COURS DE MATHEMATIQUE,

QUI COMPREND

Toutes les Parties de cette Science les plus utiles & les plus necessaires à un homme de Guerre, & à tous ceux qui se veulent perfectionner dans les Mathematiques.

TOME TROISIE'ME.

Qui contient la Geometrie.

Par M. OZANAM, *Professeur des Mathematiques.*

NOUVELLE EDITION REVEUE ET CORRIGEE.

A PARIS,
Chez JEAN JOMBERT, prés des Augustins.

M. DC. XCIX.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

L'On donne au Public le Cours de Mathematique de M. OZANAM, ſans y joindre ſon Traitté de Fortification, qui a été imprimé dans ces Provinces depuis quelque tems; c'eſt pour en éviter la dépenſe à ceux qui l'ont déja acheté; ceux qui ne l'ont pas encore, le pourront acheter avec l'Ouvrage complet.

PREFACE.

DANS le premier Volume de ce Cours de Mathematique, & au commencement du ſecond, j'ay traité de la Quantité, en tant qu'elle eſt tout-à-fait abſtraite, & que nous la concevons indépendamment de la matiere; J'ay parlé ſur la fin du ſecond Volume de la Quantité en tant qu'elle ſe peut appliquer aux choſes materielles, & qu'elle nous fait connoître les proprietez, & les diſtances des Corps les plus éloignez. Je conſidere en ce troiſiéme Volume la Quantité comme une proprieté inſeparable de la matiere, ſans laquelle elle n'auroit ni figure, ni ſituation. La Trigonometrie qui a été le ſujet de la derniere Partie du Volume precedent, eſt auſſi en partie le ſujet de la Geometrie, puiſque c'eſt la Science du Triangle, qui eſt la premiere & la plus ſimple de toutes les Figures rectilignes. La Geometrie, dont je vais traiter, embraſſe toutes les autres Figures, elle en examine les proprietez, elle les diviſe, elle en fait les comparaiſons, & en marque les rapports.

Comme les Gentils-hommes n'apprennent ordinairement la Geometrie que pour entendre mieux la Fortification, je fais pour cela succeder à la Geometrie l'Art de la Guerre ou des Fortifications, qui a toûjours été le plus noble, qui est le métier des Heros, & qui fleurit à present le plus. Il n'y a pas beaucoup de choses curieuses à dire sur l'origine de la Geometrie, mais il y en a beaucoup sur celle des Fortifications & sur leur progrez, dont presque tous ceux qui ont écrit de cet Art, ont suffisamment parlé : c'est pourquoy pour ne me pas rendre ennuyeux par une trop longue Preface, je me contenteray de dire quelque chose de la Geometrie.

Je diray donc à l'égard de la Geometrie, qu'il a toûjours été si necessaire de connoître les distances, que les hommes n'ont pû vivre sans les considerer & sans les marquer, soit dans leur memoire, soit par quelque signe exterieur : de sorte que bien qu'on prétende que les Egyptiens ont été les inventeurs de la Geometrie, parce que l'on voit qu'ils ont été les premiers dans la necessité de conserver les limites, & l'étenduë de leurs Terres & Possessions, ou par des figures tracées, ou par des états & des memoires couchez par écrit, à cause que les inondations de leurs Terres par les débordemens du Nil, éffaçoient toutes les autres marques ; neanmoins comme l'on avoit eu la même necessité avant que la partie inondée de l'Egypte fût habitée, parce qu'on n'a pû faire aucune division sans prendre les mesures du tout & de chaque partie, ni bâtir des Maisons & des Villes sans s'appercevoir de leurs figures, & sans les regler par des mesures, il est à presumer que la science des mesures est aussi ancienne que le Monde. C'est sur luy-même que

que l'homme a pris les mesures de toutes les autres choses, il n'a pas emprunté d'ailleurs les noms de Brasses, de Coudées, de Pieds, & de Pouces, il a d'abord appliqué son pied, sa main, ses bras, & ses doigts aux sujets qu'il vouloit mesurer, & il a pris sur son corps les mesures de toutes les autres choses sans avoir besoin de Livres, ni de Maîtres, & sans charger sa memoire de noms & de figures. Ainsi la necessité qui a contraint les hommes à faire des partages, & à se servir des mesures qu'ils prenoient sur eux-mêmes, les a obligez de chercher les égalitez pour parvenir aux partages, & cette égalité ne se pouvoit connoître qu'en rapportant ou les Pieces divisées, ou les mesures qu'on a dû appliquer & compter, pour proceder avec justesse dans les divisions : ce qui a donné commencement à la Geometrie.

J'ajoûte que Vitruve, de qui nous tenons ce qu'il y a de plus beau dans l'Architecture, dit que les Grecs par un excés de délicatesse en matiere de Bâtimens, ne prirent pas seulement les parties du corps humain pour les mesures communes des Plans & des Elevations, mais la beauté même des corps des hommes & des femmes pour mesure de celle de l'Architecture : que par cette délicate invention l'on forma l'Ordre Corintien sur la belle proportion d'une femme parfaitement bien taillée, l'Ordre Ionique sur celle d'un homme bien fait, & bien proportionné, & l'Ordre Dorique sur celle d'un homme de travail, fort & robuste. Enfin l'homme s'est idolâtré jusques-là qu'il s'est crû le plus parfait des Etres créez, & s'est fait le modele & la mesure de tous les autres.

Voilà ce qui regarde l'origine de la Geometrie, quant

quant à son utilité l'on peut dire que si les Grecs ont passé pour plus spirituels que les autres Peuples, ce n'est peut-être qu'à cause que par le moyen de cette science ils ont trouvé le chemin le plus court & le plus assûré pour devenir raisonnables & spirituels. Socrate qui a été le plus industrieux de leurs Maîtres, faisoit voir que tous les hommes avoient de l'esprit, en les interrogeant d'une certaine maniere, & en tournant leurs esprits d'un côté plûtôt que d'un autre. Nous sçavons d'ailleurs que luy & les autres Grecs ont commencé par la Geometrie, ce qui donne lieu de croire que c'est par cette Science que leurs esprits se sont tant élevez au dessus des autres. Les Grecs d'aujourd'huy sont aussi grossiers que les autres Peuples, sans doute parce qu'ils n'ont plus la même methode d'enseigner leurs enfans. Que si en France l'on s'applique plus à la Geometrie, & de meilleure heure, il y a lieu d'esperer que les esprits prendront un plus grand vol, & qu'ils se perfectionneront davantage. La France doit déja à cette Methode l'honneur qu'elle a d'avoir donné à tout le Nord, & à une grande partie de l'Europe, une nouvelle Philosophie, dont Monsieur Descartes est l'inventeur.

Quand la Geometrie n'auroit pas cet avantage, & qu'elle laisseroit toûjours les esprits dans la poussiere, on ne laisseroit pas d'en avoir besoin en toutes sortes de professions, elle est même plus necessaire aux hommes qui se contentent d'un état mediocre, qu'à ceux qui ont l'ambition de s'élever. On ne peut vivre dans l'état le plus commun, qu'on ne mette en usage des mesures de toutes les façons, c'est l'ame de tous les métiers. Tous les Arts qui s'occupent à nourrir & à vétir les

les hommes, ne subsistent que par les mesures des Longueurs, des Largeurs, des Cercles, & des Quarrez. Ceux qui s'occupent à faire commerce de provisions, doivent connoître les mesures des choses séches & des liquides, & de leurs reductions. Les Laboureurs sçavent l'Arpentage par necessité, ou par usage, les Vignerons le Jaugeage, les Maçons les alignemens, & les mesures des Angles & des Quarrez, & même le Toisé. Ceux qui travaillent sur le bois, sur le fer, & sur les pierres, ne peuvent ignorer ces mesures. Mais sur tous les autres, ceux qui s'appliquent aux Arts liberaux, ne doivent jamais être sans Regle & sans Compas, à moins que d'abandonner leurs desseins, & de passer pour aussi mal-habiles que ceux qui composeroient des discours sans raisonnement. Les mesures sont pour ainsi dire, la raison de tous les Arts & de tous leurs Ouvrages: ôter la Geometrie à tous les Arts, soit liberaux, soit mécaniques, c'est en ôter l'esprit & la raison, c'est les détruire.

Quand il seroit libre à chacun des hommes en particulier de mépriser les Arts & la Geometrie, il ne le seroit pas aux Princes, & à ceux qui ont interest de maintenir les Societez & les Etats. Si les hommes n'étoient attaquez que par la faim, la soif, le froid, le chaud, les vents, les pluyes, ou par les Bêtes, ils pourroient vivre en Cyniques, & choisir une vie semblable à celle des bêtes, mangeant des fruits, beuvant de l'eau, se chauffant au Soleil: & ils ne chercheroient que des antres pour se mettre à couvert contre les incommoditez de l'air, ou contre l'insulte des Bêtes. Mais quand ils se font la guerre les uns aux autres, pour conserver leurs biens, leur liberté, & leur

leur vie, il faut de necessité quitter cette vie sauvage & paresseuse, il faut se faire des armes, se fortifier de la compagnie des autres hommes, & s'associer pour éviter le commun peril, il faut opposer la force à la force, & l'artifice à l'artifice. C'est ce qui a fait bâtir des Villes, & les fortifier, afin de resister aux Etrangers qui voudroient attenter sur nôtre liberté & sur nôtre vie.

L'Art de la Fortification est donc le premier où l'on ait employé la Geometrie, & il est à present dans un tel degré de perfection, qu'il n'y a pas apparence qu'on y puisse ajoûter rien d'essentiel, parce qu'il semble impossible de trouver pour attaquer les Places autre chose que ce qu'on a inventé. On a employé la Terre pour les Tranchées, pour les Digues, & pour les Retranchemens: l'Eau pour les Ecluses, & pour les Inondations: & le Feu en tant de manieres, qu'on le fait passer par dessous avec les Mines & les Fourneaux, par dessus avec les Grenades, les Bombes, & les Carcasses, & directement avec les Canons, & les autres pieces d'Artillerie. On a trouvé des manieres de se défendre contre tout cela, il n'y a qu'à les perfectionner, & à moins qu'on ne trouve d'autres Elemens, il n'y a gueres d'apparence qu'on puisse inventer d'autres attaques, ni d'autres defenses.

Je sçay bien que ce n'est que depuis peu qu'on a fait des Fortifications bien regulieres, & que par consequent la Geometrie n'étoit pas si necessaire aux anciens Ingenieurs qu'à ceux d'apresent, qui employent la Geometrie avec un soin extraordinaire, pour atteindre à la perfection de

l'Art

l'Art de fortifier; mais cela fait toûjours voir que l'on ne peut pas se passer de Geometrie, au moins à present, puisque la guerre est presentement un Art universel, que tout le monde est contraint de sçavoir, à cause des divisions qui ont fait naître une guerre universelle en toute l'Europe.

TABLE

TABLE

Des Titres contenus dans la Geometrie.

PREMIERE PARTIE.

De la Geodesie.

CHAPITRE I.

De la Division des Triangles.

CHAPITRE II.

De la Division des Quadrilateres.

CHA-

CHAPITRE III.

De la Division des Polygones.

SECON-

SECONDE PARTIE.

De la Longimetrie.

TROI-

TROISIÉME PARTIE.

De la Planimetrie.

CHAPITRE I.

Des Theorêmes.

CHAPITRE II.

Des Problêmes.

QUATRIÉME PARTIE.

De la Stereometrie.

CHAPITRE I.

Des Theorêmes.

CHAPITRE II.

Des Problêmes.

Fin de la Table des Titres.

TRAITE'

TRAITE' DE GEOMETRIE.

LA Geometrie est une partie de la Mathematique simple, qui considere la Grandeur, non pas tant par rapport à elle-même, que par celuy qu'elle peut avoir avec une autre Grandeur de même genre, en faisant abstraction de toute matiere ou sujet sensible. Elle se divise en *Speculative* & en *Pratique*.

La *Geometrie Speculative* considere simplement les proprietez de la *Quantité continuë*, c'est à dire de la Grandeur qui a de l'étenduë, & dont les parties sont liées ensemble, par rapport au lieu qu'elle occupe, & alors on l'appelle *Quantité continuë permanente*, comme les Lignes, les Plans, & les Solides: ou par rapport au temps dans lequel elle subsiste, & alors on la nomme *Quantité continuë successive*, comme le Mouvement.

La *Geometrie Pratique* enseigne à mesurer & à diviser la Quantité continuë selon son étenduë, qui peut avoir une seule dimension, qu'on appelle *Longueur*: comme la Ligne: ou bien deux dimensions, sçavoir une longueur & une largeur, comme le Plan: ou bien encore trois dimensions, sçavoir une longueur, une largeur, & une profondeur, ou hauteur, ou épaisseur, comme le Corps.

C'est de la Geometrie Pratique dont nous traiterons icy particulierement, & nous la diviserons en quatre Parties, dont la premiere traitera de la *Geodesie*, ou de la division des Champs: la seconde de la *Longimetrie*, ou de la mesure des Lignes accessibles & inaccessibles sur la terre: la troisiéme de la *Planimetrie*, qu'on appelle *Arpentage*, qui est la mesure des Plans: & la quatriéme de la *Stereometrie*, qu'on nomme *Toisé*, qui est la mesure des Solides, ou Corps.

DEFINITIONS.

I.

Planche I. I. Fig.

Le *Corps*, ou *Solide*, est une quantité qui a de l'étenduë en longueur, en largeur, & en profondeur, comme ABCDEFG, qui a la figure d'un Dé à joüer, dont la *Longueur* est AB, ou FG, ou DE, la *Largeur qui se conçoit* plus petite que la Longueur est BC, ou DG, ou EF, & la *Hauteur*, ou *Profondeur*, ou *Epaisseur*, est AF, ou BG, ou CD. Il a aussi un Dessus, comme DEFG, & un Dessous, comme ABC, qu'on appelle *Base*, à l'égard de sa *Hauteur* BG, qui luy doit être perpendiculaire pour être la veritable hauteur. Il a encore un Devant, comme ABGF, & un Derriere, comme CDE. Enfin il a des côtez, comme BCDG, AFE. Mais en termes de Geometrie, on appelle *Côtez d'une Figure*, les lignes qui la bornent, comme la longueur, la largeur, & la profondeur: & *Figure* en general, ce qui renferme un espace, & qui est borné de tous côtez, d'où il est aisé de conclure qu'un Angle n'est pas une Figure.

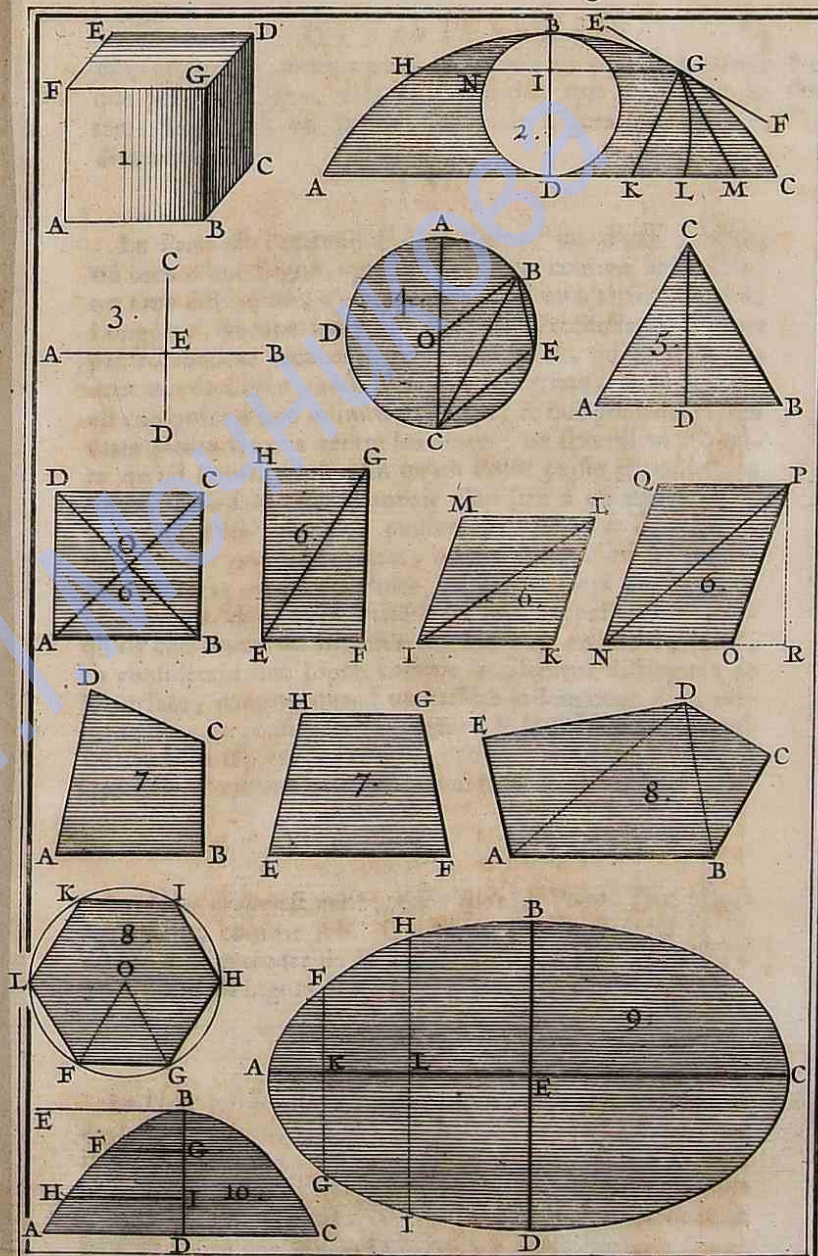
II.

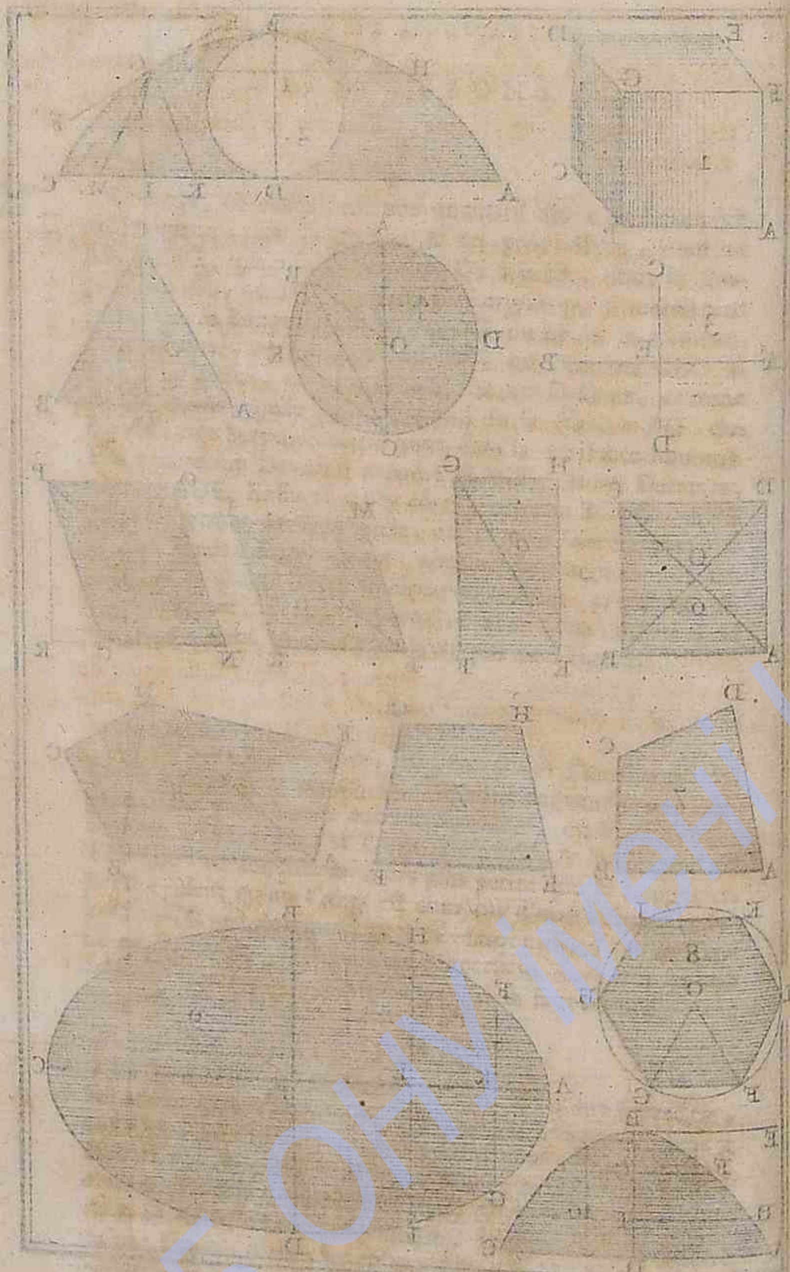
La *Surface*, ou *Superficie*, est l'extremité d'un Corps, laquelle a deux dimensions, sçavoir une Longueur & une Largeur, sans y considerer aucune Epaisseur, ou Profondeur: comme DEFG, dont la *Longueur* est DE, & la *Largeur* est EF, que l'on conçoit toûjours plus petite que la Longueur. Il est évident qu'un Corps est composé d'une infinité de Superficies, & que plusieurs Superficies étant mises l'une sur l'autre ne sçauroient produire qu'une Superficie. Ainsi afin qu'une Superficie puisse produire un Corps, il la faut faire mouvoir par pensée d'un lieu à un autre.

III.

La *Ligne* est l'extremité d'un Corps, ou d'une Superficie, qui a une seule dimension, sçavoir une Longueur, sans y considerer aucune largeur, ni aucune profondeur: comme EF, ou FG. Il est évident qu'un Corps & une Surface sont composez d'une infinité de Lignes, & que plusieurs Lignes étant ajustées l'une contre l'autre, ne sçauroient produire qu'une Ligne. Ainsi afin qu'une Ligne puisse produire une Surface, il la faut faire mouvoir d'un lieu à un autre: & comme ce mouvement ne se peut faire que par une Ligne, cela fait dire que deux Lignes étant multipliées ensemble produisent une surface, dont ces Lignes representent les deux dimen-

Geometrie Planche 1. Page 2.





dimensions: & comme aussi la Surface ne peut se mouvoir que par une Ligne, cela fait aussi dire que le Produit de trois Lignes est un Solide, dont ces Lignes sont les trois dimensions. Planche 1. 1. Fig.

I V.

Le *Point* est l'extremité d'un Corps, ou d'une Surface, ou bien d'une Ligne, que l'on conçoit comme indivisible, ou sans dimension, c'est à dire auquel on n'attribuë aucune Longueur, aucune Largeur, ni aucune Profondeur, n'ayant par consequent aucunes parties : comme A, ou B. Il est évident que la Ligne, aussi-bien que la Surface, & le Solide, est composée d'une infinité de Points, & que plusieurs Points étant placez les uns contre les autres, ne sçauroient produire qu'un Point. Ainsi afin qu'un Point puisse produire une Ligne, il le faut faire mouvoir d'un lieu à un autre.

Quoique les points ne puissent pas subsister separément des Lignes, ou des Surfaces, ou des Corps, ni les Lignes des Surfaces, ou des Solides, ni les Surfaces des Solides: Neanmoins les Mathematiciens les separent par pensée, lorsqu'ils cherchent les mesures des Lignes, ou des Surfaces, en considerant une Ligne comme réellement distinguée de la Surface, comme quand on mesure la longueur d'un chemin, sans en considerer la largeur : & la surface comme effectivement separée du Corps, comme quand on mesure la superficie d'une muraille sans considerer sa solidité.

V.

La *Ligne droite* est celle, dont tous les Points sont placez également, comme AB. Quand on dit simplement *Ligne*, cela se doit entendre de la Ligne droite. Il est évident qu'il n'y a point de Lignes droites de differentes especes.

V I.

La *Ligne courbe* est celle, dont tous les Points ne sont pas également placez, comme ABC. Il est évident qu'il y a une infinité de Lignes courbes de diverse espece, & de different genre : & comme il seroit trop long, & même inutile, d'en faire le dénombrement, nous parlerons seulement dans la suite de celles qui peuvent convenir à nôtre sujet. 2. Fig.

V I I.

La *Touchante d'une ligne courbe*, est une Ligne qui rencontre la courbe en un seul point sans la couper, c'est à dire

Planche 1. 2. Fig. sans entrer au dedans : comme EF, qui rencontre la courbe ABC au seul point G, sans entrer en dedans.

VIII.

Les *Lignes paralleles* sont celles qui étant prolongées comme l'on voudra, sont toûjours également éloignées entre elles : comme AC, GH.

IX.

3. Fig. Les *Lignes perpendiculaires* sont celles qui se coupent de telle maniere, que l'une à l'égard de l'autre ne panche pas plus d'un côté que d'autre. Ainsi on connoît que la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD, & que reciproquement la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB, parce que la ligne AB à l'égard de la ligne CD ne panche pas plus vers C que vers D, & que pareillement la ligne CD à l'égard de la ligne AB, ne panche pas plus vers A que vers B.

X.

2. Fig. Le *Diametre d'une Ligne courbe*, est une ligne droite tirée au dedans de cette courbe, qui divise en deux également toutes les lignes droites paralleles tirées au dedans de la même ligne courbe. Ainsi on connoît que la ligne BD est le Diametre de la courbe ABC, parce qu'elle divise en deux également aux points D, I, les deux paralleles AC, GH, qu'on appelle *Ordonnées* au Diametre BD, lequel on appelle *Axe*, quand il est perpendiculaire à ses Ordonnées.

XI.

Le *Sommet d'une Ligne courbe* est le point où cette Ligne courbe se trouve coupée par son Diametre, comme B. Il est évident que comme une Ligne courbe peut avoir une infinité de Diametres differens, elle peut aussi avoir une infinité de sommets differens, parce qu'on y peut tirer en diverses manieres plusieurs lignes droites paralleles entre elles, & faire passer par leurs points de milieu autant de Diametres differens.

XII.

La *Perpendiculaire d'une Ligne courbe* est celle qui passant par le point d'attouchement est perpendiculaire à la Touchante : comme GK, que je suppose perpendiculaire à la Touchante EF, qui touche la courbe ABC au point G.

XIII.

XIII.

Planche 1. 2. Fig.

L'*Angle* est un espace indéfini causé par l'inclination de deux lignes qui se coupent, lequel on appelle *Angle rectiligne*, quand ses deux lignes sont droites, comme IGK : *Angle mixtiligne*, quand l'une de ses deux lignes est droite, & l'autre est courbe, comme IGB : & *Angle curviligne*, quand les deux lignes qui le forment, sont courbes, comme LGC, qu'on nomme *Angle Spherique*, quand ses deux lignes sont sur une Superficie Spherique, & tout Angle, dont les deux lignes sont sur un Plan, s'appelle *Angle plan*.

L'Angle Plan Mixtiligne & le Curviligne se reduisent à un Rectiligne, par des lignes droites, qui touchent les lignes courbes de l'Angle au point où elles se coupent, qu'on appelle *Pointe de l'Angle*, ou *Sommet de l'Angle*. Ainsi l'Angle Mixtiligne KGL se reduit au Rectiligne KGM, en supposant que la droite GM touche la courbe GL au point G : & l'Angle Curviligne LGC se reduit au Rectiligne MGF, en supposant que les deux lignes courbes GL, GC, soient touchées au point G, par les droites GM, GF.

XIV.

L'*Angle droit* est celuy, dont les deux lignes sont perpendiculaires entre elles : comme KGE, ou KGF, en supposant que la ligne KG soit perpendiculaire à la ligne EF. D'où il est aisé de conclure par la définition des lignes perpendiculaires, que tous les angles droits sont égaux entre eux, ce qui fait dire que quand deux lignes sont perpendiculaires entre elles, elles se coupent à *Angles droits*, comme AB, CD, 3. Fig.
qui se coupant au point E, y forment quatre Angles droits, qui sont égaux entre eux.

XV.

L'*Angle oblique* est celuy qui se fait par la rencontre de deux *Lignes obliques*, c'est à dire de deux lignes qui ne sont 2. Fig.
pas perpendiculaires entre elles, ou qui se coupent à angles inégaux. Ou bien c'est celuy qui est plus grand, ou plus petit qu'un droit : & alors on l'appelle *Angle aigu*, quand il est plus petit qu'un droit, comme IGE, qui est plus petit que le droit KGE : & *Angle obtus*, quand il est plus grand qu'un droit, comme IGF, qui est plus grand que le droit KGF.

XVI.

Planche 1. 3. Fig.

XVI.

La *Base d'une Ligne courbe* est la derniere des Ordonnées, qui en termine le Diametre & la courbe. Ainsi on connoît que la base de la courbe ABC est la droite AC, qui termine le Diametre BD, lequel est icy perpendiculaire à la Base AC, & alors cette perpendiculaire ou Axe BD, se nomme *Hauteur de la courbe* ABC, par rapport à la base AC.

XVII.

La *Surface Plane*, qu'on nomme simplement *Plan*, est celle dont toutes les lignes sont droites, de quelque maniere qu'on les tire, quoy qu'on y puisse tirer des lignes courbes, mais toutes ces lignes courbes seront également placées, c'est à dire que l'une ne s'abaissera & ne s'élevera point plus que
1. Fig. l'autre. Tel est le Plan ABGF, ou BCDG, ou DEFG.

XVIII.

La *Surface courbe*, est celle dont toutes les lignes sont courbes, étant impossible qu'il y ait aucune ligne droite, les unes étant plus élevées, ou plus abaissées que les autres: comme la Surface d'une Sphere, qu'on appelle *Superficie Spherique*, laquelle étant considerée par le dehors, se nomme *Surface convexe*, & étant considerée par le dedans est appellée *Surface concave*.

XIX.

Le *Cercle* est une Surface plane bordée par une seule ligne courbe, qu'on appelle *Circonference du Cercle*, au dedans de
4. Fig. laquelle il y a un point appellé *Centre du Cercle*, duquel toutes lignes droites tirées jusqu'à la circonference, lesquelles on appelle *Rayons du Cercle*, sont égales entre elles. Ainsi on connoîtra que ABCD est la circonference d'un Cercle, dont le centre est O, & les Rayons, ou *Demi-diametres* sont les lignes droites égales OA, OB, OC, &c.

XX.

Le *Diametre d'un Cercle* est une ligne droite tirée comme l'on voudra par le centre du Cercle, & terminée de part & d'autre par la circonference du même Cercle: comme AC, qui divise le Cercle & sa circonference en deux parties égales, qu'on appelle indifferemment *Demi-cercle*, dont la moitié se nomme par consequent *Quart de Cercle*.

XXI.

Planche 1. 4. Fig.

XXI.

L'*Arc de cercle* est une partie de la circonference du cercle, plus petite, ou plus grande qu'un Demi-cercle, ou que la moitié de la circonference: comme l'arc AB, qui est plus petit que la Demi-circonference ABC, ou bien l'arc ADCB, qui est plus grand que la Demi-circonference ADC.

Les Mathematiciens ont divisé la circonference du cercle en 360 parties égales, ou petits arcs égaux, qu'ils ont appellez *Degrez*: & chaque Degré en 60 autres parties égales plus petites, qu'on appelle *Minutes*: dont chacune a été divisée en 60 parties égales appellées *Secondes*, & ainsi ensuite, cela ayant été fait principalement pour déterminer la quantité d'un angle rectiligne, ou spherique: car

XXII.

La *Mesure d'un Angle* est un Arc de cercle décrit à volonté de sa Pointe, & terminé par ses deux lignes. Ainsi on connoît que la mesure de l'angle rectiligne AOB est l'arc de cercle AB, de sorte qu'autant de Degrez & de Minutes que contiendra cet Arc AB, aussi d'autant de Degrez & de Minutes sera l'angle AOB, qu'il mesure.

XXIII.

Le *Secteur de cercle* est la partie d'un cercle terminée par deux Rayons, & par une partie de la circonference, moindre ou plus grande que la moitié de la même circonference, qu'on appelle *Base du Secteur*: comme le Secteur BOCE, dont la Base est l'arc BEC: ou le Secteur BOCDA, dont la base est l'arc BADC.

XXIV.

Le *Segment de cercle* est une partie du cercle terminée par un Arc de cercle moindre ou plus grand que la moitié de la circonference du cercle, de laquelle il est une partie, & par une ligne droite, qui joint les extremitez de cet arc, & qu'on appelle *Corde*: comme le Segment BCE, qui est moindre que le Demi-cercle ACE; ou le Segment BCDA, qui est plus grand que le Demi-cercle ACD.

XXV.

Le *Rectiligne* est une Surface plane terminée par des lignes droites 5. Fig.

Planche I: 5. Fig. droites appellées *côtez*, qu'on nomme *Triangle*, quand il est borné par trois lignes droites : *Quadrilatere*, ou *Quadrangle*, quand il est borné par quatre lignes droites : & enfin *Polygone*, quand il est terminé par plus de quatre lignes droites.

XXVI.

Le *Triangle* est donc un Plan terminé par trois lignes droites, comme ABC, qu'on nomme *Triangle Equilateral*, quand ses trois côtez sont égaux : *Triangle Isoscéle*, quand il a seulement deux côtez égaux : & *Triangle Scaléne*, quand tous ses côtez sont inégaux. Mais quand il a un angle droit, on le nomme *Triangle Rectangle* : & quand tous les angles sont aigus, on l'appelle *Triangle Oxygone* : & enfin quand il a un angle obtus, il est appellé *Triangle Amblygone*.

XXVII.

La *Base d'un Triangle* est le côté sur lequel on luy a tiré de son angle opposé une perpendiculaire, qu'on appelle *Hauteur du Triangle* par rapport à sa Base. Ainsi on connoît que la Base du Triangle ABC est le côté AB, à l'égard de sa Hauteur ou perpendiculaire CD, qui divise la Base AB en deux parties AD, BD, qu'on appelle *Segmens de la Base*, quand même la perpendiculaire CD tomberoit en dehors, ce qui arrivera lorsque l'un des deux angles à la Base AB, sera obtus.

On appelle aussi *Base* le plus grand côté d'un Triangle rectangle, sçavoir celuy qui est opposé à l'angle droit : mais ce côté est appellé plus ordinairement *Hypotenuse*, & nous nous servirons toûjours de ce terme dans la suite, comme nous avons déja fait dans les deux Traitez precedens.

XXVIII.

