicibus procreabitur $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$

Pretium

Pretium Pensionis. Hinc etiam oriuntur duo Theoremata.

Theo: V. β-1 in $\beta\omega$. $\beta\omega$-1::Q^{lb} Pensio pro N vicibus. Pretium ejusdem in pecuniis numeratis.

Theo: VI. $\beta\omega$-1. β-1 in $\beta\omega$:: Q^{lb} præsens. Pensio emenda pro N vicibus.

Nota quod Q^{lb} significat quantamlibet librarum summam.

Exemplum de Pensione durante 10 annos, solutione semestri; in Ratione 1 ad 1,06. Estque N 20. Et Logar: 1,06 est 0,025306.

0,025306 in $\frac{1}{2}$

0,012653 Log: β=1,0296

20 N

0,253060 Log: $\beta\omega$=1,791

$\bar{2}$,471291 Log: β-1=0,0296.

$\bar{2}$,724351 Log: β-1 in $\beta\omega$

$\bar{1}$,898176 Log: $\beta\omega$-1=0,791.

Est igitur

$\bar{1}$,898176

$\bar{2}$,724351

1,173825 Logar: Pretii 14,92^{lb} pro Pens: 1^{lb}.

$\bar{2}$,724351

$\bar{1}$,898176

$\bar{2}$,826175 Logar: Pensionis 0,6701^{lb} pro Pret: 1^{lb}.

Logarithmis hisce inventis adde Logar: Q^{lb}.

Vel valores hosce inventos multiplica per Q^{lb}.

REGULA

REGULA FALSÆ POSITIONIS.

Multiplica Positiones per alternos errores. Et si errores sint ejusdem generis, nempe uterque excedens, vel uterque deficiens; Differentiam productorum divide per Differentiam errorum: Si verò diversi sint generis; Summam productorum divide per Summam errorum: Et Quotus dabit numerum quæsitum.

Demonstrationis gratia. Quis numerus est, qui ductus in B, producit planum BA, nempe BApl.

Esto A-C Esto A-D

in B. BA-BC in B. BA-BD

Errores igitur sunt

BApl-BA+BC. BApl-BA+BD.

Quia utrobique signa sunt similia; ut quæ æqualia sunt, expurgentur; opus est ut Subductio fiat, mutando omnia signa minoris. Nam sic æqualibus se mutuò elidentibus, manebit errorum Differentia, BC-BD:

BC defic:	BD defic:
A-D	A-C
BCA-BCD	BDA-BDC

Hic etiam æqualibus utrinque per Subductionem expunctis;

expunctis; Reductio fit ad $BCA-BDA$: quæ est ipsa errorum differentia ducta in A.

$$\text{Quare } \frac{BCA-BDA}{BC-BD} = A.$$

Iterum	Esto $A+C$.	Esto $A-D$
	in B. $BA+BC$.	in B. $BA-BD$.

Errores igitur sunt.

$BA+BC-BA$ pl. BA pl$-BA+BD$.

Quia utrobique signa sunt contraria; æqualia per Additionem, absque ulla signorum mutatione, se mutuò elident: Et sic manebit eorum summa, $BC+BD$.

BC exced:	BD defic:
$A-D$	$A+C$
$BCA-BCD$	$BDA+BCD$.

Hic etiam æqualibus utrinque per Additionem expunctis; Reductio fit ad $BCA+BDA$: quæ est ipsa errorum summa ducta in A.

$$\text{Quare } \frac{BCA+BDA}{BC+BD} = A.$$

FINIS.

THEOREMATUM
IN LIBRIS
ARCHIMEDIS
DE
SPHAERA & CYLINDRO
Declaratio.

Authore
GUILELMO OUGHTREDO
ANGLO.

OXONIÆ,
Excudebat LEON. LICHFIELD, Veneunt
apud THO. ROBINSON. *Anno*
Dom. 1652.

Rerum quarundam denotationes.

R radius, eſt ſemidiameter circuli, ſive uno conſtet nomine AO, vel $E\omega$, vel IU : ſive duobus ut $AO+E\omega$, vel $E\omega+IU$: ut in ſchemate 1.

$\delta . \pi$: : ſemidiameter. ſemiperipheria.

$\frac{\pi}{\delta}R$, eſt ſemiperipheria circuli cujus Radius eſt R.

$\frac{\pi}{\delta}:AO+E\omega$: eſt ſemiperipheria circuli cujus Radius eſt $AO+E\omega$.

$\frac{\pi}{\delta}Rq$, eſt area circuli.

$\frac{\pi}{3\delta}Rq \times$ altitud: vel $\frac{\pi}{\delta}Rq$ in $\frac{1}{3}$ Altitud, eſt Conus; ſcil: $\frac{1}{3}$ Cylindri.

∩ ſignificat ſuperficiem curvam.

Coni & Cylindri, qui in æqualibus ſunt baſibus, ſunt ut altitudines. 14 e 12.

Æqualium Conorum & Cylindrorum bases & altitudines reciprocantur. 15 e 12.

Assumo, Figuram regularem infinitorum laterum, cui nec major inscribi, nec minor circumscribi poterit; si plana sit, esse circulum; sin solida, esse sphæram.

Theorematum

Theorematum in Libris Archimedis de Sphæra & Cylindro Declaratio.

Duodecim primas propositiones, quia demonstrationibus negativis; quas ego ut parùm scientificas, quantum possum, evito, inque ipsarum loco affirmativas substituo, inserviunt; missas faciam.

I. In Cylindro recto, Si 2R, M, Latus; hoc est; 2AO, M, KA, $\ddot{\div}$: Dico $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\cap$ Cylindri.

Nam $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $= \frac{\pi}{\delta}$ 2AO $\times$ KA. 13 l 1.

(Ad septem theoremata sequentia pertinet schema I.)

II. In Cono æquicruro KON, si KO, M, AO $\ddot{\div}$: Dico $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\cap$ Coni. Nam $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $= \frac{\pi}{\delta}$ AO in KO. 14 l 1.

 III. In

III. In Cono æquicruro KON, Dico esse semid: basis. Latus :: Basis. $\bigcirc$ Coni. Nam AO. KO :: $\frac{\pi}{\delta}$ AOq. $\frac{\pi}{\delta}$ AO in KO. 15 l 1.

IV. In Cono æquicruro KON, Si AO+Eω, M, Oω = KO − Kω ∺: Dico $\bigcirc$ frusti O$\omega\nu$N = ($\frac{\pi}{\delta}$Mq) $\frac{\pi}{\delta}$: AO+Eω: ×Oω. Nam per 2, $\bigcirc$ O$\omega\nu$N = $\frac{\pi}{\delta}$: AO×KO: mi $\frac{\pi}{\delta}$: Eω×Kω: = $\frac{\pi}{\delta}$: AO+Eω : in: KO-Kω. Est enim AO+Eω in KO-Kω = AO × KO − Eω×Kω pl Eω × KO − AO×KO, quæ se invicem tollunt: Quia AO.Eω:: KO. Kω.

V. In Cono æquicruro KON, Si KO, M, AO ∺; & AP perpendicularis lateri KO: Dico ($\frac{\pi}{3\delta}$ Mq) $\frac{\pi}{3\delta}$ AO×KO in AP = $\frac{\pi}{3\delta}$ AOq in KA = KON. Nam KA. AP :: KO. AO :: AO × KO. AOq. Ergo. 17 l 1.

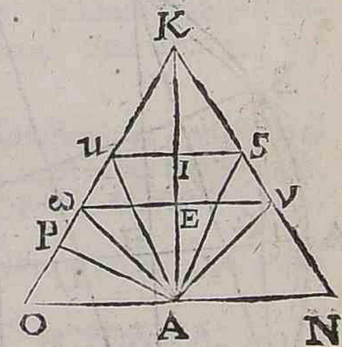
VI. In Cono æquicruro KON, Si Kω. M. Eω ∺; & AP perpend: lateri KO: Dico ($\frac{\pi}{3\delta}$ Mq) $\frac{\pi}{3\delta}$ Eω ×Kω in AP = $\frac{\pi}{3\delta}$ Eωq×KA, scil: rhombo KωAν. Nam KA. AP :: Kω. Eω :: Eω × Kω. Eωq. Ergo. 18 l 1.

VII. In Cono æquicruro KON, Dico frustum Conicè

Conicè excavatum OωAνN, æquari Cono cujus basis est æqualis $\bigcirc$ frusti O$\omega\nu$N, & altitudo AP: hoc est, con: KON − rhomb: KωAν = $\frac{\pi}{\delta}$: AO+Eω: × Oω in $\frac{1}{3}$AP. Nam

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\pi}{\delta}\ AO\times KO \text{ in } \tfrac{1}{3}AP = KON,\text{per } 5\\ \text{Et } \frac{\pi}{\delta}\ E\omega\times K\omega \text{ in } \tfrac{1}{3}AP = \text{rhomb: } K\omega A\nu,\text{ per } 6\end{array}\right\}\text{ ho-}$$

rum differentia est $\frac{\pi}{\delta}$ AO×KO − $\frac{\pi}{\delta}$ Eω×Kω, per 4, = $\frac{\pi}{\delta}$: AO+Eω: ×Oω = $\bigcirc$ OωAν; ductis omnibus in $\frac{1}{3}$AP. Ergo, &c.



VIII. In Cono æquicruro KON, Dico rhombum conicè excavatum ωUASν, æquari Cono cujus basis est æqualis $\bigcirc$ frusti ωUSν, & altitudo AP: hoc est, rhomb KωAν-rhomb KUAS = $\frac{\pi}{\delta}$: Eω + IU: × ωU in $\frac{1}{3}$ AP. Nam

$$\left.\begin{array}{l}\text{per } 6,\ \frac{\pi}{\delta}\ E\omega\times K\omega \text{ in } \tfrac{1}{3}AP = \text{rhomb } K\omega A\nu\\ \text{Et } \frac{\pi}{\delta}\ IU\times KU \text{ in } \tfrac{1}{3}AP = \text{rhomb } KUAS\end{array}\right\}\text{ horum}$$

differentia est $\frac{\pi}{\delta}$ Eω×Kω − $\frac{\pi}{\delta}$ IU×KU, per 4, = $\frac{\pi}{\delta}$:

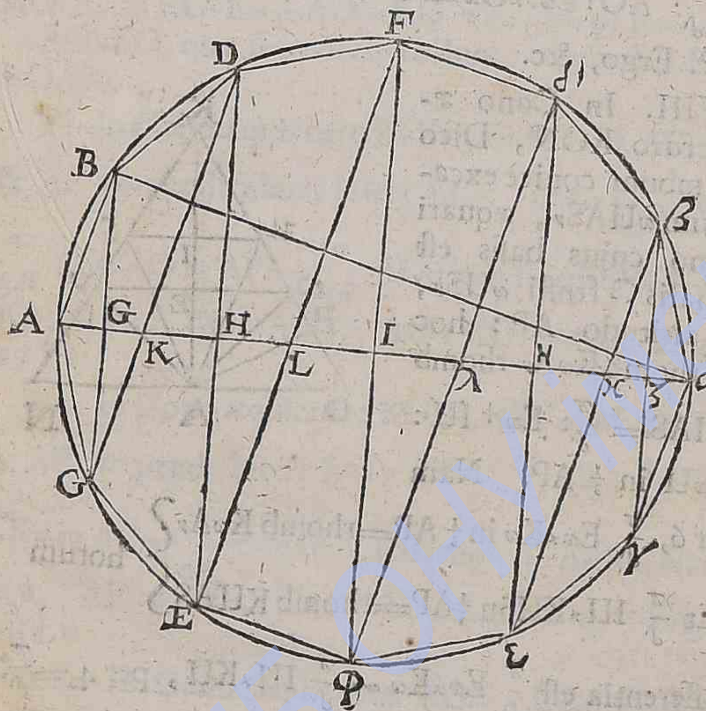
Eω

$E\omega + IU : \times \omega U = \bigcirc \omega US\nu$; ductis omnibus in $\frac{1}{3}AP$. Ergo, &c.

IX. Si figura plana polygona laterum æqualium & numero parium. $ABDF\delta\beta\alpha\gamma\varepsilon\varphi EC$, inſcribatur circulo, junganturque anguli rectis lineis parallelis: Dico $AB.\ B\alpha :: A\alpha.\ BC + DE + F\varphi + \delta\varepsilon + \beta\gamma$; hoc eſt, $2BC + 2DE + F\varphi$. Nam $AB.\ B\alpha :: \frac{1}{2}AK.\ \frac{1}{2}BC :: \frac{1}{2}KL.\ \frac{1}{2}DE :: \frac{1}{2}L\lambda.\ \frac{1}{2}F\varphi :: \frac{1}{2}\lambda\kappa.\ \frac{1}{2}\delta\varepsilon :: \frac{1}{2}\kappa\alpha.\ \frac{1}{2}\beta\gamma$.

Quare $A\alpha \times B\alpha = AB$ in $2BC + 2DE + L\varphi$. 21 l 1.

Et in ſegmento $A\delta\varepsilon$, erit $AB.\ B\alpha :: A\eta.\ BC + DE + F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$.



Quare

Quare $A\eta \times B\alpha = AB$ in $BC + DE + F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$.

X. Si circulo, vel circuli ſegmento alicui figura ejuſmodi plana polygona laterum æqualium & parium, tum inſcribatur, tum circumſcribatur; & diametro $A\alpha$ quieſcente, circulus circumvolvatur; deſcribetur figura ſolida conſtans ſuperficiebus quibuſdam Conicis: Et paralleli $BC, DE, F\varphi, \delta\varepsilon, \beta\gamma$, deſcribent totidem circulos parallelos. Atque in his, quæ circumſcripta eſt, ſive continens, major ſemper eſt circulo incluſo: & quæ inſcripta eſt, minor ſemper erit circulo ambiente. Et ſuperficies figuræ circumſcriptæ, ad ſuperficiem figuræ inſcriptæ ſimilis, eſt in ratione laterum duplicata: At figura ipſa ſolida circumſcripta, ad ſolidam ſimilem inſcriptam, in ratione triplicata. 22. 27. 30. 34. 37 l 1.

XI. Si diameter circuli includentis ejuſmodi figuram ſolidam, ſit $A\alpha$: fiatque $A\alpha, M, B\alpha$ ∺: vel, quod idem eſt, per 9, $2BC + 2DE + F\varphi, M, AB$ ∺: Dico $\frac{\pi}{\delta} Mq =$ ſuperficiei figuræ. Nam per 2, $\frac{\pi}{\delta} BC \times AB = 2 \bigcirc$ coni ABC: & per 4, $\frac{\pi}{\delta} BC + DE$ in $AB = 2 \bigcirc$ fruſti $BCED$: & $\frac{\pi}{\delta} DE + F\varphi$ in $AB = 2 \bigcirc$ fruſti $DE\varphi F$.

Ergo $\frac{\pi}{\delta} 2BC + 2DE + F\varphi$ in $AB = \bigcirc$ figuræ totius, nempe $\frac{\pi}{\delta} Mq$. 23. 28 l 1.

XII. In Schem: 3. Figuræ ejuſmodi ſolidæ, ſi ſphæræ

ſphæræ inſcribatur, ſuperficies $\frac{\varpi}{\delta}$Mq minor eſt circulo habente axem ſphæræ continentis Aα pro diametro. Nam M $\sqsupset$ Aα.

Sin circumſcribatur, ſuperficies $\frac{\varpi}{\delta}$ Mq major eſt circulo habente axem ſphæræ contentæ 2IP $=$ Bα pro diametro. Nam Aα, M, 2IP $\ddot{\div}$: Quare M cadet inter A & Q. 24, 29 l 1.

XIII. Quidni igitur ſphæræ ſuperficies æquetur quatuor maximis circulis; nempe $\frac{\varpi}{\delta}$ Diam:q? 31 l 1.

XIV. Figura ejuſmodi ſolida æqualis eſt Cono, cujus Baſis eſt circulus æqualis ſuperficiei figuræ; & Altitudo IP perpend:è centro ſphæræ in latus figuræ: hoc eſt, per 11, $\frac{\varpi}{3\delta}$ Mq in (IP) $\frac{1}{2}$Bα $=$ figuræ toti ſolidæ. Nam per 6, Rhomb: BACI $= \frac{1}{3} \frown$ BAC in IP. Et per 8, Excavatum DBICE $= \frac{1}{3} \frown$ DBCE in IP. Et per 7, Excavatum FDIEφ $= \frac{1}{3} \frown$FDEφ in IP. Et ſimiliter pro altero hæmiſphærio. Quare $\frac{1}{3} \frown$ BAC $+ \frac{1}{3} \frown$ DBCE $+ \frac{1}{3} \frown$ FDEφ in Bα (2IP) $=$ toti figuræ ſolidæ; nempe $\frac{\varpi}{3\delta}$ Mq: vel $\frac{\varpi}{3\delta}$ A$\alpha \times$Bα in $\frac{1}{2}$BA(IP). 25, 29 l 1.

XV. Figura ejuſmodi, ſi ſphæræ inſcribatur, minor eſt quatuor Conis habentibus baſem æqualem circulo ſphæræ maximo: hoc eſt Cono habenti baſem æqualem ſuperficiei ſphæræ; altitudinem verò æqualem ſemiaxi. Sin circumſcribatur, iiſdem major eſt. Nam

Nam per 12, ſuperficies figuræ inſcriptæ, ſuperficie ſphæræ minor eſt: circumſcriptæ autem, major. 26. 29 l 1.

XVI. Quidni igitur ipſa ſphæra æqualis ſit quatuor Conis habentibus baſem æqualem circulo ſphæræ maximo; hoc eſt Cono habenti baſem æqualem ſuperficiei ſphæræ; Altitudinem verò æqualem ſemiaxi? 32 l 1.

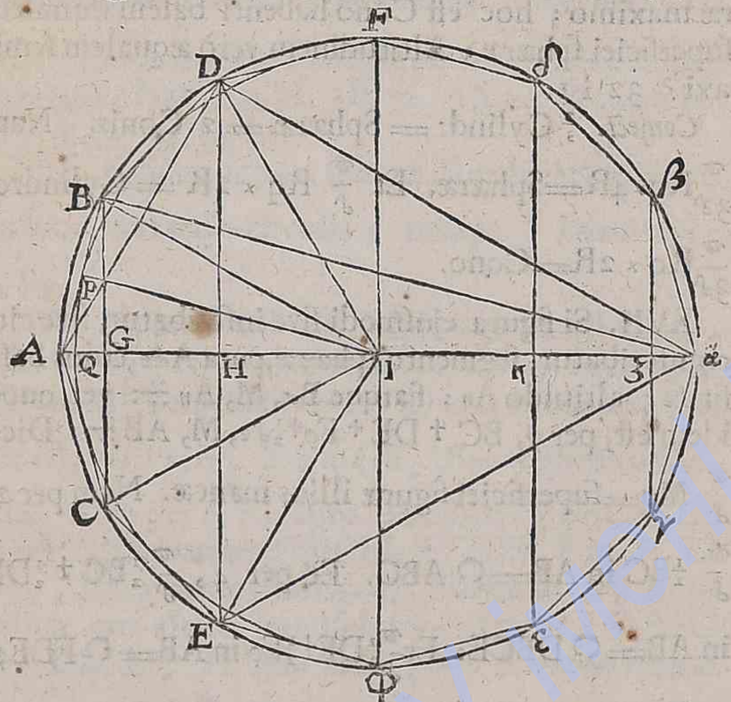
Conſect. $\frac{2}{3}$ Cylind: $=$ Sphæræ $=$ 2 Conis. Nam $\frac{\varpi}{3\delta}$Rq$\times$4R $=$ Sphæræ. Et $\frac{\varpi}{\delta}$ Rq $\times$ 2R $=$ Cylindro. $\frac{\varpi}{3\delta}$Rq $\times$ 2R $=$ Cono.

XVII. Si figura ejuſmodi ſive inſcribatur, ſive circumſcribatur, ſegmento ſphæræ, puta A$\delta\varepsilon$, cujus baſis ſit $\delta\varepsilon$; altitudo Aη; fiatque Bα, M, Aη $\ddot{\div}$: vel, quod idem eſt, per 9, BC $+$ DE $+$ Fφ $+ \frac{1}{2}\delta\varepsilon$, M, AB $\ddot{\div}$: Dico $\frac{\varpi}{\delta}$ Mq $=$ ſuperficiei figuræ illius mancæ. Nam per 2, $\frac{\varpi}{\delta}$ $\frac{1}{2}$BC in AB $= \frown$ ABC. Et per 4, $\frac{\varpi}{\delta}$ $\frac{1}{2}$BC $+ \frac{1}{2}$DE in AB $= \frown$ DBCE: Et $\frac{\varpi}{\delta}$ $\frac{1}{2}$DE $+ \frac{1}{2}$Fφ in AB $= \frown$ FDEφ. Et $\frac{\varpi}{\delta}$ $\frac{1}{2}$Fφ $+ \frac{1}{2}\delta\varepsilon$ in AB $= \frown$ δF$\varphi\varepsilon$. Ergo 33. 37 l 1.

XVIII. Figuræ ejuſmodi mancæ, ſi ſegmento ſphæræ, puta A$\delta\varepsilon$, inſcribatur, ſuperficies $\frac{\varpi}{\delta}$Mq $\sqsubset \frac{\varpi}{\delta}A\delta$q. Nam A$\delta$q $=$ A$\alpha \times$ A$\eta \sqsubset$ B$\alpha \times$ Aη.

Sin

Sin circumſcribatur, ſuperficies $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $\sqsubset$ $\frac{\pi}{\delta}$ Aδq. Nam Bα = 2IQ eſt diameter ſphæræ interioris ſive contentæ. Eſtque An $\sqsubset$ Qn. Quare $\frac{1}{2}$ M protenditur ultra IQ diametrum ſphæræ contentæ. 35. 38. 41 l 1.



XIX. Quidni igitur ipſa ſuperficies ſegmenti ſphæræ æqualis ſit circulo, cujus ſemidiameter eſt recta ducta a vertice ſegmenti in finem baſis? 40 l 1.

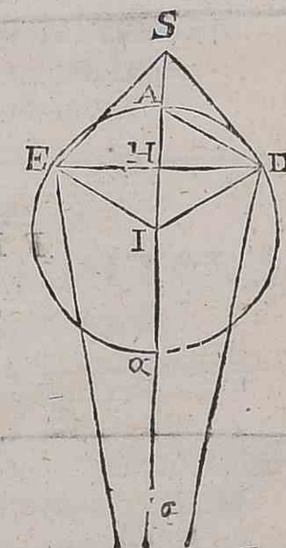
XX. Figura ejuſmodi manca, ſive inſcribatur ſegmento ſphæræ, puta DAE minori ſemicirculo, vel DαE majori, æqualis eſt Cono habenti baſem æqualem ſuperficiei illius figuræ mancæ; altitudinem verò

verò æqualem perpend: IP è centro in latus figuræ, adjecto vel ablato Cono DIE medio; hoc eſt, toti ſolido DBACEI, vel reliquo DFδβαγεφEI. Nam in ſolido minore DBA = CEI, per 6, Rhomb: BACI = $\frac{1}{3}$ ∩ BAC in IP. Et per 8, $\frac{1}{3}$ ∩ DBCE in IP = excavato DBICE. Ergo. Et ſimiliter de majore DFδβαγεφEI. 36. 39 l 1.

Conſect. Quare & per 18, Si figura ejuſmodi ſegmento ſphæræ, puta DAE, vel DαE, inſcribatur, totum ſolidum minus eſt Cono, cujus baſis eſt circulus a ſemidiametro AD, vel αD; & altitudo ſemiaxis IA.

XXI. Quidni igitur Sector ſphæræ DBACEI, æqualis ſit Cono $\frac{\varpi}{3\delta}$ ADq in IA; & reliquus Dα = EI, æqualis Cono $\frac{\varpi}{3\delta}$ αDq in IA? 42 l 1.

XXII. Si fiat Hα. Hα + Iα :: HA. HS: Dico $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq in HS = ſegm: ſphæræ DAE. Nam Hα. HA :: Hα + Iα − Hα. HS − HA :: Iα. AS. Eſtque (Iα + AS) IS. IA :: (Hα + HA) Aα. Hα :: Aαq. αDq :: ADq. DHq. Quare $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq × IS = $\frac{\varpi}{3\delta}$ ADq × IA = ſegmento DAE + (Cono DIE) $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq × IH.



Ergo

Ergo $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq$\times$HS (IS $-$ IH) $=$ ſegmento DAE.