6. Fig. Le *Quadrilatere* est donc aussi un Plan terminé par quatre lignes droites, qu'on appelle *Tetragone*, & plus ordinairement *Quarré*, quand il a tous ses côtez égaux, & ses quatre angles droits, comme ABCD : *Quarré long*, & *Barlong*, quand il a tous ses angles droits, mais non pas tous ses côtez égaux, comme EFGH : *Rhombe*, & *Lozange*, en termes de Blason, quand il a tous ses côtez égaux, & ses angles obliques, comme IKLM : *Rhomboïde*, quand il a ses angles obliques, & les deux côtez opposez seulement égaux, comme NOPQ : & *Trapeze*, quand il n'a pas les deux côtez opposez égaux, comme

7. Fig. ABCD, que nous appellerons *Trapezoïde*, quand il aura deux

deux côtez opposez paralleles entre eux, comme EFGH, dont les deux côtez opposez EF, GH, sont paralleles. Planche I: 7. Fig.

XXIX.

Le *Parallelogramme* est une Figure de quatre côtez, dont les deux opposez sont paralleles entre eux : comme le Quarré, le Quarré-long, le Rhombe, & le Rhomboïde. Quand les angles d'un Parallelogramme sont droits, on l'appelle *Parallelogramme rectangle*, ou simplement *Rectangle* : comme le Quarré ABCD, & le Quarré-long EFGH, où les quatre angles 6. Fig. sont droits.

XXX.

La *Base d'un Parallelogramme* est le côté sur lequel on luy a tiré de l'un de ses deux Angles opposez une perpendiculaire, qu'on appelle *Hauteur du Parallelogramme* par rapport à sa Base. Ainsi on connoît que la Base du Parallelogramme NOPQ, est le côté NO, à l'égard de sa Hauteur ou perpendiculaire PR, qui tombe icy en dehors, & elle auroit tombé en dedans, si on l'avoit tiré de l'angle Q.

XXXI.

Le *Polygone* est donc une Figure de plus de quatre côtez, 8. Fig. comme ABCDE, qu'on appelle *Pentagone*, quand il a cinq côtez, *Exagone* quand il a six côtez, *Eptagone* quand il a sept côtez, *Octogone* quand il a huit côtez, *Enneagone* quand il a neuf côtez, *Decagone* quand il a dix côtez, *Endecagone* quand il a onze côtez, & *Dodecagone* quand il a douze côtez.

XXXII.

Quand tous les angles d'un Polygone sont égaux, on le nomme *Polygone regulier* ; comme l'Exagone FGHIKL, dont le Centre O est le même que le Centre du Cercle circonscrit ; & quand tous les angles d'un Polygone ne sont pas égaux entre eux, il s'appelle *Polygone irregulier* : comme le Pentagone ABCDE.

XXXIII.

On appelle *Angle du Centre* celuy qui se forme au centre d'un Polygone regulier par deux lignes droites tirées du centre du Polygone par les deux extremitez de l'un de ses côtez, comme FOG : & *Angle du Polygone*, celuy qui est formé par deux côtez d'un Polygone regulier, comme FGH.

XXXIV.

Planche 1. 6. Fig.

XXXIV.

La *Diagonale* est une ligne droite tirée dans le Plan d'un Rectiligne d'un angle à un autre. Ainsi on connoît que la droite AC, ou BD, est la Diagonale du Quarré ABCD, que la droite EG est la Diagonale du Quarré-long EFGH, que la droite IL est la Diagonale du Rhombe IKLM, & que la droite NP est la Diagonale du Rhomboïde NOPQ.

La Diagonale d'un Parallelogramme se nomme plus ordinairement *Diametre du Parallelogramme* : & le point où les deux Diametres d'un Quarré s'entre-coupent, s'appelle *Centre du Quarré*, comme O. Il est évident qu'un Polygone est divisé par des Diagonales tirées d'un même angle en autant de Triangles qu'il y a de côtez, moins deux. Ainsi on void
8. Fig. que le Pentagone ABCDE est divisé en trois Triangles par les Diagonales DA, DB.

XXXV.

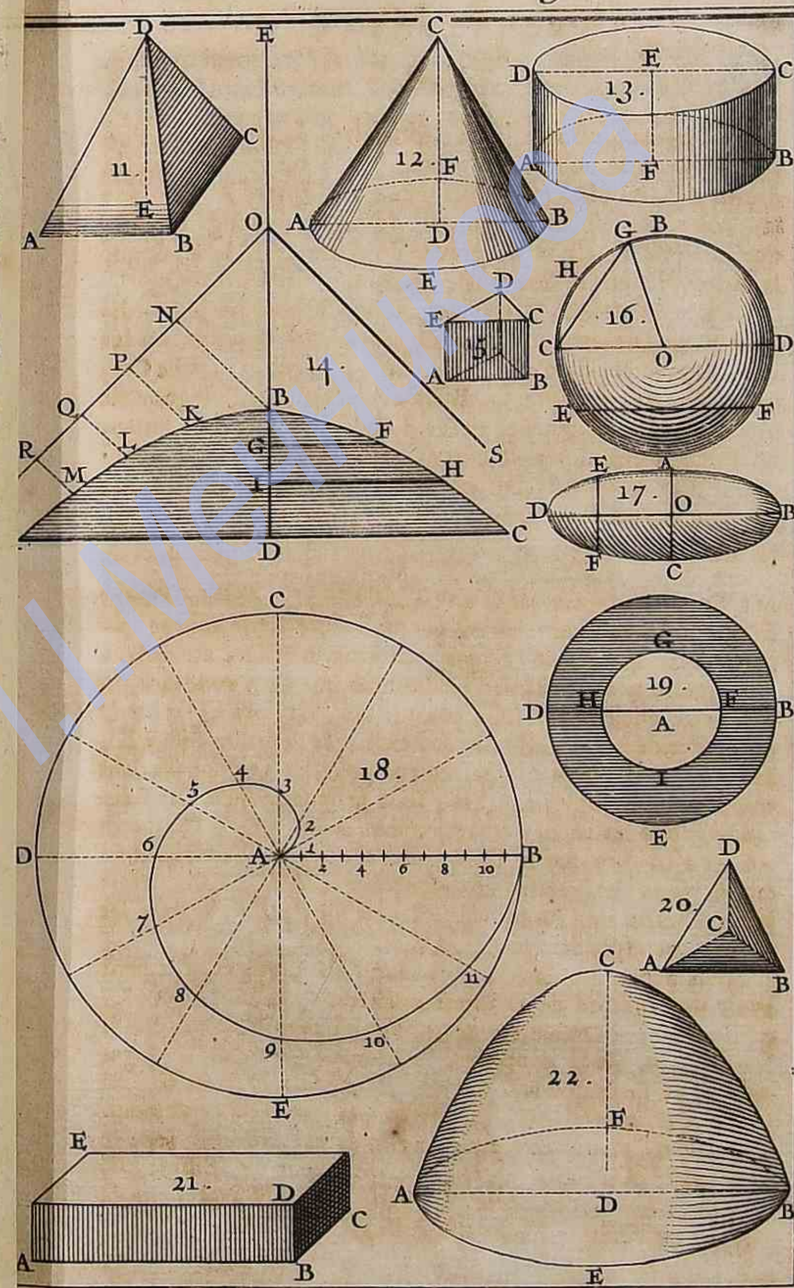
L'*Ovale Mathematique*, qu'on appelle plus ordinairement *Ellipse*, est un Plan terminé par une seule ligne courbe ap-
9. Fig. pellée *Circonference de l'Ellipse*, comme ABCD, au dedans de laquelle tirant autant d'Ordonnées que l'on voudra à un Diametre quelconque AC, comme FG, HI, les Quarrez de ces Ordonnées FG, HI, ou seulement de leurs moitiez FK, HL, que l'on prend ordinairement pour les Ordonnées dans toute sorte de lignes courbes, sont proportionnels aux Rectangles sous les parties correspondantes du même Diametre AC; c'est à dire que le Quarré de l'Ordonnée FK est au Rectangle sous les parties correspondantes AK, KC, comme le Quarré de l'Ordonnée HL, est au Rectangle sous les parties correspondantes AL, CL.

Nous avons dit dans la *Déf.* 11. qu'une Ligne courbe peut avoir une infinité de Diametres differens, & nous dirons icy que quand ces Diametres ne sont point paralleles entre eux, le point où ils se coupent, se nomme *Centre de la Ligne courbe* : de sorte que le Centre de l'Ellipse sera le point E, où les deux Diametres AC, BD, se coupent en deux également: & quand ils s'entre-coupent à angles droits, comme icy, le plus grand AC, qui represente la longueur de l'Ellipse, se nomme *Grand Axe*, & le plus petit BD, qui represente la largeur de l'Ellipse, s'appelle *Petit Axe*.

XXXVI.

10. Fig. La *Parabole* est un Plan indéfini terminé par une ligne courbe, qu'on appelle *Ligne Parabolique*, & que l'on confond ordi-

Geometrie Planche 2. Page 11



ordinairement avec la Parabole même, comme ABC, au dedans de laquelle tirant à un Diametre quelconque BD, autant d'Ordonnées que l'on voudra, comme FG, HI, les Quarrez de ces Ordonnées FG, HI, sont entre eux comme les parties correspondantes du Diametre BG, BI, ou bien, ce qui revient au même, le Quarré de chaque Ordonnée est égal au Rectangle sous la partie correspondante du Diametre & une certaine ligne BE d'une grandeur déterminée, qu'on appelle *Parametre de la Parabole*, c'est à dire que le Quarré FG est égal au Rectangle sous la partie correspondante BG, & le Parametre BE, & pareillement le Quarré HI est égal au Rectangle sous la partie correspondante BI, & le même Parametre BE. Planche 1. 10. Fig.

Cette Parabole est appellée *Quarrée*, pour la distinguer de la *Parabole cubique*, où le Cube d'une Ordonnée, comme FG, est égal au Solide sous la partie correspondante BG, & le Quarré du Parametre BE : & de la *Parabole Quarrée-quarrée*, où le Quarré-quarré d'une Ordonnée, comme FG est égal au Plan-plan sous la partie correspondante BG, & le Cube du Parametre BG : & ainsi des autres Paraboles infinies.

XXXVII.

L'*Hyperbole* est une Surface plane indéfinie, terminée par une Ligne courbe qu'on appelle *Ligne Hyperbolique*, & que l'on confond ordinairement avec l'Hyperbole même, comme ABC, au dedans de laquelle tirant à un Diametre quelconque BD, autant d'Ordonnées que l'on voudra, comme FG, HI, & prolongeant le même Diametre en dehors vers E, à une distance BE d'une certaine longueur, qu'on appelle *Diametre déterminé*, & que les Anciens ont appellé *Diametre traversant*; le Quarré de l'Ordonnée FG est au Rectangle correspondant sous toute la ligne EG, & la partie BG, comme le Quarré de l'Ordonnée HI, est au Rectangle correspondant sous toute la ligne EI, & la partie BI. Planche 2. 14. Fig.

Le point O, milieu du Diametre déterminé BE, se nomme *Centre de l'Hyperbole*, parce que c'est à ce point O, que concourent tous les Diametres infinis de l'Hyperbole, quand on les prolonge en dehors, dont chacun a son Diametre déterminé, entre lesquels celuy qui appartient à l'Axe de l'Hyperbole, se peut appeller *Axe déterminé*, comme BE, dont l'extremité B est le sommet de l'Hyperbole ABC, & l'autre extremité E est le sommet d'une autre Hyperbole semblable à la precedente ABC, qui ayant la même ligne BE pour Axe déterminé, est appellée *Hyperbole opposée*.

XXXVIII.

Les *Asymptotes d'une Hyperbole* sont deux lignes droites indé-

Planche 2. 14. Fig. indéfinies tirées du Centre de l'Hyperbole, vers laquelle elles s'approchent toûjours sans jamais la rencontrer, comme OR, OS, dont la proprieté est telle que si à l'une des deux Asymptotes, comme OS, on tire les paralleles BN, KP, LQ, MR, terminées par l'autre Asymptote OR, & l'Hyperbole ABC, tous les Rectangles ONB, OPK, OQL, ORM, sont égaux entre eux.

XXXIX.

Planche 1. 2. Fig. La *Cycloïde* est une Ligne courbe causée par le mouvement d'un point de la circonference d'un Cercle, qui étant perpendiculaire sur un Plan, roule le long d'une ligne droite du même Plan. Comme si le long de la ligne droite AC tracée sur un Plan, on fait rouler par pensée un Cercle perpendiculaire à ce Plan, comme BND, en sorte que le point B de sa circonference étant en A, vienne jusques en C, auquel cas la droite AC sera égale à la circonference de ce Cercle qu'on appelle *Cercle generateur*; ce point B décrira par son mouvement la courbe ABC, qu'on a appellée *Cycloïde*, & aussi *Roulette*.

XL.

La *Spirale*, ou *Helice*, est une ligne courbe causée par le mouvement d'un point, qui se meut également sur une ligne droite, pendant que cette ligne droite se meut aussi également sur la circonference d'un Cercle autour de son centre, où est le commencement de la Spirale, en sorte que quand le point aura parcouru toute sa ligne, en commençant depuis le Centre du Cercle, cette ligne aura aussi parcouru toute la circonference de son Cercle.

Planche 2. 18. Fig. Comme si la ligne AB indéfinie vers B se meut autour du centre A par un mouvement uniforme, en parcourant en temps égaux des parties égales de la circonference BCDE, & qu'un point se meuve aussi depuis A vers B, par un mouvement uniforme, en sorte que du Rayon AB il parcoure des parties semblables à celles que ce Rayon AB parcourt de sa circonference, auquel cas ce point sera parvenu en B, lorsque le Rayon AB aura parcouru toute sa circonference; ce même point décrira par son mouvement composé la Spirale A, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, B, qu'on appelle *Premiere Spirale*, pour la distinguer de la *Seconde Spirale*, que l'on auroit en faisant mouvoir par pensée la ligne AB prolongée autour du même centre A par tous les points de la circonference BCDE, pendant que le point continuëroit à se mouvoir en même temps au-delà de B, par un mouvement uniforme & semblable à celuy de la ligne AB, &c.

XLI.

XLI.

La *Couronne* est un Plan terminé par deux circonferences de Cercle paralleles entre elles, c'est à dire par les circonferences de deux cercles décrits sur un Plan d'un même centre, lesquels à cause de cela on appelle *Cercles concentriques*. Comme si du centre A, l'on décrit les deux circonferences de cercle BCDE, FGHI, ces deux circonferences enfermeront un espace qu'on appelle *Couronne*. Planche 2. 19. Fig.

XLII.

La *Zone* est la partie de la Surface d'une Sphere, terminée par les circonferences de deux cercles de la même Sphere, qui sont paralleles entre elles, c'est à dire qui ont deux mêmes points pour *Poles*, qui sont deux points de la Surface de la Sphere, diametralement opposez, & également éloignez des circonferences des cercles, dont ils sont les Poles. Comme si des deux Poles A, B, on décrit sur la Surface de la Sphere ADBC, les deux cercles paralleles CD, EF, ils enfermeront un espace qu'on appelle *Zone*. 16. Fig.

XLIII.

La *Sphere* est un Solide terminé par une seule Surface courbe, qu'on appelle *Superficie Spherique*, comme ADBC, au dedans de laquelle il y a un point comme O, qu'on appelle *Centre de la Sphere*, duquel toutes les lignes droites tirées jusqu'à la Surface, comme OC, OG, OD, qu'on appelle *Rayons de la Sphere*, ou *Demi-diametres de la Sphere*, sont égales entre elles. Le double de l'un de ces Rayons, comme CD, se nomme *Diametre de la Sphere*, laquelle est aussi appellée *Boule*, & *Globe*.

XLIV.

Le *Segment de Sphere*, qu'on appelle aussi *Section de Sphere*, & *Portion de Sphere*, c'est l'une des deux parties inégales d'une Sphere coupée par un Plan qui ne passe pas par son centre, autrement au lieu d'une Portion de Sphere, on auroit la moitié d'une Sphere qu'on nomme *Hemisphere*.

Comme si l'on coupe la Sphere ADBC, par le Plan CG, qui ne passe pas par son centre O, on aura le Segment de Sphere CGH, qui est plus petit que l'Hemisphere CDB: & le Segment de Sphere CGDA, qui est plus grand que l'Hemisphere CDA. Parce que la Section d'une Sphere & d'un Plan

est

Planche 2. 16. Fig. est un Cercle, comme nous avons démontré dans nôtre *Trigonometrie Spherique L. 3. Chap. 1. Theor. 1.* il est aisé de juger que la *Base d'un Hemisphere* est un *Grand Cercle de la Sphere*, sçavoir un Cercle, dont le Diametre, est égal à celuy de la Sphere ; & que la *Base d'une Section de Sphere* est un *Petit Cercle de la Sphere*, sçavoir un cercle dont le Diametre, comme CG, est moindre que le Diametre CD de la même Sphere. On entend pour *Cercle de la Sphere* celuy, dont la circonference se rencontre dans la Surface de la même Sphere, qui est la Section du Plan coupant & de la Surface de la Sphere, cette Section étant necessairement la circonference d'un Cercle, dont le Plan est la Section du Plan coupant & de la Sphere.

XLV.

L'*Angle d'un Segment de Sphere* est celuy qui se forme au centre de la Sphere par deux Rayons tirez aux extremitez d'un des Diametres de la Base du Segment de Sphere plus petit qu'un Hemisphere. Ainsi on connoît que l'Angle du Segment de Sphere CGH, qui est moindre que l'Hemisphere CDB, est COG.

Planche 1. 4. Fig. Nous appellerons aussi *Angle d'un Segment de Cercle*, celuy qui se fait au centre du cercle par deux Rayons tirez aux extremitez de l'arc du Segment moindre qu'un Demi-cercle. Ainsi on connoît que l'angle du Segment de cercle CBE, qui est moindre que le Demi-cercle ACEB, est COB, qu'on appelle aussi *Angle du Secteur de cercle*.

14. Fig. Mais on appelle *Angle dans un Segment de cercle*, celuy qui a sa pointe dans l'arc de ce Segment, & dont les deux lignes passent par les extremitez du même arc, ou de la corde de cet arc, qu'on nomme *Base du Segment*. Ainsi on connoît que l'Angle CEB est dans le Segment de cercle BCE, dont la Base est la corde BC de l'arc BEC. Cet Angle BEC est aussi appellé *Angle à la circonference*, parce que sa pointe E touche la circonference du cercle.

XLVI.

Planche 2. 16. Fig. Le *Secteur de Sphere* est un Solide terminé en pointe au centre de la Sphere, & ayant pour *Base* la Surface d'un Segment de Sphere : comme COGH. Il est évident qu'un Secteur de Sphere est necessairement moindre qu'un Hemisphere, comme le precedent COGH, ou bien plus grand qu'un Hemisphere, comme COGDAC.

XLII.

XLVII.

L'*Angle d'un Secteur de Sphere* est le même que celuy qui appartient au Segment de Sphere qu'il comprend. Ainsi on connoît que l'Angle du Secteur de Sphere COGH, qui est moindre que l'Hemisphere CDB, est l'Angle COG de son Segment CGH. Planche 2. 16. Fig.

XLVIII.

Le *Spheroïde* est un Solide causé par la circonvolution entiere d'une Demie-Ellipse autour de l'un de ses deux Axes, lequel dans ce cas est appellé *Axe du Spheroïde*: & quand cet Axe est égal au plus grand Axe de l'Ellipse, ce Solide se nomme *Spheroïde long*, comme ABCD, dont l'Axe est BD : & 17. Fig. *Spheroïde plat*, lorsque cet Axe est égal au plus petit Axe de l'Ellipse, c'est à dire lorsque la circonvolution se fait autour du plus petit Axe de l'Ellipse.

Le Point O, milieu de l'Axe BD, se nomme *Centre du Spheroïde*, & la droite AC, qui coupe à Angles droits au même centre O, l'Axe DB, s'appelle *Diametre du Spheroïde*, pour le distinguer de l'Axe. Enfin on appelle *Spheroïdes semblables*, ceux dont les Axes sont proportionnels à leurs Diametres : & *Segment de Spheroïde* l'une des deux parties inégales d'un Spheroïde, qu'on a coupé par un Plan qui ne passe pas par son centre, comme EFD, ou EFB.

XLIX.

Le *Paraboloïde*, qu'on appelle aussi *Conoïde Parabolique*, 22. c'est un Solide, qui est produit par la circonvolution entiere d'une Demi-Parabole autour de son Axe, lequel à cause de cela est appellé *Axe du Paraboloïde*, qui passe par le centre de sa *Base*, qui est un cercle. Comme ACBE, dont l'Axe est CD, qui passe par le Centre D de sa Base AEBF, qui est un cercle, dont le Diametre est AB.

Si au lieu d'une Parabole, on fait tourner une Hyperbole autour de son Axe, le Solide qui se produira par cette circonvolution, sera appellé *Conoïde Hyperbolique*, dont l'*Axe* sera le même que celuy de l'Hyperbole, & dont la *Base* sera pareillement un Cercle.

Que si l'on fait mouvoir en même temps autour du même Axe de l'Hyperbole l'une de ses deux Asymptotes, il se produira par la circonvolution entiere un autre Solide plus grand, que nous appellerons *Cone Asymptotique*, dont la *Base* sera pareillement un Cercle, dont le *Sommet* sera au Centre de l'Hyperbole.

On

Planche 2. 22. Fig. On pourroit aussi appeller un Spheroïde, *Conoïde Elliptique*, parce qu'un *Conoïde* generalement parlant, est un Solide qui est produit par la circonvolution entiere d'une *Section Conique*, c'est à dire de la Section d'un Cone par un Plan, autour de son Axe : & que l'Ellipse, aussi-bien que la Parabole & l'Hyperbole sont des Sections Coniques. Voyez le *Traité des Sections Coniques*, que nous avons autrefois publié, sous le nom des *Lignes du premier genre*.

Comme le Cercle est aussi une Section Conique, & que la Sphere se produit par la circonvolution entiere d'un Demi-cercle autour de son Diametre, la Sphere se pourroit aussi appeller *Conoïde circulaire* : & toutes les lignes courbes qui bornent ces quatre Sections Coniques se peuvent appeller *Lignes Coniques*, comme étant les Sections d'un Plan & d'une *Superficie Conique*, c'est à dire de la Surface d'un Cone.

L.

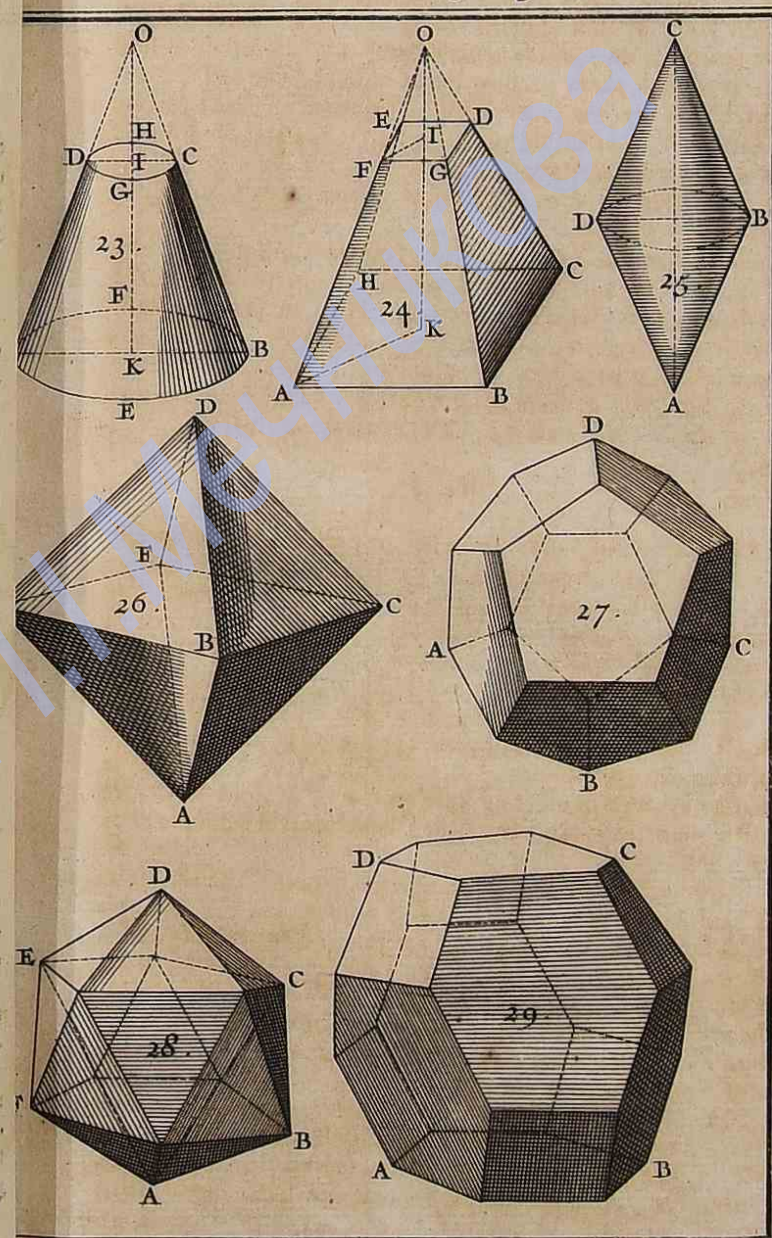
Le *Cone* est un Solide terminé en pointe, qu'on appelle *Sommet du Cone*, qui est produit par la circonvolution entiere d'un Triangle autour de l'un de ses côtez, lequel à cause de cela est appellé *Axe du Cone*, qui passe par le Centre de sa *Base*, qui est un Cercle. Comme si autour du côté immobile CD on fait mouvoir par pensée le Triangle CDB, ce Triangle décrira le Cone ACBE, dont l'Axe est le côté immobile CD, & le côté BC qu'on appelle *Côté du Cone*, décrira la *Superficie Conique*, & enfin l'autre côté DB décrira le Cercle AEBF, qui sert de Base au Cone, & dont le Centre est le point immobile D, & le Diametre est AB double de ce côté DB.

Lorsque l'Angle D, du *Triangle generateur* CDB est droit, le Solide qui est produit par son mouvement, se nomme *Cone droit*, parce que son Axe est perpendiculaire à sa Base : & aussi *Cone Isoscéle*, parce que tous ses côtez sont égaux. Mais quand du même Triangle CDB, l'angle D est oblique, le Solide qui se produit par sa circonvolution, s'appelle *Cone incliné*, parce que son Axe est incliné à sa Base : & aussi *Cone Scaléne*, parce qu'il n'a pas tous ses côtez égaux.

On dit que deux Cones sont *semblablement inclinez*, lorsque leurs Axes font avec leurs Bases des angles égaux : & que deux Cones sont *semblables*, lorsqu'ils sont semblablement inclinez, & que leurs Axes sont proportionnels aux Diametres de leurs Bases.

LI.

Le *Cone tronqué* est un Solide qui est produit par la circonvolution entiere d'un Trapezoïde autour de l'un de ses deux



deux côtez qui ne sont pas paralleles, lequel à cause de cela est appellé *Axe du Cone tronqué*, qui joint les centres des deux *Bases* opposées & paralleles, qui sont deux Cercles inégaux décrits par le mouvement des deux côtez opposez paralleles & inégaux du *Trapezoïde generateur*. Planche 2. 12. Fig.

Comme si autour du côté immobile IK du Trapezoïde IKBC, dont les deux côtez opposez IC, KB, sont paralleles entre eux, on fait rouler par pensée ce Trapezoïde IKBC, on aura par cette circonvolution le Cone tronqué ABCD, dont l'Axe est le côté immobile IK, & dont les deux Bases opposées & paralleles sont les deux Cercles AEBF, DGCH, dont les Centres sont K, I, & les Diametres sont AB, CD. Il est évident que ces deux Cercles sont décrits par le mouvement des deux côtez opposez & paralleles IC, KB, & que l'autre côté mobile BC, qui est le *Côté du Cone tronqué*, décrit par son mouvement la *Surface* de ce Cone tronqué. Planche 3. 23. Fig.

LII.

Le *Cylindre* est un Solide qui est produit par la circonvolution entiere d'un Parallelogramme autour de l'un de ses côtez, lequel à cause de cela est appellé *Axe du Cylindre*, qui passe par les centres des deux *Bases* opposées & paralleles qui sont deux Cercles égaux décrits par le mouvement des deux autres côtez opposez égaux & paralleles du *Parallelogramme generateur*.

Comme si autour du côté immobile EF du Parallelogramme EFBC, on fait rouler par pensée ce Parallelogramme EFBC, on aura le Cylindre, ou *Colonne* ABCD, dont l'Axe est le côté immobile EF, & son côté opposé & parallele BC, qu'on appelle *Côté du Cylindre*, décrira la *Superficie Cylindrique*, & enfin les deux autres côtez opposez égaux & paralleles FB, EC, décriront deux Cercles égaux, qui servent de Bases au Cylindre, & qui ont pour centre les deux points E, F, & pour Diametres les deux lignes AB, CD. Planche 2. 13. Fig.

Lorsque l'angle E du Parallelogramme generateur EFBC, est droit, c'est à dire lorsque ce Parallelogramme est rectangle, le Solide qui est décrit par son mouvement, se nomme *Cylindre droit*, parce que son Axe est perpendiculaire à ses deux *Bases*: mais quand du même Parallelogramme EFBC, les angles sont obliques, le Solide que sa circonvolution produit, s'appelle *Cylindre oblique*.

On dit que deux Cylindres sont *semblablement inclinez*, lorsque leurs Axes font avec leurs Bases des angles égaux: & que deux Cylindres sont *semblables*, quand ils sont semblablement inclinez, & que leurs Axes sont proportionnels aux Diametres de leurs Bases.

Planche 2. 13. Fig. On appelle *Cylindre Cube* celuy dont la hauteur est égal au Diametre de sa Base.

LIII.

19. Fig. *L'Orbe* est un Corps Spherique terminé par deux Superficies Spheriques, l'une concave, & l'autre convexe: comme le corps qui est borné par les deux Superficies Spheriques BCDE, qui est convexe, & FGHI, qui est concave, où vous voyez que l'Orbe est ce qui reste, lorsque d'une grande Sphere, comme BCDE, on en retranche une plus petite qui est en dedans, comme FGHI. Ces deux Spheres ont icy un même centre A, mais elles peuvent être *Excentriques*, c'est à dire que leurs centres peuvent être differens, & alors cet Orbe ne sera pas par tout d'une égale épaisseur.

LIV.

11. Fig. L'*Angle Solide* est un espace indéfini terminé par plus de deux Plans, qui se coupent en un point: comme D, qui est compris par trois Plans triangulaires, dont on en voit deux dans la Figure, sçavoir ADB, BDC. Le sommet d'un Cone est aussi un Angle Solide, que l'on peut concevoir comme compris d'une infinité de Plans Triangulaires.

LV.

La *Pyramide* est un corps terminé en pointe, & borné au moins par quatre Plans qui sont tous triangulaires excepté celuy qui est opposé à cette pointe ou Angle Solide, & qu'on appelle *Base de la Pyramide*, qui peut avoir plus de trois côtez, à l'égard de laquelle l'angle solide opposé se nomme *Sommet de la Pyramide*, duquel toutes les lignes droites tirées aux angles de sa Base, se nomment *Côtez de la Pyramide*, qui est icy representé par la Figure ABCD, dont la Base ABC est de quatre côtez, & le sommet est l'angle solide D, & enfin dont les côtez sont DA, DB, DC, &c.

Une Pyramide peut aussi être *Droite*, & *Oblique*: on connoît qu'elle est *Droite*, lorsque son *Axe*, qui est une ligne droite tirée de son sommet par le centre de sa Base que je suppose reguliere, est perpendiculaire au Plan de sa Base: & qu'elle est *Oblique*, lorsque son Axe est oblique au Plan de sa Base, c'est à dire lorsqu'à l'égard de ce Plan, il panche plus d'un côté que d'autre. Quand sa Base est un Triangle,
20. Fig. on l'appelle *Pyramide triangulaire*, comme ABCD, qu'on nomme *Tetraëdre*, quand ses quatre Triangles sont équilateraux & égaux entre eux.

LVI.

LVI.

La *Pyramide tronquée* est le reste d'une Pyramide, de laquelle on a retranché vers son Sommet une Pyramide plus petite, par un Plan parallele à sa Base, ce qui donne à ce reste, ou Pyramide tronquée deux *Bases* semblables & paralleles, une *Grande*, qui est la même que celle de la Pyramide totale, & une *Petite*, qui est la même que celle de la Pyramide retranchée, ou la Section du Plan coupant & de la Pyramide totale.

Comme si l'on coupe la Pyramide ABCO par le Plan FGDE parallele à la Base ABCH, ce Plan retranche la petite Pyramide FGDO, & laisse la Pyramide tronquée ABCDEFG, dont la grande Base est le Plan ABCH, & la petite est le Plan DEFG, qui est parallele au precedent ABCH. Planche 3. 24. Fig.

LVII.

Le *Prisme* est un Solide terminé par plus de quatre Plans qui sont tous des Parallelogrammes, excepté deux opposez qu'on appelle *Bases du Prisme*, & qui peuvent être autres que des Parallelogrammes, mais quelque figure qu'ils puissent avoir, ils sont toûjours semblables, égaux & paralleles entre eux: quand ils sont des Triangles, le Solide s'appelle *Prisme triangulaire*, comme ABCDE, & quand ils sont des Parallelogrammes, le Prisme se nomme *Parallelepipede*, qui prend le nom de *Parallelepipede Rectangle*, quand les six Plans qui le bornent, sont des Rectangles, comme ABCDE, qu'on appelle *Cube*, & *Exaèdre*, quand ces six Plans sont des Quarrez égaux, comme un Dé à joüer. Planche 2. 15. Fig. 21. Fig.

LVIII.

Le *Rhombe Solide* est un corps composé de deux Cones droits, dont les Bases sont égales entre elles, & jointes ensemble, & dont par consequent les deux Axes sont une même ligne droite: comme ABCD. Planche 3. 25. Fig.

LIX.

Le *Polyedre* est un Solide terminé par plusieurs Rectilignes reguliers, qu'on appelle *Face du Polyedre*, & *inscriptible*, dans une Sphere; c'est à dire que tous ses angles solides peuvent toucher la Surface d'une Sphere qui luy seroit circonscrite, duquel par consequent le *Centre* est le même que celuy de cette Sphere: comme ABCD, qui est terminé par quatorze Faces, sçavoir de huit Exagones reguliers, & égaux entre eux, & de six Quarrez pareillement égaux entre eux. Planche 3. 29. Fig.