Conſectarium. Quia $\frac{HA \text{ in } H\alpha + I\alpha}{H\alpha} =$ HS: Erit $\frac{\varpi}{3\delta}\ \frac{DHq \times HA \text{ in } H\alpha + I\alpha}{H\alpha} =$ ſegmento DAE. Quare $H\alpha.\ H\alpha + I\alpha :: \frac{\pi}{3\delta}$ DHq$\times$HA. ſegm: DAE. 2 1 2.

FINIS.

HOROLOGIORUM SCIOTERICORUM IN PLANO,

Geometricè ſolùm, ſine Calculo Trigonometrico, delineandorum,

MODUS FACILLIMUS.

PER QUEM Meridiana, Subſtylaris, & Stylus ipſe, non inveſtigantur modò, ſed etiam, in cujuſvis generis Plano, ſitu proprio inſcribuntur, omniaque perſpicuè demonſtrantur.

Inventore GUILELMO OUGHTREDO 23um Ætatis Annum agente.

OXONIÆ,
Excudebat LEON. LICHFIELD, Veneunt apud THO. ROBINSON. 1652.

HOROLOGIA SCIOTERICA
IN PLANO,
Geometricè delineandi Modus.

Cap. I.
De Planis.

IN Hypothesin illam Astronomicam, quòd Terra nullius quantitatis sensibilis cum Sphæra Solari comparata, sed tanquam Punctum, habeatur: Ars Horologiographica præcipuè innititur. Planum enim in quo describitur Horologium, supponitur Parallelum majori alicui Circulo Cœlesti, qui tantùm à Plano distat quantum ab eodem Plano punctum aliquod pro Apice styli assignatum.

In Plano; primo considerandus erit Situs, qui est vel respectu Horizontis, vel Meridiani.

Reſpectu Horizontis; Planum eſt vel Parallelum, (& huic inſcriptum Horologium, *Horizontale* vocatur;) vel Perpendiculare, (cujus generis ſunt Muri omnes erecti;) vel Obliquum; quod rurſus, vel Pronâ facie nutat, & vocatur *Inclinans*; vel Declivi & ſupinâ ſuperficie reſidit, & vocatur *Reclinans*.

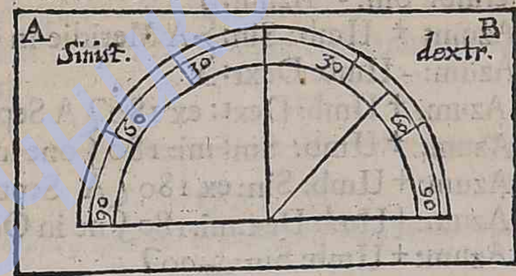
Inclinationis iſta & Reclinationis Obliquitas, per arcum alicujus Azumith (ſive Circuli Verticalis) inter Loci Verticem & Planum intercepti menſuratur, quod quidem Azumith Plano Perpendiculare eſt, & Quadrantis ope, in *90* Gr: diviſi, facillimè invenitur.

Reſpectu Meridiani; Planum eſt vel Directum; vel Declinans. Planum Directum eſt, quod Punctum aliquod è quatuor Cardinalibus directè reſpicit: Eſtque, vel Meridiano Perpendiculare, qualia ſunt plana Meridionalia & Borealia: vel Parallelum, qualia ſunt Orientalia & Occidentalia. Planum Declinans eſt, quod non directè Puncto alicui Cardinali opponitur; ſed à Meridie aut Septentrione, verſus Orientem aut Occidentem, declinat.

Declinatio plani eſt Arcus Horizontis, inter Sectionem plani horizontalem, & punctum Orientis vel Occidentis, interceptus; Vel, eſt Arcus Horizontis, qui inter Meridianum & Polum Sectionis Horizontalis intercipitur.

Inveſtigatio Declinationis Plani cujuſque aut Muri difficilior aliquantum. Tutiſſimam viam arbitror (quoniam Acus Magnetica facilè diſtrahitur) eſſe per Tabulam Rectangulam, uncias fere duodecim longam, latam *6*; Cui Semicirculus à medio utrinque in

in *90* gradus diviſus inſcribitur, ſtylúſque à Centro erigitur, ut in Schemate ſubjecto videre eſt.



Uſus hujus Inſtrumenti talis eſt. Quolibet die (datâ prius Declinatione Solis) ante decimam Horam AM (i. e. ante Meridiem) vel poſt ſecundam PM (i. e. poſt Meridiem) applicetur Muro Latus Inſtrumenti AB, ita ut Horizonti maneat Parallelum, & quem Gradum Styli Umbra vel in Dextro vel Siniſtro Quadrante notet obſerves, quam idcirco [*Umb: Dextr:*] vel [*Umb: Siniſtr:*] voco: Deinde quàm citiſſimè Solis Altitudinem inquiras. Jámque Solis, tam à Polo Boreali, quàm á Vertice, Diſtantiam, ſimulque Altitudinis Poli Complementum, adeptus; quære (aut ex Analemmate, aut Projectione Horizontali, vel tandem Trigonometricè) Azumithalem Solis à Meridie diſtantiam. Denique, cum Tempore Diei, Solis Azumith, Stylíque Umbrâ, Tabellam ſequentem pete; &, facto quod ibi faciendum præcipitur, verum Muri ſitum habebis.

AM.	Azum: - Umb: Sin:	A Meridie in Ortum.
AM.	Azum: + Umb: Dext:	
PM.	Umb: Dext: - Azum:	
AM.	Umb: Sin: - Azum:	A Meridie in Occaſ.
PM.	Azum: + Umb: Sin:	
PM.	Azum: - Umb: Dext:	
AM.	Azum: + Umb: Dext: ex 180	A Septentrione in Ortũ.
PM.	Azum: + Umb: Sin: mi: 180	
PM.	Azum: + Umb: Sin: ex 180	A Septentrione in Occaſum
AM.	Azum: + Umb: Dex: mi: 180	
AM.	Azum: + Umb: Sin: = 90	In Ortu.
AM.	Azum: - Umb: Dex: = 90	
PM.	Azum: - Umb: Sin: = 90	In Occaſu.
PM.	Azum: + Umb: Dex: = 90	
	Azum: - Umbra = 0.	In Septentr:
	Azum: + Umbra = 180.	In Meridie.

Exempli gratia. Julii 15 poſt Meridiem, inveni Umbram in Gradu 30 Dextri Quadrantis; Solem vero altum 23 grad: & gradum ferè 20um Declinationis Borealis attingentem; unde Azumith erat, gr: $91\frac{1}{2}$. At in Tabula [PM. Azum: - Umb: Dex:] eſt à Meridie in Occaſum: quocirca $91\frac{1}{2}$-30, i.e. $61\frac{1}{2}$ eſt Declinatio Muri Meridionalis in Occaſum vergentis.

Rurſus; Eodem Julii 15° poſt Meridiem, inveni Umbram in 57 Gr: Siniſtri Quadrantis; & Altitud: Solis 22 $\frac{1}{10}$: Unde Azumith erat graduum 93. At [PM Azum: + Umb: Sin: ex 180] eſt à Septentrione in Occaſum. Ergo 93+57 ex 180, id eſt, 30 gr: eſt

eſt Muri Borealis in Occaſum vergentis Declinatio.

Prout Horizontem, Meridianumve, reſpicit Murus aut Planum, ita Nomen ſuum quod in eo deſcribitur Horologium ſortitur; veluti, ſi Planum Reclinans, Declinet etiam à Meridie in Ortum, ejuſdem Horologium dicitur Meridionale Reclinans Declinans in Ortum.

Cap. II.

Linearum, quæ in deſcribendis Sciotericis præcipue uſui ſunt, Declaratio.

1. Lineæ Horariæ, ſunt interſectiones Circulorum Horariorum cum Plano Scioterici.

2. E Lineis Horariis, Principalis eſt Meridiana, ſeu Linea horæ duodecimæ, quæ eſt ipſa interſectio à plano Meridiani loci cum plano Scioterico facta. Et, ab hâc, Linearum Horar: diviſio principium ducit.

3. Circulorum Horariorum plana omnia in planum Æquinoctiale perpendiculariter cadunt, dividuntque æqualiter in 24 partes, per lineas rectas quæ ſunt Lineæ Horarum in Æquinoctiali; at cætera plana omnia dividunt inæqualiter. Circulorum autem Horariorum communis Interſectio in Polis eſt & Axe Mundi ſive Æquinoctialis.

4. Horologii Stylus (lineam illam intelligo à qua Umbra projicitur) Axis Mundi ſegmentum eſſe ſupponitur; ideóque ita ſemper locandus eſt, ut extremitatibus

mitatibus ſuis exactè Mundi Polos reſpiciat, extremitate ſc: ſuperiori polum apparentem & inferiori occultum.

5. Quare, ſi planum interſecet mundi Axin, Sciotericum in eo deſcriptum Centrum habebit, è quo Lineæ omnes Horariæ ducuntur: At ſi Planum Axi Parallelum ſit, non habebit Centrum ſed Lineæ omnes Horariæ erunt tum Stylo tum ſibi invicem parallelæ.

6. Subſtylaris eſt Linea Plani Stylo proxima, cui Stylus perpendiculariter imminet; eſt enim Meridianus Loci illius in Terra, cui Planum eſt Horizontale; in Ortum à ſubjecto Loco elongati, ſi Subſtylaris inter Horas Matutinas cadat; at in Occaſum, ſi inter Pomeridianas: Differentia Longitudinum, eſt Arcus Æquinoctialis inter Subſtylarem & Meridianum Æquinoctialis interceptus.

7. Elevatio Poli ſupra Planum Scioterici, eſt Angulus quem Stylus conſtituit cum Subſtylari.

8. Eſt alia inſuper Linea inſignioris uſus, Interſectio ſcilicet Plani Æquinoctialis cum Plano Horologii; vulgò *Linea Contingens*, quoniam in eâ ſolâ Lineæ Horariæ Scioterici, Lineæque Horariæ Æquinoctialis ſeſe mutuò interſecant; Et, quoniam Centrum Æquinoctialis in ipſo Axi eſt, ejuſmodi Linea Subſtylarem ad rectos angulos ſecat.

9. In Planis omnibus Auſtralibus, Polus Auſtralis elevatur; in Borealibus, Borealis: duobus tantum Caſibus exceptis, (ut ſuo Loco dicetur,) in quibus Polus oppoſitus elevatur; ideoque Subſtylaris & Stylus inventus trans Centrum in oppoſitam Partem protrahendus erit.

10. Scio-

10. Scioterici Delineatio tribus diſtinctis Operationibus perficitur; hoc Ordine: Prima eſt, Meridianam, Subſtylarem, & Stylum, debitis Locis inſcribere. Secunda eſt, Lineam Contingentem ducere; & Æquinoctialem, cum Meridiana, Lineiſque ejus Horariis, ad Contingentem uſque protrahere. Tertia eſt ipſas Scioterici Lineas Horarias deſcribere, & Numeris propriis notare.

11. Eadem Meridianæ, Subſtylaris, & Styli Inſcriptio duobus aliquando diverſi Generis Sciotericis inſervit: ſcilicet, vel Chartam cui inſcribuntur ſurſum vorſum invertendo, ut in directè Septentrionalibus aut Auſtralibus; vel faciem averſam ejus oſtendendo ut in Orientalibus aut Occidentalibus Erectis. Aliquando etiam quatuor Generis inſervit; tam Anteriorem quam Averſam faciem Invertendo.

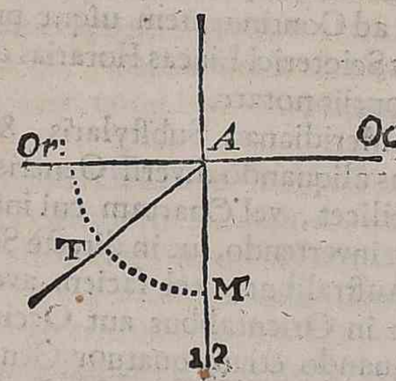
CAP. III.

De Scioterico Horizontali.

1. IN Plano Horizontali, Meridianus, ſeu Linea Duodecimæ, à Septentrione in Meridiem exactè ducitur; ideoque Meridiano Loci ſubeſt: Eadem quoque Subſtylaris eſt: & Angulus Styli ſupra eam inclinati, æqualis eſt Elevationi Polari, ſeu Latitudini, Loci.

2. Ut delineetur igitur, Duc in Plano Lineam Ortum & Occaſum directè indicantem; hanc in Puncto A, circa medium, ſecet perpendicularis AM; quæ

quæ ſimul & Meridiana & Subſtylaris erit; Punctum autem A Centrum erit Scioterici; & Linea Prima *Or. Oc.* Hora 6ta.



Pedem circini in puncto A fige, & altero pede ad quodvis Meridianæ latus Quadrantem deſcribe; in quo, à Meridianâ incipiens, arcum MT Altitudini Polari æqualem numera; &, per terminum ejuſdem, è Centro A, Lineam AT producito, quæ Stylum dabit.

Cap. IV.

De omnimodis Sciotericis directè Septentrionalibus, aut Auſtralibus; ſive Erecta ſint, ſive Obliqua.

1. IN Planis omnibus directè Septentrionalibus aut Auſtralibus, tam erectis quam obliquis, Meridiana

ridiana in Lineam Horizonti parallelam perpendiculariter cadit; Eadémque Subſtylaris eſt.

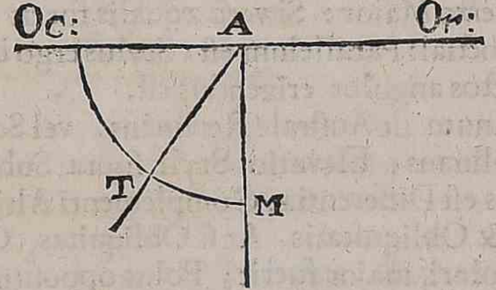
2. Si Planum Erectum ſit, Elevatio Styli ſupra Subſtylarem, æqualis eſt Complemento Elevationis Polaris.

3. Si Planum ſit Auſtrale Inclinans, vel Septentrionale Reclinans; Elevatio Styli ſupra Subſtylarem, æqualis eſt Complemento Altitudinis Polaris, & Obliquitati, ſimul ſumptis. At ſi Obliquitas Altitudini Polari major ſit, tum Angulus Elevationis Styli erit Recto Major: Si verò æqualis fuerit, Planum æquinoctiali Parallelum eſt; Stylus ergo è Centro A ad rectos angulos erigendus eſt.

4. Si Planum ſit Auſtrale Reclinans, vel Septentrionale Inclinans; Elevatio Styli ſupra Subſtylarem, æqualis eſt Differentiæ, Complementi Altitudinis Polaris, & Obliquitatis. At ſi Obliquitas, Complemento Polari, major fuerit; Polus oppoſitus elevatur, (qui unus eſt è caſibus antea memoratis *Cap.* 2. *Sect.* 9.) Si verò Obliquitas, Complemento Polari, æqualis fuerit; Planum Axi parallelum eſt: ideóque Sciotericon in eo deſcriptum Centro carebit; uti dictum eſt *Cap.* 2. *Sect.* 5.

5. Ad delineandum igitur quodvis hujus generis Sciotericon, ducatur primùm in Plano Linea Horizonti parallela (quæ ſimul in Ortum & Occaſum dirigitur): Hæc circa medium in Puncto A ſecetur à Perpendiculari AM, quæ & Meridiana & Subſtylaris erit; Punctum autem A Scioterici Centrum erit, (ſi ſaltem Centrale fuerit,) & linea illa prima *Or. Oc.* Hora VIta modò omnino reperiatur. Pede circini in

in puncto A fixo, ad quodvis Meridianæ latus, pede altero Quadrantem describe, (infra lineam *Or. Oc.* in Australibus Planis, supra verò in Septentrionalibus;) & in hoc Quadrante, à Meridianâ, numera arcum MT, æqualem Elevationi Styli supra Substylarem, (per 2am, 3am, 4am Sectionem inventæ;) Et è Centro A, per Terminum ejusdem, duc Lineam AT Styli futuri; ut in Schemate præcedenti transpositis solum Literis *Or. Oc.*



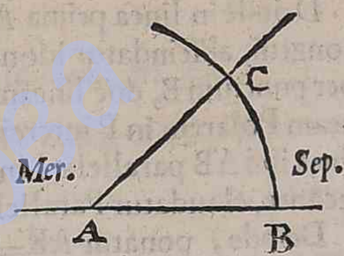
Cap. V.

De Sciotericis, Directè Orientalibus & Occidentalibus, Erectis.

IN directè Orientalibus & Occidentalibus Erectis; nec Centrum est nec Meridiana, cùm Planum hujusmodi plano Meridiani parallelum sit: Sed Substylaris in lineam Horizonti parallelam, ad angulum Altitudini Polari æqualem, insistit, Septentrionem supernè indicantem: Stylus autem ei parallelus imminet.

Ad

Ad Sciotericum igitur hujusmodi delineandum, ducatur in Plano linea Horizonti parallela, notatis extremitatibus ejus ad Boream & Meridiem. Et Centro A, prope Meridionalem extremitatem electo, Quadrantem versus Borealem describe; In quo arcum BC Altitudini Polari æqualem designans, Lineam AC Substylarem extende.



Cap. VI.

In Planis, directè Orientalibus & Occidentalibus, Inclinantibus aut Reclinantibus, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. PRimo, Ducatur in plano Meridiani, linea Horizonti parallela AB, notatis extremitatibus ejus ad Boream & Meridiem. Hæc circa medium secetur à perpendiculari AC: Punctúmque A Centrum erit. Pedum altero circini ad punctum A fixo, altero ad Lineam AC Diametri extenso, Quadrantem describe, (infra Lineam primam, AB, versus Meridiem, si Planum inclinet; suprà verò ad Boream, si reclinet:) Et, à Diametro AC incipiens, numera in Quadrante congruo tam Obliquitatem, quàm Altitudinis Polaris Complementum; Et, per Arcuum extremitates, è Centro A, Binæ producantur lineæ; quarum una vocetur, Linea *Obliquitatis*; altera, Linea *Polaris*.

Deinde

Deinde in linea prima AB, è regione Quadrantis congrui, abſcindatur idoneum ſegmentum AB: &, per punctum B, duc lineam Diametro parallelam, lineam Polarem in P intercipientem. Quarta denique lineâ ipſi AB parallelâ, Lineámque Obliquitatis in O ſecante, claudatur Parallelogrammum ABPC.

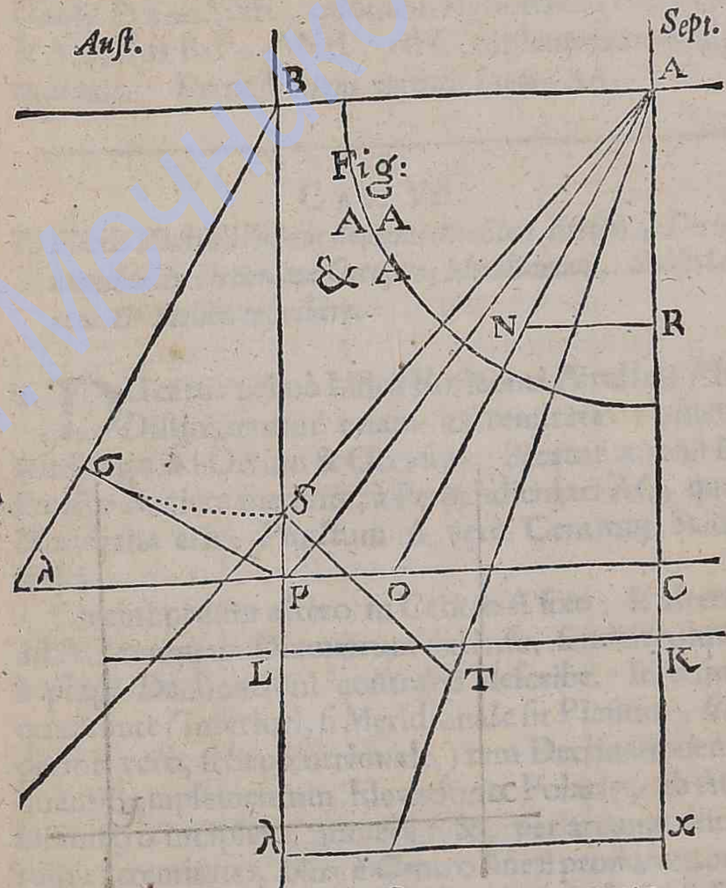
Deinde, ponatur AK=AO=BL, verſus CP; & ducatur linea Horizontalis KL.

Poſtremò, ſuper Lineam Obliquitatis AO, menſuretur AN=CO, & ducatur NR ipſi AB parallela, deinde ſuper LB verſus B, ponatur LS=NR. Producatur AS pro Subſtylari; in quâ, à Puncto S, erigatur ad rectos angulos ST=AR: &, pro Stylo, producatur AT, Subſtylari ad Angulum SAT inſiſtens. *Exemplum Scioterici in Plano Directo Orientali, Inclinante grad. 30. Vide in Figura A.*

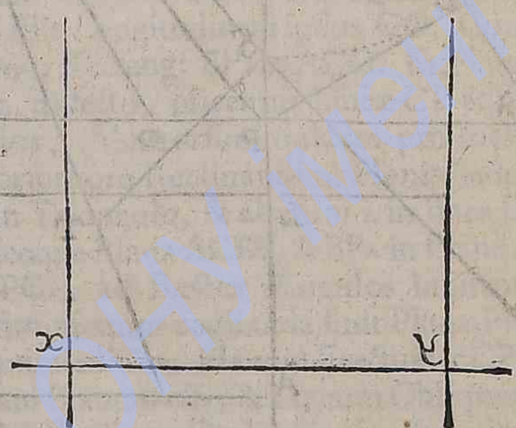
Demonſtratio. Protrahe Lineas AC & BP ad uſq; κ & λ, addendo illis Longitudinem ipſius CO. Conſtitue dein Triang: Rectang: BPλ=ACO: Et, Plano in Lineis Bλ. Pλ. diſſecto, plicentur Lineæ CP & BP ad rectos angulos, (Antrorſum quidem pro Inclinantibus, Retrorſum pro Reclinantibus Planis,) adeo ut Punctum λ in Triangulo, & alterum λ in linea Pλ coincidant: adeoque Plana ACBP, & BPλ in Planum Horizontale PCκλ ad Rectos Angulos inſiſtent. Atque, in hoc ſitu, quatuor cogitanda ſunt Plana; Planum ſc. Horizontale PCκλ, Planum Erectum ACPB (quod Meridiani Planum eſt,) & Planum Obliquum ABλκ=ABLK Plano Declinationis, quoniam Bλ=BL. Jam, ſi à Puncto P ducatur Linea Pσ, perpendicularis Hypotenuſæ Pλ Rectang: Triang: APλ:

Orientale Directum Inclinans gr. 30.

Si linea κλ & triangulum BPλ deſint, erit Figura A.



Orientale Reclinans gr. 30.



$AP\lambda$: patet, quòd linea imaginaria AC, Substylaris erit Plani Obliqui; &, quòd illi respondeat AS, in Plano Delineationis: quódque Altitudo Styli, in Puncto σ, sit $P\sigma = AR = ST$. Nam Triang: Rectang: $P\sigma\lambda = ANR$, quoniam Hypotenusa $P\lambda = AN$; & Angulus $B\lambda P = ANR$, est Complementum Obliquitatis. *Demonstrationi inservit Figura AA.*

Cap. VII.

In Planis Australibus aut Septentrionalibus Erectis, Declinantibus in Ortum aut Occasum, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. DUcatur primò Linea Horizonti Parallela AB. Distinguantur etiam extremitates ejusdem seu Plagæ ad Ortum & Occasum. Secetur autem in Puncto A, circa medium, à Perpendiculari AC, quæ Meridiana erit; Punctum A verò Centrum Scioterici.

Circini pedum altero in Centro A fixo, & altero ad AC tanquam Diametrum extenso, semicirculum à plagâ Declinationi contrariâ describe. In cujus quadrante (inferiori, si Meridionale sit Planum; superiori verò, si Septentrionale,) tam Declinationem, quam Complementum Elevationis Polaris, ab AC Diametro incipiens, numera: &, per arcuum duorum extremitates, binæ è Centro lineæ producantur, quarum una vocetur Linea *Declinationis*, altera *Polaris*. Deinde in Linea prima AB, versus Semicirculum, segmentum abscinde congruum AB: & à Puncto B producatur

producatur linea Diametro parallela, lineam Polarem in P secans: quartâ denique lineâ PC, ipsi AB parallelâ, claudatur Parallelogrammum ABPC. Jam, super Lineam Declinationis, aptetur AD=AB; pérque D, ducatur etiam FDE Diametro Parallela, Lineam AB in F, PC in E, secans.