Un Polyedre peut comme le Polygone, être *Regulier* & *Irregu-*

Planche 3. 23. Fig. *regulier* : l'irregulier étant celuy qui n'a pas toutes ses Faces égales & semblables entre elles, comme le precedent ABCD: & le *Regulier* celuy qui a toutes ses Faces semblables & égales entre elles, & par consequent tous les angles solides égaux; or quoy qu'il y ait une infinité de Polygones reguliers, parce que l'on peut diviser la circonference d'un Cercle en autant de parties égales qu'on voudra : neanmoins on ne compte que cinq *Corps reguliers*, sçavoir le *Tetraëdre*, dont nous avons déja parlé : le *Cube*, ou l'*Exaëdre*, dont nous avons aussi parlé : l'*Octaëdre*, qui est terminé par huit Triangles égaux, &
26. Fig. équilateraux, comme ABCDEF : le *Dodecaëdre*, qui est bor-
27. Fig. né par douze Pentagones reguliers & égaux, comme ABCD:
28. Fig. & l'*Icosaëdre*, qui est compris par vingt Triangles égaux & équilateraux, comme ABCDEF.

L X.

La *Mesure* est une quantité continuë, dont on se sert pour *mesurer* une autre quantité continuë homogene & plus grande, c'est à dire pour sçavoir combien de petites mesures contient une quantité plus grande, & en déterminer le contenu, qu'on appelle *Longueur*, quand on mesure une Ligne : *Aire*, quand on mesure une Superficie : & *Solidité*, quand on mesure un Solide.

Cette mesure est toûjours une Ligne droite, quand elle exprime la longueur d'une Ligne : un Rectangle qui est ordinairement un Quarré, & alors on l'appelle *Mesure quarrée*, quand elle exprime l'Aire d'une Superficie : & un Parallelepipede rectangle, qui est ordinairement un Cube, & alors on la nomme *Mesure cubique*, quand elle represente la Solidité d'un Corps.

Les Mesures sont differentes selon les païs differens : mais parmi les Mathematiciens la mesure ordinaire, qui est comme le fondement de toutes les autres, est le *Pied*, dont la longueur est d'une certaine grandeur déterminée dans tout le Royaume par l'autorité du Prince, & qu'à cause de cela on appelle communément *Pied de Roy*, pour le differencier *du Pied de Ville*, qui n'est pas le même dans toutes les Villes du Royaume, au lieu que le Pied de Roy est le même parmi tous les Mathematiciens.

C'est donc de ce Pied que nous parlerons dans la suite, & nous dirons premierement qu'on le nomme *Pied courant*, & *Pied de long*, étant consideré selon sa longueur, ce qui arrive lorsqu'on s'en sert pour mesurer une ligne plus grande : *Pied quarré*, que l'on considere comme un Quarré, dont chaque côté est d'un Pied de long, quand on s'en sert pour mesurer une Superficie plus grande, dont l'Aire s'exprime par de petits quarrez ayant un Pied dans chacun de leurs côtez : & *Pied cube*, que

que l'on considere comme un cube, dont chaque côté est d'un Pied courant, lorsqu'on s'en sert pour mesurer un Solide plus grand, dont la Solidité s'exprime par de petits Cubes, ayant un Pied en chacun de leurs côtez.

On connoîtra de la même façon, qu'un *Pouce quarré* est un Quarré, dont chaque côté est d'un *Pouce de long*, ou *Pouce courant*, qui est la douziéme partie d'un Pied courant, & qu'un *Pouce cubique* est un Cube, dont chaque côté est aussi d'un Pouce courant, & pareillement qu'une *Toise quarrée*, est un Quarré, dont chaque côté est d'une *Toise de long*, ou *Toise courante*, qui vaut six Pieds courans : & qu'une *Toise cubique*, ou *Toise cube*, est un Cube, dont chaque côté est aussi d'une Toise courante.

On connoîtra aussi qu'une *Ligne quarrée*, est un Quarré, dont chaque côté est d'une *Ligne de long*, ou *Ligne courante*, qui est la douziéme partie d'un Pouce courant, & qu'une *Ligne cubique* est un Cube, dont chaque côté est aussi d'une Ligne de long : & que pareillement une *Perche quarrée* est un Quarré, dont chaque côté est d'une *Perche de long*, ou *Perche courante*, qui est de 22 pieds, selon l'Ordonnance, quoique dans la Prevôté de Paris elle ne soit que de 18 Pieds, ou de trois Toises : & qu'une *Perche cubique*, qui n'est pas en usage, est un Cube, dont chaque côté est aussi d'une Perche courante.

On proportionne les Mesures aux Grandeurs que l'on veut mesurer. Ainsi les Artisans se servent de petites mesures, comme du Pied, du Pouce, & de la Ligne pour la mesure des tables des Miroirs, &c. Les Architectes & les Ingenieurs se servent du Pied & de la Toise pour la mesure des Edifices & des terres remuées. Les Arpenteurs se servent dans les grands terrains de la Perche, & de l'*Arpent*, qui contient dix Perches en longueur, & cent Perches quarrées en quarré, ce qui fait l'*Arpent quarré*, duquel on entend toûjours parler, quand on dit qu'une Vigne, qu'un Pré, ou quelque terre labourable est de tant d'Arpens, ce qui a donné le nom *d'Arpenteurs* à ceux qui font profession de mesurer les terres, & d'*Arpentage* à cette Partie de la Geometrie Pratique, qu'on appelle *Planimetrie*.

Enfin les Astronomes mesurent les grandes distances dans le Ciel, comme la distance d'une Planette à la Terre par des *Demi-diametres de la Terre*; & les grandes distances sur la Terre, comme l'éloignement d'une Ville à une autre par *Lieuës*, qui sont differentes selon les Païs differens, non seulement en longueur, mais aussi en noms, qui sont tous compris sous ce terme general de *Mesures itineraires*, qui sont differentes en longueur dans un même Royaume, car il y en a de *Grandes*, de *Moyennes*, & de *Petites*; la *Grande Lieuë de France* est ordinairement de 3000 Pas Geometriques,

B 3 & en

& en quelques endroits de 3500 : la *Moyenne*, ou la *Lieuë Commune de France*, est de 2400 Pas Geometriques, & la *Petite Lieuë de France* de 2000 Pas Geometriques, sçavoir le double d'un *Mille d'Italie*, ainsi appellé, parce qu'il contient mille *Pas Geometriques*, ou huit *Stades*, parce que la *Stade*, qui est une mesure particuliere aux Grecs, est de 125 *Pas Geometriques*, ou de 625 Pieds, car un *Pas Geometrique* est de cinq Pieds ; le *Pas commun* n'étant que de deux Pieds & demy.

Un Pas Geometrique mis en Pendule, c'est à dire un Pendule long de cinq Pieds, en prenant cette longueur depuis le centre du mouvement jusqu'au centre du poids Spherique qui est suspendu à l'extremité du Pendule, fait en demi-heure de temps 1252 Vibrations simples, ce qui peut servir pour recouvrer la longueur du Pas Geometrique, si elle étoit perduë, ou alterée, par l'experience, qui nous apprend que *les quarrez des nombres des Vibrations de deux Pendules, sont en temps égal reciproquement proportionnels aux longueurs des mêmes Pendules*, sçavoir en faisant un second Pendule d'une longueur connuë, & dont le poids Spherique soit le même que celuy du premier Pendule, & en comptant le nombre de ses Vibrations simples pendant une demi-heure de temps : car si ce nombre est égal à celuy des Vibrations simples du premier, sa longueur sera aussi égale à celle du premier, c'est à dire du Pas Geometrique, laquelle par consequent sera connuë, autrement on trouvera cette longueur, par le moyen de l'Analogie suivante,

Comme le quarré du nombre des Vibrations du premier Pendule,
Au quarré du nombre des Vibrations du second Pendule;
Ainsi la longueur du second Pendule,
A la longueur du premier Pendule.

Les termes qui manquent icy, se trouveront expliquez dans la suite, ou bien dans les Elemens d'Euclide.

PRE-

PREMIERE PARTIE.

DE LA GEODESIE.

LA *Geodesie* est une partie de la Geometrie Pratique, qui enseigne à faire le partage d'une Terre, ou d'un Champ, qui contient des terres labourables, des Prez, des Vignes, & des Bois, entre deux ou plusieurs Heritiers, & c'est à cause de cela que cette partie se nomme aussi *Division des Champs*, que nous diviserons en trois Chapitres, dont le premier enseignera la Division des Triangles, le second enseignera la Division des Quadrilateres, & le dernier enseignera la maniere de diviser une piece de terre qui aura plus de quatre côtez, c'est à dire la Division des Polygones.

CHAPITRE I.

De la Division des Triangles.

NOus commençons par le Triangle qui est la premiere & la plus simple des Figures rectilignes, que l'on considere seulement dans la pratique : & quoique toutes les Figures qui se rencontrent sur la terre, ne soient pas toûjours rectilignes, neanmoins on ne laisse pas de les concevoir comme rectilignes, quand il y a peu de difference, autrement on les reduira en rectilignes, en divisant les côtez qui seront des lignes courbes, en plusieurs petites parties, qui pourront passer pour des lignes droites.

PROBLEME I.

Diviser un Triangle en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes droites tirées d'un angle donné.

POur diviser le Triangle ABC, par exemple en trois parties égales, par des lignes droites tirées de l'angle donné C, divisez le côté opposé AB en trois parties égales aux

 points

Planche 4. 30. Fig. points D, E, & menez de l'angle donné A, par les points de division D, E, les droites CD, CE, qui partageront le Triangle proposé ABC en trois également, dont la démonstration est évidente, *par* 38. 1.

SCOLIE.

Si au lieu de diviser le Triangle proposé ABC, en parties égales, on les vouloit partager en des parties qui fussent en Raison donnée, par des lignes droites tirées de l'angle donné C; il est évident *par* 1. 6. qu'il n'y auroit qu'à diviser le côté opposé AB, selon la Raison donnée, *par* 9. 6. ou *par* 10. 6. & achever le reste comme auparavant.

PROBLEME II.

Diviser un Triangle en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes droites tirées d'un point donné sur un côté.

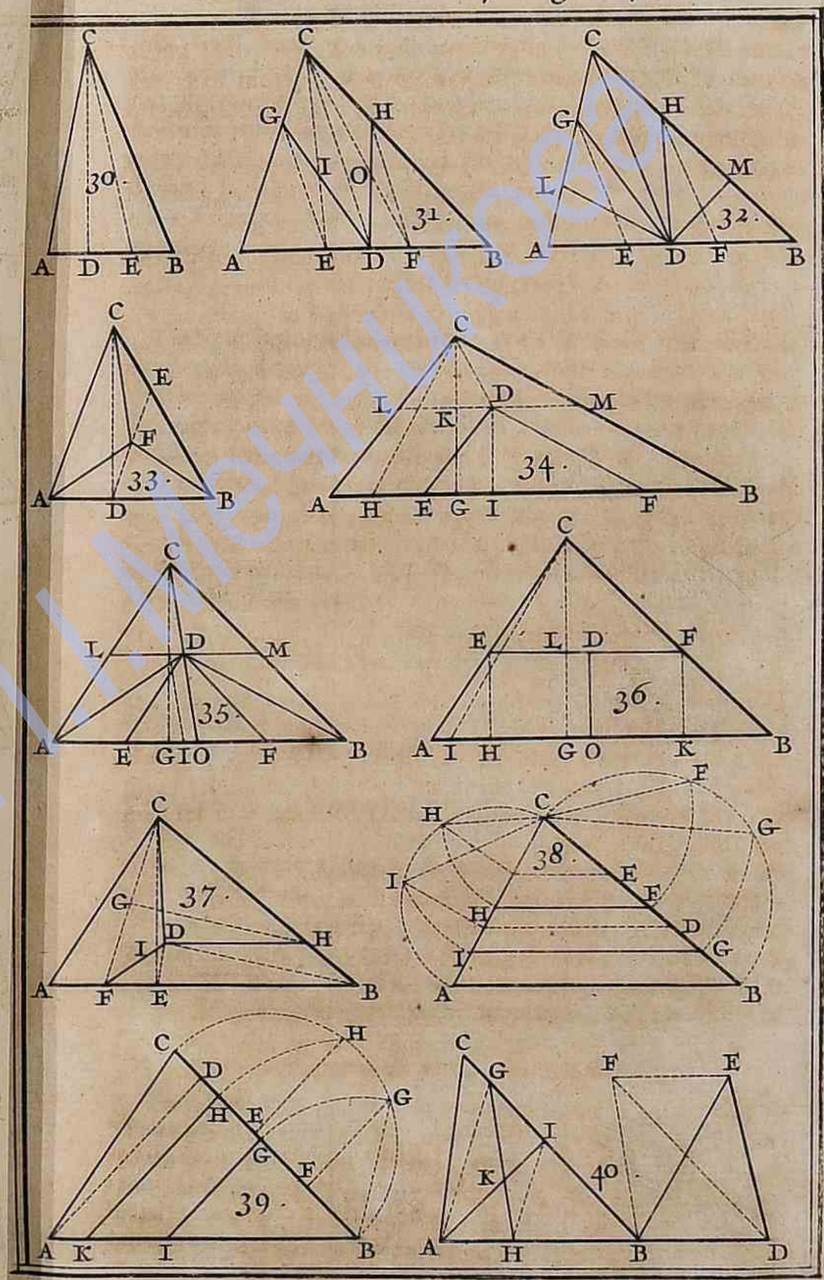
31. Fig. POur diviser le Triangle ABC, par exemple en trois parties égales par des lignes droites tirées du point D donné sur le côté AB, divisez ce côté AB, en trois parties égales aux points E, F, & ayant joint la droite CD, tirez luy par les points de division E, F, les paralleles EG, FH, qui donneront sur les côtez AC, BC, les points G, H, par où & par le point donné D, vous tirerez les droites DG, DH, qui partageront le Triangle proposé ABC en trois également, de sorte que chacun des deux Triangles ADG, BDH, sera égal à la troisiéme partie du proposé ABC, c'est à dire que si l'on joint les droites CE, CF, le Triangle ADG est égal au Triangle AEC, qui est la troisiéme partie du proposé ABC, *par* 1. 6. & que pareillement le Triangle BDH est égal au Triangle BFC, qui est aussi le tiers du proposé ABC.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes CD, EG, sont paralleles, *par constr.* les deux Triangles GCE, GDE, qui ont la même ligne GE pour base, seront égaux entre eux, *par* 37. 1. c'est pourquoy si de chacun on retranche le Triangle commun GIE, il restera le Triangle GIC, égal au Triangle DIE, & si à chacun de ces deux Triangles égaux DIE, GIC, on ajoûte le Trapeze AEIG, on aura le Triangle AGD égal au Triangle ACE: & l'on connoîtra de la même façon que le Triangle BHD est égal au Triangle BCF, à cause des deux paralleles FH, CD. *Ce qu'il falloit demontrer.*

Ou

Geometrie Planche 4. Page 24.



Geometrie Planche 4 Page 24.

Ou bien parce que les deux lignes EG, CD, sont paralleles, *par constr.* les deux Triangles AGE, AGD, qui ont l'angle commun A, seront équiangles, *par* 29. 1. & par 4. 6. les quatre côtez AG, AE, AC, AD, seront proportionnels, c'est pourquoy les deux Triangles AGD, ACE, seront égaux, *par* 15. 6. & l'on connoîtra de la même façon, que les deux Triangles BHD, BCF, sont aussi égaux. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 4. 31. Fig.

Scolie.

Lorsque le point D sera donné au milieu du côté AB, auquel cas le Triangle proposé ABC se trouvera divisé en deux également par la droite CD, *par* 38. 1. on pourra partager ce Triangle ABC en six parties égales, en le divisant premierement en trois également, comme auparavant, & en divisant en deux également chacune des deux lignes AG, BH, aux points L, M, pour tirer les droites DL, DM. Ou bien en divisant chacun des deux côtez AC, BC, en trois parties égales aux points L, G, M, H, & en joignant les droites DL, DG, DH, DM, &c. 32. Fig.

PROBLEME III.

Diviser un Triangle en trois parties égales par des lignes droites tirées des trois angles du Triangle proposé.

Pour diviser le Triangle ABC en trois parties égales par trois lignes droites tirées des angles A, B, C, ayant pris sur l'un des côtez de ce Triangle, comme AB, sa troisiéme partie AD, tirez par le point D, la ligne DE parallele au côté adjacent AC, & par le point F, milieu du côté DE, tirez aux trois angles A, B, C, les droites FA, FB, FC, qui partageront le Triangle proposé ABC en trois Triangles égaux AFB, AFC, BFC, de sorte que chacun sera le tiers du Triangle ABC. 33. Fig.

Demonstration.

En joignant la droite CD, on connoîtra *par* 1. 6. que le Triangle ACD est la troisiéme partie du Triangle ABC, à cause de la Base AB triple de la Base AD, *par constr.* & que par conséquent le Triangle AFC, qui est égal au Triangle ADC, *par* 37. 1. est aussi la troisiéme partie du Triangle ABC. D'où il suit que les deux autres Triangles AFB, BFC, sont ensemble égaux aux deux tiers du même Triangle ABC, & que par consequent chacun est le tiers du Triangle ABC, parce qu'ils sont égaux entre eux, à cause des deux Triangles égaux BFD, BFE, *par* 38. 1. & aussi des deux égaux AFD, CFE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PRO-

PROBLEME IV.

Diviſer un Triangle donné en trois parties égales, par deux lignes droites paralleles à deux côtez, & par une troiſiéme ligne tirée de l'angle des deux mêmes côtez.

Planche 4. 34. Fig.

POur trouver un point au dedans du Triangle donné ABC, duquel tirant deux lignes droites paralleles aux deux côtez AC, BC, & une troiſiéme ligne à l'angle C, le Triangle ABC, ſe trouve diviſé en trois parties égales; ayant tiré de cet angle C, ſur ſon côté oppoſé AB, la perpendiculaire CG, faites au même point C, avec la perpendiculaire CG, l'angle GCH de 30 degrez, ce qui ſe peut faire geometriquement, afin que le quarré de GH ſoit égal au tiers du quarré CG, comme il ſera évident à celuy qui conſiderera que l'angle G étant droit, & l'angle GCH de 30 degrez, l'angle H eſt de 60 degrez, qui eſt l'angle du Triangle équilateral, dont le côté eſt CH, la perpendiculaire eſt CG, & la moitié de la baſe eſt GH. Prenez donc ſur la perpendiculaire CG, la ligne GK égale à la ligne GH, & tirez par le point K, au côté AB, la parallele LM, dont le point de milieu D ſera celuy qu'on cherche, de ſorte que ſi de ce point D, on tire à l'angle C, la droite CD, & aux deux côtez AC, BC, les paralleles DE, DF, le Triangle propoſé ABC ſe trouvera partagé en trois parties égales.

DEMONSTRATION.

Parce que le Triangle EDF eſt ſemblable au Triangle ABC, à cauſe des deux côtez DE, DF, paralleles aux deux AC, BC, *par conſtr.* & que le quarré de ſa hauteur DI, ou GK, ou GH, eſt le tiers du quarré de la hauteur GC du Triangle ABC, il eſt aiſé de conclure *par* 19. 6. que ce Triangle EDF eſt auſſi le tiers du Triangle ABC. D'où il ſuit que les deux Trapezoïdes ACDE, BCDF, ſont enſemble égaux aux deux tiers du Triangle ABC, & que par conſequent chacun eſt égal au tiers du même Triangle ABC, parce que ces deux Trapezoïdes ſont égaux entre eux, à cauſe des deux Triangles égaux CDL, CDM, *par* 38. 1. & des deux Parallelogrammes égaux AEDL, BFDM, *par* 36. 1. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

35. Fig. Si l'on fait la hauteur DI du Triangle EDF égale à la moitié de la hauteur CG du Triangle ABC, auquel cas la ligne AL ſera la moitié du côté AC, & pareillement la ligne BM la moitié du côté BC, le Triangle ABC ſe trouvera partagé

en quatre parties égales, qui ſeront les deux Triangles EDF, CLM, & les deux Parallelogrammes AEDL, BFDM: & ſi l'on tire les deux Diagonales AD, BD, & la droite CDO, le Triangle propoſé ABC ſe trouvera diviſé en huit Triangles égaux. Planche 4. 35. Fig.

PROBLEME V.

Diviſer un Triangle donné en trois parties égales, par deux lignes droites, dont l'une ſoit parallele, & l'autre perpendiculaire à un même côté.

POur diviſer le Triangle ABC en trois parties égales, par deux lignes droites, dont l'une ſoit parallele, & l'autre ſoit perpendiculaire au côté AB, tirez à ce côté AB, de ſon angle oppoſé C, la perpendiculaire CG, & faites au point C, avec cette perpendiculaire CG, l'angle GCI de 30 degrez, comme dans le Problême precedent, où nous avons remarqué que le quarré de la ligne GI eſt le tiers du quarré de la ligne CG: c'eſt pourquoy ſi ſur cette ligne CG, on prend la partie CL égale à la ligne GI, & que par le point L on mene la droite EF parallele au côté AB, on aura le Triangle CEF égal au tiers du propoſé ACB, auquel il eſt ſemblable, comme nous avons auſſi reconnu au Problême precedent. Enfin ayant tiré des deux points E, F, les deux lignes EH, FK, perpendiculaires au côté AB, prenez ſur le côté AB, la ligne AO égale à la quatriéme partie de la ſomme d'une fois BK, de deux fois HK, & de trois fois AH, & élevez du point O, ſur AB, la perpendiculaire OD, laquelle avec la ligne EF parallele à AB, partagera le Triangle propoſé ABC en trois parties égales, qui ſont le Triangle CEF, & les deux Trapezoïdes AODE, BODF. 36. Fig.

DEMONSTRATION.

Nous avons déja reconnu, que le Triangle CEF eſt le tiers du Triangle ABC, d'où il eſt aiſé de conclure, que le Trapezoïde ABFE eſt égal aux deux tiers du même Triangle ABC: & comme il eſt diviſé en deux également par la perpendiculaire DO, comme nous démontrerons au *Probl.* 13. *Chap.* 2. il s'enſuit que les deux Trapezoïdes égaux AODE, BODF, ſont chacun le tiers du Triangle ABC, & qu'ainſi ce Triangle ABC eſt diviſé en trois également par la ligne EF parallele au côté AB, & par la ligne DO perpendiculaire au même côté AB. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

PROBLEME VI.

Diviser un Triangle donné en trois parties égales, par trois lignes droites tirées d'un point donné au dedans du Triangle.

Planche 4. 37. Fig.

POur diviser le Triangle ABC en trois parties égales, par trois lignes droites tirées du point D donné au dedans de ce Triangle, prenez sur l'un des côtez, comme AB, sa troisiéme partie AE, & ayant joint la droite DE, tirez-luy par l'angle opposé C, la parallele CF, que vous diviserez en deux également au point G, par lequel il faut tirer à la ligne DB, la parallele GH. Enfin tirez les trois lignes DC, DF, DH, qui partageront le Triangle proposé ABC, en trois parties égales, qui seront le Triangle CDH, & les deux Trapezes ACDF, BFDH, de sorte que chacun de ces trois Plans sera le tiers du Triangle ABC.

DEMONSTRATION.

Si l'on joint la droite CE, on considerera que puisque la ligne AE est la troisiéme partie de la ligne AB, *par constr.* le Triangle ACE est aussi la troisiéme partie du Triangle ABC, *par 1. 6.* & l'on connoîtra comme dans le *Probl. 2.* que le Trapeze ACDF est égal au Triangle ACE, & par consequent au tiers du Triangle ABC. D'où il suit que le Trapeze CDFB est égal aux deux tiers du même Triangle ABC; & parce qu'il est divisé en deux également par la droite DH, comme nous démontrerons au *Probl. 11. Chap. 2.* il s'ensuit que ses moitiez, sçavoir le Triangle CDH, & le Trapeze BFDH, sont aussi chacun le tiers du Triangle ABC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME VII.

Diviser un Triangle en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes droites paralleles à un côté donné.

38. Fig.

POur diviser le Triangle ABC, par exemple en trois parties égales, par des lignes droites paralleles au côté AB, divisez l'un des deux autres côtez AC, BC, comme BC, en trois également aux points D, E, & prenez sur ce côté BC, la partie CF moyenne proportionnelle entre le côté BC & son

son tiers CE, & pareillement la partie CG moyenne proportionnelle entre le même côté BC & ses deux tiers CD, pour tirer par les deux points F, G, au côté AB, les paralleles FH, GI, qui partageront le Triangle proposé ABC en trois parties égales, qui seront le Triangle CHF, & les deux Trapezoïdes AIGB, IHFG, de sorte que chacun de ses trois Plans sera le tiers du Triangle ABC. Planche 4. 38. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les Triangles HFC, ABC, sont équiangles, à cause des deux paralleles AB, HF, *par constr.* ils seront entre eux comme les quarrez de leurs côtez homologues CF, BC, *par 19. 6.* & parce que le quarré CF est au quarré BC, comme CE à son triple BC, *par Coroll. 20. 6.* à cause des trois proportionnelles BC, CF, CE, *par constr.* il s'ensuit que le Triangle HFC est le tiers du Triangle ABC, & l'on démontrera de la même façon, que le Triangle IGC est égal aux deux tiers du même Triangle ABC, d'où il est aisé de conclure que chacun des deux Trapezoïdes IGFH, ABGI, est le tiers du Triangle ABC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME VIII.

Diviser un Triangle en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes droites perpendiculaires à un côté donné.

POur diviser le Triangle ABC, par exemple en trois parties égales, par des lignes perpendiculaires au côté BC, tirez à ce côté BC, de son angle opposé A, la perpendiculaire AD, & divisez l'un des deux Segmens BD, CD, comme BD, en trois parties égales aux points E, F. Prenez sur le même côté BC, la partie BG moyenne proportionnelle entre le côté BC & le tiers BF du Segment BD, & la partie BH moyenne proportionnelle entre le même côté BC, & les deux tiers BE du même Segment BD, & tirez des deux points G, H, sur le côté BC, les perpendiculaires GI, HK, qui diviseront le Triangle proposé ABC en trois parties égales, qui sont le Triangle BIG, le Trapezoïde KIGH, & le Trapeze AKHC, de sorte que chacun de ces trois Plans sera égal au tiers du Triangle ABC. 39. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les Triangles ABD, IBG, sont équiangles, à cause des deux paralleles AD, IG, *par constr.* la Raison des deux lignes

Planche 4. 39. Fig. lignes BD, AD, sera égale à celle des deux BG, IG, *par* 4. 6. c'est pourquoy si aux deux premiers termes BD, AD, on donne la hauteur commune BC, & aux deux derniers BG, IG, la hauteur commune BG, on connoîtra *par* 1. 6. que le Rectangle sous BC, BD, est au Rectangle sous BC, AD, comme le Quarré BG, ou le Rectangle sous BC, BF, qui luy est égal *par* 17. 6. à cause des trois proportionnelles BC, BG, BF, *par constr.* est au Rectangle sous BG, IG: & comme le premier antecedent de cette Analogie, sçavoir le Rectangle sous BC, BD, est triple du second antecedent, c'est à dire du Rectangle sous BC, BF, *par* 1. 6. parce qu'ils ont une même hauteur BC, & que la base BD du premier est triple de la base BF du second, *par constr.* le premier consequent, sçavoir le Rectangle sous BC, AD, ou *par* 41. 1. le double du Triangle ABC, sera aussi triple du second consequent, c'est à dire du Rectangle sous BG, IG, ou du double du Triangle BGI. D'où il est aisé de conclure que le Triangle BGI est le tiers du Triangle ABC; & l'on connoîtra de la même façon que le Triangle BHK est égal aux deux tiers du même Triangle ABC, & que par consequent chacun des deux Trapezes KIGH, AKHC, est le tiers du Triangle ABC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

On peut diviser de la même façon le Triangle ABC en parties égales, par des lignes droites qui fassent un angle donné avec un côté, comme si ce côté est BC, on fera au point A, l'angle BAD égal au donné, & ayant trouvé comme auparavant les deux points G, H, on tirera par ces deux points G, H, les droites GI, HK, paralleles à la ligne AD: &c.

PROBLEME IX.

Retrancher d'un Triangle un Triangle égal à un Triangle donné.

Planche 4. 40. Fig. POur retrancher du Triangle ABC, un Triangle vers B, qui soit égal au Triangle donné BDE, faites au point D l'Angle BDF égal à l'angle ABC, par la ligne DF, qui sera terminée en F, par la droite EF, parallele au côté BD, & prenez sur le côté BC, la partie BG égale à la ligne BF, & sur le côté AB, la partie BH, égale à la ligne BD, pour joindre la droite GH, qui retranchera le Triangle BGH égal au donné BDE.

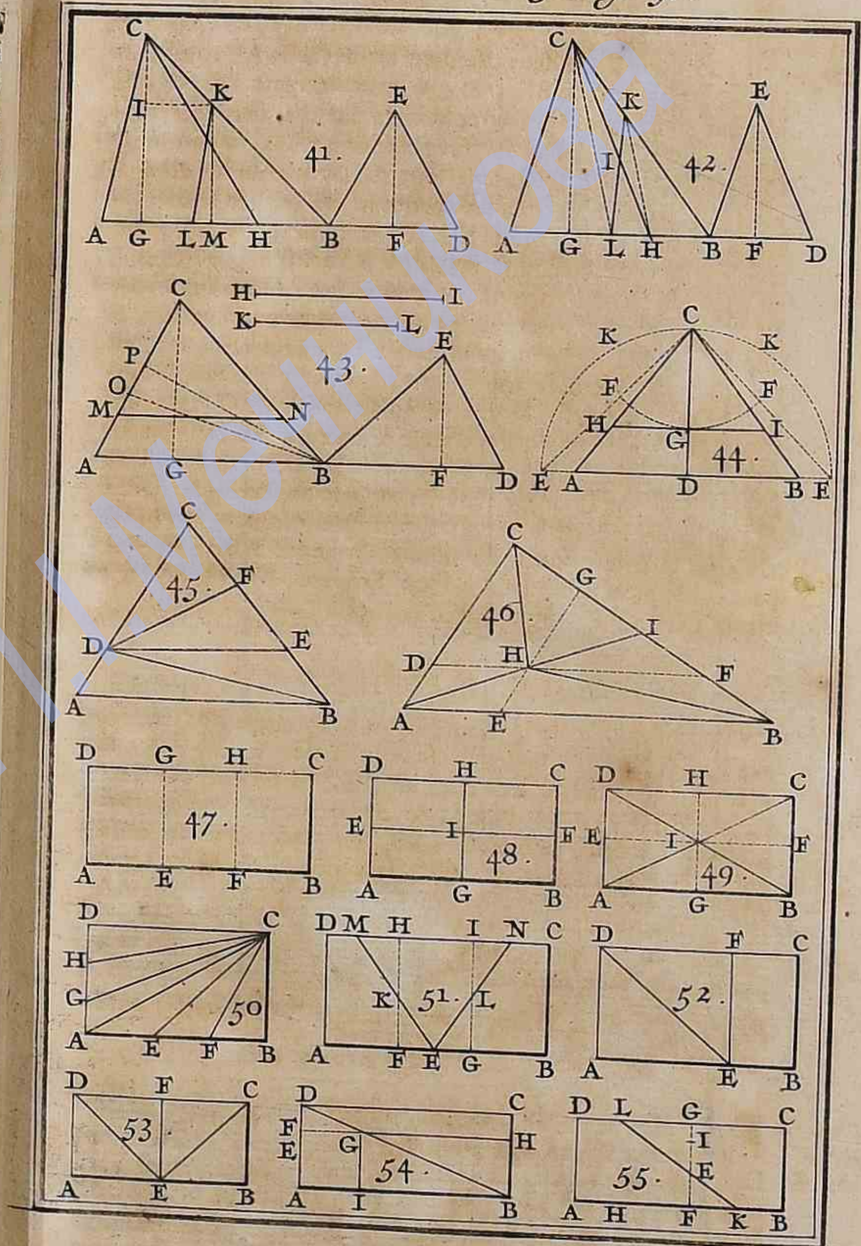


Planche 4. 40. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez BD, DF, du Triangle BFD, sont aux deux côtez BH, BG, du Triangle BGH, & l'angle compris BDF égal à l'angle compris HBC, *par constr.* il s'ensuit *par* 4. 1. que le Triangle BGH est égal au Triangle BFD, & par consequent au Triangle BED, parce que *par* 37. 1. ces deux Triangles BED, BFD, sont égaux entre eux, à cause des deux paralleles EF, BD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Ce Problême se peut resoudre autrement, parce que l'on peut trouver au dedans du Triangle proposé ABC, un autre Triangle que le Triangle BGH, qui soit égal au donné BED, sçavoir en tirant par le point H, la droite HI, parallele à la ligne AG, & en joignant la droite AI, qui retranchera le Triangle AIB égal au Triangle BGH, & par consequent au donné BED.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes AG, HI, sont paralleles entre elles *par constr.* les deux Triangles GIA, GHA, seront égaux entre eux, *par* 37. 1. c'est pourquoy si de chacun on ôte le Triangle commun AKG, il restera les deux Triangles égaux AKH, GKI, lesquels étant ajoûtez au Trapeze BIKH, on connoîtra que le Triangle ABI est égal au Triangle BGH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ou bien ayant tiré des deux sommets C, E, sur les bases AB, BD, les perpendiculaires CG, EF, cherchez aux trois lignes CG, EF, BD, une quatriéme proportionnelle BH, & joignez la droite CH, qui retranchera le Triangle CHB, égal au donné BDE. Planche 5. 41. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre lignes CG, EF, BD, BH, sont proportionnelles, *par constr.* le Rectangle des deux extrémes CG, BH, sera, *par* 16. 1. égal au Rectangle des deux moyennes EF, BD: c'est pourquoy les moitiez de ces deux Rectangles égaux, c'est à dire *par* 41. 1. les Triangles CHB, BDE, seront aussi égaux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ou bien prenez sur la perpendiculaire CG, la partie GI égale à la perpendiculaire EF, & tirez par le point I, la droite IK parallele au côté AB, sur lequel vous prendrez la

partie

Planche 5. 41. Fig. partie BL égale à la base BD, & vous joindrez la droite KL, qui retranchera le Triangle LKB égal au donné BDE, parce que ces deux Triangles ont des bases égales, & des hauteurs aussi égales.