Postremò, Pro Substylari producatur AE, super punctum verò E, ad rectos angulos, erigatur ET =DF; &, pro Stylo, ducatur AT, Substylari ad Angulum EAT insistens.

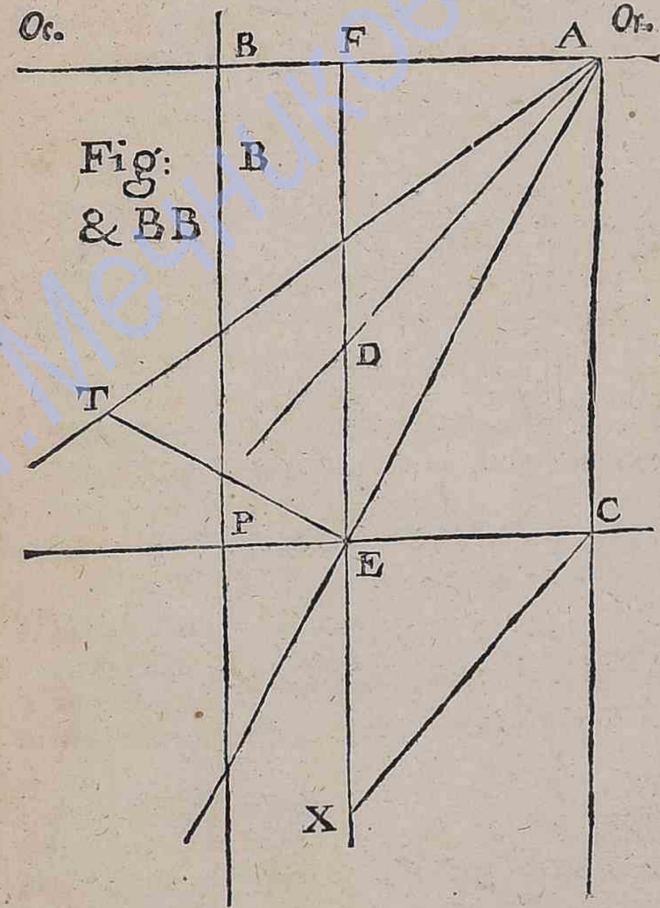
Exemplum Scioterici in Plano Australi erecto, Declinante in Ortum gr: 42. 30'. Vide in Figura B. Ubi tamen, cœlantis incuriâ, deest lineâ AP.

2. Demonstratio. Si Parallelogrammo ACEF, adjiciatur Triangulum CEX=AFD, tanquam in Plano Horizontali in quod Parallelogrammum ACEF ad Rectos Angulos insistere supponitur, (plicato nempe in Linea CP Plano,) perspicuè patet Rectangulum Triangulum ACX=ACP esse Gnomonem seu Stylum Horizontalem, Lineam verò CX Meridianam Plani Horizontalis, Stylumque AX Mundi Axin, & Rectangulum Triangulum AET =AEX Gnomon erecti Plani. *Demonstrationi inservit Figura* BB.

3. Notandum est, quòd in Planis omnibus Declinantibus, quamvis etiam obliqua sint, semper incipiendum erit ab ejusmodi Figurâ, AFDECX (uti jam præceptum est,) secundum Declinationem, Muri Planive dati, delineatâ; cui addenda est etiam DG ipsi AF Parallela, erit ergo AG=XE. Quod semel monitum sufficiat.

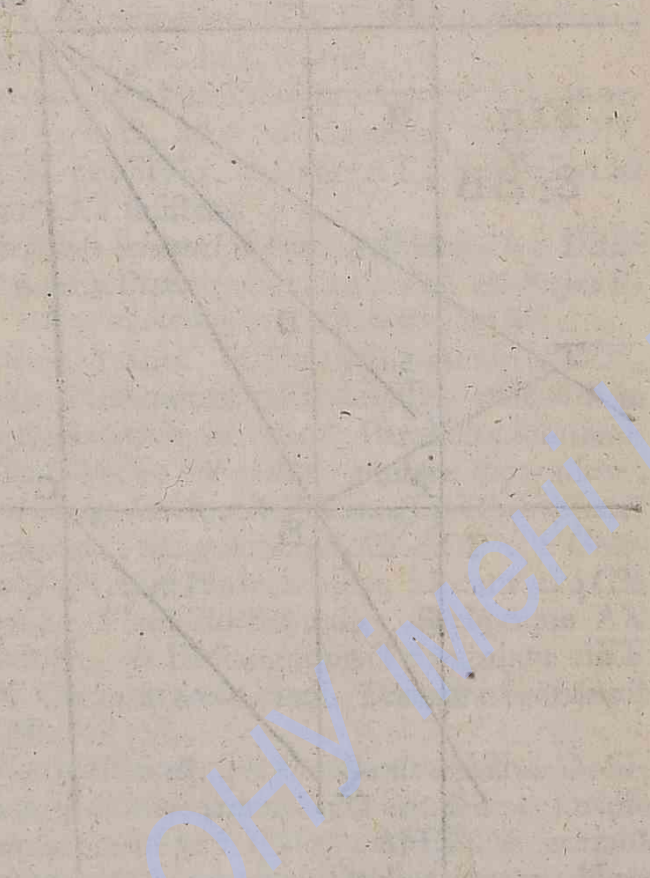
CAP.

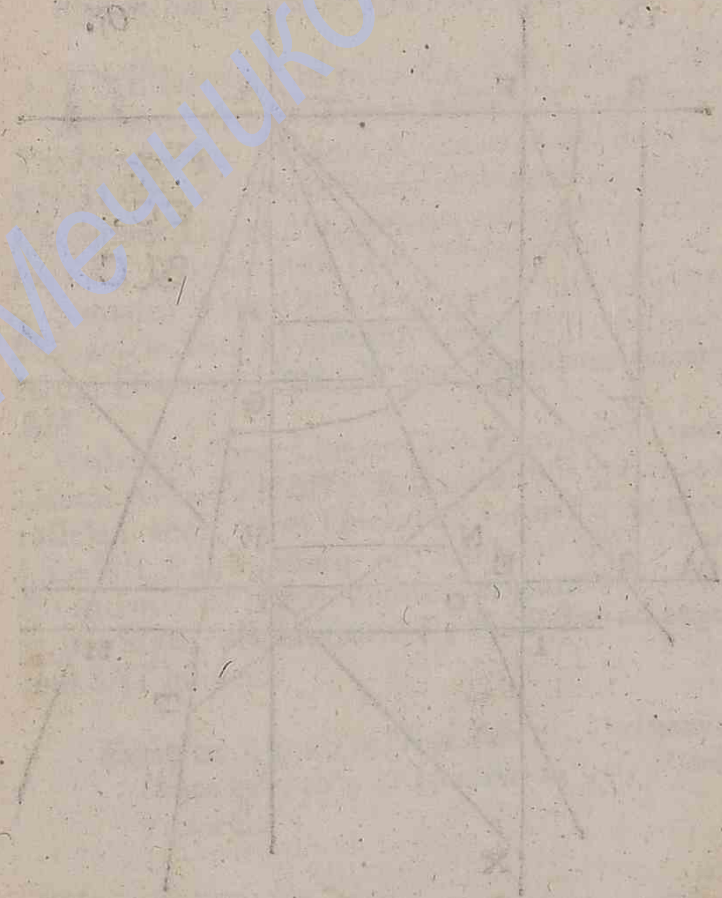
Meridionale erectum, Declinans versus Orientem.



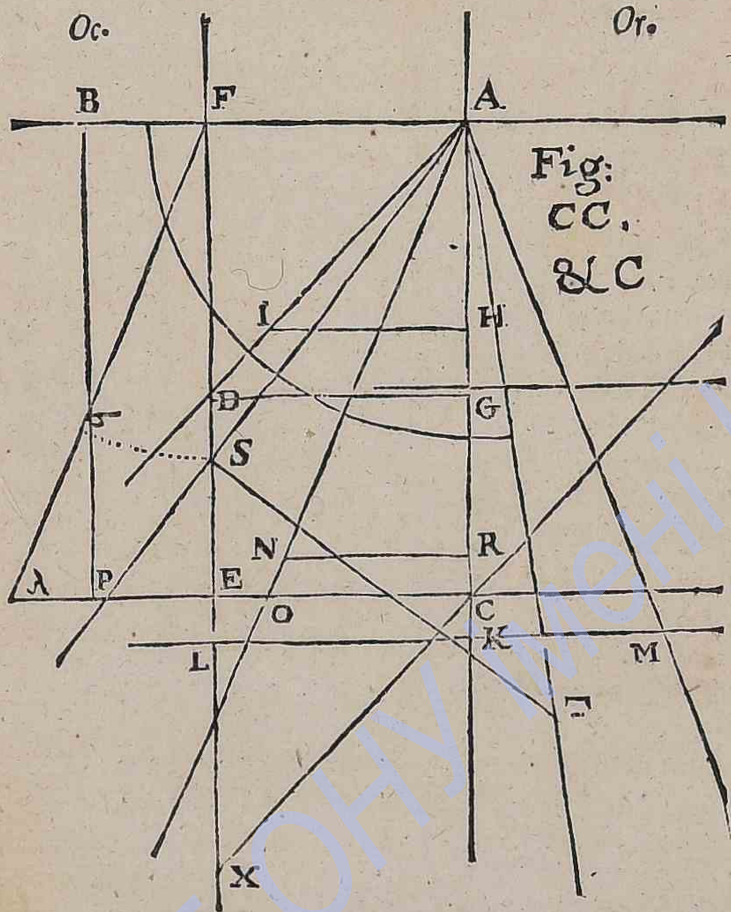
Si omittatur linea CX, erit Figura B.

Septentrionale erectum, Declinans versus Orientem.





Meridionale, Declinans versus Orientem gr: 42½.
& Inclinans gr: 24.



Septentrionale, Declinans versus Orientem,
& Reclinans.

Cap. VIII.

In Planis Australibus Declinantibus & Inclinantibus, vel Septentrionalibus Declinantibus & Reclinantibus, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. Delineetur (ut prius *Cap.* VII. *Sect.* 3. præmonitum est) Figura AFDECX, ad datam Declinationem. Deinde, à Diametro AC incipiens, Plani Obliquitatem in Semicirculo numera; ductâq; Obliquitatis Lineâ AO, ponatur AK=AO=FL versus CE; & producatur Linea Horizontalis LK. Sumatur AH=CO; ductâque HI ipsi AB parallelâ, abscindatur à Linea Horizontali KM=HI ad alterum Diametri latus: & pro Meridiano ducatur AM.

Postremò, Super Lineam Obliquitatis AO, mensuretur AN=AG+AH: & ducatur NR ipsi AB parallela: tum, super Lineam LF versus F, ponatur LS=NR, & protrahatur pro Substylari AS: à Puncto autem S, ad rectos Angulos, erigatur ST=AR: &, pro Stylo, producatur AT, Substylari ad angulum SAT insistens.

Exemplum Scioterici in Plano Australi, Declinanti in Ortum 42°, 30′; & Inclinanti 24°, 0′. Vide in Figura C.

Cap. IX.

In Planis Meridionalibus Declinantibus & Reclinantibus, vel Septentrionalibus Declinantibus & Inclinantibus, Meridianam, Subſtylarem & Stylum inſcribere.

1. Delineetur ad Datam Declinationem (uti prius *Cap.* 7. *Sect.* 3. præmonitum eſt) Figura AFDECX.

Deinde, à Diametro AC incipiens, Plani Obliquitatem in ſemicirculo numera; &, ductâ Lineâ Obliquitatis AO, ponatur AK=AO=FL, verſus CE; & ducatur Linea Horizontalis KL.

Deinde menſuretur AH=CO: &, ductâ HI ipſi AB parallelâ, ſumatur in Linea Horizontali KM=HI, & ad idem Diametri Latus; & ducatur, pro Meridiano, AM.