42. Fig. Ou bien encore ayant trouvé la ligne BH proportionnelle aux trois CG, EF, BD, & la ligne CL à discretion, tirez par le point H, à cette ligne CL, la parallele HK, & joignez la droite KL, qui retranchera le Triangle LKB égal au Triangle BCH, & par consequent au donné BDE.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes CL, KH, sont paralleles, *par constr.* les deux Triangles CKL, CHL, seront égaux entre eux, *par* 38. 1. c'est pourquoy si de chacun on ôte le Triangle CIL, il restera les deux Triangles égaux CIK, HIL, lesquels étant ajoûtez separément au Trapeze BHIK, on connoîtra que le Triangle BKL est égal au Triangle ECH, qui est égal au donné BDE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce Problême se peut resoudre en plusieurs autres manieres, car on peut faire que le côté KL soit perpendiculaire au côté KB, par le moyen du Triangle BCH égal au donné BDE, comme il a été enseigné au *Probl.* 8. ou bien parallele au côté AC, comme il a été enseigné au *Probl.* 7. & comme nous allons enseigner encore autrement dans le

PROBLEME X.

Retrancher d'un Triangle un Triangle égal à un Triangle donné, par une ligne droite parallele à un côté donné.

43. Fig. POur retrancher du Triangle ABC, un Triangle égal au donné BDE, par une ligne parallele au côté AB, cherchez entre ce côté AB & sa perpendiculaire CG, une moyenne proportionnelle HI, & pareillement entre le côté BD, & sa perpendiculaire EF une moyenne proportionnelle KL, & aux trois lignes HI, KL, AC une quatriéme proportionnelle CM, pour avoir le point M, par lequel vous tirerez au côté AB, la parallele MN, qui retranchera le Triangle CMN égal au donné BDE.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre lignes HI, KL, AC, CM, sont proportionnelles, *par constr.* leurs Quarrez seront aussi proportionnels, *par* 22. 6. c'est pourquoy si à la place du Quarré HI,

HI, on met le Rectangle sous AB, CG, qui luy est égal, *par* 17. 6. à cause des trois proportionnelles AB, HI, CG, *par constr.* & à la place du Quarré KL, le Rectangle sous BD, EF, qui luy est pareillement égal, à cause des trois proportionnelles BD, KL, EF, & qu'enfin à la place des deux autres Quarrez AC, CM, on mette les Triangles semblables ABC, MNC, qui sont en même Raison, *par* 19. 6. on connoîtra que le Rectangle de AB, CG, ou *par* 41. 1. le double du Triangle ABC, est au Rectangle de BD, EF, ou le double du Triangle BDE, comme le Triangle ABC, est au Triangle CMN. D'où il est aisé de conclure que ce Triangle CMN est égal au Triangle BDE. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 5. 43. Fig.

SCOLIE.

La pratique de ce Problême se peut abreger, parce que l'on peut se passer des deux moyennes proportionnelles HI, KL, comme vous allez voir. Ayant tiré de l'angle B, sur son côté opposé AC, la perpendiculaire BP, cherchez aux trois lignes BP, BD, EF, une quatriéme proportionnelle CO, & entre les lignes AC, CO, la moyenne proportionnelle CM, & tirez comme auparavant, par le point M, au côté AB, la parallele MN, qui retranchera le Triangle CMN égal au donné BDE.

DEMONSTRATION.

En joignant la droite BO, on connoîtra comme dans le Problême precedent, que le Triangle BOC est égal au donné BDE, & parce que les Triangles semblables ABC, MNC, sont entre eux comme les Quarrez de leurs côtez homologues AC, CM, *par* 19. 6. ou comme les lignes AC, CO, *par Coroll.* 20. 6. à cause des trois proportionnelles AC, CM, CO, *par constr.* ou comme le Triangle ABC, au Triangle BOC, *par* 1. 6. il s'ensuit que le Triangle MNC est égal au Triangle BOC, & par consequent au Triangle BDE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XI.

Partager un Triangle isoscéle en quatre parties égales, par deux lignes droites perpendiculaires entre elles.

POur diviser le Triangle ABC, dont les deux côtez AC, BC, sont égaux, en quatre parties égales, par deux lignes droites qui se coupent à angles droits, divisez premierement 44. Fig.

Planche 5. 44. Fig. la base AB, en deux également au point D, & menez la droite CD, qui divisera le Triangle ABC en deux Triangles rectangles égaux CDA, CDB. Aprés cela, décrivez du point D, par le point C, le quart de cercle CKE, & joignez la corde CE, que vous diviserez en deux également au point F, par lequel vous décrirez du point C, l'arc de cercle FG, qui donnera sur la perpendiculaire CD, le point G, par lequel vous tirerez à la base AB, la parallele HI, laquelle avec sa perpendiculaire CD, divisera le Triangle proposé ABC, en quatre parties égales, qui seront les deux Triangles rectangles CGH, CGI, & les deux Trapezoïdes ADGH, BDGI.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux côtez CD, DE, du Triangle rectangle CDE, sont égaux, *par constr.* on connoît que le quarré CE étant égal aux deux quarrez égaux CD, DE, *par* 47. 1. est double du quarré CD: & parce que CF est la moitié de CE, *par constr.* on connoît *par* 20. 6. que le quarré CE est quadruple du quarré CF, ou CG: & comme il a été démontré double du quarré CD, il s'ensuit que ce quarré CD est double du quarré CG; c'est pourquoy *par* 19. 6. le Triangle ADC sera aussi double du Triangle semblable HGC: & pareillement le Triangle CDB sera double du Triangle CGI. D'où il est aisé de conclure, que les deux Triangles rectangles CGH, CGI, & les deux Trapezoïdes ADGH, BDGI, sont égaux entre eux, & qu'ainsi le Triangle proposé ABC se trouve divisé en quatre parties égales par les deux perpendiculaires CD, HI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XII.

Trouver sur le côté donné d'un Triangle un point, duquel ce Triangle se puisse diviser en autant de parties égales qu'on voudra.

45. Fig. POur trouver sur le côté donné AC du Triangle ABC, un point duquel on puisse diviser le Triangle ABC en quatre parties égales par exemple, prenez la ligne AD égale à la quatriéme partie du côté AC, & le point D sera celuy qu'on cherche: car si l'on joint la droite BD, le Triangle ADB sera le quart du Triangle ABC, *par* 1. 6. c'est pourquoy le Triangle BDC sera égal aux trois quarts du même Triangle ABC; Ainsi il n'y aura qu'à diviser en trois également le Triangle BDC, *par Probl.* 1. sçavoir en divisant le côté BC en trois parties égales aux points E, F, & en joignant les droites DE, DF, & le Triangle proposé se trouvera divisé en quatre parties égales par les trois lignes DB, DE, DF. Planche 5. 45. Fig.

SCOLIE.

Si vous voulez que le point qu'on cherche, soit au dedans du Triangle ABC, ayant pris comme auparavant, la ligne AD égale à la quatriéme partie du côté AC, & pareillement la ligne AE égale à la quatriéme partie du côté AB, parce qu'il est proposé de diviser le Triangle ABC en quatre parties égales, tirez par les points D, E, aux deux côtez AB, AC, les paralleles DF, EG, dont le point de Section H sera celuy qu'on cherche: de sorte que si l'on joint les droites HA, HB, HC, chacun des deux Triangles AHB, AHC, sera le quart du proposé ABC, & le Triangle BHC, en sera par consequent la moitié; ainsi il n'y aura qu'à le diviser en deux également par la droite HI, qui divise le côté BC en deux parties égales au point I, & le Problême sera resolu. 46. Fig

---

CHAPITRE II.

De la Division des Quadrilateres.

LEs Quadrilateres seront faciles à être divisez par celuy qui aura bien compris la Division des Triangles, quoique la Division des Triangles dépende dans plusieurs rencontres de la Division des Quadrilateres, & principalement des Trapezoïdes, pour le moins quand on veut diviser un Triangle en plus de deux parties égales, comme vous pouvez avoir remarqué dans plusieurs Problêmes du Chapitre precedent.

PROBLEME I.

Diviser un Parallelogramme en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes paralleles à un côté donné.

POur diviser le Parallelogramme ABCD, par exemple en trois parties égales, par des lignes paralleles au côté donné AD, divisez l'autre côté AB en trois parties égales aux deux points E, F, & tirez par ces deux points E, F, au côté AD, les paralleles EG, FH, qui diviseront le Parallelogramme proposé ABCD en trois Parallelogrammes égaux, comme il est évident *par* 36. 1. 47. Fig.

PROBLEME II.

Diviser un Parallelogramme en quatre parties égales, par deux lignes droites paralleles à deux côtez.

Planche 5. 48. Fig. POur diviser le Parallelogramme ABCD, en quatre parties égales par deux lignes paralleles aux deux côtez AB, AD, divisez les deux côtez opposez AD, BC, chacun en deux également aux points E, F, que vous joindrez par la droite EF, & pareillement les deux côtez opposez AB, CD, chacun en deux également aux points G, H, que vous joindrez par la droite GH, laquelle avec la precedente EF divisera le Parallelogramme proposé ABCD, en quatre Parallelogrammes égaux, dont la démonstration est trop évidente pour en parler davantage.

Scolie.

49. Fig. On peut aussi tres-facilement diviser le Parallelogramme ABCD en quatre parties égales, qui seront quatre Triangles isoscéles par les deux Diagonales AC, BD, qui le divisent en quatre Triangles égaux, comme l'on connoîtra en tirant par le centre I, les deux lignes EF, GH, paralleles aux deux côtez AB, AD, où vous voyez qu'elles divisent le Parallelogramme proposé ABCD en quatre petits Parallelogrammes égaux, & que chacun de ces quatre Parallelogrammes est divisé en deux égalment par les Diagonales, *par* 34. 1. Vous voyez aussi qu'en cette façon le Parallelogramme proposé ABCD, se trouve partagé en huit parties égales, qui sont huit Triangles égaux ayant leur sommet commun au centre I. Ce qui fait voir que de ce centre I, on peut diviser un Parallelogramme en un nombre pairement pair de parties égales tel que l'on voudra. Nous entendons pour *Nombre pairement pair* celuy qui se peut diviser exactement par 4.

PROBLEME III.

Diviser un Parallelogramme en un nombre pair de parties égales tel que l'on voudra, par des lignes droites tirées d'un angle donné.

50. Fig. POur diviser le Parallelogramme ABCD, par exemple en six parties égales, par des lignes droites tirées de l'angle C, tirez par cet angle C, la Diagonale AC, qui *par* 34. 1. divisera le Parallelogramme proposé ABCD en deux Triangles égaux ACB, ACD: ainsi il n'y a plus qu'à diviser *par Probl.* 1. *Chap.* 1. chacun de ces deux Triangles égaux en trois parties égales, sçavoir en divisant les côtez AB, AD, chacun en trois également aux points E, F, G, H, & en joignant les droites DE, DF, DG, DH, & le Problême sera resolu. Planche 5. 50. Fig.

Scolie.

Il est évident que si on laisse la Diagonale AC, & les deux lignes CF, CH, le Parallelogramme ABCD, se trouvera divisé en trois parties égales par les deux lignes CE, CG, qui partent de l'angle donné C: mais on les peut faire partir de quelqu'autre point donné sur un côté, comme vous allez voir dans le Problême suivant.

PROBLEME IV.

Diviser un Parallelogramme en trois parties égales, par deux lignes droites tirées d'un point donné sur un côté.

POur diviser le Parallelogramme ABCD, en trois parties égales, par deux lignes droites tirées du point E donné sur le côté AB, divisez ce côté AB en trois également aux points F, G, par lesquels vous tirerez à l'autre côté AD, les paralleles FH, GI, que vous diviserez en deux également aux points K, L, par où vous tirerez du point donné E, les droites EM, EN, qui partageront le Parallelogramme ABCD en trois parties égales, qui sont le Triangle MEN, & les deux Trapezoïdes AEMD, BENC, de sorte que chacun de ces trois Plans sera égal à la troisiéme partie du Parallelogramme proposé ABCD. 51. Fig.

Demonstration.

Parce que les deux Triangles EFK, MHK, sont équiangles, & qu'ils ont un côté égal à un côté semblablement posé, sçavoir le côté KF égal au côté KH, *par constr.* ces deux Triangles seront égaux entre eux, *par* 26. 1. c'est pourquoy si on les ajoûte separément au Pentagone AFKMD, on connoîtra que le Trapezoïde AEMD est égal au Parallelogramme AFHD, c'est à dire, *par* 1. 6. au tiers du Parallelogramme ABCD. On démontrera de la même façon que le Trapezoïde BENC est égal au Parallelogramme BCIG, ou au tiers du Parallelogramme ABCD, d'où il est aisé de conclure, que le

 Trian-

Planche 5. 51. Fig. Triangle MEN est aussi égal au tiers du même Parallelogramme ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

52. Fig. Il est évident que lorsque la ligne BE sera la troisiéme partie du côté AB, il n'y a qu'à tirer la ligne EF, parallele au côté BC, pour avoir le Parallelogramme EBCF égal au tiers du proposé ABCD, *par* 1. 6. D'où il suit que le Parallelogramme AEFD en est les deux tiers, c'est pourquoy si l'on tire la Diagonale ED, qui *par* 34. 1. le divisera en deux également, le Parallelogramme proposé ABCD se trouvera divisé en trois parties égales par les deux lignes EF, ED.

53. Fig. Il est évident aussi, que lorsque le point donné E sera precisément au milieu du côté AB, on en pourra aisément diviser le Parallelogramme proposé ABCD, en quatre parties égales, en tirant comme auparavant, au côté AD, ou BC, la parallele EF, pour avoir les deux Parallelogrammes égaux AEFD, EBCF, que l'on divisera en deux également par les Diagonales ED, EC, &c.

PROBLEME V.

Diviser un Parallelogramme en quatre parties égales, par des lignes droites tirées d'un point au dedans du Parallelogramme.

54. Fig. POur diviser le Parallelogramme ABCD, en quatre parties égales, en tirant des lignes droites d'un point que nous trouverons sur la Diagonale BD, divisez le côté AD en deux également au point E, & cherchez entre ce côté AD, & sa moitié AE, une moyenne proportionnelle AF, pour tirer du point F, au côté AB, la parallele FGH, qui donnera sur la Diagonale BD, le point G, duquel tirant au côté AD, la parallele GI, le Parallelogramme ABCD, se trouvera divisé en quatre parties égales, qui seront les deux Triangles BIG, BHG, & les deux Trapezoïdes AIGD, DGHC, de sorte que chacun de ces quatre Plans sera le quart du Parallelogramme ABCD.

DEMONSTRATION.

Parce que *par constr.* les trois lignes AE, AF, AD, sont proportionnelles, le quarré de la moyenne AF, ou GI son égale, sera, *par* 17. 6. égal au Rectangle des deux extrémes AE, AD, c'est à dire *par* 1. 6. au double du Quarré AD, à cause

cause de la hauteur AD double de la base AE, *par constr.* & parce que *par* 19. 6. le Triangle ABD est à son semblable IBG, comme le Quarré AD est au Quarré IG, moitié du Quarré AD, le Triangle BIG sera aussi la moitié du Triangle ABD, moitié du Parallelogramme ABCD, *par* 34. 1. D'où il suit que le Trapezoïde AIGD, & le Triangle GIB, & aussi son égal GHB, sont chacun le quart du Parallelogramme ABCD, & que par consequent le Trapezoïde GHCD est aussi le quart du même Parallelogramme ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 5. 54. Fig.

PROBLEME VI.

Diviser un Parallelogramme en deux parties égales par une ligne droite tirée d'un point donné en dedans.

POur diviser en deux également le Parallelogramme ABCD, 55. Fig. en tirant une ligne droite par le point E donné en dedans, tirez par le point E la droite FG, parallele au côté AD, ou BC, & ayant fait FH égale à FB, & EI égale à EF, cherchez aux trois lignes GI, IE, AH, une quatriéme proportionnelle FK, pour avoir le point K, par lequel & par le point donné E, vous tirerez la droite KL, qui divisera en deux également le Parallelogramme proposé ABCD, parce qu'elle retranche de chaque côté les deux lignes égales BK, DL, comme nous allons démontrer.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre lignes GI, IE, AH, FK, sont proportionnelles, *par constr.* on connoîtra *en composant*, que les quatre GE, IE, AH + FK, FK, sont proportionnelles: & si à la place des deux premiers termes GE, IE, ou EF, on met les deux LG, FK, qui sont en même Raison, *par* 4. 6. à cause de la similitude des Triangles équiangles GEL, FEK, on connoîtra que la Raison des deux lignes LG, FK, est égale à celle des deux AH+FK, FK, & que par consequent la ligne LG, ou DG−DL, ou AF−DL, est égale à AH+FK, ou AF−FH+FK, ou AF−BK, à cause de FB égale à FH, *par constr.* & que les deux Trapezoïdes AKLD, BKLC, ayant tous les angles & tous les côtez égaux, les uns aux autres, sont égaux entre eux, & qu'ainsi la ligne KL divise en deux également le Parallelogramme proposé ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME VII.

Diviser un Trapezoïde en autant de parties égales qu'on voudra.

Planche 6. 56 Fig. POur diviser le Trapezoïde ABCD, par exemple en trois parties égales, divisez chacun des deux côtez paralleles AB, CD, en trois également aux points E, F, G, H, & joignez les droites EG, FH, qui diviseront le Trapezoïde proposé ABCD en trois Trapezoïdes AEGD, EFHG, FBCH, qui sont égaux, comme l'on connoîtra en tirant les Diagonales AG, EH, FC, qui feront connoître que tous ces Trapezoïdes sont composez de Triangles égaux, les uns aux autres *par* 38. 1.

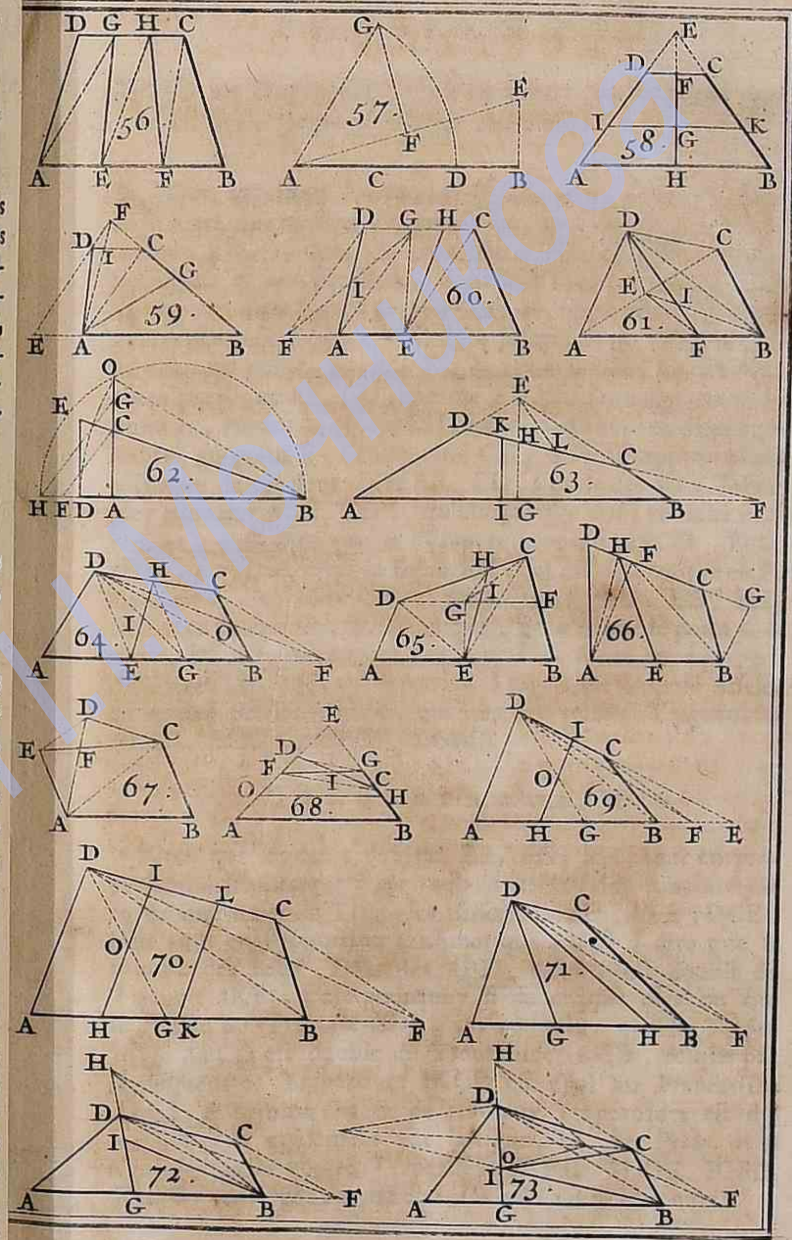
LEMME.

La ligne AB étant coupée en C, la couper derechef au point D, entre B & C, en sorte que les trois Quarrez AC, AD, AB, soient en proportion arithmetique.

57. Fig. POur trouver le point D entre B & C, en sorte que les trois Quarrez AC, AD, AB, soient en *Proportion arithmetique*, c'est à dire tels que la somme des deux extremes AB, AC, soit double du moyen AD; ayant élevé sur AB la perpendiculaire BE égale à AC, & ayant divisé la ligne AE en deux également au point F, tirez de ce point F, la ligne FG perpendiculaire & égale à la ligne AF moitié de AE, & faites AD égale à AG, & les trois quarrez AC, AD, AB, seront en proportion arithmetique.

DEMONSTRATION.

Parce que le Quarré AE est, *par* 47. 1. égal à la somme des Quarrez AB, BE, ou AC, le Quarré AF de la moitié de AE, sera *par* 20. 6. le quart de la somme des deux Quarrez AB, AC: & parce que le quarré AG ou AD est *par* 47. 1. double du quarré AF, parce qu'il est égal à la somme des deux égaux AF, FG, ce même Quarré AD sera la moitié de la somme des Quarrez AC, AD, & ainsi les trois Quarrez AC, AD, AB, seront en Proportion arithmetique. *Ce qu'il falloit démontrer.*



PROBLEME VIII.

Diviser un Trapezoïde isoscéle en quatre parties égales, par deux lignes perpendiculaires entre elles.

Nous appellons *Trapezoïde isoscéle* celuy dont les deux côtez qui ne sont pas paralleles, sont égaux entre eux, comme ABCD, dont les deux côtez AD, BC, sont supposez égaux & non paralleles. Pour le diviser en quatre parties égales par deux lignes perpendiculaires entre elles, prolongez les deux côtez égaux AD, BC, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point, comme E, & ayant divisé l'un des deux côtez paralleles AB, CD, comme AB, en deux également au point H, menez la droite EH, qui divisera aussi en deux également au point F, l'autre côté CD, & sera perpendiculaire à chacun de ces deux côtez AB, CD, à cause des deux Triangles isoscéles ABE, CDE, qu'elle partage aussi en deux également, aussi bien que le Trapeze proposé ABCD. Enfin coupez *par Lem. prec.* la ligne EH, qui est déja coupée en F, au point G, en sorte que les trois Quarrez EF, EG, EH, soient en Proportion arithmetique, & tirez par le point G la droite IK perpendiculaire à la ligne FH, & ces deux perpendiculaires IK, FH, diviseront le Trapezoïde proposé ABCD en quatre parties égales, qui sont les quatre Trapezoïdes AHGI, BHGK, IGFD, KGFC. Planche 6. 58. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les trois quarrez EF, EG, EH, sont en proportion arithmetique, *par constr.* il est aisé de conclure *par* 19. 6. que les trois Triangles isoscéles ABE, IKE, DCE, sont aussi en Proportion arithmetique, c'est à dire que la somme des deux Triangles ABE, CDE, est double du Triangle IKE, c'est pourquoy si de chaque côté on ôte le double du Triangle CDE, on connoîtra que le Trapezoïde ABCD est double du Trapezoïde IKCD, & que par consequent ce Trapezoïde IKCD est égal au Trapezoïde ABKI; & comme chacun de ces deux Trapezoïdes est divisé en deux également par la ligne FH, *par Probl.* 7. il s'ensuit que les quatre Trapezoïdes AHGI, BHGK, IGFD, KGFC, sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PRO-

PROBLEME IX.

Diviser un Trapezoïde en deux parties égales, par une ligne droite tirée de l'un de ses angles.

Planche 6. 59. Fig. POur diviser en deux également le Trapezoïde ABCD, par une ligne droite tirée de l'angle donné A, prolongez le côté adjacent AB, parallele à l'autre côté CD, en E, en sorte que la ligne AE soit égale à cet autre côté CD, & menez du point E au point D, la droite ED, qui étant prolongée rencontrera l'autre côté CD aussi prolongé en quelque point comme F : aprés quoy ayant divisé toute la ligne BF en deux également au point G, on tirera la droite AG, qui divisera en deux également le Trapezoïde proposé ABCD, de sorte que le Triangle ABG sera la moitié de ce Trapezoïde.

DEMONSTRATION.

Si l'on joint la droite AF, & la Diagonale AC, on connoîtra *par* 33. 1. que cette Diagonale AC est parallele à la ligne EF, à cause des deux lignes paralleles & égales AE, DC, *par constr.* & *par* 37. 1 que les deux Triangles AFC, ADC, sont égaux entre eux : c'est pourquoy si de chacun on ôte le Triangle commun AIC, il restera le Triangle AID égal au Triangle FIC, & si l'on ajoûte chacun de ces deux Triangles au Trapeze ABCI, on connoîtra que le Trapezoïde ABCD est égal au Triangle ABF : & parce que *par* 6. 1. le Triangle ABG est la moitié du Triangle ABF, à cause de la base BG, moitié de la base BF, *par constr.* il sera aussi la moitié du Trapezoïde proposé ABCD. *Ce qu'il falloit demontrer.*

PROBLEME X.

Diviser un Trapezoïde en deux également, par une ligne droite tirée d'un point donné sur sa base.

60. Fig. NOus appellons *Base d'un Trapezoïde* l'un des deux côtez qui sont paralleles, comme AB du Trapezoïde ABCD. Si donc on donne sur ce côté AB le point E, duquel il faille diviser le Trapezoïde ABCD en deux parties égales, ayant pris sur la base AB la ligne EF egale à la ligne EB, tirez par le point A, la droite AG parallele à la droite FD, & ayant divisé la ligne CG en deux également au point H, menez la droite EH, qui divisera le Trapezoïde proposé ABCD, en deux parties égales qui sont les deux Trapezoïdes AEHD, BEHC.

De-

Planche 6. 60. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on joint les droites EG, FG, EC, on connoîtra *par* 37. 1. que parce que les deux lignes AG, FD, sont paralleles, *par constr.* les deux Triangles ADG, AFG, sont égaux entre eux, c'est pourquoy si de chacun on ôte le Triangle commun AIG, il restera le Triangle AIF égal au Triangle DIG, dont chacun étant ajoûté separément au Trapeze AIGE, fait connoître que le Trapezoïde ADGE est égal au Triangle EGF, & par consequent au Triangle ECB son égal, *par* 38. 1. à cause des deux bases égales EB, EF, *par constr.* & parce que les deux Triangles GEH, CEH, sont aussi égaux entre eux, *par* 38. 1. à cause de leurs bases égales GH, CH, *par constr.* il est aisé de conclure que tout le Trapezoïde AEHD est égal à tout le Trapezoïde BEHC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XI.

Diviser un Trapeze en deux également, par une ligne droite tirée d'un angle donné.

POur diviser le Trapeze ABCD en deux parties égales par une ligne droite tirée de l'angle D, divisez la Diagonale AC opposée à l'angle donné D, en deux également au point E, par où vous tirerez à l'autre Diagonale BD la parallele EF, & joignez la droite DF, qui partagera le Trapeze proposé ABCD en deux parties égales, qui sont le Triangle ADF, & le Trapeze BCDF. 61. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes EA, EC, sont égales, *par constr.* les deux Triangles EDA, EDC seront égaux entre eux, aussi-bien que les deux EBA, EBC, *par* 38. 1. ce qui fait que les deux Trapezes ADEB, CDEB sont aussi égaux entre eux : & à cause du Trapeze ADEB égal au Triangle ADF, & du Trapeze CDEB, égal au Trapeze BCDF, parce les deux Triangles DIE, BIF, sont égaux entre eux, comme l'on connoîtra en ôtant le Triangle DIB, des deux Triangles DEB, DFB, qui sont égaux, *par* 37. 1. à cause des deux paralleles BD, EF, *par constr.* il s'ensuit que le Triangle ADF est égal au Trapeze BCDF. *Ce qu'il falloit démontrer.* Voyez le *Probl.* 19.

Sco-

Planche 6. 62. Fig.

SCOLIE.

On voit par cette Figure, que l'on peut aisément diviser un Trapeze en deux également par deux lignes droites tirées de deux angles opposez donnez, comme si l'on donne les deux angles B, D, on divisera en deux également au point E, la Diagonale AC, qui passe par les deux autres angles A & C, & l'on joindra les droites EB, ED, qui diviseront le Trapeze proposé ABCD en deux parties égales, qui sont les deux Trapezes ABED, BCDE, parce que par 38. 1. les deux Triangles EBA, EBC, sont égaux entre eux, aussi bien que les deux EDA, EDC.

LEMME.

Etant donné le Triangle ABC rectangle en A, trouver sur le côté AB prolongé le point D, duquel tirant à l'autre côté AC, la parallele DE, terminée en E, par l'hypotenuse BC prolongée; le Trapeze ACED soit égal au Quarré de la ligne donnée AF.

62. Fig. Si à la ligne AC, à la ligne AF, & au double AG de la ligne AF, on trouve une quatriéme proportionnelle AH, & qu'entre AB, & la somme BH des deux AB, AH, on trouve une moyenne proportionnelle BD, on aura le point D, qu'on cherche: de sorte que si de ce point D on tire au côté AC, la parallele DE rencontrant l'hypotenuse BC prolongée en E, le Trapezoïde ACED sera égal au Quarré de la ligne donnée AF.

DEMONSTRATION.

Parce que les Triangles rectangles ABC, DBE, sont équiangles, à cause des deux paralleles AC, DE, *par constr.* ils sont entre eux comme les Quarrez de leurs côtez homologues AB, DB, *par* 19. 6. c'est pourquoy si au lieu du Quarré DB, on met le Rectangle sous AB, BH, qui luy est égal, *par* 17. 6. à cause des trois proportionnelles AB, BD, BH, *par constr.* on connoîtra que le Triangle ABC, est au Triangle DBE, comme le Quarré AB, est au Rectangle sous AB, BH, ou *par* 1. 6. comme la base AB, à la base BH, à cause de la hauteur commune AB: *& par conversion de Raison*, le Triangle ABC, est au Trapeze ACED, comme AB, est à AH; & si aux deux derniers termes AB, AH, considerez comme des bases, on donne la hauteur commune AC, on

Planche 6. 62. Fig.

on connoîtra *par* 1. 6. que le Triangle ABC est au Trapezoïde ACED, comme le Rectangle sous AB, AC, est au Rectangle sous AH, AC, c'est à dire au double du Quarré AF, à cause des quatre proportionnelles AC, AF, 2AF, AH, *par constr.* où l'on void que le premier antecedent, sçavoir le Triangle ABC étant *par* 41. 1. la moitié du second antecedent, qui est le Rectangle sous AB, AC, aussi le premier consequent, sçavoir le Trapezoïde ACED, est égal à la moitié du second consequent, qui est le double du Quarré AF, & par consequent égal au Quarré AF. *Ce qu'il falloit démontrer.* Voyez *Probl.* 19.

PROBLEME XII.

Diviser un Trapeze qui a deux angles égaux, en deux également par une ligne perpendiculaire au côté d'entre les deux angles égaux.

Pour diviser en deux parties égales le Trapeze ABCD, dont les deux angles A, & B, sont égaux, par une ligne droite perpendiculaire au côté interjacent AB, prolongez les deux AB, CD, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F, & les deux AD, BC, jusqu'à ce qu'ils se coupent en E, & alors le Triangle AEB sera isoscéle, *par* 6. 1. à cause des deux angles égaux A, B. *par supp.* c'est pourquoy si l'on tire de l'angle E, sur son côté opposé AB, la perpendiculaire EG, les deux Triangles rectangles AGE, BGE, seront égaux entre eux. D'où il est aisé de conclure, que le Trapeze AGHD est plus grand que le Trapeze BGHC, à cause du Triangle DEH moindre que le Triangle CEH, de tout le Triangle CEL, en supposant la Base HL, égale à la base HB, & par consequent le Triangle HEL égal au Triangle HED, *par* 38. 1. C'est pourquoy si l'on reduit la moitié du Triangle CEL en Quarré, & qu'à ce Quarré on fasse le Trapeze égal GHKI, *par Lem. prec.* la perpendiculaire IK divisera le Trapeze proposé ABCD en deux également. *Ce qu'il falloit faire.* 63. Fig.

PROBLEME XIII.

Diviser un Trapezoïde en deux également par une ligne droite perpendiculaire aux deux côtez paralleles.

Pour diviser le Trapezoïde ABFE en deux parties égales, par une ligne droite perpendiculaire aux deux côtez paralleles AB, EF, tirez des deux points E, F, les lignes EH, FK, Planche 4. 38. Fig.

per-

Planche 4. 36. Fig. perpendiculaires à la baſe AB, & prenez ſur cette baſe AB, la partie AO égale à la quatriéme partie de la ſomme d'une fois BK, de deux fois HK, & de trois fois AH, pour avoir le point O, d'où vous éleverez ſur AB, la perpendiculaire OD, qui diviſera en deux également le Trapezoïde propoſé ABFE, de ſorte que l'aire du Trapezoïde AODE ſera preciſément la moitié de celle du Trapezoïde ABFE.

DEMONSTRATION.

Si l'on met a pour AH, b pour HK, c pour BK, & p pour la hauteur commune DO, ou HE, ou KF, on aura $\frac{1}{4}c + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}a$ pour AO, $\frac{1}{4}c + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a$ pour HO, & l'aire du Triangle AHE ſera $\frac{1}{2}ap$, celle du Rectangle HODE ſera $\frac{1}{4}cp + \frac{1}{2}bp - \frac{1}{4}ap$, celle du Rectangle HKFE ſera bp, & celle du Triangle BKF ſera $\frac{1}{2}cp$, tellement que l'aire du Trapezoïde ABFE ſera $\frac{1}{2}ap + bp + \frac{1}{2}cp$, & celle du Trapezoïde AODE ſera $\frac{1}{4}ap + \frac{1}{2}bp + \frac{1}{4}cp$, laquelle eſt bien la moitié de celle du Trapezoïde ABFE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XIV.

Diviſer un Trapeze en deux parties égales, par une ligne droite tirée d'un point donné ſur un côté.