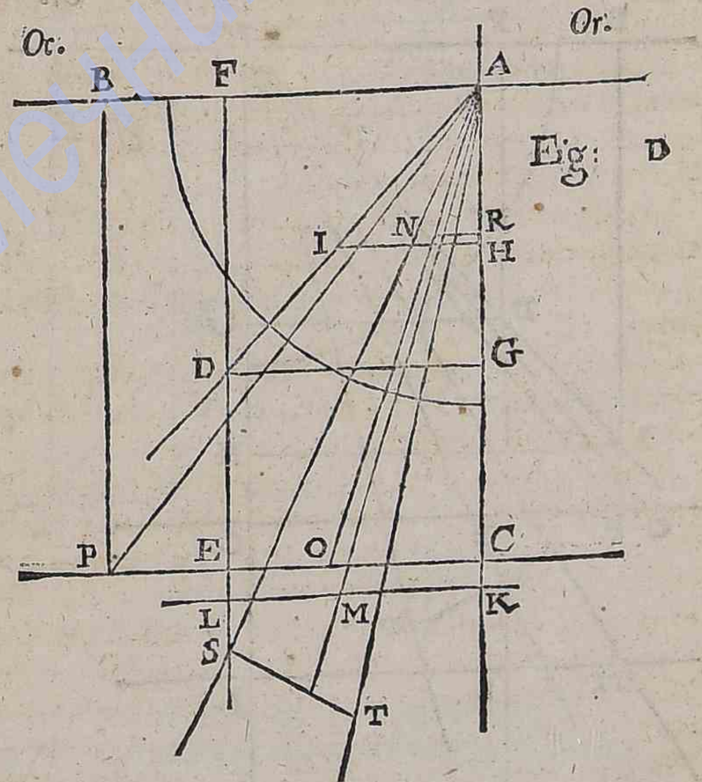
Poſtremò, in Obliquitatis Lineâ AO ponatur AN =GH differentiæ ſc. inter AG & AH: & ducatur NR, Lineæ AB Parallela.

Tum, ſi AG⊏AH (hoc eſt, EX⊏CO) ſuper lineam LX verſus X ponatur LS=NR. At ſi AG⊐AH (hoc eſt, EX⊐CO) ſuper Lineam LF verſus F ponatur LS=NR. Producatur pro Subſtylari AS; ſuper quam, à Puncto S, erigatur ad rectos angulos ST=AR, & producatur Linea Stylaris AT, Subſtylari ad Angulum SAT inſiſtens. Et in hoc Caſu ſecundo, quum AG⊐AH, Polus oppoſitus elevatur, (qui è Caſibus duobus Alter eſt *Cap.* 2. *Sect.* 9. memoratis.) Et ſi AG=AH, hoc eſt EX=CO, Planum Axi Parallelum eſt; & quod in eo deſcribitur Sciotericum

tericum Centro carebit (ut *Cap.* 2. *Sect.* 5. monſtratum erat:) &, in iſto Caſu, AM Subſtylaris erit, non autem Linea Duodecimæ.

EXEMPLUM I.

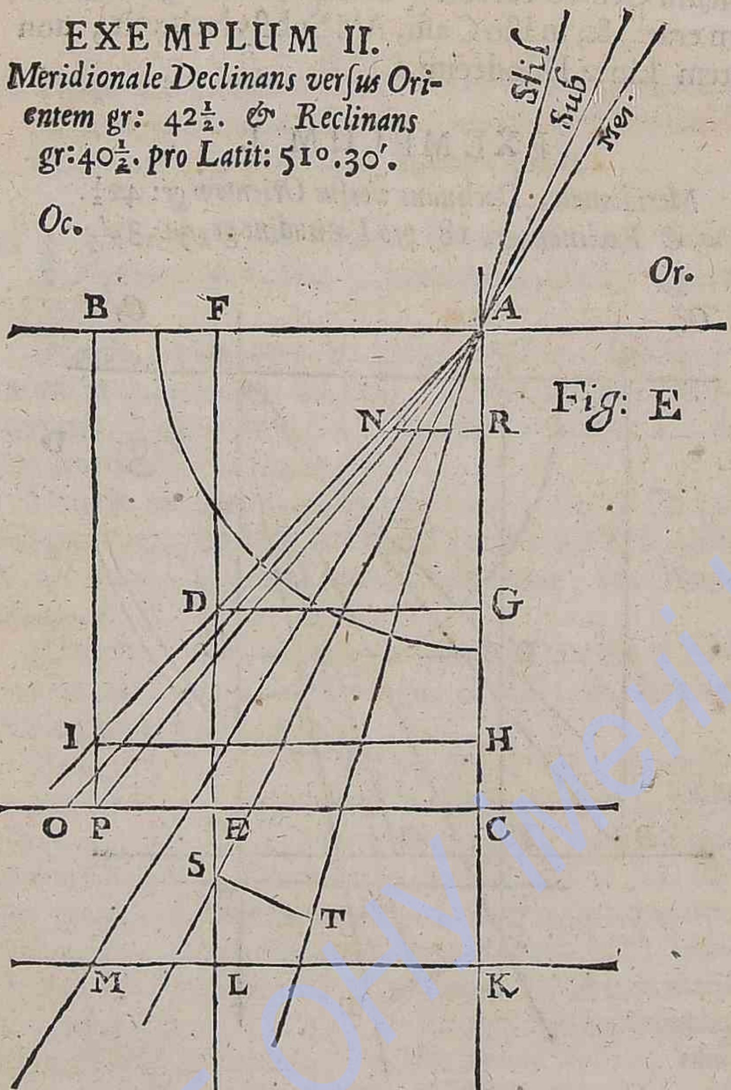
Meridionale, Declinans verſus Orientem gr: 42½. *& Reclinans gr.* 18. *pro Latitudine gr.* 51.30′.



Septentrionale, Declinans verſus Orientem, gr. 42½. *& Inclinans gr.* 18. *pro Lat. gr.* 51. 30′.

EXEMPLUM II.

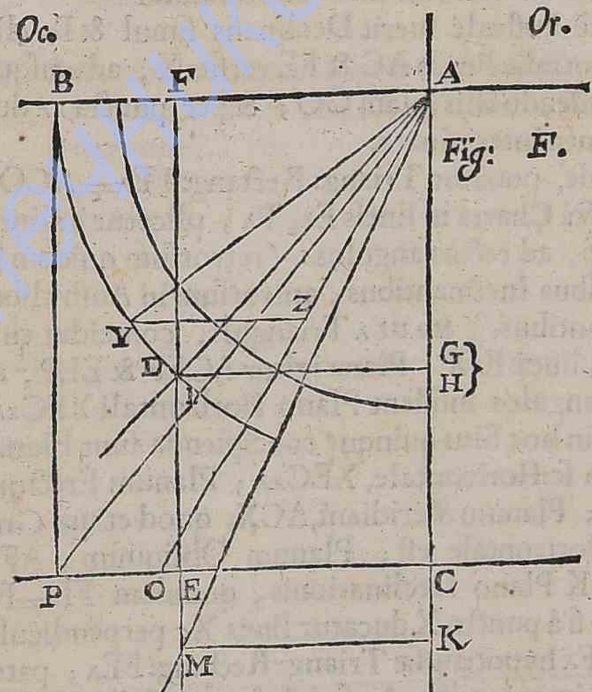
Meridionale Declinans versus Orientem gr: 42½. & Reclinans gr: 40½. pro Latit: 51°. 30′.



Septentrionale Declinans versus Orientem gr: 42½. & Inclinans gr: 40½. pro Lat: gr: 51½.

EXEMPLUM III.

Meridionale Declinans versus Orientem gr: 42½. & Reclinans gr: 30⅓. pro Latit: 51°. 30′.



Septentrionale Declinans versus Orientem gr: 42½. & Inclinans gr: 42½. pro Latit: gr: 51½.

Demonſtratio operis in Capitibus VIII & IX. Si Sciotericon Auſtrale fuerit Declinans ſimul & Inclinans; adauge Planum CEX, Papyrum adglutinando lineæ CE, (at ponè Planum ACEP;) in qua ſub lineis CA & EF ponantur diſtantiæ $C\kappa$ & $E\lambda = CO$; & per puncta $\kappa\lambda$ ducatur linea interminata.

Si verò Auſtrale fuerit Declinans ſimul & Reclinans, protrahe lineas AC & FE verſus X, ad κ uſque & λ, addendo illis ipſam CO; & per puncta $\kappa\lambda$ ducatur linea interminata.

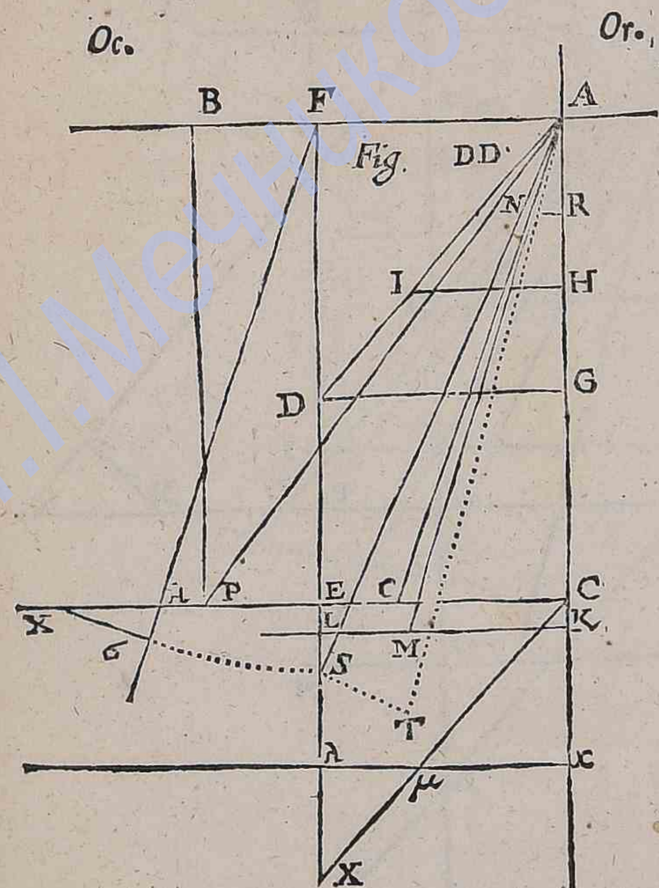
Deinde, ponatur Triang: Rectang: $FE\lambda = ACO$; &, diſſectâ Chartâ in lineis $E\lambda$, $P\lambda$, plicetur in lineis CE, FE, ad rectos angulos: (retrorſum quidem in Auſtralibus Inclinantibus, antrorſum in Auſtralibus Reclinantibus,) ita ut λ Trianguli, coincidat cum altero λ lineæ $E\lambda X$. Plana igitur ACEF & ELP, ad rectos angulos inſiſtent Plano Horizontali $XEC\kappa\lambda$. Atque in hoc Situ quinque concipienda ſunt Plana; Planum ſc: Horizontale, $XEC\kappa\lambda$; Planum Erectum, ACEF; Planum Meridiani, ACX; quod etiam Gnomon Horizontale eſt; Planum Obliquum, $AF\lambda\kappa = AFLK$ Plano Declinationis, quoniam $FL = F\lambda$. Tum, ſi à puncto X ducatur linea $X\sigma$ perpendicularis ipſi $F\lambda$ hypotenuſæ Triang: Rectang: $FE\lambda$; patet, lineam imaginariam $A\sigma$ Subſtylarem eſſe Plani Obliqui; eique Lineam AS in Plano Declinationis congruere; & Styli Elevationem à Puncto σ eſſe $X\sigma = AR = ST$; nam Rectang: Triang: $X\sigma\lambda = ARN$, quia Hypotenuſa $X\lambda = (AG \pm AH)\ AN$, & Angulus $F\lambda E = ANR$ Complemento Obliquitatis. Patet etiam, quod in *Caſu* 2do, *Capitis* 9ni, ubi $AG \sqsupset AH$, hoc

eſt, $EX \sqsupset E\lambda$, Polus oppoſitus elevetur.

Poſtremò, Si Meridianus Horizontalis CX producatur donec Lineæ $\lambda\kappa$ in puncto μ occurrat; Linea $\kappa\mu$ æqualis erit & parallela ipſi $KM = HI$; nam Rect: Triang: $G\kappa\mu = AHI$, quoniam $C\kappa = CO = AH$, & Ang: $\kappa C\mu = ECX = HAI$.

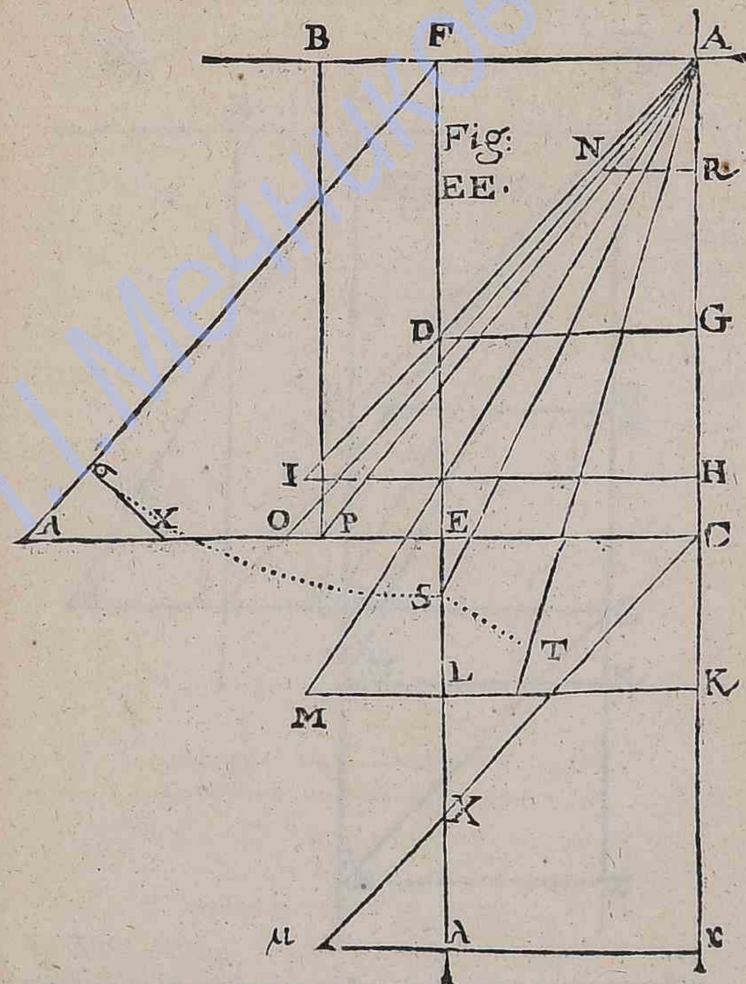
Demonſtrationi inſerviunt Figuræ Literis duplicibus notatæ CC. DD. EE. FF. *Figuris* C, D, E, F, *congruentes.*

Meridionale Declinans versus Orientem, & Reclinans:
In quo AG⊏AH, *hoc est*, EX⊏(CO=)Eλ.



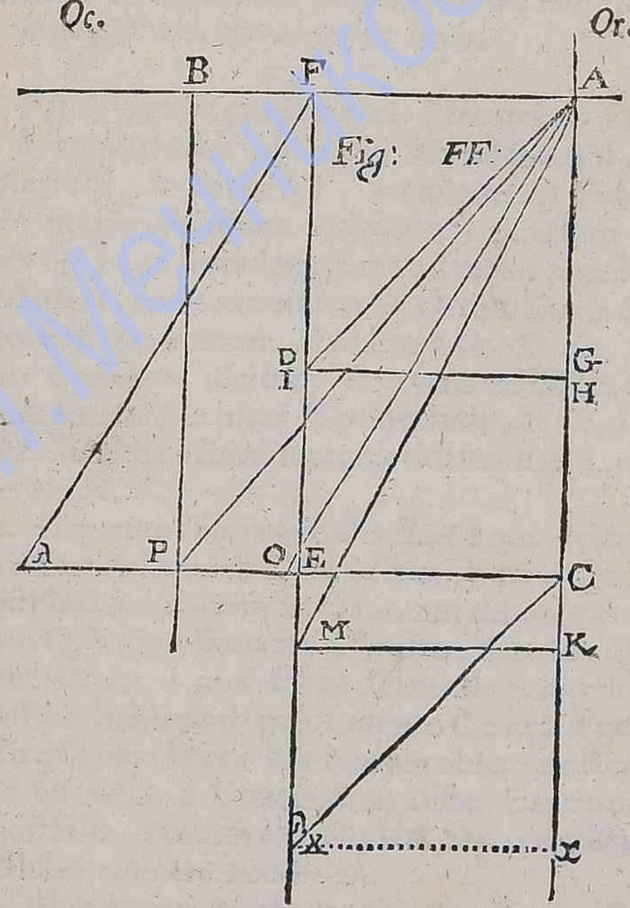
Septentrionale Declinans versus Orientem, & Inclinans.

Meridionale Declinans versus Orientem, & Reclinans:
In quo $AG \sqsubset AH$. *Hoc est* $EX \sqsubset (CO =) E\lambda$.



Septentrionale Declinans versus Orientem & Inclinans.

Septentrionale Declinans versus Orientem, & Reclinans: In quo G & H *sunt idem punctum: Hoc est,* X & λ: *Vel* CO = EX.



Septentrionale Declinans versus Orientem & Inclinans.

Cap. X.

Lineam Contingentem, & Æquinoctialem, cum Meridiana cæterisq; Lineis ejus Horariis, ducere.

1. PEr Regulas præcedentes (secundum Plani situm) debitè inscriptis, Meridiana AM, Substylari AS, & Stylo AT; accipiatur in Substylari (ubi magis appositum videbitur) punctum quodlibet Q, è quo linea longissima ad rectos angulos extendatur; cujus extremitas ad Ortum literis *Or*, ad Occasum *Occ*, notetur. Hæc Linea *Or*. *Q*. *Oc*. vulgò *Linea Contingens* dicitur; & reverâ est Unicâ Communis Intersectio plani Æquinoctialis, & plani Sciotericí. Ubi hæc linea secat Meridianam AM, affige Literam N.

2. Centrum Æquinoctialis Æ, (è quo describendus est in Sciotericis Centralibus,) punctum est in Substylari, quod à puncto Q tantum distat, quantum ipsum Q, à vicinissimo Styli Puncto, Circino distare inveneris. At si non fuerit Centrale Sciotericum: quodlibet Substylaris punctum pro Centro Æquinoctialis assignare licet; hâc tantum observatâ Regulâ, quod quantum à Contingente distat Centrum Æquinoctialis, tantum à Substylari Stylum distare & parallelos eminere necesse est.

3. Hoc itaque modo investigato Æquinoctialis Centro Æ, describatur ex eo (quolibet autem Intervallo,) *Contingentem* versus, Semicirculus Æquino-

ctialis; hoc est, ab utroque Substylaris Latere Qua-
drans. Deinde, Punctis Æ,N, admotâ Regulâ, du-
catur Linea ÆN, Circulum Æquinoctialis secans in
M. Linea autem ÆM Meridiana Æquinoctialis erit;
à quâ sumitur initium Æquinoctialis utrinque divi-
dendi in Horas, per Arcum 15 Graduum, vel in Se-
mihoras per dimidiatos ejusmodi Arcus. Per divi-
siones verò singulas, è Centro Æ, obscuræ producen-
dæ sunt lineæ ad Contingentem terminatæ: Quæ
Lineæ Horariæ Æquinoctialis erunt.

4. Inde hæc oriuntur Consectaria. Primò, quòd
in omnibus Sciotericis, quibus eadem Linea & Meri-
diana simul & Substylaris est, eadem quoque est Me-
ridiana Æquinoctialis.

Secundò, quòd in Orientalibus & Occidentalibus
Erectis, Illa Æquinoctialis Diameter quæ Lineæ Con-
tingenti parallelωs jacet, ejusdem est Meridiana.

Tertiò, quòd Arcus Æquinoctialis inter Meridia-
nam ejus, & Substylarem est Differentia Longitudi-
nis, seu Meridiani, Loci subjecti, & Loci illius in
Terra cui Planum istud Horizontale est; Locus au-
tem iste ad easdem Partes Substylaris ubi Meridiana
situatur; hoc est, ad Plagam illam cui vergit Decli-
natio, Orientem sc. vel Occidentem: At si Arcus
iste nihil fuerit, idem est utriusque Loci Meridianus,
& Latitudine tantum differunt.

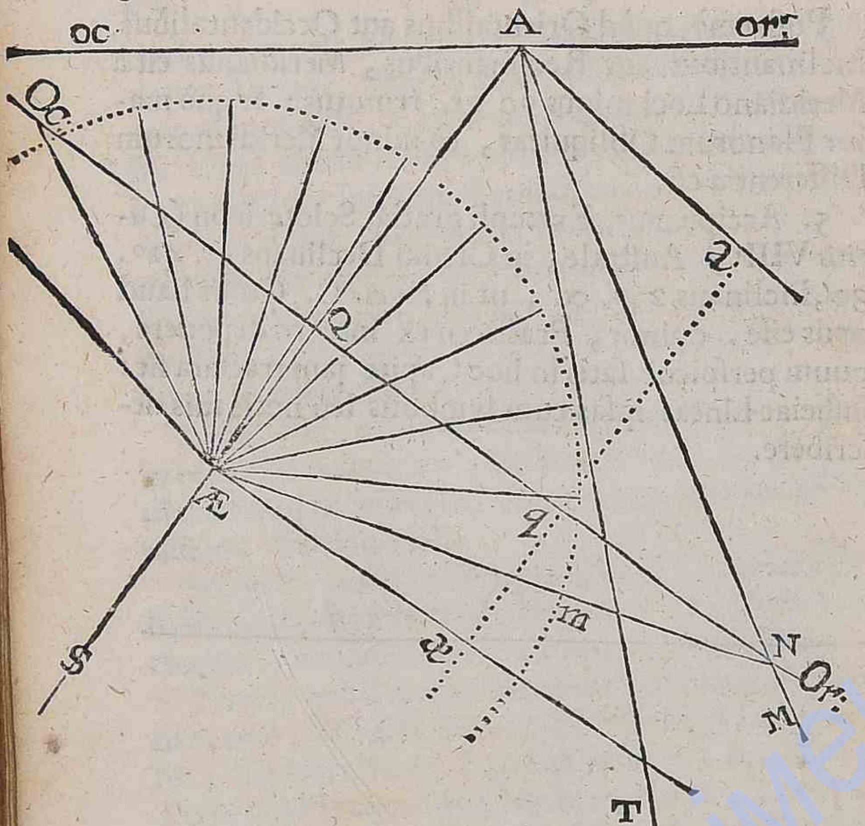
Quartò, quod Orientalia & Occidentalia Erecta,
Illis sunt Horizontalia, qui, sub Æquinoctiali, à Me-
ridiano Loci gr. 90. in Ortum aut Occasum distan-
tes habitant.

Postremò,

Postremò, quòd Orientalibus aut Occidentalibus,
Inclinantibus aut Reclinantibus, Meridianus est à
Meridiano Loci minùs 90 gr. remotus; & quò ma-
jor Planorum Obliquitas, eò minor Meridianorum
Differentia est.

5. Accipiemus, Exempli gratiâ, Sciotericon (*Ca-
pitis* VIII^i^) Australe, in Ortum Declinans gr. 42°.
30′, Inclinans 24°. 00′; ut in *Figura* C. Cujus haud
opus esse, opinor, Practicen ex integro deponere,
quum perspicuè satis in hoc Capite jam tractata sit:
sufficiat Lineas ipsas cum symbolis seu notis suis de-
scribere.