Planche 6. 64. Fig. POur diviſer en deux également le Trapeze ABCD, par une ligne droite tirée du point E donné ſur le côté AB, joignez les droites DE, DB, & tirez à la Diagonale DB, par le point C, la parallele CF, qui coupe icy le côté AB prolongé au point F, par où & par le point D, vous tirerez la droite DF, qui fera le Triangle ADF égal au Trapeze propoſé ABCD, à cauſe des deux Triangles égaux BOF, COD, comme l'on connoîtra en ôtant des deux Triangles DCB, DFB, qui ſont égaux *par* 37. 1. à cauſe des deux paralleles BD, CF, *par conſtr.* le Triangle commun BOD. C'eſt pourquoy ſi l'on diviſe la baſe AF en deux également au point G, & qu'on mene la droite DG, le Triangle ADG ſera *par* 1. 6. la moitié du Triangle ADF, ou du Trapeze ABCD. Enfin tirez par le point G, la droite GH parallele à la droite DE, & joignez la ligne EH, qui partagera le Trapeze propoſé ABCD en deux parties égales, qui ſont les deux Trapezes AEHD, BEHC, de ſorte que le

le premier de ces deux Plans, ſçavoir AEHD, ſera la moitié du Trapeze ABCD, ou égal au Triangle ADG. Planche 6. 64. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux Lignes DE, GH, ſont paralleles, *par conſtr.* les deux Triangles GDH, GEH, ſeront égaux entre eux, *par* 38. 1. c'eſt pourquoy ſi de chacun on ôte le Triangle commun GHI, il reſtera le Triangle DIH égal au Triangle GIE, dont chacun étant ajoûté ſeparément au Trapeze AEID, on aura le Trapeze AEHD, égal au Triangle ADG, & par conſequent à la moitié du Trapeze propoſé ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Il ne ſera pas beſoin de reduire en Triangle le Trapeze propoſé ABCD, lorſque le point E ſera donné au milieu du côté AB, parce qu'on le peut diviſer autrement en deux parties égales par une ligne droite tirée de ce point de milieu E, comme vous allez voir. 65. Fig.

Ayant joint la droite CE, & ayant tiré de l'angle D, la ligne DF parallele au côté AB, diviſez cette ligne DF en deux également au point G, par lequel vous tirerez à la ligne CE, la parallele GH, qui donnera ſur le côté CD le point H, par lequel & par le point donné E, vous tirerez la droite EH, qui diviſera le Trapeze propoſé ABCD en deux parties égales: qui ſont les deux Trapezes AEHD, BEHC.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux Trapezoïdes AEGD, BEGD, ſont égaux entre eux, *par Probl.* 7. & que les deux Triangles GCD, GCF, ſont auſſi égaux entre eux, *par* 38. 1. il s'enſuit que le Pentagone AEGCD eſt égal au Trapeze BEGC: & parce que les deux Triangles EIG, CIH, ſont encore égaux entre eux, comme l'on connoîtra en ôtant des deux Triangles EGC, EHC, qui ſont égaux entre eux, *par* 38. 1. à cauſe des deux paralleles CE, GH, le Triangle commun EIC, il s'enſuit que le Trapeze AEHD eſt égal au Trapeze BEHC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ou bien tirez des deux extremitez A, B, du côté AB les droites AF, BG, perpendiculaires au côté CD, & cherchez à la ſomme de ces deux perpendiculaires AF, BG, à la perpendiculaire BG, & au côté CD, une quatriéme proportionnelle DH, pour avoir ſur le côté CD le point H, par lequel & par le point donné E, on tirera la droite EH, qui diviſera le Trapeze propoſé ABCD en deux parties égales, qui ſont les deux Trapezes AEHD, BEHC. 66. Fig.

Planche 6. 66. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre lignes AF+BG, BG, CD, DH, sont proportionnelles, *par constr.* on connoîtra *par conversion de Raison*, que les quatre AF, BG, CH, DH, sont aussi proportionnelles, & *par* 16. 6. que le Rectangle des deux extrémes AF, DH, ou *par* 41. 1. le double du Triangle AHD, est égal au Rectangle des deux moyennes BG, CH, ou au double du Triangle BHC, & que par consequent les deux Triangles AHD, BHC, sont égaux, ausquels si l'on ajoûte les deux Triangles AHE, BHE qui sont aussi égaux *par* 38. 1. à cause des deux bases égales AE, BE, *par supp.* on connoîtra que les deux Trapezes AEHD, BEH, sont égaux entre eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

65. Fig. Ou bien encore si l'on veut reduire en Triangle le Trapeze proposé ABCD, on trouvera sur le côté CD prolongé, qui est opposé au point donné E, la base de ce Triangle, dont le sommet sera au point donné E, en tirant du point A une parallele à la ligne ED, & pareillement du point B une parallele à la ligne EC, & en divisant cette base en deux également au point H, &c.

LEMME.

Reduire un Trapeze donné en un Trapezoïde.

67. Fig. POur reduire le Trapeze ABCD en un Trapezoïde, tirez du point A au côté BC la parallele AE, & du point D, à la Diagonale AC, la parallele DE, & par le point E, où ces deux paralleles AE, DE, s'entre-coupent, tirez au point C, la droite CE, & le Trapezoïde ABCE sera égal au Trapeze proposé ABCD.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes AC, DE, sont paralleles, *par constr.* les deux Triangles ADC, AEC, sont égaux entre eux, *par* 38. 1. c'est pourquoy si de chacun on ôte le commun AFC, il restera le Triangle EFA égal au Triangle CFD, & si l'on ajoûte chacun de ces deux Triangles égaux au Trapeze ABCF, on connoîtra que le Trapeze proposé ABCD est égal au Trapezoïde ABCE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Sco-

Planche 6. 67. Fig.

SCOLIE.

A cause que l'on change icy deux côtez, cette resolution quoique bonne, comme vous venez de voir par sa démonstration, n'est pas propre pour nôtre dessein: c'est pourquoy nous en donnerons icy une autre, où l'on ne changera qu'un côté.

Pour donc changer le Trapeze ABCD en Trapezoïde, sans changer le côté AB, ni la position des deux AD, BC, prolongez ces deux côtez AD, BC, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point, comme E, & coupez le côté AE en F, en sorte que le côté BE soit au côté AE, comme le Rectangle des lignes EC, ED, au quarré EF, ce qui est facile, pour avoir le point F, par lequel tirant la ligne FG parallele au côté AB, on aura le Trapezoïde ABGF égal au Trapeze proposé ABCD. 68. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on joint les droites FC, DG, on connoîtra premierement que le Triangle ECD est égal au Triangle EGF, & par consequent le Triangle CIG au Triangle DIF, en raisonnant de la sorte.

Parce que la ligne BE est à la ligne AE, comme le Rectangle des lignes EC, ED, est au Quarré EF, *par constr.* si à la place des deux premiers termes BE, AE, on met les deux EG, EF, qui sont en même Raison, *par* 4. 6. à cause des deux paralleles AB, FG, *par constr.* on connoîtra que la Raison des deux lignes EG, EF, est égale à celle du Rectangle sous les lignes EC, ED, au Quarré EF, & en donnant aux deux premiers termes EG, EF, la ligne EF, pour hauteur commune, on connoîtra *par* 1. 6. que la Raison du Rectangle sous les lignes EF, EG, au Quarré EF, est la même que celle du Rectangle sous les lignes EC, ED, au même Quarré EF, & que par consequent le Rectangle des lignes EF, EG, est égal au Rectangle des lignes EC, ED. C'est pourquoy *par* 16. 6. les quatre lignes EC, EF, EG, ED, seront proportionnelles, & *par* 15. 6. les deux Triangles ECD, EFG, seront égaux entre eux, desquels ôtant le Trapeze commun EGID, il restera le Triangle CIG égal au Triangle DIF, & si à chacun de ces deux Triangles égaux on ajoûte separement le Pentagone ABCIF, on connoîtra que le Trapeze proposé ABCD est égal au Trapezoïde ABGF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XV.

Diviser un Trapezoïde en deux parties égales, par une ligne droite parallele aux côtez paralleles.

Planche 6. 68. Fig. POur diviser en deux également le Trapezoïde ABGF, par une ligne droite parallele aux deux côtez paralleles AB, GF, prolongez les deux autres côtez AF, BG, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point, comme E, & coupez le côté AE en O, en sorte que le Quarré EO soit égal à la moitié de la somme des deux Quarrez AE, EF, pour avoir le point O, par lequel on tirera à la base AB, la parallele OH, qui divisera en deux également le Trapezoïde proposé ABGF.

DEMONSTRATION.

Parce que la somme des deux Quarrez AE, EF, est double du Quarré EO, *par constr.* les trois Quarrez AE, EO, EF, seront en proportion arithmetique, aussi-bien que les trois Triangles semblables ABE, OHE, EGE, *par* 19. 6. c'est pourquoy l'excés du premier sur le second, sçavoir le Trapezoïde ABHO, sera égal à l'excés du second sur le troisiéme, ou au Trapezoïde OHGF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

On tire de ce Problême la maniere de diviser en deux également un Trapeze, comme ABCD, par une ligne droite parallele à un côté, comme au côté AB, sçavoir en décrivant *par Lem. prec.* sur ce côté AB le Trapezoïde ABGF égal au Trapeze proposé ABCD, & en achevant le reste comme il vient d'être enseigné. Mais cette Division se peut faire autrement & plus facilement, comme nous allons enseigner dans le

PROBLEME XVI.

Diviser un Trapeze en deux également, par une ligne droite parallele à un côté donné.

69. Fig. POur diviser en deux également le Trapeze ABCD, par une ligne droite parallele au côté AD, prolongez les deux autres côtez AB, CD, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point, comme E, & ayant tiré de l'angle C, la droite CF parallele

parallele à la Diagonale BD, divisez la ligne AF en deux également au point G, & cherchez entre les deux lignes AE, EG, une moyenne proportionnelle EH, pour avoir le point H, par lequel tirant au côté AD, la parallele HI, elle divisera le Trapeze proposé ABCD en deux parties égales. Planche 6. 69. Fig.

DEMONSTRATION.

En joignant les droites DF, DG, on connoîtra comme dans le *Probl.* 14. que le Triangle ADF est égal au Trapeze ABCD, & *par* 1. 6. que le Triangle ADG est la moitié du Triangle ADF, ou du Trapeze ABCD, à cause de la base AG moitié de la base AF, *par constr.* & parce que les trois lignes AE, EH, EG, sont proportionnelles, *par constr.* on connoîtra *par Corol.* 20. 6. que la premiere AE, est à la troisiéme EG, comme le Quarré de la premiere AE, au Quarré de la seconde EH, ou *par* 19. 6. comme le Triangle AED, à son semblable HEI, à cause des deux paralleles AD, HI, *par constr.* & comme la Raison des deux mêmes lignes AE, EG, est aussi égale à celle des deux Triangles AED, GED, il s'ensuit que le Triangle AED est au Triangle GED, comme le même Triangle AED, est au Triangle HEI, & que par consequent les deux Triangles GED, HEI, sont égaux entre eux: c'est pourquoy si de chacun on ôte le Triangle commun BCE, il restera le Trapeze BCDG égal au Trapeze BCHI, & si de chacun de ces deux Plans égaux on ôte le Pentagone commun BCIOG, il restera le Triangle DOI égal au Triangle GOH, dont chacun enfin étant ajoûté au Trapeze ADOH, on connoîtra que le Trapeze AHID est égal au Triangle ADG, ou à la moitié du Trapeze proposé ABCD, lequel ainsi est divisé en deux également par la droite HI. *Ce qu'il falloit démontrer.* Voyez *Probl.* 19.

SCOLIE.

On démontrera de la même façon, que si l'on fait la ligne AG égale à la troisiéme partie de la ligne AF, le Trapeze AHID sera égal à la troisiéme partie du proposé ABCD. C'est pourquoy si l'on divise en deux également le Trapeze BCIH, par la ligne KL parallele au côté HI, le Trapeze proposé ABCD se trouvera divisé en trois parties égales par les deux lignes droites HI, KL, paralleles entre elles & au côté AD. 70. Fig.

Il est évident *par* 38. 1. qu'à cause du Triangle ADF égal au Trapeze ABCD, si l'on divise la base AF en trois parties égales aux points G, H, & que de l'angle opposé D, on tire à ces deux points G, H, les droites DG, DH, le Trapeze ABCD, se trouvera divisé en trois parties égales par les deux lignes DG, DH, tirées du même angle D. 71. Fig.

Planche 6. 72. Fig. Il est évident aussi que si l'on prolonge les deux lignes DG, CF, jusqu'à ce qu'elles se coupent en un point, comme H, & qu'on divise en deux également toute la ligne GH par la droite BI, le Trapeze ABCD se trouvera divisé en trois parties égales par les deux lignes DG, BI, tirées des deux angles D, B, à cause du Triangle ADG, égal au tiers du Triangle ADF, ou du Trapeze ABCD, & du Triangle GBI égal à la moitié du Triangle GBH, ou du Trapeze GBCD, qui est égal aux deux tiers du proposé ABCD, &c.

73. Fig. Enfin il est évident, que si l'on prend la ligne AG égale à la quatriéme partie de la ligne AF, & la ligne GI égale au quart de la ligne GH, & qu'on divise le Trapeze BCDI en deux également par la droite CO, le Trapeze proposé ABCD se trouvera divisé en quatre parties égales par les trois lignes BI, CO, DG, tirées des trois angles B, C, D.

PROBLEME XVII.

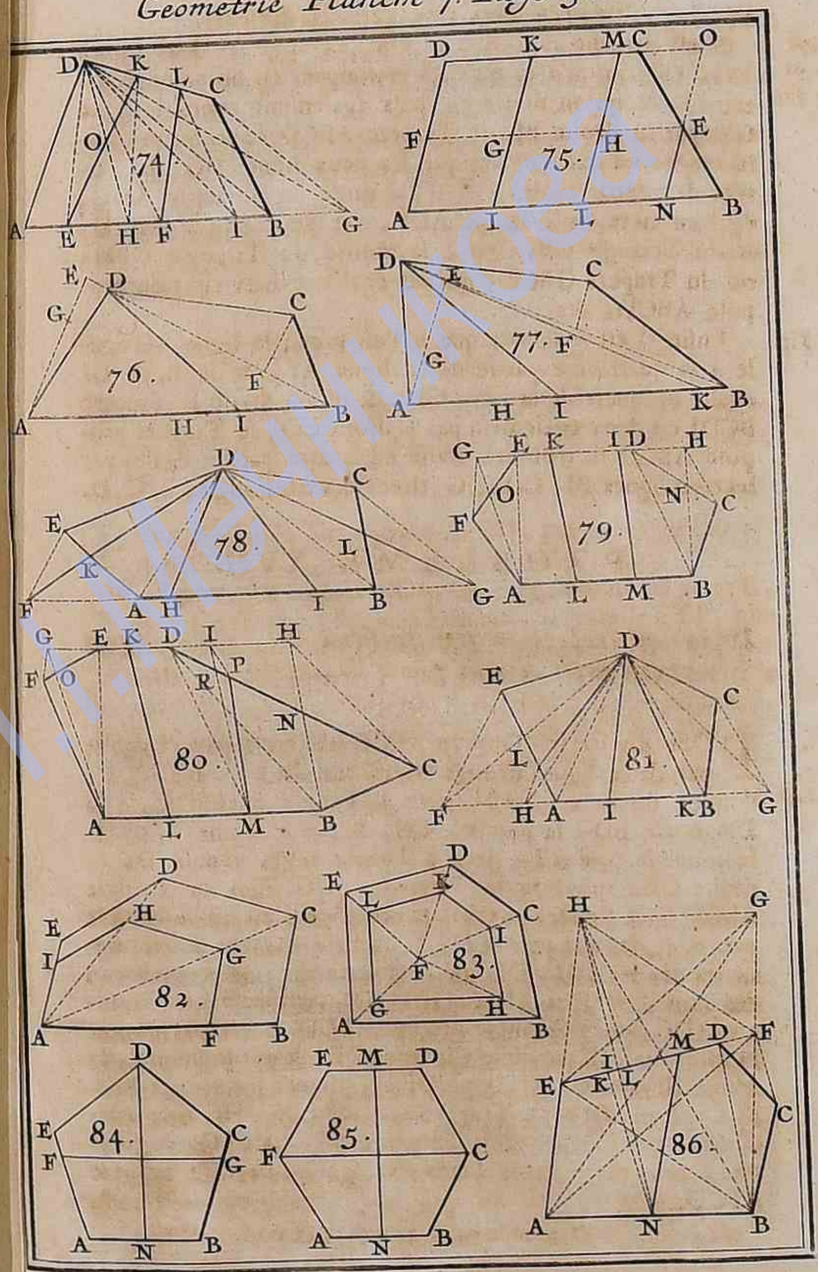
Diviser un Trapeze en trois parties égales, par des lignes droites tirées de deux points donnez sur un côté.

Planche 7. 74. Fig. Pour diviser le Trapeze ABCD en trois parties égales par deux lignes droites tirées des deux points E, F, donnez sur le côté AB, tirez de l'angle opposé C, à la Diagonale BD, la parallele CG, & par le point G, ou elle coupe le côté AB, tirez à l'autre angle opposé D, la droite DG, qui fera le Triangle ADG égal au Trapeze ABCD, *par Probl.* 14. C'est pourquoy si l'on divise en trois parties égales aux points H, I, la base AG, & qu'on mene les droites DH, DI, on connoîtra *par* 1. 6. que chacun des trois Triangles ADH, HDI, IDG, est le tiers du Triangle ADG, ou du Trapeze proposé ABCD. Tirez par le point H la droite HK parallele à la ligne DE, & par le point I, la droite IL parallele à la ligne DF, & joignez les droites EK, FL, qui diviseront le Trapeze proposé ABCD en trois parties égales, qui sont les trois Trapezes AK, EL, FC, de sorte que chacun de ces trois Plans sera égal au tiers du Trapeze ABCD.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes DE, HK, sont paralleles *par constr.* les deux Triangles HDK, HEK, seront égaux entre eux, *par* 38. 1. C'est pourquoy si de chacun on ôte le Triangle commun HOK, il restera le Triangle DOK égal au Triangle

Geometrie Planche 7. Page 52.



gle EOH, & si à chacun de ces deux Triangles égaux on Planche 7.
ajoûte le Trapeze AEOD, on connoîtra que le Trapeze 74 Fig.
AEKD est égal au Triangle ADH, c'est à dire au tiers du Trapeze ABCD. On démontrera de la même façon, que le Trapeze AFLD est égal au Triangle correspondant ADI, c'est à dire aux deux tiers du Trapeze ABCD. D'où il est aisé de conclure, que chacun des deux Trapezes EL, FC, est le tiers du même Trapeze ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XVIII.

Diviser un Trapezoïde en autant de parties égales qu'on voudra par des lignes paralleles à l'un des deux côtez qui ne sont pas paralleles.

Pour diviser le Trapezoïde ABCD, par exemple en trois 75. Fig.
parties égales, par des lignes paralleles au côté AD, divisez l'autre côté opposé BC en deux également au point E, & tirez par ce point E, à la base AB, la parallele EF, que vous diviserez en trois parties égales aux points G, H, par lesquels & par le point E, vous tirerez au côté AD, les trois paralleles IK, LM, NO, qui diviseront le Trapezoïde proposé ABCD en trois parties égales, qui sont les deux Parallelogrammes AK, IM, & le Trapezoïde LC, de sorte que chacun de ces trois Plans sera le tiers du Trapezoïde ABCD.

Demonstration.

Parce que les deux Triangles BEN, CEO, sont équiangles, & qu'ils ont le côté EB, égal au côté EC, *par constr.* ils seront égaux entre eux, *par 26. 1.* D'où il est aisé de conclure, que le Trapezoïde BCML est égal au Parallelogramme MLNO, & tout le Trapezoïde ABCD égal à tout le Parallelogramme ANOD: & comme chacun des trois Parallelogrammes AK, IM, LO, est le tiers du Parallelogramme total AO, ils seront aussi le tiers du Trapezoïde proposé ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XIX.

Diviser un Trapeze en deux parties, dont la Raison soit donnée.

Planche 7. 76. Fig. POur diviser le Trapeze ABCD, en deux parties, dont la Raison soit égale à celle des deux lignes données AH, HB, ayant tiré des deux angles A, C, les droites AE, CF, perpendiculaires à la Diagonale BD, cherchez à la somme des deux lignes données AH, HB, à la somme des deux perpendiculaires AE, CF, & à la ligne AH, une quatriéme proportionnelle AG, & aux trois AE, AG, AB, une quatriéme proportionnelle AI, pour avoir le point I, par lequel & par le point D, vous tirerez la droite DI, qui divisera le Trapeze proposé ABCD en deux parties ADI, BCDI, dont la Raison sera égale à celle des deux lignes données AH, HB.

DEMONSTRATION.

Parce que, *par* 1. 6. le Triangle ADI est au Triangle ADB, comme la base AI est à la base AB, ou *par constr.* comme AG, à AE: & de même parce que le Triangle ADB est au Triangle CDB, comme la hauteur AE, est à la hauteur CF, & qu'*en composant*, le Trapeze ABCD est au Triangle ADB, comme la somme des hauteurs AE, CF, à la hauteur AE, le Trapeze ABCD sera au Triangle ADI, comme la somme des hauteurs AE, CF, à la ligne AG, ou *par constr.* comme AB à AH, & *en divisant* le Trapeze BCDI sera au Triangle ADI, comme BH est à AH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

On tire de ce Problême une methode differente de celle du *Probl.* 11. pour diviser en deux également un Trapeze par une ligne droite tirée d'un angle donné, comme si l'on donne l'angle D, on divisera son côté opposé AB en deux également au point H, & on achevera le reste comme il vient d'être enseigné.

77. Fig. Si l'on vouloit diviser le Trapeze ABCD en trois parties égales autrement que par le Scolie du *Probl.* 16. il faudroit faire AH égale au tiers du côté opposé AB, pour avoir le Triangle ADI égal au tiers du Trapeze ABCD: & diviser de la même façon le Trapeze BCDI en deux également par la droite DK, &c.

PROBLEME XX.

Retrancher d'un Trapeze donné une figure égale à une figure donnée.

SI l'on reduit en Triangle la figure donnée, & aussi en Triangle le Trapeze proposé ABCD, & que de ce Triangle on retranche un Triangle ADI égal à la figure donnée, *par Probl.* 9. *Chap.* 1. le Problême sera resolu. Planche 7. 76. Fig.

Ou bien on cherchera la Raison qui est entre le Trapeze ABCD, & la figure donnée, ce qui est facile, & par le moyen du Problême precedent on divisera le Trapeze ABCD selon cette Raison.

CHAPITRE III.

De la Division des Polygones.

LA Division des Polygones sera facile par celle des Figures de trois & de quatre côtez, parce qu'un Polygone se peut aisément reduire en un Quadrilatere, & en un Triangle, comme vous allez voir dans ce

LEMME.

Reduire un Polygone proposé en Triangle.

POur reduire en Triangle le Pentagone ABCDE, en sorte qu'un des angles de ce Triangle soit par exemple en D, tirez de ce point D au point A, la Diagonale AD, & luy tirez par le point E, la parallele EF, qui rencontre icy le côté AB au point F, par lequel & par le point donné D, vous tirerez la droite DF, qui fera le Quadrilatere BCDF égal au Pentagone proposé ABCDE, à cause des deux Triangles égaux AKF, DKE, comme l'on connoîtra en ôtant le Triangle AKD de chacun des deux Triangles AED, AFD, qui sont égaux entre eux, *par* 37. 1. à cause des deux paralleles AD, EF. Il ne reste donc plus qu'à reduire en Triangle le Trapeze BCDF, ce qui se fera en tirant à sa Diagonale BD, par l'angle C, le plus proche, la parallele CG, & en joignant la droite DG, car ainsi à cause de l'égalité des deux Triangles CLD, BLG, on aura le Triangle FDG égal au Quadrilatere BCDF, & par consequent au Pentagone proposé ABCDE. *Ce qu'il falloit faire.* 78. Fig.

Planche 7. 78. Fig. Par là vous voyez que l'on peut aisément reduire en Triangle tel Polygone que l'on voudra, parce qu'on le peut toûjours reduire en une Figure qui ait un côté de moins, & cette nouvelle Figure en une autre qui ait aussi un côté de moins, & continuer ainsi à diminuer le nombre des côtez jusqu'à ce que l'on soit parvenu au Triangle. Comme dans cet exemple, de la Figure de cinq côtez ABCDE, nous en avons fait la Figure de quatre côtez BCDF, & de celle-cy la Figure de trois côtez, ou le Triangle FDG.

PROBLEME I.

Diviser un Polygone donné en trois parties égales, par deux lignes droites tirées d'un angle donné.

78. Fig. POur diviser le Pentagone ABCDE en trois parties égales, par deux lignes tirées de l'angle donné D, reduisez par le moyen du Lemme precedent, le Polygone proposé ABCDE au Triangle FDG, qui ait son sommet au point donné D, & ayant divisé sa base FG en trois parties égales aux points H, I, menez du point donné D, par les deux points H, I, les droites DH, DI, qui diviseront le Pentagone proposé ABCDE en trois parties égales, qui sont le Triangle HDI, & les deux Trapezes AEDH, BCDI, de sorte que chacun de ces trois Plans sera égal à la troisiéme partie du Polygone proposé ABCDE.

DEMONSTRATION.

Il est évident *par* 1. 6. que chacun des trois Triangles FDH, HDI, IDG, est le tiers du Triangle FDG, parce que leurs bases FH, HI, IG, sont chacune la troisiéme partie de la base FG, *par constr.* c'est pourquoy chacun de ces mêmes Triangles FDH, HDI, IDG, sera aussi le tiers du Polygone proposé ABCDE: & comme le Trapeze AEDH est égal au Triangle FDH, à cause du Triangle AKF égal au Triangle DKE, comme nous avons reconnu au *Lem. prec.* & que pareillement le Trapeze BCDI est égal au Triangle IDG, à cause du Triangle BLG égal au Triangle CLD, il s'ensuit que le Polygone proposé ABCDE est divisé en trois parties égales par les deux lignes DH, DI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

79. Fig. Lorsqu'un Polygone a deux côtez paralleles, comme l'Exagone ABCDEF, dont les deux côtez AB, DE, sont paralleles, on le pourra diviser en trois parties égales, & mêmes en davan-

davantage si l'on veut, en le reduisant au Quadrilatere ABHG, qui sera un Trapezoïde, dont par consequent on pourra faire la division *par Probl.* 7. *Chap.* 2. sçavoir en divisant chacun des deux côtez paralleles AB, GH, en trois parties égales aux points L, M, I, K, & en joignant les droites LK, MI, qui diviseront l'Exagone proposé ABCDEF en trois parties égales, qui sont le Trapezoïde LMIK, & les deux Pentagones ALKEF, BCDIM, qui sont égaux aux deux Trapezoïdes ALKG, BMIH, à cause du Triangle AOF égal au Triangle GOE, & du Triangle BNC égal au Triangle DNH, &c. Planche 7. 79. Fig.

Si l'un des deux points K, I, comme I, tombe au dehors du côté DE, le Trapezoïde LMIK, quoy qu'égal à une troisiéme partie de l'Exagone ABCDEF, ne pourra pas être pris pour l'une des trois parties qu'on cherche. Dans ce cas il faudra tirer par le point I, à la ligne MD, la parallele IP, qui donnera sur le côté CD, le point P, par lequel & par le point M, on tirera la droite MP, & au lieu du Trapezoïde LMIK, on prendra le Pentagone LMPDK, qui luy est égal à cause des deux Triangles égaux MRP, DRI, comme l'on connoîtra en ôtant le Triangle DRM, des deux Triangles DIM, DPM, qui sont égaux, *par* 37. 1. à cause des deux paralleles MD, PI, *par constr.* 80. Fig.

PROBLEME II.

Diviser un Polygone donné en autant de parties égales qu'on voudra, par des lignes droites tirées d'un angle donné.

POur diviser le Pentagone ABCDE, par exemple en quatre parties égales, par des lignes droites tirées de l'angle donné D, reduisez ce Polygone au Triangle FDG, dont le sommet est au point donné D, & ayant divisé la base FG en quatre parties égales aux points H, I, K, menez les droites DH, DI, DK qui feront les quatre Triangles FDH, HDI, IDK, KDG, dont chacun sera *par* 1. 6. la quatriéme partie du Triangle FDG, & par consequent du Pentagone proposé ABCDE; mais comme le point H tombe icy au dehors du côté AB, il faudra changer le Triangle HDI au Trapeze ALDI, que l'on trouvera en tirant la droite HL parallele à la ligne AD, &c. 81. Fig.

PRO-

PROBLEME III.

Diviser un Polygone donné en deux également, par des lignes droites paralleles à ses côtez.

Planche 7. 82. Fig. POur diviser le Pentagone ABCDE en deux parties égales, par des lignes droites paralleles aux trois côtez BC, CD, DE, reduisez ce Pentagone en Triangles, par les Diagonales AC, AD, & divisez *par Probl. 7. Chap. 2.* l'un de ces Triangles, comme ABC, en deux également par la droite FG parallele au côté BC, en sorte que le Triangle AFG soit égal au Trapeze FBCG, & alors si l'on tire par le point G, la droite GH parallele au côté CD, & par le point H, la droite HI parallele au côté DE, on connoîtra *par* 19. 6. que le Triangle AGH est aussi égal au Trapeze GCHD, & pareillement le Triangle AHI au Trapeze HDEI, & qu'ainsi le Problême se trouve resolu.

SCOLIE.

83. Fig. Au lieu de prendre l'angle A, pour reduire le Polygone proposé en Triangles, on peut prendre tel autre point qu'on voudra au dedans de la Figure, comme F, aprés quoy il ne faut que regarder la Figure pour comprendre le reste par ce qui a été fait auparavant, & de concevoir que par cette maniere on peut diviser le Polygone proposé en autant de parties égales qu'on voudra, & que cette même maniere se peut aussi appliquer aux Figures de trois & de quatre côtez.

PROBLEME IV.

Diviser un Polygone donné en deux également par une ligne droite tirée du milieu de l'un de ses côtez.

86. Fig. POur diviser en deux également le Pentagone ABCDE, par une ligne droite tirée du point N milieu du côté AB, il faut auparavant reduire le Polygone proposé en un Triangle qui ait le même côté AB, & le même Angle A, ce qui se peut faire par les principes du *Lem. prec.* comme vous allez voir.

Ayant tiré par l'angle C, à la Diagonale BD, la parallele CF, qui rencontre icy en F, le côté DE prolongé, menez la droite BF, & le Pentagone ABCDE se trouvera changé au Quadrilatere ABFE, qu'on reduira en Triangle, si l'on tire par

par le point E, à la Diagonale AF, la parallele EG, qui rencontre icy le côté BF prolongé en G, & qu'on joigne la droite AG, car le Triangle AGB sera égal au Trapeze proposé ABCDE : mais comme il n'a pas le même angle A, on tirera par le point F, à la Diagonale BE, la parallele FH, ou bien par le point G, au côté AB, la parallele GH, qui rencontre icy le côté AE prolongé au point H, par lequel on tirera au point B, la droite HB, & le Triangle AHB sera celuy qu'on cherche, & *par* 1. 6. il sera divisé en deux également par la droite HN, qui coupe le côté DE au point I. Planche 7. 86. Fig.

Cette preparation étant faite, tirez du point H, la droite HL perpendiculaire au côté DE, & du point N, la droite NK perpendiculaire au même côté DE, & cherchez aux trois lignes NK, HL, IE, une quatriéme proportionnelle IM, pour joindre la droite MN, qui divisera en deux également le Pentagone proposé ABCDE, de sorte que le Trapeze AEMN sera la moitié de ce Polygone.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre lignes NK, HL, IE, IM, sont proportionnelles, *par constr.* le Rectangle des deux extrémes NK, IM, sera égal au Rectangle des deux moyennes HL, IE, *par* 16. 6. c'est pourquoy les moitiez de ces deux Rectangles, qui *par* 41. 1. sont les deux Triangles IMN, IEH, seront égaux entre eux, à chacun desquels ajoûtant le Trapeze commun AEIN, on connoîtra que le Trapeze AEMN est égal au Triangle AHN, ou à la moitié du Pentagone ABCDE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Le Problême sera aisé à resoudre, lorsque le Polygone donné sera regulier : car s'il est *Impair*, c'est à dire composé d'un nombre impair de côtez, comme le Pentagone ABCDE, il n'y a qu'à tirer du point donné N, à l'angle opposé D, la droite DN, qui divisera le Pentagone proposé ABCDE, en deux parties égales, chacune étant composée d'un nombre égal d'angles & de côtez égaux les uns aux autres. Mais si le Polygone donné est *Pair*, c'est à dire composé d'un nombre pair de côtez, comme l'Exagone ABCDEF, il est évident qu'il n'y a qu'à tirer du milieu N du côté AB, par le milieu M du côté opposé & parallele DE, la droite MN, &c. 84. Fig. 85. Fig.

PRO-

PROBLEME V.

Diviser en deux également un Polygone donné, par une ligne droite parallele à un côté donné.

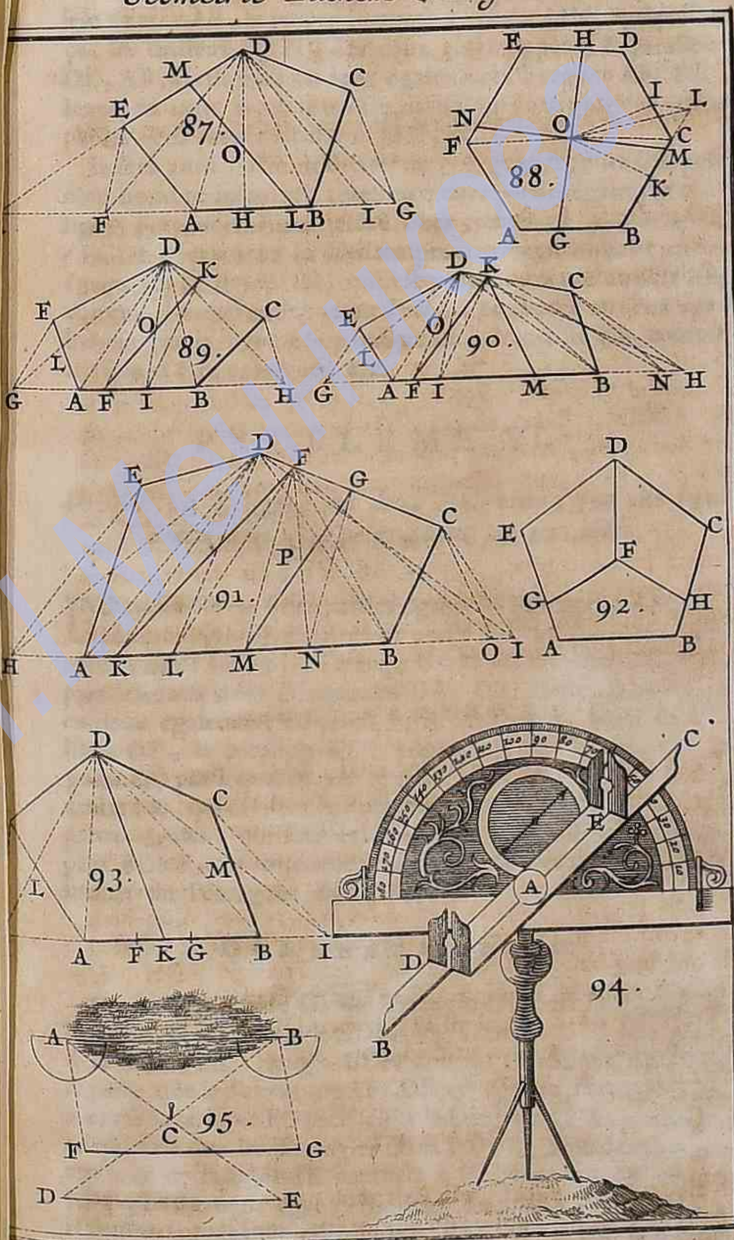
Planche 8. 87. Fig. POur diviser le Pentagone ABCDE en deux parties égales, par une ligne droite parallele au côté AE, reduisez le Polygone donné au Triangle FDG, ce qui se fait icy par les deux lignes EF, CG, paralleles aux deux Diagonales DA, DB, & ayant divisé en deux également au point H, la base FG, joignez la droite DH, pour avoir le Triangle FDH égal à la moitié du Triangle FDG, *par* 1. 6. ou du Polygone proposé ABCDE. Tirez du point D, la droite DI parallele au côté donné AE, & ayant prolongé les côtez AB, DE, jusqu'à ce qu'ils se coupent en un point, comme K, cherchez entre les lignes KH, KI une moyenne proportionnelle KL, & tirez par le point L, au côté donné AE, la parallele LM, qui divisera le Pentagone proposé ABCDE, en deux parties égales, qui sont le Trapeze ALME, & le Pentagone BCDML, de-sorte que l'un de ces deux Plans, comme le Trapeze ALME sera la moitié du Pentagone ABCDE.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux Triangles KDI, KML, sont équiangles, à cause des deux bases paralleles DI, LM, *par constr.* le Triangle KML, sera au Triangle KDI, comme le Quarré du côté KL, au Quarré du côté homologue KI, *par* 19. 6. ou comme la ligne KH, à la ligne KI, *par Coroll.* 20. 6. à cause des trois proportionnelles KH, KL, KI, *par constr.* ou bien encore comme le Triangle KDH, au Triangle KDI. D'où il suit que le Triangle KML est égal au Triangle KDH, & par consequent le Triangle DOM égal au Triangle LOH, & le Trapeze ALME, égal au Trapeze AHDE, ou au Triangle FDH, c'est à dire à la moitié du Polygone proposé ABCDE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Planche 7. 85. Fig. Il est évident que lorsque le Polygone proposé sera un Polygone regulier, composé d'un nombre pair de côtez, comme l'Exagone ABCDEF, on le divisera en deux également par une ligne parallele au côté AB, en tirant par les deux angles diametralement opposez, & également éloignez du côté donné AB, sçavoir F, C, la droite FC, qui se trouvera parallele



lele au côté AB, & perpendiculaire à la ligne MN, qui paſſant par les milieux M, N, des deux côtez oppoſez & paralleles DE, AB, diviſe auſſi en deux également l'Exagone ABCDE, lequel en cette façon ſe trouve diviſé en quatre parties égales par les deux perpendiculaires MN, FC. Planche 7. 85. Fig.

Il ſera auſſi facile de diviſer un Polygone regulier composé d'un nombre impair de côtez en quatre parties égales par deux lignes perpendiculaires entre elles, comme le Pentagone ABCDE, ſçavoir en le diviſant premierement en deux parties égales par la ligne DN, qui eſt perpendiculaire au côté AB, comme il a été enſeigné au *Probl.* 4 & encore en deux également par la ligne FG parallele au même côté AB, comme il vient d'être enſeigné, &c. 84. Fig.

PROBLEME VI.

Diviſer un Polygone en deux également, par une ligne droite tirée d'un point donné ſur un côté.

POur diviſer en deux parties égales le Pentagone ABCDE, par une ligne droite tirée du point F donné ſur le côté AB, aprés l'avoir reduit au Triangle GDH par les lignes EG, CH, paralleles aux deux Diagonales DA, DB, diviſez la baſe GH en deux également au point I, & tirez par ce point I, à la ligne DF, la parallele IK : pour avoir ſur le côté CD le point K, par lequel & par le point donné F, vous tirerez la droite FK, qui diviſera le Polygone propoſé ABCDE, en deux parties égales, qui ſont le Pentagone AFKDE, & le Trapeze BCKF, de ſorte que chacun de ces deux Plans ſera la moitié du Pentagone ABCDE. Planche 8. 89. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que la baſe GI du Triangle GDI eſt la moitié de la baſe GH du Triangle GDH, le Triangle GDI ſera *par* 1. 6. la moitié du Triangle GDH, ou du Pentagone ABCDE: & parce que le Pentagone AFKDE eſt égal au Triangle GDI, à cauſe de la ligne EG parallele à la Diagonale DA, *par conſtr.* ce qui fait que les Triangles GLA, DLE, ſont égaux entre eux : & de la ligne IK parallele à la Diagonale DF ce qui rend pareillement égaux les deux Triangles FOI, DOK ; il s'enſuit que le même Pentagone AFKDE eſt auſſi la moitié du propoſé ABCDE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Planche 8. 90. Fig.

SCOLIE.

Il est évident que pour diviser le Polygone proposé ABCDE en trois parties égales, on doit prendre la base GI, égale au tiers de la base GH, car ainsi le Pentagone AFKDE sera le tiers du proposé ABCDE, & par consequent le Trapeze BCKF en sera les deux tiers: c'est pourquoy si l'on reduit ce Trapeze BCKF au Triangle FKN, par la ligne CN parallele à la Diagonale KB, & qu'on divise la Base FN en deux également au point M, en joignant la droite KM, le Polygone proposé ABCDE se trouvera divisé en trois parties égales par les deux lignes KF, KM, parce que la ligne KM divise le Trapeze BCKF en deux également, puisque *par* 1. 6. le Triangle FKM est égal à la moitié du Triangle FKN égal au Trapeze BCKF.

88. Fig. Il est évident aussi que pour diviser en deux également un Polygone regulier composé d'un nombre pair de côtez, comme l'Exagone ABCDEF, par une ligne droite tirée du point G donné sur le côté AB; il n'y a qu'à prendre sur le côté opposé & parallele DE, la partie DH égale à la partie AG, & joindre la droite GH, qui divisera l'Exagone proposé ABCDEF en deux parties égales, qui sont les deux Pentagones AGHEF, BGHDC, que l'on peut par le moyen du *Probl.* 4. diviser chacun en deux également par une ligne droite tirée du milieu O du côté commun GH, lequel milieu O est le centre de l'Exagone, pour avoir ainsi le Polygone divisé en quatre parties égales par des lignes droites tirées de son centre. Mais cette division se peut faire plus facilement en cette sorte.

Pour diviser en deux également le Pentagone BGHDC, prenez sur les côtez BC, CD, les deux lignes BK, CI, égales chacune à la ligne AG, ou DH, ou bien les deux parties CK, DI, égales chacune à la partie BG, ou EH, & tirez les droites OI, OK, qui diviseront le Pentagone BGHDC en trois parties égales: cest pourquoy pour le diviser en deux également, il n'y a qu'à diviser en deux également celle du milieu, c'est à dire le Trapeze KOIC, en le reduisant au Triangle KOL, par la ligne IL parallele à la Diagonale OC, & en divisant la base KL en deux également au point M, pour joindre la droite OM, qui étant prolongée vers N divisera chacun des deux Pentagones AGHEF, BGHDC, en deux parties égales, & ainsi l'Exagone proposé ABCDEF se trouvera divisé en quatre parties égales par des lignes droites qui se coupent au centre O.

PRO-

PROBLEME VII.

Diviser un Polygone en trois parties égales, par deux lignes droites tirées de deux points donnez sur un côté.

Pour diviser en trois parties égales le Pentagone ABCDE, par deux lignes droites tirées des deux points K, M, donnez sur le côté AB, on le reduira au Triangle HDI, par les deux lignes EH, CI, paralleles aux deux Diagonales DA, DB, & ayant pris la ligne HL égale à la troisiéme partie de la base HI, on tirera par le point L, à la ligne DK, la parallele LF, & par le point F au point donné K, la droite KF, qui retranchera le Pentagone AKFDE, égal au Triangle HDL, ou à la troisiéme partie du Polygone proposé ABCDE, comme il a été démontré au *Probl.* 6. il ne reste donc plus qu'à diviser le Trapeze BKFC en deux également, par une ligne droite tirée de l'autre point donné M, ce qui se fera de la même façon, comme vous allez voir. Ayant reduit le Trapeze BKFC au Triangle KFO, par la ligne CO parallele à la Diagonale DB, divisez la base KO en deux également au point N, & ayant tiré par le point N la droite NG parallele à la ligne FM, menez la droite MG, qui retranchera le Trapeze KFGM égal au Triangle KFN, ou à la moitié du Trapeze KFCB, à cause du Triangle FPG égal au Triangle MPN. D'où il suit que chacun des deux Trapezes KFGM, MGCB, est le tiers du Polygone proposé ABCDE, & qu'ainsi ce Polygone se trouve divisé en trois parties égales, par les lignes KF, MG, tirées des deux points donnez K, M. *Ce qu'il falloit faire.* Planche 8. 91. Fig.

PROBLEME VIII.

Diviser un Pentagone regulier en trois parties égales, par autant de lignes droites tirées de son centre.

Pour diviser en trois parties égales le Pentagone regulier ABCDE, par trois lignes droites tirées de son centre F, prenez sur chacun des deux côtez BC, AE, leurs troisiémes parties AG, BH, & menez les droites FD, FG, FH, qui diviseront le Pentagone proposé ABCDE en trois parties égales, comme l'on connoîtra en divisant tous les côtez du Pentagone en trois également, & en tirant du centre F par tous les points de division, & aussi par tous les angles du Pentagone, autant de lignes droites, qui formeront quinze petits Triangles 92. Fig.

égaux,

Planche 8. 92. Fig. égaux *par* 38. 1. dont chacun des trois Plans terminez par les trois lignes FD, FG, FH, en comprendra cinq.

PROBLEME IX.

Diviser un Polygone en deux parties, dont la Raison soit donnée, par une ligne droite tirée d'un angle donné.

93. Fig. POur diviser le Pentagone ABCDE en deux parties, dont la Raison soit égale à celle des deux lignes données AF, FG, par une ligne droite tirée de l'angle donné D, reduisez le Polygone proposé au Triangle HDI, dont le sommet soit à l'angle donné D, & ayant coupé la base HI en K, en sorte que les quatre lignes AG, AF, HI, HK, soient proportionnelles, menez la droite DK, qui divisera le Polygone proposé ABCDE en deux parties AKDE, BKDC, proportionnelles aux deux lignes données AF, FG.

DEMONSTRATION.

Parce que les quatre lignes AG, AF, HI, HK, sont proportionnelles, *par constr.* on connoîtra *en divisant* que les quatre FG, AF, KI, KH, sont aussi proportionnelles: c'est pourquoy si à la place des deux dernieres KI, KH, on met les deux Triangles KDI, KDH, qui sont en même Raison, *par* 1. 6. ou bien si à la place de ces deux Triangles on met les deux Trapezes BKDC, AKDE, qui leur sont égaux, à cause du Triangle BMI égal au Triangle CMD, & du Triangle ALH égal au Triangle DLE, on connoîtra que la Raison des deux lignes FG, AF, est égale à celle des deux Trapezes BKDC, AKDE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SECON-

SECONDE PARTIE
DE LA LONGIMETRIE.

LA *Longimetrie* est ainsi appellée, parce qu'elle enseigne à mesurer sur la terre les longueurs, ou les lignes droites, qui peuvent être *Accessibles* & *Inaccessibles*, *Horizontales*, *Verticales*, & *Inclinées*: les *Accessibles* étant celles, dont on peut approcher par l'une de leurs extremitez, comme la largeur d'une Riviere: les *Inaccessibles*, celles dont les extremitez ne peuvent être vûës que de loin, telle qu'est ordinairement la distance de deux Bastions: les *Horizontales*, celles qui sont couchées sur le Plan de l'Horizon, comme celle qu'on imagineroit dans une Plaine: les *Verticales*, celles qui sont élevées à plomb, ou abaissées au dessous de l'Horizon, comme les hauteurs & les profondeurs, qui peuvent aussi être accessibles & inaccessibles: & les *Inclinées*, celles qui sont penchantes, ou élevées à angles obliques & inégaux sur le Plan de l'Horizon, comme le penchant d'une colline.

Toutes ces lignes se peuvent mesurer en deux manieres, sçavoir par le calcul, ou sans le calcul. Quand on les veut mesurer par le calcul, le moyen qui me semble le meilleur, est de le faire par la Trigonometrie en mesurant les angles visuels par le moyen du *Demi-cercle*, ou *Graphometre*, dont nous avons parlé dans nôtre *Introduction aux Mathematiques*, & qui est assez commun, sans qu'il soit besoin d'en parler icy davantage; ainsi je me contenteray de vous en donner icy la figure, où vous voyez que la ligne BC qui passe par le centre A de l'Instrument, est celle que nous avons appellée *Ligne de foy*, qui sert pour montrer les degrez des angles visuels sur le bord de l'Instrument, & à laquelle répondent les fentes des deux Pinnules D, E, élevées à angles droits sur l'*Alidade*, ou Regle Mobile BC, par lesquelles on vise les objets éloignez, pour mesurer la quantité des angles visuels. Planche 8. 94. Fig.

Ou bien on se servira de l'*Instrument Universel*, où les degrez du Demi-cercle sont aussi marquez. Mais quand on veut mesurer une Ligne sans calcul, on n'a que faire de Planche 9. 96. Fig.

Planche 9. 96. Fig. connoître les angles visuels, que l'on ne peut jamais sçavoir au vray, ce qui fait qu'en travaillant par les angles: on manque toûjours un peu, & il est dangereux de manquer beaucoup, quand les angles visuels sont bien aigus, ou bien obtus. Dans ce cas il est tres-avantageux de se servir de l'*Instrument Universel*, qui est un Cadre rectangulaire de Metal, ou de quelqu'autre matiere solide, comme ABCD, dans lequel on y peut mettre & ôter quand on veut, une ou plusieurs pieces de Carton, pour y travailler dessus, en y tirant avec une pointe de lignes droites qui representent les Rayons visuels, le long de la Ligne de foy EO de l'Alidade FO, qui est mobile non seulement autour de son centre O, mais encore le long de la ligne OH, que nous appellerons *Ligne de conduite*, au dessous de laquelle il y a deux *Pinnules*, ou Visieres semblables aux deux E, G, de l'Alidade EO, dont la Ligne de foy contient un certain nombre de parties égales & semblables à celle de la Ligne de conduite OH, lesquelles representent des Pieds, des Toises, &c. Comme nous avons publié autrefois un Traité particulier touchant la construction & l'usage de l'Instrument Universel, je ne m'arrêteray pas ici en parler davantage; je diray seulement que cet instrument contient sur ses trois côtez AD, CD, BC, les degrez du Demi-cercle, dont le centre I est environ au milieu de la Ligne de conduite OH, sur lequel on avance le centre O de l'Alidade, quand on veut mesurer les angles visuels.

PROBLEME I.

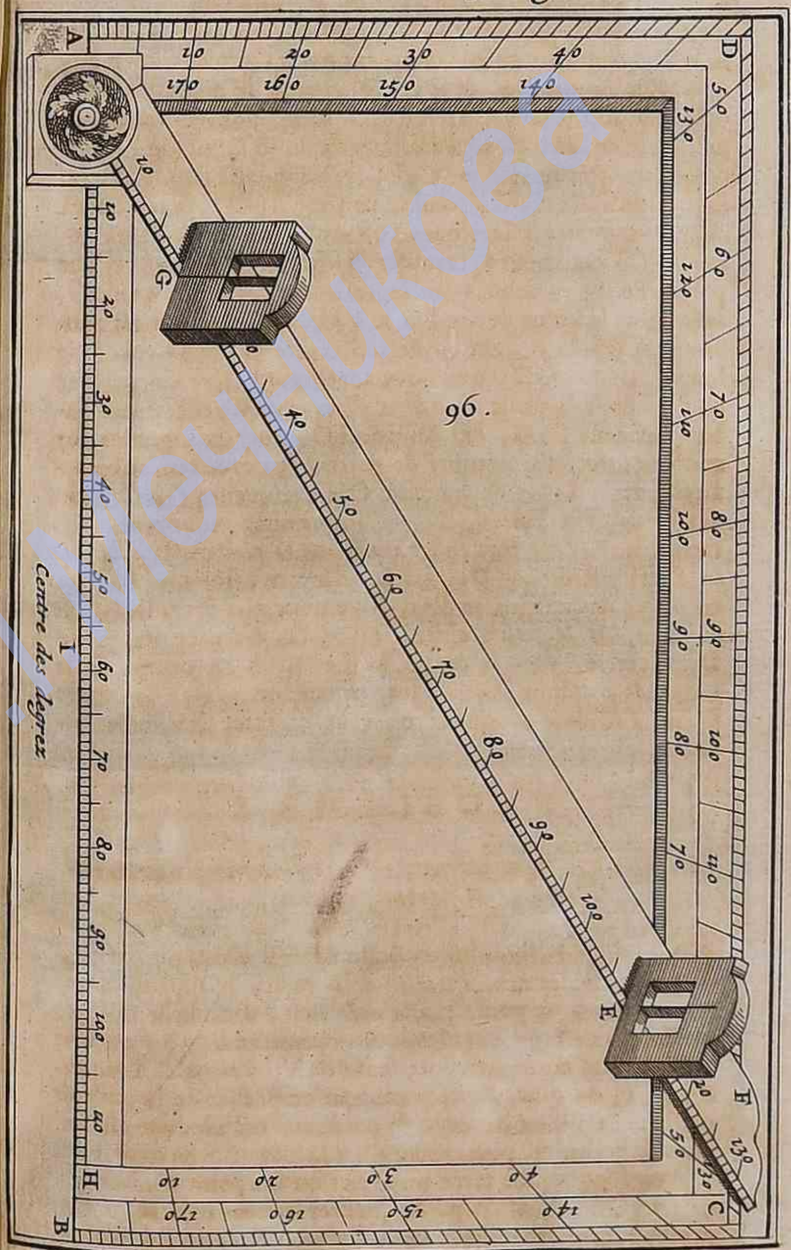
Mesurer une ligne horizontale accessible par ses deux extremitez.

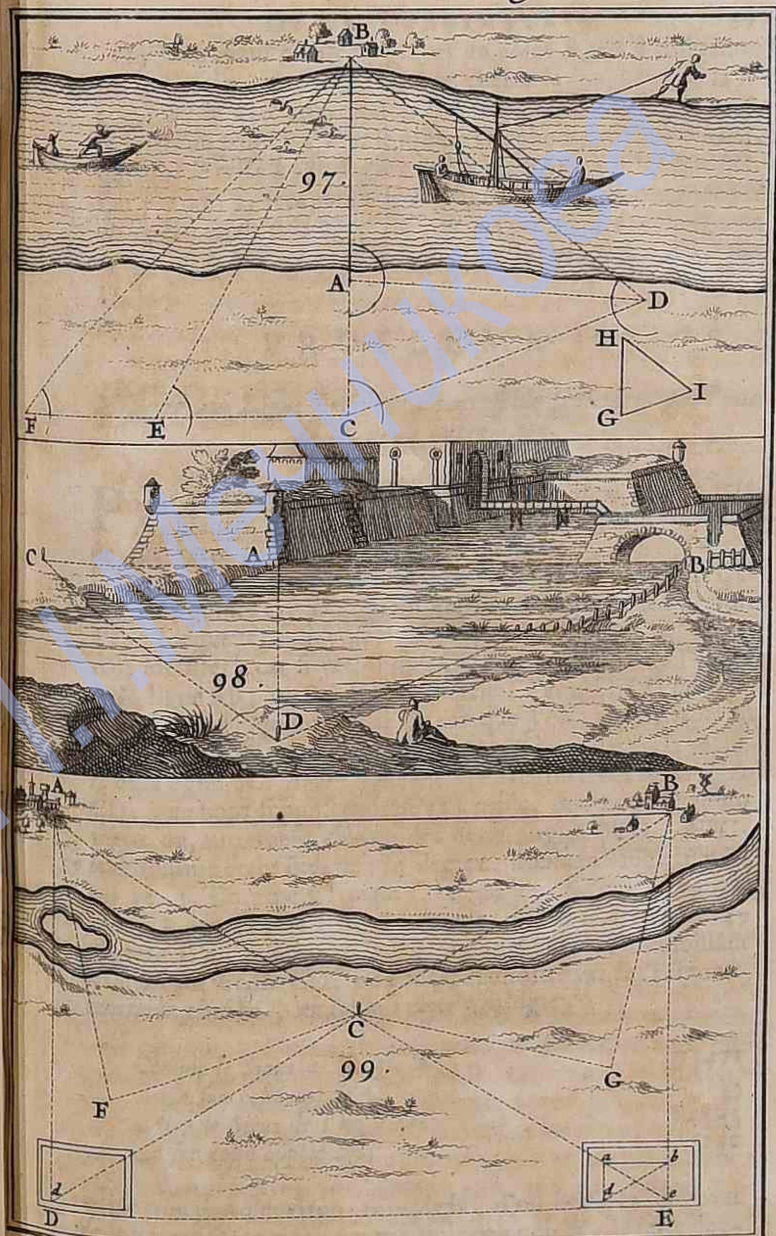
Planche 8. 95. Fig. QUoique la ligne horizontale AB soit accessible par chacune de ses deux extremitez A & B, je suppose neanmoins qu'on ne puisse pas la parcourir, à cause de quelque precipice qui seroit entre les deux extremitez A & B, ou pour quelqu'autre empêchement, comme s'il y avoit de l'eau entre-deux, ou quelqu'autre chose qui empêchât de la pouvoir mesurer actuellement avec un cordeau, ou avec une chaîne. Dans ce cas on en pourra connoître la longueur en cette sorte.

Ayant planté sur terre un piquet en un point commode, comme C, duquel on puisse mesurer les deux lignes CA, CB, prolongez ces deux lignes CA, CB, en D & en E, en sorte que la ligne CD soit égale à l'une des deux CA, CB, comme à la ligne CA, & l'autre ligne CE à l'autre ligne CB, & mesurez la longueur de la ligne DE, qui *par* 4. 1. sera égale à celle de la proposée AB.

Ou

Geometrie Planche 9. Page 66.




B
97.
A
D
H
I
G
F
E
C
C
A
B
98.
D
A
B
C
99.
F
G
D
E
a
b
d
e
d

Ou bien ayant planté un piquet au point F pris à discretion sur le terrain, mesurez avec une chaîne la longueur de la ligne AF, & avec un Graphometre la quantité de l'angle BAF, & faites au point B, avec le même Graphometre l'angle ABG, qui soit le reste à 180 degrez de l'angle BAF, par la ligne BG, qui *par* 28. 1. sera parallele à la ligne AF : c'est pourquoy si on la fait égale à la ligne AF, & qu'on mesure la longueur de la ligne FG, on aura celle de la proposée AB, *par* 33. 1. Planche 8. 95. Fig.

PROBLEME II.

Mesurer une Ligne horizontale accessible seulement par l'une de ses deux extremitez.

POur mesurer la ligne AB, que je suppose accessible vers A, plantez en ligne droite un piquet en un point commode sur terre, comme en C, & un autre en quelqu'autre lieu commode, comme en D, en sorte que la distance CD des deux points C, D, qu'on appelle *Points de station*, soit d'une longueur considerable par rapport à la ligne BC qu'on veut mesurer, car si cette ligne CD étoit bien petite à l'égard de la ligne AB, ou BC qu'on cherche, l'angle BDC deviendroit si grand, qu'une petite erreur que l'on commettroit en le mesurant, en pourroit causer une considerable dans la mesure de la ligne BC. Ayant donc mesuré avec un cordeau la ligne CD, que nous supposerons de 125 pieds, & avec un Graphometre ou autrement chacun des deux angles BCD, BDC, leur somme étant ôtée de 180 degrez, donnera l'angle CBD, *par* 32. 1. Comme si l'angle C est de 73 degrez, & l'angle D de 58 degrez, le troisiéme angle CBD se trouvera de 49 degrez. C'est pourquoy dans le Triangle BCD, connoissant les angles & le côté CD, on pourra connoître par la Trigonometrie le côté BC, en faisant cette Analogie, Planche 10. 97. Fig.

Comme le Sinus de l'angle B,	75471
A son costé opposé CD;	125
Ainsi le Sinus de l'angle D,	84805
A son costé opposé BC.	140

qui se trouvera d'environ 140 pieds, d'où ôtant la longueur de la ligne AC, qui soit par exemple de 52 pieds, le reste donnera 82 pieds pour la quantité de la ligne proposée AB.

Planche 10. 97. Fig.

SCOLIE.

Quand vous n'aurez point de Tables de Sinus, vous pourrez racourcir le grand Triangle BCD, & luy en faire un semblable sur le papier en cette sorte. Tirez à part la ligne GI de 125 parties égales prises sur une échelle, pour les 125 pieds de la ligne CD, & faites à son extremité G, l'angle IGH égal à l'angle BCD, & à son extremité I, l'angle GIH égal à l'angle CDB, pour avoir le petit Triangle GHI semblable au grand BCD, de sorte que le côté GH representera la ligne BC, c'est pourquoy si l'on porte ce côté GH sur la même échelle avec un Compas, le nombre des parties égales qui se trouveront comprises entre les pointes du Compas, donnera le nombre des pieds de la ligne proposée BC.

Comme il est libre de faire au point C tel angle qu'on voudra, on y pourra faire un angle de 60 degrez par la ligne CD, sur laquelle on choisira un point, comme D, en sorte que l'angle BDC soit aussi de 60 degrez, & alors il arrivera que l'angle CBD sera pareillement de 60 degrez, & que *par 6. 1.* le Triangle BCD sera équilateral ; ainsi il n'y aura qu'à mesurer avec un cordeau la longueur de la ligne CD, pour avoir celle de sa proposée BC.

Ou bien on fera au point C un angle droit par la ligne CF, sur laquelle on choisira un point, comme F, en sorte que l'angle CFB soit demi-droit ou de 45 degrez, auquel cas l'angle CBF sera aussi de 45 degrez, *par 32. 1.* & *par 6. 1.* le Triangle rectangle BCF sera isoscéle, ainsi en mesurant avec un cordeau la longueur de la ligne CF, on aura celle de la proposée BC.

Si le terrain ne vous permet pas d'aller en F, cherchez sur la même ligne CF le point E, en sorte que l'angle CEB soit de 60 degrez, & alors la ligne EB sera double de la ligne EC, *par Prop. 5. Chap. 3. L. 1. Trigon.* C'est pourquoy si l'on mesure avec un cordeau la ligne EC, son double donnera la ligne EB, dont le quarré étant diminué du quarré EC, le reste sera le quarré BC ; *par 47. 1.* & la Racine quarrée de ce reste donnera par consequent la ligne BC qu'on cherche.

Enfin s'il n'est pas commode de faire au point C, avec la ligne BC, un angle de 60, ni de 90 degrez, on le fera tel que l'on voudra, comme de 73 degrez, en sorte que l'angle BCD soit de 73 degrez, & alors on cherchera sur la ligne CD, un point, comme D, en sorte que l'angle CDB soit de 53. 30', sçavoir le complement de la moitié du precedent BCD, car il est aisé à démontrer que dans ce cas la ligne CD sera égale à la proposée BC, & qu'ainsi en mesurant avec un cordeau la ligne CD, on aura la ligne BC qu'on demande.

Mais

Mais la ligne proposée AB, se peut trouver immediatement, Planche 10. 97. Fig.
en faisant à son extremité A, l'angle BAD d'une grandeur volontaire, par la ligne AD d'une longueur aussi volontaire, & en mesurant l'angle ADB, pour faire dans le Triangle ADB, où l'on connoît outre les angles, le côté AD, cette Analogie,

Comme le Sinus de l'angle B,
A son costé opposé AD ;
Ainsi le Sinus de l'angle D,
A son costé opposé AB.

PROBLEME III.

Mesurer une ligne Horizontale inaccessible.

Pour mesurer la ligne inaccessible AB, plantez deux piquets aux deux points C, D, pris à discretion sur le terrain ; en sorte que, si cela se peut, l'un de ces deux points, comme C, soit en ligne droite avec la Ligne à mesurer AB, & ayant connu avec un cordeau la ligne CD, qui doit être d'une longueur raisonnable & proportionnée à la Ligne à mesurer AB, & avec un Graphometre les angles C, CDA, ADB, ôtez de 180 degrez la somme des deux C, CDA, pour avoir l'angle CAD, & de cet angle CAD l'angle ADB, pour avoir l'angle B. Ainsi dans le Triangle CAD, connoissant les angles & le côté CD, on pourra connoître le côté AD, par cette Analogie, 98. Fig.

Comme le Sinus de l'angle A,
A son costé opposé CD ;
Ainsi le Sinus de l'angle C,
A son costé opposé AD.

& dans le Triangle ADB, connoissant outre les angles le côté AD, on pourra connoître la Ligne AB qu'on cherche, en faisant cette Analogie,

Comme le Sinus de l'angle B,
A son costé opposé AD ;
Ainsi le Sinus de l'angle D,
A son costé opposé AB.

Mais si le point C de station ne peut pas être en ligne droite avec la ligne à mesurer AB, prolongez chacune des deux lignes AC, BC, en E & en D, en sorte que les deux lignes CD, CE, soient chacune d'une grandeur connuë, & me- 99. Fig.

Planche 10. 99. Fig. & mesurez les deux angles ADB, AEB, lesquels étant ôtez de l'angle ACB, donneront les angles CAD, CBE, *par* 32. 1. & dans le Triangle ADC, on pourra connoître le côté AC, par cette Analogie,

Comme le Sinus de l'angle A,
A son costé opposé CD;
Ainsi le Sinus de l'angle D,
A son costé opposé AC.

& pareillement dans le Triangle BCE, on trouvera le côté BC, par cette Analogie,

Comme le Sinus de l'angle B,
A son costé opposé CE;
Ainsi le Sinus de l'angle E,
A son costé opposé BC.

Ainsi dans le Triangle ACB, on connoîtra les deux côtez AC, BC, & l'angle compris ACB, ce qui suffit pour pouvoir connoître les deux autres angles A & B, & le troisiéme côté, ou la ligne AB qu'on cherche.

SCOLIE.

On n'aura pas besoin de Trigonometrie, si sur les deux lignes AC, BC, prolongées on prend les deux points D, E, en sorte que chacun des deux angles ADB, AEB, soit la moitié de l'angle ACB, parce que dans ce cas la Ligne AB qu'on cherche sera égale à la ligne DE, dont la longueur peut être facilement connuë avec un cordeau, comme il est aisé à démontrer.

Si le terrain ne vous permet pas de prolonger les lignes AC, BC, faites au point C, avec la ligne AC, un angle tel qu'il vous plaira par la ligne CF d'une longueur arbitraire, & mesurez l'angle F, afin que dans le Triangle ACF, où l'on connoît outre les angles le côté CF, on puisse connoître le côté AC. Pareillement faites au même point C, avec la ligne BC, un angle à volonté par la ligne CG d'une grandeur connuë, & mesurez l'angle G, afin que dans le Triangle BCG, où l'on connoît outre les angles le côté CG, on puisse connoître le côté BC. Aprés quoy on pourra connoître la ligne AB dans le Triangle ABC, où l'on connoît trois choses, sçavoir les deux côtez AC, BC, & l'angle compris ACB.

La même Ligne inaccessible AB se peut mesurer encore autrement, comme vous allez voir. Ayant choisi sur terre les deux points de station D, E, dont la distance DE puisse être con-

connuë, mesurez les angles ADB, EDB, AEB, AED, & ôtez de 180 degrez la somme des trois ADB, BDE, AED, pour avoir l'angle DAE, & pareillement les trois AEB, AED, BDE, pour avoir l'angle DBE. Aprés quoy dans le Triangle ADE, connoissant les angles & le côté DE, on pourra connoître le côté AD; & dans le Triangle DEB, connoissant les angles & le côté DE, on pourra connoître le côté BD; & enfin dans le Triangle ADB, connoissant les côtez AD, BD, & l'angle compris ADB, on pourra connoître la ligne AB qu'on cherche. Ou bien dans le Triangle ADE, connoissant les angles & le côté DE, on pourra connoître le côté AE: & dans le Triangle DBE, connoissant les angles & le côté DE, on pourra connoître le côté BE: & enfin dans le Triangle ABE, connoissant les deux côtez AE, BE, & l'angle compris AEB, on pourra connoître le troisiéme côté AB. Planche 10. 99. Fig.

Cette Ligne se peut mesurer tres-facilement par le moyen de l'Instrument Universel en cette sorte. Prenez à volonté sur le terrain deux points de station éloignez entre eux d'une distance considerable & si proches de la Ligne à mesurer AB, que les Rayons visuels se puissent couper sur le Plan de l'Instrument Universel; comme D, E, dont la distance DE se doit mesurer bien exactement avec un cordeau, ou autrement; nous la supposerons de 150 toises. Ayant arrêté le centre de l'Alidade & de l'Instrument Universel en un point commode de la ligne de conduite, comme en *d*, appliquez l'Instrument en sorte que le point *d* réponde perpendiculairement sur le point D, & la ligne de conduite sur la ligne DE, ce qui sera facile en visant par les Pinnules d'en bas; & ayant tourné l'Alidade vers les deux extremitez A, B, de la ligne à mesurer AB, tirez sur la surface de l'Instrument le long de la Ligne de foy les deux Rayons visuels *d*A, *d*B.

Aprés cela parce que nous avons supposé la ligne DE de 150 toises, avancez le centre de l'Alidade de 150 parties égales de la Ligne de conduite, depuis *d* en *e*, & appliquez de nouveau l'Instrument Universel, en sorte que ce point *e* réponde perpendiculairement au point E, & la Ligne de conduite *de* sur la ligne DE, pour tourner comme auparavant, l'Alidade vers les extremitez A, B, de la ligne à mesurer AB, & tirer de la même façon sur la Surface de l'Instrument le long de la Ligne de foy, les deux lignes ou Rayons visuels *ea*, *eb*, qui coupent icy les deux premiers aux points *a*, *b*, dont la distance *ab* étant portée sur la ligne de conduite, donnera par le nombre des parties égales qu'elle comprendra, le nombre des toises de la ligne proposée AB.