 6. In

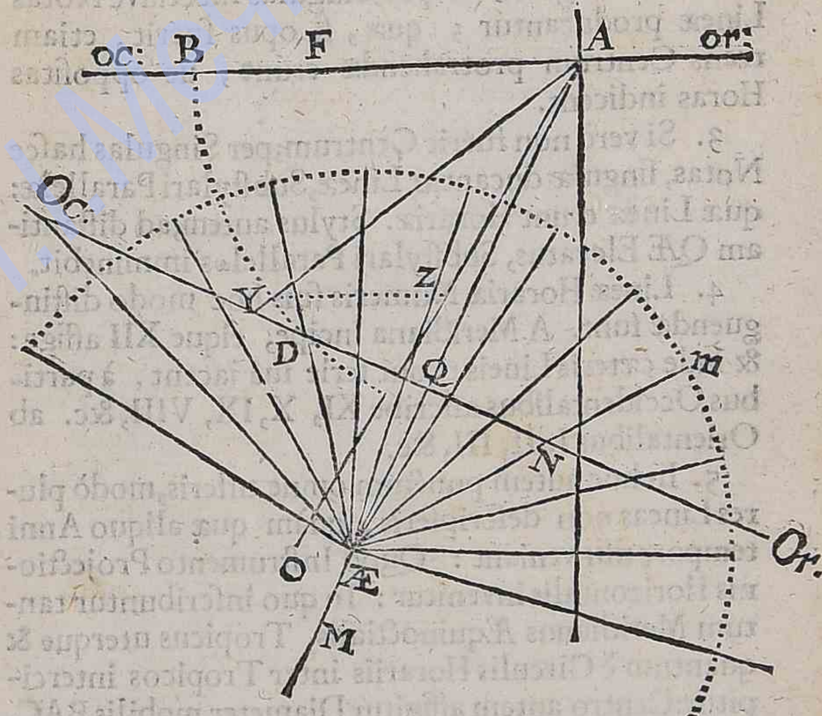


6. In tertio autem Casu *Capitis* IX; quoniam AM Substylaris est, & non Linea XIIæ. Meridiana Æquinoctialis peculiari Methodo indagatur, secundum hoc Theorema.

Ut Radius. ad Sinum Declinationis, ::
Ita Sinus Complementi Obliquitatis.
Ad Arcum Æquinoctialis, qui est distantia, Meridianæ Æquinoctialis à Substylari versus plagam Declinationis.

Geometricè

Geometricè verò sic perficitur. Radio AB describatur Arcus BD : & super Lineam Obliquitatis AO, ponatur AZ=AF ; &, per punctum Z, ducatur Linea ZY, ipsi AB parallela, & Arcum BD secans in Y: jungantur etiam AY : adeoque habetur Angulus BAY ; cui Angulus æqualis AÆ*m* ponatur intra Circulum Æquinoctialem. Accipiatur, Exempli gratia, Sciotericon (in 3tio *Casu* IXi *Capitis*) Australe Declinans in Ortum 42°. 30′. Reclinans 30†.



Cap:

Cap. XI.

Lineas Horarias describere, & propriis quamque numeris notare.

1. QUoniam Linea Contingentiæ *Or.Q.Oc.* unica est Linea utrisque Planis, tum Æquinoctialis tum Scioterici, communis, & in eâ designatos habes Linearum omnium Horariarum Terminos, facillimum erit & ipsas Lineas Horarias ducere.

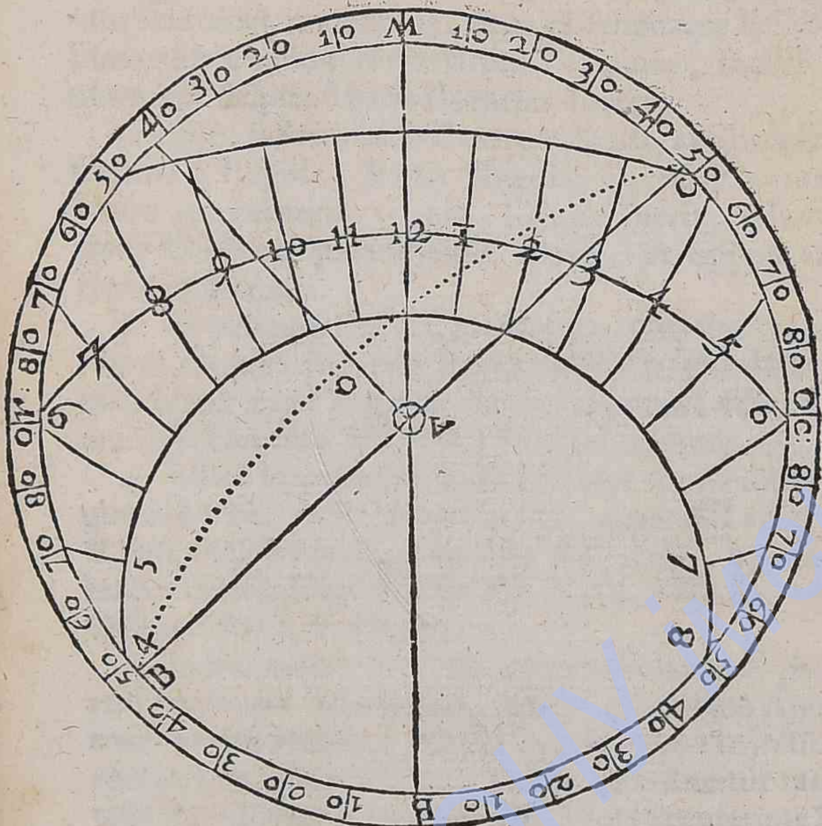
2. Nam, si Scioterico Centrum fuerit; applicetur Centro A Regula; & per Singulas successivè Notas Lineæ producantur; quæ, si opus fuerit, etiam trans Centrum protrahendæ erunt, ut oppositas Horas indicent.

3. Si verò non fuerit Centrum; per Singulas hasce Notas, singulæ ducantur Lineæ, Substylari Parallelæ: quæ Lineæ erunt Horariæ. Stylus autem, ad distantiam QÆ Elevatus, Substylari Parallelus imminebit.

4. Lineæ Horariæ Numeris suis hoc modo distinguendæ sunt. A Meridiana incipe, eique XII affige: & inde cæteris Lineis prout serie suâ jacent, à partibus Occidentalibus asscribe XI, X, IX, VIII, &c. ab Orientalibus I, II, III, &c.

5. In hoc autem punctum omne tuleris, modò plures Lineas non descripseris, quàm quæ aliquo Anni tempore usu veniant: Quod Instrumento Projectionis Horizontalis invenitur: In quo inscribuntur tantum Meridianus Æquinoctialis, Tropicus uterque & quantum è Circulis Horariis inter Tropicos intercipitur: Centro autem affigitur Diameter mobilis BAC, unà cum Radio perpendiculari A 90, in gradus suos diviso; ut in Schemate videre est.

Instrumento



Instrumento autem sic utimur. Gradus Obliquitatis, puncto delebili O, notetur in Radio: quem Gradui Declinationis in Margine affigas, (à Partibus quidem congruis, si Planum Inclinet; Oppositis verò, si Reclinet:) Deinde, per Extremitates utrasque Diametri mobilis, punctumque Obliquitatis O, Arcum Circuli COB ductum puta: Arcus iste, à Partibus Convexis, Planum Inclinans representabit; à Concavis autem, Reclinans; Ideoque Horas Plano ritè describendas exhibebit.

Exempli gratiâ. Sit Planum Australe in Ortum Declinans gradus 42°, 30′. Inclinans gradus 24; vel Planum Boreale Declinans in Occasum 42°, 30′. Reclinans 24°. Applicetur Radius gradui 42°, 30′, inter Ortum & Meridiem; notetur etiam Obliquitas Litera O. Deinde per tria hæc Puncta data, B, O, C, Arcum Circuli occultè ductum puta. Arcus iste à parte Convexa (hoc est, in Australi Inclinanti) ab Exortu Solis usque ad Primam Pomeridianam Horas indicabit: à Parte autem Concavâ (hoc est in Plano Boreali Reclinanti) à Secundâ Pomeridiana ad Occasum.

Observandum est Diametrum nobilem Murum aut Planum Erectum representare, cui Declinatio illa 42°, 30′, contingit.

Et ad hanc Methodum in omnimodis aliis Plani Positionibus vel Declinatione vel Obliquitate diversis hoc Instrumento utendum est.

6. Si Lineæ alicui Horariæ, sive Æquinoctialis sive ipsius Scioterici, non sit, intra Chartam, *Contingentis* Occurrendæ locus, adeo ut non deter Punctum Interfectionis

sectionis cui congruè ducatur Linea: Contingentem utcunque in puncto q seca, ductâ Substylari parallelâ, quæ datam quoque Lineam Horariam secet: Sic Tres Lineæ dantur, scilicet ÆQ, Centri Æquinoctialis à Contingente Distantia; AQ Centri Scioterici à Contingente Distantia; & Parallelæ Segmentum inter Contingentem & Lineam Æquinoctialis horariam datam: Ex his Quarta invenitur, nempe Segmentum ejusdem Parallelæ inter Contingentem, Lineamque Horariam Scioterici quæsitam. Ut in Schemate *Cap.* X. *Sect.* 5.

ÆQ. AQ :: qæ. qa.
Vel AQ, ÆQ :: qa. qæ.

7. Quoniam in Sciotericis fortasse VIII[i] *Capitis*, Punctum S Centro nimis propè inciderit, adeo ut Substylaris minus certo duci queat: Angulum CAS è Canone Triangulorum hoc modo invenire potes.

Ut Sinus semi-summæ, Complementi Altitudinis Polaris, & Obliquitatis;
Ad Sinum Differentiæ eorundem ::
Ita Tangens semi-complementi Declinationis;
Ad Tangentem *Arcus Primi*.

Rursus,
Ut Sinus semi-summæ, Polaris Altitudinis, & Obliquitatis:
Ad Sinum Differentiæ eorundem ::
Ita Tangens semi-complementi Declinationis;
Ad Tangentem *Secundi Arcus*.

Tum;

Tum, si Altitudo Polaris Obliquitatem excedat; Arcuum Differentia æqualis erit Angulo CAS: sin minùs, utrorumque summa.

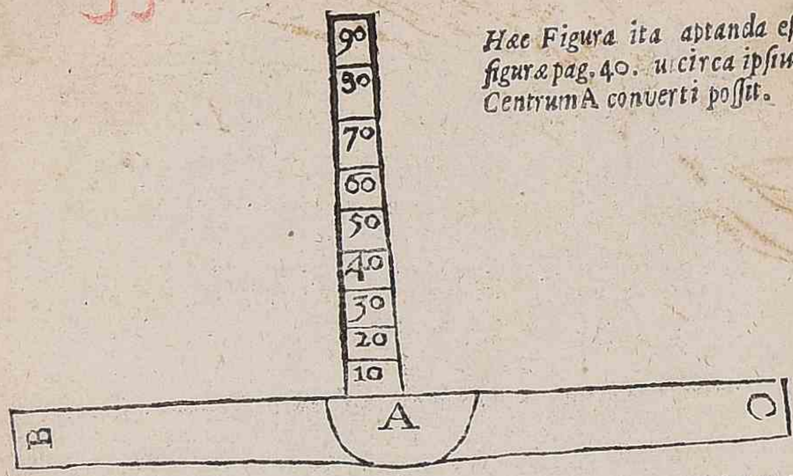
8. In Sciotericis etiam *Capitum* VIII[i] & IX[i], si Angulus CAM pro Meridiano, inventu difficilior fuerit: dicito

Rad. Sin: Obliquitatis :: Tang: Declin.
Tang: CAM.

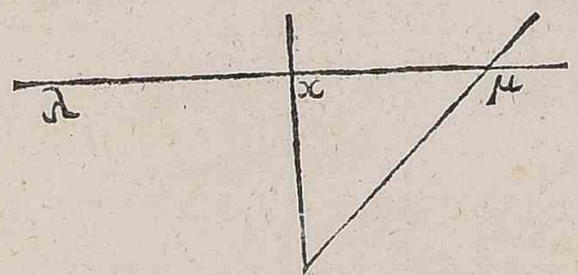
SOLI DEO LAUS ET GLORIA.

F I N I S.

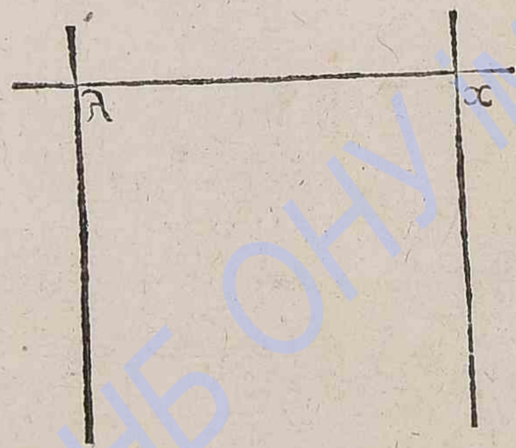
Hæc Figura ita aptanda est figuræ pag. 40. ut circa ipsius Centrum A converti possit.



Hæc Figura agglutinanda est à tergo figuræ CC, prout dirigitur Cap. IX. Sect. 2.



Hæc Figura agglutinanda est à tergo figuræ AA, Cap. 6. ut lineis similiter notatis directè subsist.



39

25.

194

6x