On peut aussi connoître en même temps la longueur des lignes DA, DB, EA, EB, en appliquant l'Alidade sur les lignes *da*, *db*, *ea*, *eb*, car ainsi on trouvera sur les divisions de la

Planche 10. 99. Fig. Ligne de foy le nombre des toises que ces lignes comprennent. Ainsi vous voyez que par le moyen de l'Instrument Universel on peut mesurer cinq lignes à la fois avec toute l'exactitude possible.

Planche 11. 100. Fig. Il peut arriver que d'un même point de station, on ne pourra pas voir les deux extremitez de la ligne à mesurer AB, comme icy on ne peut voir du point C que l'extremité A, & du point D que l'extremité B, à cause d'un Ravelin qui se rencontre entre-deux. Dans ce cas ayant mesuré avec un Demi-cercle les angles ACD, CDB, & avec un cordeau la ligne CD, on fera à volonté au point C, avec la ligne AC, l'angle ACE, par la ligne CE d'une grandeur volontaire, afin qu'ayant mesuré l'angle E, on puisse connoître dans le Triangle AEC, le côté AC, & dans le Triangle ACD, le côté AD, & l'angle CDA, lequel étant ôté de l'angle CDB, il restera l'angle ADB. Enfin faites au point D, avec la ligne BD, l'angle à discretion BDF, par la ligne DF d'une longueur arbitraire, afin qu'ayant mesuré l'angle F, vous puissiez connoître par supputation dans le Triangle BDF, le côté BD, & ensuite dans le Triangle ADB, la ligne AB qu'on cherche.

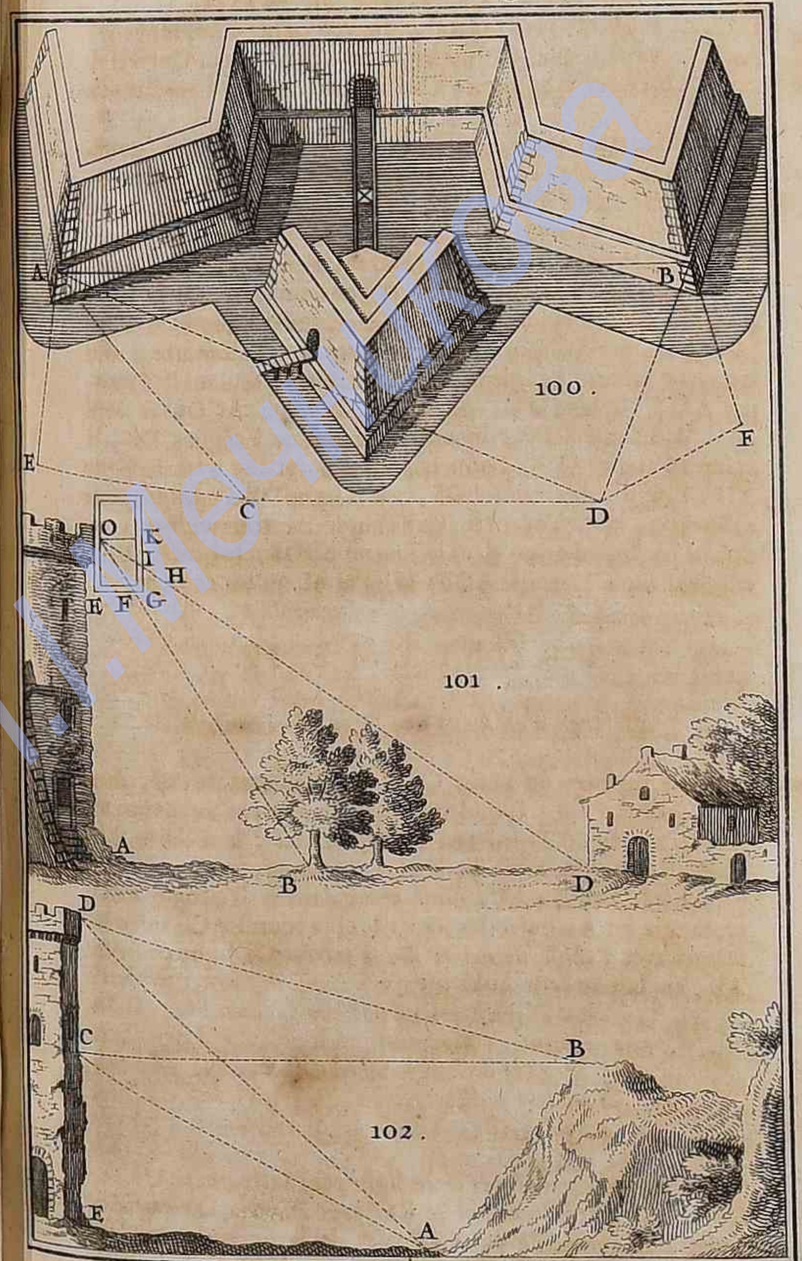
PROBLEME IV.

Mesurer d'en haut une ligne Horizontale.

101. Fig. Pour mesurer du point C la Ligne horizontale AB, dont l'extremité A répond perpendiculairement au point C, mesurez avec un Demi-cercle l'angle ACB, & à l'aide d'un cordeau que vous ferez pendre en bas du point C, avec un plomb, la hauteur AC, pour avoir dans le Triangle ABC, rectangle en A, outre les angles le côté connu AC, qui nous servira avec l'angle visuel ACB, à trouver la ligne proposée AB, en faisant cette Analogie,

Comme le Sinus Total,
A la Tangente de l'angle visuel ACB;
Ainsi la hauteur AC,
A la ligne AB.

Si vous voulez mesurer cette ligne par l'Instrument Universel, il faut placer le centre de l'Alidade au point O éloigné du point E d'autant de parties égales de la ligne de conduite que la hauteur AC contiendra de pieds, aprés quoy on posera le point O au point C, en sorte que la ligne de foy EO soit à plomb, & l'Instrument demeurant dans cette situation, on tournera l'Alidade vers l'extremité B de



de la Ligne à meſurer AB, pour tirer ſur la Surface de l'Inſtrument le long de la ligne de foy la droite OF, qui déterminera la ligne EF, dont la longueur étant portée ſur la ligne de conduite, donnera dans le nombre des parties égales qu'elle comprendra, le nombre des pieds de la Ligne propoſée AB. Planche 11. Fig. 101.

Scolie.

Il peut arriver que le Rayon viſuel coupera le côté EG au dehors de l'Inſtrument, comme icy au point H, au de là du point G, pour la meſure de la ligne AD; Dans ce cas, comme l'on ne peut pas porter la longueur de la ligne EH ſur la ligne de conduite, pour ſçavoir le nombre des parties égales qu'elle comprend, parce qu'on n'a pas le point de Section H, on trouvera ce nombre par la Regle de Trois directe en cette ſorte.

Tirez par penſée du point O, la ligne OK parallele au coté EG, & ayant ôté le nombre des parties égales de la ligne GI, de celuy de la ligne GK, ou EC, vous aurez le nombre des parties égales de la ligne IK: & parce que nous ſçavons celuy de la ligne CK, ou EG, en tranſportant ſa longueur ſur la ligne de conduite, on fera dans les Triangles ſemblables OKI, OFH, ce raiſonnement, ſi le nombre des parties égales de la ligne IK, donne tant pour le nombre des parties égales de la ligne OK, combien donnera le nombre des parties égales de la ligne CE? & l'on trouvera le nombre des parties égales de la ligne EH, ou le nombre des pieds de la ligne AD qu'on cherche.

Nous avons ſuppoſé que l'extremité A de la ligne à meſurer répondoit perpendiculairement ſous le point donné C, & nous ſuppoſerons à preſent qu'elle n'y réponde pas, comme ſi on vouloit meſurer par la Trigonometrie la ligne BD, il faudroit encore meſurer avec un Demi-cercle l'angle viſuel ACD, pour trouver par ſon moyen toute la ligne AD, par une Analogie ſemblable à la precedente, qui nous a donné la ligne AB, laquelle étant ôtée de la ligne AD, le reſte ſera la ligne BD, que l'on peut trouver immediatement, en tirant des deux Analogies qu'il faut faire pour trouver les lignes AB, AD une ſeule Analogie, telle qu'eſt la ſuivante,

Comme le Sinus Total,
A la difference des Tangentes des angles viſuels ACB, ACD;
Ainſi la hauteur AC,
A la ligne BD.

La

Planche 11. 101. Fig. La démonstration de cette Analogie sera évidente à celuy qui considerera, que le côté AC qui est commun aux deux Triangles rectangles CAB, CAD, étant pris pour le Sinus Total, les deux lignes AB, AD, sont les Tangentes des angles visuels ACB, ACD, & que par consequent la ligne BD est la difference de ces Tangentes.

PROBLEME V.

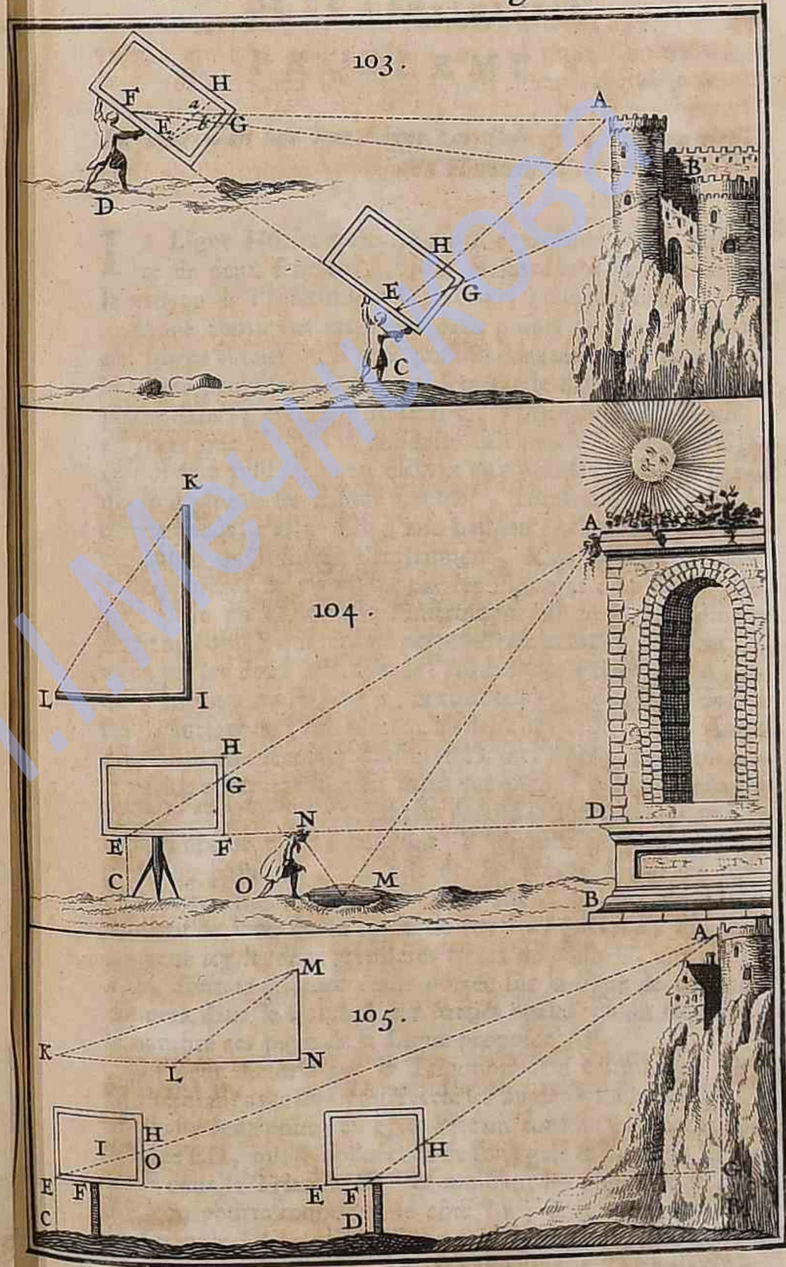
Mesurer d'en haut une Ligne inclinée.

102. Fig. POur mesurer la Ligne inclinée AB sans sortir de la Tour DE, à laquelle je suppose qu'elle est directement opposée, en sorte que les deux lignes AB, DE, soient dans un même Plan ; choisissez deux endroits commodes, comme les deux fenêtres C, D, pour y faire vos stations, & mesurez avec un cordeau leur distance CD, qui doit être la plus grande qu'il sera possible, & avec un Demi-cercle les angles visuels ECA, ECB, EDA, EDB, lesquels étant ainsi connus, les angles CAD, & CBD seront aussi connus, & aussi les angles ACB, ADB : parce que l'angle CAD est égal à la difference des deux ECA, EDA, *par* 32. I. & l'angle CBD à la difference des deux ECB, EDB, & que l'angle ACB est égal à la difference des deux ECA, ECB, & pareillement l'angle ADB à la difference des deux EDA, EDB. Cela étant supposé on pourra connoître dans le Triangle ACD, le côté AC, & dans le Triangle BCD le côté BC, & enfin dans le Triangle ACB le côté AB qu'on cherche. Ou bien on pourra connoître dans le Triangle ACD le côté AD, & dans le Triangle BCD le côté BD, & enfin dans le Triangle ADB, la ligne AB qu'on cherche.

SCOLIE.

L'Instrument Universel peut aussi servir tres-commodément pour la mesure de la Ligne AB, ce qui est si facile à comprendre par ce qui a été dit auparavant, qu'il seroit inutile d'en donner icy un exemple particulier. Je diray seulement qu'afin que les Rayons visuels se coupent sur la surface de l'Instrument, la distance CD des stations ne doit pas être trop petite par rapport à la ligne à mesurer AB.

Il semble aussi inutile de dire, qu'on peut de la même façon mesurer d'en haut la longueur d'un Toit, la largeur d'un Pré, la hauteur d'un Château, ou d'une Maison, & toute autre ligne, dont les extremitez seront en ligne droite avec la hauteur ED.



PROBLEME VI.

Mesurer d'en bas une Ligne parallele & élevée au dessus de l'Horizon.

LA Ligne Horizontale AB, qui represente icy la distance de deux fenêtres, se peut mesurer tres-facilement par le moyen de l'Instrument Universel, en cette sorte. Planche 12. 103. Fig.

Ayant choisi sur terre les deux points de station C, D, qui soient autant qu'il sera possible dans une ligne parallele à la Ligne proposée AB, ce qui sera facile dans cet exemple, placez dans la premiere station C, l'Instrument Universel, en sorte que sa ligne de conduite soit parallele à la ligne CD, ce qui sera aussi facile en élevant aux points C, D, deux piquets à plomb de même hauteur, comme de trois ou de quatre pieds, c'est à dire d'une hauteur égale à celle du Pied, ou Bâton qui soûtient l'Instrument, & qu'on appelle *Bâton d'Arpenteur*, & en visant par les Pinnules d'en bas le Piquet élevé en D, lorsque l'Instrument est en C, & l'Alidade étant au point E qui répond perpendiculairement au point C, visez par les deux Pinnules de l'Alidade les extremitez A, B, de la Ligne à mesurer AB, & tirez le long de la ligne de foy sur la Surface de l'Instrument les deux lignes EG, EH. Aprés cela faites une seconde station en D, où l'Instrument étant posé comme auparavant, en sorte que quand l'Alidade aura été avancée de E en F, d'autant de parties égales que la ligne CD contiendra de pieds, ce point F réponde perpendiculairement au point D, on vise de la même façon les mêmes extremitez A, B, pour tirer sur la Surface de l'Instrument le long de la ligne de foy les lignes F*a*, F*b*, qui coupent icy les deux premieres tirées du point E, aux points *a*, *b*, dont la distance étant portée sur la ligne de conduite donnera dans le nombre des parties égales qu'on trouvera, le nombre des pieds de la Ligne proposée AB.

On peut mesurer par la Trigonometrie cette Ligne AB, en mesurant avec un Demi-cercle les angles visuels qui se forment aux deux points E, F, & avec un cordeau la longueur de la ligne CD, qui donnera celle de son égale & parallele EF: & alors dans le Triangle EBF connoissant les angles & le côté EF, on pourra connoître le côté BF; & pareillement dans le Triangle EAF, connoissant outre les angles le côté EF, on pourra connoître le côté AE, & enfin dans le Triangle BAE, connoissant les côtez AE, BE, & l'angle compris AEB, on pourra connoître le troisiéme côté, ou la Ligne AB qu'on cherche, ou bien dans le Triangle EBF on pourra connoître le

Planche 11. 103. Fig. le côté BF, & dans le Triangle EAF le côté AF, & enfin dans le Triangle ABF, la ligne proposée AB.

PROBLEME VII.

Mesurer une Hauteur accessible.

104. Fig. UNe Hauteur accessible se peut mesurer en plusieurs manieres differentes, lorsque le terrain est égal & uni : mais nous enseignerons icy seulement celles qui peuvent être d'usage, & dont la pratique est aisée & convenable à la hauteur.

Pour donc mesurer la Hauteur accessible AB, premierement avec l'Instrument Universel, choisissez dans la Campagne le point C de station autant éloigné que vous pourrez de la base B de la Hauteur à mesurer AB, pour une Raison que la suite de l'operation vous fera aisément connoître. Ayant donc posé l'Instrument Universel au point C, en sorte que sa ligne de conduite EF soit parallele à l'Horizon BC, & que quand l'Alidade aura été avancée depuis F en E d'autant de parties égales que la ligne BC que l'on peut mesurer avec un cordeau, contiendra de pieds, le point E réponde perpendiculairement au point C : & ayant tourné l'Alidade vers le sommet A de la hauteur à mesurer AB, ce qui se fera en visant ce sommet A par les Pinnules de l'Alidade, marquez un point comme G, où l'Alidade coupe le côté FA, que je suppose perpendiculaire à l'autre côté EF, & alors la partie FG étant portée sur la ligne de conduite EF, le nombre des parties égales qu'on trouvera, sera le nombre des pieds de la hauteur du point A au dessus du point E, c'est à dire la hauteur AD, en continuant la ligne EF parallele à l'Horizon jusqu'en D ; c'est pourquoy si à cette hauteur AD ainsi trouvée on ajoûte la hauteur BD, ou CE, on aura la Hauteur AB qu'on cherche.

Si vous voulez trouver cette Hauteur AB par la Trigonometrie, il faudra mesurer avec un Demi-cercle l'angle visuel AED, & avec un cordeau la ligne BC égale à la ligne DE, afin que dans le Triangle ADE rectangle en D, on puisse trouver premierement le côté AD par cette Analogie,

Comme le Sinus Total,
A la Tangente de l'angle visuel AED,
Ainsi le côté DE,
A la hauteur AD.

Quand la hauteur AB ne sera pas bien grande, on pourra assez exactement la mesurer par son ombre, comme seroit BM : car si dans le même temps on marque l'ombre IL d'un Bâton IK perpendiculairement élevé sur un Plan Horizontal, comme les deux ombres IL, BM, sont terminées par les deux Rayons du Soleil KL, AM, qui peuvent passer pour paralleles, ce qui fait que les deux Triangles rectangles KIL, ABM, étant semblables, on pourra trouver directement la Hauteur AB, en faisant cette Analogie, Planche 12. 104. Fig.

Comme l'ombre du Bâton IL,
A sa hauteur IK ;
Ainsi l'ombre BM,
A la Hauteur AB.

Ou bien pour trouver cette Hauteur plus exactement, on prendra avec un Demi-cercle, ou autrement, la hauteur du Soleil, qui donnera l'angle AMB, lequel étant ainsi connu avec l'ombre BM, on pourra trouver par la Trigonometrie la Hauteur AB, en faisant cette Analogie,

Comme le Sinus Total,
A la Tangente de la hauteur du Soleil ;
Ainsi la longueur de l'ombre BM,
A la Hauteur AB qu'on cherche.

Quand la même Hauteur AB sera assez petite, on la pourra aussi mesurer assez exactement par Reflexion, en cette sorte. Mettez sur terre une petite piece de miroir plat dans une situation horizontale, mais comme il est difficile de la bien placer, & qu'une erreur imperceptible en peut causer une considerable dans la mesure de la Hauteur AB, il vaudra mieux au lieu d'un miroir plat se servir de l'eau qui conserve toûjours une situation horizontale. Ayant donc mis de l'eau par exemple en M, retirez-vous jusqu'à ce qu'étant par exemple en O, & vôtre œil en N du *Rayon de Reflexion* MN, vous apperceviez dans l'eau le sommet A par reflexion, & alors l'*Angle de Reflexion* OMN étant égal à l'*Angle d'Incidence* AMB, les deux Triangles rectangles ABM, MON, seront semblables, c'est pourquoy on pourra trouver la Hauteur AB, en mesurant bien exactement les distances MB, MO, & la hauteur de l'œil ON, & en faisant cette Analogie,

Comme la distance MO,
A la distance MB ;
Ainsi la hauteur NO,
A la hauteur AB.

PROBLEME VIII.

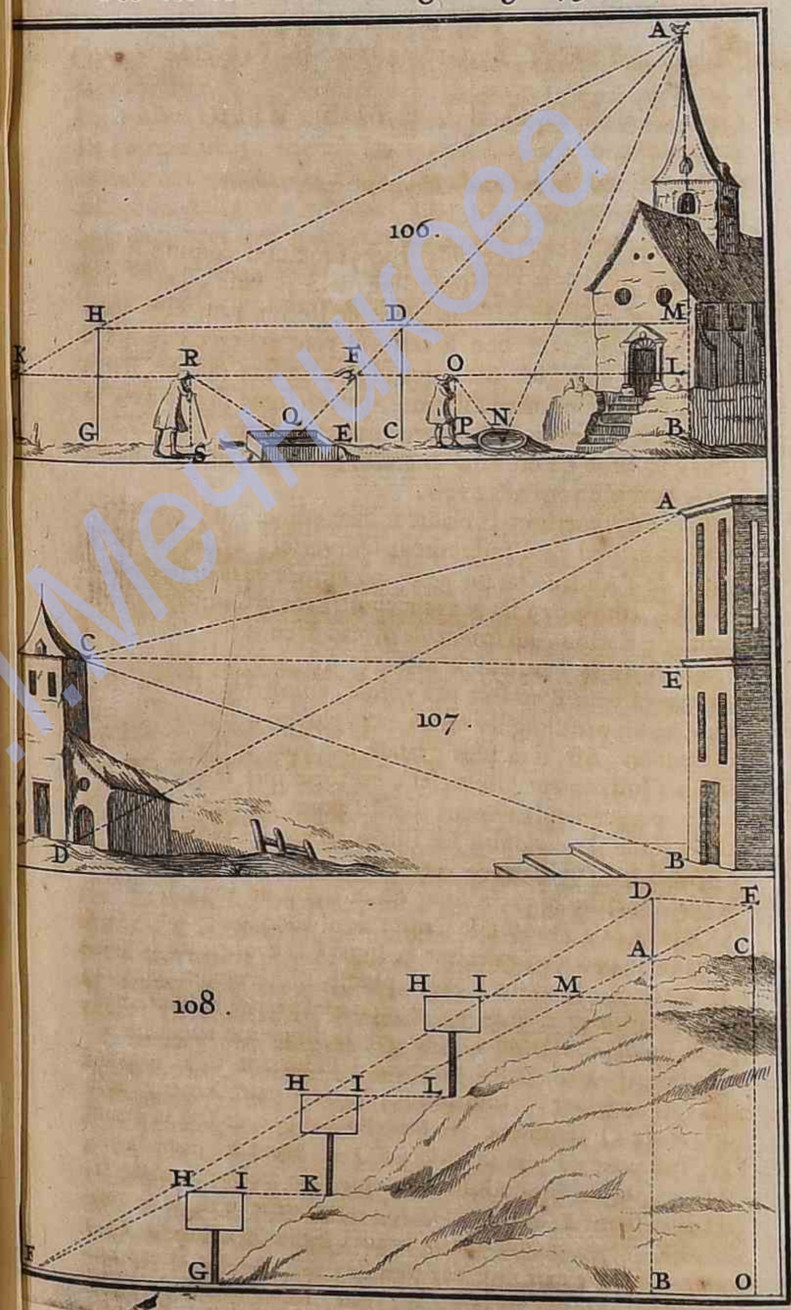
Meſurer une Hauteur inacceſſible.

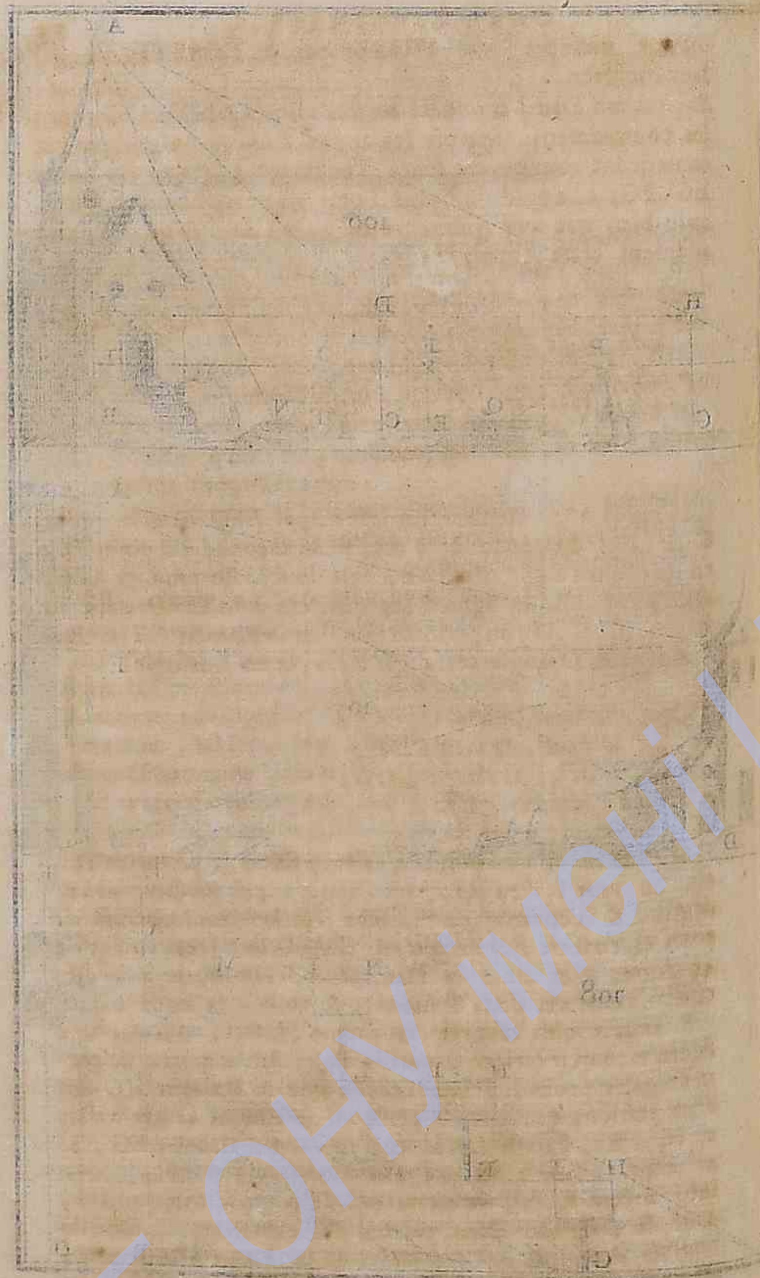
UNe Hauteur inacceſſible ſe peut meſurer comme ſi elle étoit acceſſible, lorſque l'on void ſa baſe, parce que la diſtance de cette baſe au point de ſtation peut être connuë *par Probl.* 2. & que le reſte ſe peut achever comme il vient d'être enſeigné. Mais quand la baſe ſera cachée, il ſera beſoin de deux points de ſtation, pris en ligne droite avec la Hauteur à meſurer, c'eſt à dire tels que la ligne des deux Stations, & celle qu'on veut meſurer, ſoient dans un même Plan, comme vous allez voir.

Planche 12. 105. Fig. Pour donc meſurer la Hauteur inacceſſible AB, premierement au moyen de l'Inſtrument Univerſel, ayant arrêté le centre de l'Alidade en un point commode de la ligne de conduite EF, comme en E, & ayant choiſi dans la Campagne deux points de ſtation, qui ſoient de niveau & en ligne droite avec la baſe B de la Hauteur à meſurer AB, ce qui eſt facile, quoique la baſe B ne ſoit pas viſible, comme C, D, qui doivent être un peu éloignez entre eux, plus ou moins, ſelon que la Hauteur AB ſera plus grande ou plus petite; élevez à plomb l'Inſtrument Univerſel, en ſorte que le point E réponde perpendiculairement ſur le point de ſtation C, & que la ligne de conduite EF ſoit parallele à l'Horizon CD, & l'Alidade étant tournée vers le ſommet A, tirez ſur la Surface de l'Inſtrument, le long de la ligne de foy, la droite EO. Aprés cela avancez le Centre de l'Alidade depuis E en F d'autant de parties égales que la ligne CD contiendra de pieds ou de toiſes, & ayant élevé à plomb l'Inſtrument Univerſel, en ſorte que le point F réponde perpendiculairement ſur le point de ſtation D, & que la ligne de conduite EF ſoit comme auparavant, parallele à l'Horizon CD, tournez auſſi l'Alidade vers le ſommet A, & tirez pareillement ſur la Surface de l'Inſtrument, le long de la ligne de foy la droite FH, qui coupe icy la premiere EO au point I, dont la diſtance à la ligne de conduite EF, que l'on trouvera en décrivant de ce point I, un arc de Cercle qui touche la ligne de conduite EF, étant portée ſur la même ligne de conduite EF, donnera dans le nombre des parties égales qu'elle comprendra, le nombre des pieds ou des toiſes de la hauteur du point A par deſſus la ligne de conduite EF, c'eſt à dire de la hauteur AG à laquelle ajoûtant trois ou quatre pieds pour la ligne BG, ou DF, ou CE, qui eſt ordinairement d'autant, on aura la hauteur propoſée AB.

Pour

Geometrie Planche 13. Page 79





Pour mesurer cette Hauteur par la Trigonometrie, il faut mesurer avec un cordeau la distance CD des stations, & avec un Demi-cercle les angles visuels AEG, AFG, dont les complemens, sçavoir les angles EAG, FAG, seront par consequent connus, & leurs Tangentes, sçavoir les lignes EG, FG, à l'égard du Sinus Total AG seront aussi connuës, aussi-bien que leur difference EF, ou CD. D'où l'on tire aisément cette Analogie, Planche 13. 105. Fig.

Comme la difference des Tangentes des angles EAG, FAG,
Au Sinus Total ;
Ainsi la distance des stations CD,
A la Hauteur AG qu'on cherche.

SCOLIE.

Si aprés avoir mesuré l'Angle visuel AEG dans le point C de la premiere station, on fait la seconde au point D, en sorte que l'angle visuel AFG soit double du premier AEG, & qu'on mesure la ligne CD, qui sera dans ce cas égale au Rayon visuel AF; on pourra connoître la hauteur AG, en faisant dans le Triangle rectangle AFG, cette Analogie,

Comme le Sinus Total,
A la ligne AF, ou CD;
Ainsi le Sinus de l'angle AFG,
A la Hauteur AG.

Si vous ne voulez point de calcul, faites la premiere station au point C, en sorte que l'angle visuel AEG soit de 26, degrez, & d'environ 34 minutes, & la seconde station au point D, en sorte que l'angle visuel AFG soit precisément de 45 degrez, & alors la Hauteur AG sera égale à la distance CD de ces deux stations, & aussi à la ligne BD.

Si vous voulez trouver la même Hauteur AG par une figure racourcie, tirez à part la ligne KL d'autant de parties égales prises sur une échelle que la distance CD des deux stations contient de pieds ou de toises, & ayant fait au point K, l'angle LKM égal à l'angle visuel AEG, & au point L l'angle NLM égal à l'angle visuel AFG, tirez sur la droite KLN, du point M, la perpendiculaire MN, dont la longueur étant portée sur l'échelle, donnera le nombre des pieds ou des toises de la Hauteur AG qu'on cherche.

Quand la Hauteur AB ne sera pas bien grande, on la pourra mesurer tres facilement par le moyen de deux Bâtons inégaux en cette sorte. Elevez sur terre les deux Bâtons inégaux Planche 13. 106. Fig.
CD,

Planche 13. 106. Fig. CD, EF, paralleles entre eux & à la Hauteur à mesurer AB, en sorte que les trois points B, C, E, soient en ligne droite, & que par les deux extremitez F, D, on voye le sommet A. Aprés cela faites une seconde station en ligne droite aux deux points G, I, pour élever comme auparavant les deux Bâtons GH, IK, égaux aux deux precedens, en sorte que pareillement on voye par les deux extremitez H, K, le même sommet A. Cela étant fait, tirez par pensée par les deux points H, K, les droites HDM, KFL, paralleles entre elles & à l'Horizon IB, & pour trouver la hauteur AM du sommet A sur le plus grand Bâton CD, ou GH, mesurez exactement la longueur des Bâtons, & les distances IG, EC, GC, pour faire cette Analogie,

Comme la difference des distances IG, EC,
A la difference des Bâtons CD, EF;
Ainsi la distance GC,
A la Hauteur AM.

DEMONSTRATION.

Dans les Triangles semblables AKF, AHD, on connoît *par 4. 6.* que les quatre lignes AK, AH, FK, DH, sont proportionnelles, & que pareillement dans les Triangles semblables AKL, AHM, les quatre lignes AK, AH, AL, AM, sont proportionnelles, & que par consequent les quatre FK, DH, AL, AM, ou EI, CG, AL, AM, sont aussi proportionnelles: c'est pourquoy *en divisant* on connoîtra que la difference des deux premieres EI, CG, ou des deux IG, EC, est à CG, comme la difference LM des deux dernieres AL, AM, ou des deux Bâtons CD, EF, est à AM. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La Hauteur proposée AB se peut trouver directement par Reflexion en cette sorte. Ayant placé horizontalement une piece de Miroir plat en un lieu commode, comme au point N, qui soit au niveau avec la base B de la Hauteur à mesurer AB, retirez-vous en P, en sorte qu'ayant l'œil au point O de la ligne de Reflexion NO, vous apperceviez le sommet A, par l'angle de Reflexion PNO, qui est toûjours égal à l'angle d'incidence ANB. Aprés cela mettez une autre piece de Miroir plat, ou la même en quelqu'autre point commode, comme Q, qui soit de niveau & en ligne droite avec les deux N, B, pour l'y placer horizontalement, & s'en éloigner comme auparavant, jusqu'à ce qu'étant par exemple en S, vous apperceviez le même sommet A, par l'angle de Reflexion SQR égal à l'angle d'incidence AQB. Enfin mesurez exactement la hauteur de l'œil PO, ou RS, & les distances NP, NQ, QS, pour faire cette Analogie, qui donnera tout d'un coup la hauteur AB;

Comm

Comme la difference des distances SQ, PN, Planche 13. 106. Fig.
A la hauteur de l'œil RS, ou OP;
Ainsi la distance QN,
A la Hauteur proposée, AB.

DEMONSTRATION.

Dans les Triangles semblables ANB, OPN, on connoît *par 4. 6.* que les quatre lignes BN, PN, AB, OP, sont proportionnelles, & en mettant à la place des deux dernieres AB, OP, ou AB, RS, les deux BQ, QS, qui sont en même Raison, *par 4. 6.* à cause des Triangles semblables ABQ, RSQ, on connoîtra que ces quatre BN, PN, BQ, QS, sont proportionnelles: c'est pourquoy *en composant* on connoîtra que ces quatre BP, PN, BS, QS, sont proportionnelles, & *en permutant*, que ces quatre BP, BS, PN, QS, sont proportionnelles, & *en divisant*, que ces quatre PS, BP, QS—PN, PN, sont proportionnelles, & *en permutant*, que ces quatre PS, QS—PN, BP, PN, sont proportionnelles, & *en divisant*, que ces quatre QN, QS—PN, BN, PN, sont proportionnelles, & si à la place des deux dernieres BN, PN, on met les deux AB, OP, qui sont en même Raison, *par 4. 6.* à cause des Triangles semblables ABN, OPN, on connoîtra que ces quatre QN, QS—PN, AB, OP, sont proportionnelles, & enfin *par Raison converse* que ces quatre QS—PN, QN, OP, AB, sont proportionnelles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME IX.

Mesurer d'une petite Hauteur une plus grande, dont la base est visible.

Pour mesurer la Hauteur AB, dont la base B est visible, du point C de la Hauteur plus petite CD, dont la base D est supposée au niveau avec la base B, c'est à dire que la ligne BD est supposée parallele à l'Horizon; tirez par imagination la ligne CE parallele à la ligne DB, & mesurez avec un Demi-cercle la quantité des angles visuels ACE, BCD, & avec un plomb la Hauteur CD, & alors on pourra trouver dans le Triangle CDB rectangle en D, la ligne DB, ou CE son égale, & dans le Triangle AEC rectangle en E, la ligne AE, à laquelle ajoûtant la ligne BE ou CD son égale, on aura la Hauteur AB qu'on cherche. Ou bien dans le Triangle rectangle BDC, on trouvera l'hypotenuse BC, & dans le Triangle obliquangle ACB, on pourra trouver le côté ou la Hauteur AB qu'on cherche. Planche 13. 107. Fig.

Les

Planche 13. 107. Fig. Les deux Analogies qu'il faut faire dans les deux Triangles rectangles ACE, CDB, pour trouver la Hauteur AE, se peuvent aisément reduire à celle-cy,

Comme le Quarré du Rayon,
Au Rectangle des Tangentes des angles visuels ACE, BCD;
Ainsi la Hauteur CD,
A la Hauteur AE qu'on cherche.

PROBLEME X.

Mesurer d'une grande Hauteur une plus petite, dont la la base est visible.

107. Fig. POur mesurer la Hauteur CD, dont la base D est visible, du sommet A de la Hauteur plus grande AB, dont la base B est supposée au niveau avec la base D, c'est à dire que la ligne BD est supposée parallele à l'Horizon, tirez par pensée à cette ligne BD, la parallele CE, & mesurez avec un Demi-cercle la quantité des angles visuels BAC, BAD, & avec un plomb la Hauteur AB, & alors on pourra trouver dans le Triangle ABD, rectangle en B, la ligne BD, ou EC son égale, & dans le Triangle rectangle AEC, la ligne AE, laquelle étant ôtée de la Hauteur AB, on aura la ligne BE, ou la Hauteur CD qu'on cherche. Ou bien dans le Triangle rectangle ABD, on trouvera l'hypotenuse AD, & dans le Triangle obliquangle ACD, on trouvera le côté ou la Hauteur CD qu'on cherche.

Les deux Analogies qu'il faut faire dans les deux Triangles rectangles ABD, AEC, pour trouver la ligne AE, se peuvent aisément reduire à celle cy,

Comme le Quarré du Rayon,
Au produit des Tangentes des angles visuels BAD, BAC;
Ainsi la Hauteur AB,
A la ligne AE.

PROBLEME XI.

Mesurer la Hauteur d'une Tour située sur une Montagne.

108. Fig. IL est évident, que si *par Probl.* 10. on mesure la Hauteur du sommet de la Tour au dessus du Plan de l'Horizon, & la Hauteur de la Montagne, & qu'on ôte cette Hauteur de la premiere, il restera la Hauteur de la Tour au dessus de la Montagne. Comme si AD represente une Tour située sur la Montagne GAC, en ôtant de toute la Hauteur DB du sommet D sur le Plan de l'Horizon BF, la Hauteur AB de la Montagne, on aura la Hauteur AD qu'on cherche. Planche 13. 108. Fig.

SCOLIE.

Quand la Montagne GAC ne sera pas extrémement haute, & qu'on la pourra parcourir de haut en bas, c'est à dire de A en G, on pourra aisément mesurer sa Hauteur AB, & même son Talud BG, par une maniere fort simple qu'on appelle *Cultellation*, qui se peut pratiquer tres-facilement au moyen de l'Instrument Universel, comme vous allez voir.

Ayant posé à plomb l'Instrument Universel sur son Bâton arrêté au point G, en sorte que la ligne de conduite HI soit Horizontale, conduisez par ses deux Pinnules le Rayon visuel HK, & l'Instrument étant posé de la même façon au point K, tirez pareillement le Rayon HL, pour avoir sur le penchant de la Montagne le point L, où l'Instrument étant transporté de la même façon, on dirigera le Rayon HM, & l'on continuëra ainsi jusqu'au sommet A; & alors il est évident que toutes les longueurs des lignes HK, HL, HM, &c. qu'il est aisé de mesurer, étant ajoûtées ensemble donneront le Talû BG, & que la hauteur du premier point H étant multipliée par le nombre de stations, donnera la Hauteur AB qu'on cherche.

La même Hauteur AB se peut aussi mesurer tres-facilement par la Trigonometrie, si l'on mesure avec un cordeau la longueur AG, & avec un Demi-cercle l'angle BAG, dont le complement donnera l'angle AGB, à cause de l'angle droit B: car dans le Triangle rectangle AGB, on pourra connoître la Hauteur AB par cette Analogie,

Comme le Sinus Total,
A la longueur AG;
Ainsi le Sinus de l'angle AGB,
A la Hauteur AB.

Si le penchant AG de la Montagne est trop inégal, pour pouvoir être commodément mesuré, & qu'au dessus de la Montagne il y ait une Plaine assez grande, on y pourra faire deux stations en deux endroits commodes, comme A, C, d'où l'on puisse voir un même point de la Campagne, comme F, & mesurer la Hauteur AB en cette sorte.

Ayant fait vôtre premiere station en A, mesurez avec un Demi-cercle soûtenu par le Bâton perpendiculaire AD, l'angle

Planche 13. 108. Fig.

gle visuel ADF, & ayant pareillement fait vôtre seconde station en C, mesurez aussi avec un Demi-cercle soûtenu par le Bâton perpendiculaire CE égal au premier AD, l'angle visuel CEF, lequel étant ôté de l'angle droit CED, on aura l'angle DEF, comme le premier angle ADF étant ajoûté à l'angle droit ADE, on a l'angle EDF, & par consequent l'angle EFD. Ainsi dans le Triangle FDE, on connoîtra les angles & le côté DE, égal à la distance AC, que l'on peut mesurer avec un cordeau, c'est pourquoy on pourra connoître la ligne DF, & dans le Triangle DBF rectangle en B, on connoîtra la Hauteur DB, de laquelle ôtant la Hauteur AD du Bâton, on aura la Hauteur AB qu'on cherche.

La Hauteur DB se peut connoître plus facilement, en raisonnant de la sorte. Puisque dans le Triangle rectangle DBF, l'angle BDF est connu, on connoîtra dans les Tables sa Tangente BF, à l'égard du Sinus Total BD : & pareillement puisque dans le Triangle rectangle EOF, on connoît l'angle OEF, on connoîtra sa Tangente OF, à l'égard du Sinus Total OE égal au premier BD, parce que les lignes DB, EO, étant perpendiculaires à l'Horizon peuvent passer pour paralleles. C'est pourquoy si de la Tangente OF, on ôte la Tangente BF, la difference de ces deux Tangentes donnera BO, ou AC, pour le Sinus Total DB, ou EO de 10000000 parties : & comme la ligne AC est déja connuë, on pourra trouver à l'égard de sa valeur le Sinus Total BD, par cette Analogie,

Comme la difference des Tangentes,
Au Sinus Total;
Ainsi la distance AC des stations,
A la Hauteur BD qu'on cherche.

C'est de la même maniere qu'on mesurera une profondeur, comme vous allez voir dans le

PROBLEME XII.

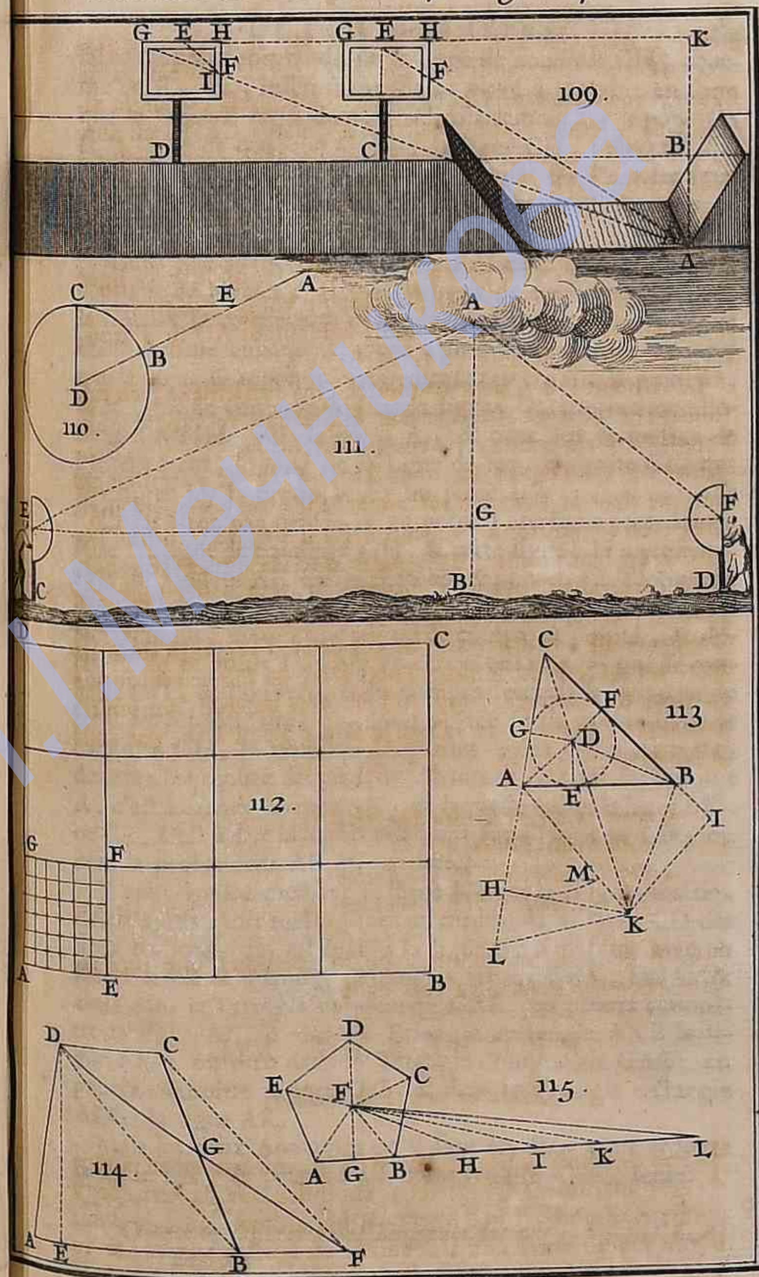
Mesurer une Profondeur.

Planche 14. 109. Fig.

Pour mesurer la profondeur AB, premierement au moyen de l'Instrument Universel, choisissez sur la terre deux points commodes, qui soient en ligne droite avec le point B, de niveau entre eux, & autant éloignez entre eux & du point B qu'il sera possible, comme C, D, pour les deux points de station, où il faut placer l'Instrument Universel en cette sorte.

Ayant arrêté le centre de l'Alidade de l'Instrument Universel

Geometrie Planche 14. Page 84.



sel en un point commode de la ligne de conduite GH, comme en E, & l'Instrument étant élevé à plomb, en sorte que le point E réponde perpendiculairement sur le point C, & la ligne de conduite GH sur la ligne CD, tournez l'Alidade vers le point A, en sorte que par ses Pinnules vous voyez ce point A, & tirez sur la surface de l'Instrument le long de la ligne de foy, la droite EF. Planche 14. 109. Fig.

Aprés cela avancez le centre de l'Alidade depuis E en G, d'autant de parties égales de la ligne de conduite GH, que la ligne CD contiendra de pieds, & l'Instrument Universel étant comme auparavant élevé à plomb au point D, en sorte que le point G réponde perpendiculairement sur le point D, & la ligne de conduite GH sur la ligne CD, tournez pareillement l'Alidade vers le point A, & tirez sur la surface de l'Instrument, le long de la ligne de foy, la droite GI, qui rencontre icy la premiere EF au point I.

Enfin tirez par pensée de ce point I une ligne perpendiculaire à la ligne de conduite GH, & cette ligne GH representera la profondeur AK qu'on cherche, & pour avoir la longueur de cette perpendiculaire, sans qu'il soit besoin de la tirer effectivement, mettez une pointe du compas au point I, & décrivez de ce point I un arc de cercle qui raze la ligne de conduite GH, & l'ouverture du compas donnera la longueur de cette perpendiculaire, qui étant portée sur la même ligne de conduite GH, le nombre des parties égales qu'on trouvera, donnera le nombre des pieds de la hauteur de l'œil sur le point A, c'est à dire de la ligne AK, de laquelle ôtant la ligne BK, ou CE, c'est à dire la hauteur de l'œil sur l'Horizon CD, on aura la profondeur AB qu'on cherche.

Si vous voulez mesurer la ligne AK par la Trigonometrie, il faut aprés avoir mesuré avec un cordeau la distance CD des deux stations, qui est égale à la ligne GE, mesurer avec un Demi-cercle la quantité des angles visuels CEA, DGA, & alors dans le Triangle obliquangle GAE, on pourra connoître la ligne AE, & dans le Triangle rectangle AKE la ligne AK : ou bien dans le Triangle obliquangle GAE, on pourra connoître la ligne AG, & dans le Triangle rectangle AKG, la ligne AK.

Mais les deux Analogies qu'il faut icy faire pour trouver la ligne AK, se peuvent aisément reduire à cette seule.

Comme la difference des Tangentes des angles visuels CEA, DGA,
Au Sinus Total :
Ainsi la distance CD des stations,
A la ligne AK qu'on cherche.

PROBLEME XIII.

Mesurer la Hauteur d'une Nuée.

Planche 14. 111. Fig.

POur mesurer la Hauteur d'une Nuée, il faudra choisir un temps auquel il ne fera point de Vent, afin que la Nuée n'étant que tres peu agitée, elle donne le temps à deux Observateurs situez dans une longue Plaine d'une distance considerable, d'en observer en même temps l'un que l'autre un certain point, dont ils seront convenus ensemble, pour voir avec un Demi-cercle que chacun doit avoir, sous quel angle ce point sera vû, car ainsi en mesurant bien exactement la distance de ces deux Observateurs, on aura un Triangle où l'on pourra connoître par la Trigonometrie; ou bien par une figure racourcie la Hauteur du point proposé.

Comme pour mesurer la Hauteur AB, ou AG, d'une Nuée, on choisira dans une Plaine deux points considerablement éloignez, comme C, D, où deux Observateurs doivent faire leurs stations, pour mesurer en même temps avec leurs Demi-cercles, la quantité des angles visuels AEF, AFE, en visant le point A, duquel ils sont convenus en se quittant: mais afin que les observations se puissent faire à peu prés au même temps, il faut que l'un fasse connoître à l'autre par quelque signe sensible comme par un coup de Mousquet, qu'il va se mettre en devoir d'observer le point A, afin que l'autre se dispose d'abord à faire la même chose, car autrement le mouvement de la Nuée pourroit causer quelque erreur. Ayant donc ainsi connu les deux angles AEF, AFE, l'angle EAF sera aussi connu, *par* 32. 1. C'est pourquoy en mesurant la distance CD, ou EF son égale, on pourra connoître dans le Triangle obliquangle AEF, le côté AE, & dans le Triangle rectangle AGE, le côté AG, ou la Hauteur AB qu'on cherche, la difference BG étant de petite consequence.

SCOLIE.

Parce que dans cet exemple la distance CD des deux stations doit être bien grande, telle qu'elle doit aussi être quand on veut mesurer une Montagne bien haute: & que la ligne CD étant sur la surface de la Terre qui est Spherique, ne peut pas être droite; nous determinerons icy l'erreur qui doit provenir en prenant CD pour une ligne droite, comme nous avons toûjours fait jusqu'à present.

110. Fig. Supposons donc que la ligne CD, qui est sur la circonference

rence de la Terre, dont le centre est D, & le Demi-diametre est DC, ou DB, soit de 3804 toises, ou de 22824 pieds, auquel cas l'arc CB ou l'angle D sera de 4 minutes, parce qu'on a observé qu'une minute de la circonference d'un grand cercle de la Terre est d'environ 951 toises, ou de 5706 pieds, comme nous dirons plus particulierement dans la Geographie. Planche 14. 110. Fig.

Or comme dans la pratique l'on prend l'arc CB pour une ligne droite, on le prend par consequent pour la ligne CE, qui touche la Terre au point C: c'est pourquoy si AB represente la hauteur d'une Nuée, la ligne AE sera prise pour cette hauteur, ainsi la ligne BE sera la difference ou l'erreur que l'on peut connoître par la Trigonometrie, en mesurant l'hypotenuse DE du Triangle rectangle CDE, où l'on connoît outre les angles, la ligne CD, ou le Demi-diametre de la Terre, qui est de 3269297 toises, ou de 19615782 pieds, comme nous dirons plus particulierement dans la Planimetrie: sçavoir en faisant cette Analogie,

Comme le Sinus Total.	10000000
A la Secante de l'angle D	10000007
Ainsi le Demi diametre CD	19615782
A la ligne DE	19615795.9.

qui se trouvera de 19615795 pieds, & d'environ 9 pouces, de laquelle ôtant le Demi-diametre DB, que nous avons supposé de 19615782 pieds, il restera 13 pieds & 9 pouces pour l'erreur ou la difference BE, qu'on cherche.

TROISIEME PARTIE.

DE LA PLANIMETRIE.

LA *Planimetrie* qu'on appelle aussi *Arpentage*, comme nous avons déja dit ailleurs, enseigne à mesurer un Plan & toute autre superficie: & comme dans la Longimetrie nous avons mesuré les Lignes par des Lignes plus petites, de même dans la Planimetrie on mesure les Surfaces par des Surfaces plus petites, qui sont ordinairement des Quarrez, & quelquefois des Quarrez-longs, les Geometres ayant choisi l'angle droit plûtôt que l'angle aigu, ou que l'angle obtus, parce que ces deux angles peuvent varier en une infinité de manieres differentes, au lieu que l'angle droit est invariable & unique dans son espece.

Le nombre des Mesures quarrées qui sont contenuës dans une Superficie, se trouve toûjours par la Multiplication, parce qu'on la conçoit ordinairement égale à un Rectangle, dont l'aire se trouve en multipliant la longueur par la lar-
Planche 14. 112.Fig. geur. Comme si du Rectangle ABCD on multiplie la longueur AB, que je suppose de quatre toises, par la largeur AD de trois toises, on aura douze toises quarrées pour la Superficie de ce Rectangle, lesquelles sont causées par les intersections des lignes droites tirées en long & en travers par les divisions des côtez opposez.

D'où il suit qu'une Toise courante, comme AE, ayant 6 Pieds courants, la Toise quarrée AEFG aura 36 Pieds quarrez, parce qu'en multipliant 6 par 6, le produit est 36: & qu'un Pied courant ayant 12 Pouces courans, un Pied quarré aura 144 Pouces quarrez, parce que le produit de 12 par 12 est 144. Ce qui fait dire que l'Arpent a 100 Perches en Quarré, parce que l'on donne 10 Perches courantes à la longueur de l'un de ses côtez, & que multipliant 10 par 10, il vient 100 au produit. Ainsi des autres.

C'est pourquoy quand on aura des Toises quarrées à reduire en Pieds quarrez, au lieu de les multiplier par 6, on les doit multiplier par 36. Ainsi ayant connu que l'aire du Rectangle ABCD est de 12 Toises quarrées, si l'on veut sçavoir combien elles font de Pieds quarrez, on les multipliera par 36, & l'on aura 432 Pieds quarrez pour le contenu du Rectangle

tangle ABCD. Tout au contraire, quand on aura des Pieds Planche 14.
quarrez à reduire en Toises quarrées, au lieu de les diviser par 112.Fig.
6, on les divisera par 36. Ainsi des autres.

Nous avons dit que les Surfaces se mesurent quelquefois par des Quarrez-longs, ce qui se fait principalement pour avoir un calcul plus aisé, lorsqu'il y a des especes differentes à multiplier ensemble: & alors on appelle *Pied de toise quarrée* un Rectangle qui contient six Pieds quarrez, comme la Toise courante contient six Pieds courans, ce Rectangle étant mis dans la pratique à la place d'une Toise quarrée qui vaut 36 Pieds quarrez, & ayant été appellé *Pied de toise quarrée*, parce qu'il a un Pied de largeur sur une Toise de longueur.

Pareillement on appelle *Pouce de Pied quarré* un Rectangle, dont la Superficie contient douze Pouces quarrez, comme le Pied courant contient douze Pouces courans, ce Rectangle étant mis dans la pratique à la place d'un Pied quarré, qui vaut 144 Pouces quarrez, & ayant été appellé *Pouce de pied quarré*, parce qu'il a un Pouce de largeur sur un Pied de longueur.

On appelle de la même façon *Ligne de Pouce quarré* un Rectangle, dont l'aire contient douze Lignes quarrées, comme le Pouce courant contient douze Lignes courantes, ce Rectangle étant mis dans la pratique à la place d'un Pouce quarré, qui vaut 144 Lignes quarrées, & ayant été appellé *Ligne de pouce quarré*, parce qu'il a une Ligne de largeur sur un Pouce de longueur.

On doit appeller de la même maniere *Pouce de Toise quarrée* un Rectangle, dont la largeur est d'un Pouce, & la longueur d'une Toise, ou de 72 Pouces, & dont l'aire par consequent est de 72 Pouces quarrez, tout de même que la Toise courante est de 72 Pouces courans: & *Ligne de Toise quarrée* un Rectangle, dont la largeur est d'une Ligne, & la longueur d'une Toise, ou de 864 Lignes, & dont par consequent l'aire est de 864 Lignes quarrées, tout de même que la Toise courante est de 864 Lignes courantes. Ainsi des autres.

Cela fait dire aux Arpenteurs, que des Toises courantes multipliées par des Toises courantes, produisent des *Toises quarrées*: & que pareillement des Pieds courans multipliez par des Pieds courans produisent des *Pieds quarrez*: & ainsi des autres. Mais que des Toises courantes multipliées par des Pieds courans, produisent des *Pieds de Toise quarrée*: & que pareillement des Pieds courans multipliez par des Pouces courans, produisent des *Pouces de Pied quarré*: & de la même façon que des Pouces courans multipliez par des Lignes courantes, produisent des *Lignes de Pouce quarré*: & ainsi des autres.

CHA-

CHAPITRE I.

Des Theorêmes.

QUoique les Problêmes de la Planimetrie soient faciles dans l'execution, la Theorie neanmoins en est tres-profonde : c'est pourquoy pour en rendre la pratique plus aisée & moins embroüillée, j'ay crû que je devois mettre la Theorie à part, afin que ceux qui ne veulent pas travailler à l'aveugle, y puissent trouver les démonstrations de toutes les pratiques qui seront enseignées dans la suite, & que ceux qui se contentent de la seule pratique, la trouvent dégagée de la Theorie, & ainsi la puissent comprendre plus facilement.

THEOREME I.

L'Aire d'un Triangle rectiligne est quatriéme proportionnelle au Sinus Total, à la Tangente de la moitié de l'un des trois angles, & au Rectangle sous la moitié du contour du Triangle, & l'excés de cette moitié sur le côté opposé au même angle.

Planche 14. 113. Fig.

JE dis que la Raison du Sinus Total à la Tangente de la moitié de l'angle C, du Triangle ABC, est égale à celle du Rectangle sous la moitié du contour, c'est à dire la moitié de la somme des trois côtez du Triangle ABC, & l'excés de cette moitié sur le côté AB opposé au même angle C, à l'aire du Triangle ABC.

PREPARATION.

Inscrivez *par* 4. 4. dans le Triangle ABC, le cercle EFG, dont les trois Rayons DE, DF, DG, qui passent par les points d'attouchement E, F, G, seront perpendiculaires aux côtez qu'ils coupent, *par* 18. 3. de sorte que tous les angles qui se font par ces Rayons aux points d'attouchement E, F, G, seront droits, & les deux lignes AE, AG, seront égales entre elles, parce qu'elles sont deux touchantes du cercle tirées du même point A, ce qui fait que *par* 36. 3. le Quarré de chacune est égal à un même Rectangle, outre que les deux Triangles rectangles AGD, AED, sont égaux entre eux, &c. On connoîtra par un semblable raisonnement, que les deux lignes BE, BF, sont égales entre elles, aussi-bien que les deux CF, CG. D'où il est aisé de conclure que les trois lignes AE, BE, CF, ou seulement les deux AB, CF, sont ensemble égales à la moitié du contour du Triangle ABC, & que par consequent CF, ou CG est l'excés de la moitié de ce contour sur le côté BC. Ainsi nous avons à démontrer, que le Sinus Total est à la Tangente de l'angle ACD, ou BCD, moitié de l'angle ACB, *par constr.* comme le Rectangle sous CF, ou CG, & la moitié du contour du Triangle ABC, à l'Aire du même Triangle ABC.

Planche 14. 113. Fig.

DEMONSTRATION.

Dans le Triangle CGD rectangle en G, le Sinus Total est à la Tangente de l'angle GCD, comme CG, à DG, *par Theor.* 1. *Chap.* 1. *L.* 2. *Trigon.* c'est pourquoy si l'on donne aux deux derniers termes CG, DG, la moitié du contour du Triangle ABC, pour hauteur commune, on connoîtra *par* 1. 6. que le Sinus Total est à la Tangente de l'angle GCD, comme le Rectangle sous CG, & la moitié du contour est au Rectangle sous DG & la moitié du contour, c'est à dire à l'Aire du Triangle ABC, parce que *par* 41. 1. le Triangle ADC est égal au Rectangle sous DG & la moitié de AC, & que pareillement le Triangle CDB est égal au Rectangle sous DF égale à DG, & la moitié de BC, & aussi le Triangle ADB égal au Rectangle sous DE égale à DG, & la moitié de AB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME II.

L'Aire d'un Triangle rectiligne est moyenne proportionnelle entre le Rectangle sous la moitié de son contour & l'excés de cette moitié, sur un côté, & le Rectangle sous les deux excés de la même moitié sur chacun des deux autres côtez.

113. Fig.

JE dis que l'Aire du Triangle ABC est moyenne proportionnelle entre le Rectangle sous la moitié de son contour, ou la moitié de la somme de ses trois côtez, & l'excés de cette moitié sur le côté AB, & le Rectangle sous les deux excés de la même moitié sur chacun des deux autres côtez AC, BC.

PREPARATION.

Ayant inscrit comme auparavant, au Triangle ABC, le cercle EFG, dont le centre est D, ajoûtez au côté AC la ligne AH

Planche 14. 113. Fig.

AH égale à la ligne BE, ou BF, & la ligne HL égale à la ligne AE, ou AG, & alors la ligne AL sera égale au côté AB. Ajoûtez aussi au côté BC, la ligne BI égale à la ligne AE, ou AG, & alors la ligne CI sera égale à la ligne CH, chacune étant égale à la moitié du contour du Triangle ABC : car comme nous avons reconnu au *Theor.* 1. que les deux lignes AB, CF, étoient ensemble égales à la moitié du contour, on connoîtra de la même façon que la somme des deux AC, BE, ou des deux AC, AH, ou bien la seule ligne CH est la moitié du contour, & que pareillement la somme des deux BC, AE, ou des deux BC, BI, ou bien la seule ligne CI est la moitié du contour, parce que nous avons reconnu que CF, ou CG, est l'excés de la moitié du contour sur le côté AB, & l'on connoîtra pareillement que BE ou BF est l'excés de la moitié du contour sur le côté AC, & que AE, ou AG est l'excés de la moitié du contour sur le côté BC. Ainsi nous avons à démontrer que l'Aire du Triangle ABC est moyenne proportionnelle entre le Rectangle sous les lignes AB, CF, & le Rectangle sous les lignes AE, BE, ce que nous ferons aprés avoir tiré du point H, à la ligne CH, la perpendiculaire HK, qui coupe icy la ligne CD prolongée au point K, par où l'on tirera les droites KA, KB, & encore la droite KI qui sera perpendiculaire à la droite CI, & égale à la droite KH, à cause des deux Triangles rectangles égaux CHK, CIK, *par* 4. 1. ce qui fait que les deux KHL, KIB, sont aussi égaux entre eux, *par* 4. 1. aussi bien que les deux ABK, ALK, *par* 8. 1. & que par consequent l'angle KAL, est égal à l'angle KAB, c'est à dire que la ligne AK divise en deux également l'angle LAB, comme l'angle EDG est divisé en deux également par la droite AD, à cause des deux Triangles rectangles égaux AED, AGD. D'où il suit que l'angle ADE est égal à l'angle HAK : car à cause des deux angles droits E, G, les deux angles opposez GAB, GDE, du Quadrilatere AEDG, seront ensemble égaux à deux droits, *par* 32. 1. & par consequent égaux aux deux GAB, HAB, qui ensemble valent aussi deux droits, *par* 13. 1. c'est pourquoy en ôtant de chaque côté l'angle commun GAB, il restera l'angle GDE égal à l'angle HAB, & la moitié ADE égale à la moitié HAK ; ce qui rend semblables les deux Triangles rectangles AED, AHK : c'est pourquoy *par* 4. 6. les quatre lignes DE, AE, AH, KH, sont proportionnelles, & *par* 16. 6. le Rectangle des deux extrémes DE, KH, est égal au Rectangle des deux moyennes AE, AH, ou AE, BE.

DEMONSTRATION.

Si du Triangle CHK rectangle en H, on prend le côté CH, ou la moitié du contour pour le Sinus Total, l'autre côté HK de-

viendra la Tangente de l'angle HCK moitié de l'angle ACB, comme l'on connoîtra en décrivant du point C, par le point I, l'arc de cercle HM : & parce que *par Theor.* 1. le Sinus Total CH, ou la moitié du contour, est à la Tangente KH, comme le Rectangle sous CF & la moitié du contour, au Triangle ABC, si aux deux premiers termes, sçavoir à la moitié du contour & à la ligne KH, on donne la hauteur commune DE, on connoîtra *par* 1. 6. que le Rectangle sous la moitié du contour & la ligne DE, c'est à dire le Triangle ABC, comme vous avez vû au *Theor.* 1. est au Rectangle des lignes KH, DE, ou au Rectangle des lignes AE, BE, comme le Rectangle sous la moitié du contour & la ligne CF, au Triangle ABC, & que par consequent le Triangle ABC est moyen proportionnel entre le Rectangle sous la moitié du contour & la ligne CF, & le Rectangle sous les lignes AE, BE. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 14. 113. Fig.

THEOREME III.

L'Aire d'un Triangle rectiligne rectangle, est égale au Rectangle sous la moitié de son contour, & l'excés de cette moitié sur l'hypotenuse : ou bien au Rectangle sous les deux excés de la même moitié sur chacun des deux côtez.

LA démonstration de ce Theorême sera évidente, si nous avons une fois démontré que *la moitié du contour d'un Triangle rectangle, & les trois excés de cette moitié sur les deux côtez, & l'hypotenuse sont quatre quantitez proportionnelles*, ce que nous avons premierement découvert par la Synthese, & ensuite démontré par l'Analyse, comme vous allez voir.

Pour donc connoître, si en ôtant separément de la moitié du contour $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, du Triangle rectangle a, b, c, les deux côtez a, b, & l'hypotenuse c, cette moitié $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, & les trois restes ou excés $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$, sont quatre quantitez proportionnelles, on raisonnera de la sorte.

SYNTHESE.

Si $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c,\ -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c,\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c$, aussi en doublant tous les termes, $a+b+c$

$-a$

$-a+b+c :: a-b+c, a+b-c$, & en prenant les quarrez de tous les termes, $aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc, aa-2ab+bb-2ac+2bc+cc :: aa-2ab+bb+2ac-2bc+cc, aa+2ab+bb-2ac-2bc+cc$, & en mettant $aa+bb$ à la place de cc, on aura cette autre Analogie, $2aa+2bb+2bc+2ab+2ac, 2aa+2bb+2bc-2ab-2ac :: 2aa+2bb-2bc-2ab+2ac, 2aa+2bb-2bc+2ab-2ac$, & en prenant la moitié de tous les termes, $aa+bb+bc+ab+ac, aa+bb+bc-ab-ac :: aa+bb-bc-ab+ac, aa+bb-bc+ab-ac$, & en composant, $2aa+2bb+2bc, aa+bb+bc+ab+ac :: 2aa+2bb-2bc, aa+bb-bc-ab+ac$, & en prenant les moitiez des antecedens, $aa+bb+bc, aa+bb+bc+ab+ac :: aa+bb-bc, aa+bb-bc-ab+ac$, & en divisant, $ab+ac, aa+bb+bc :: -ab+ac, aa+bb-bc$, & en permutant $ab+ac, -ab+ac :: aa+bb+bc, aa+bb-bc$, & en divisant, $2ab, ab+ac :: 2bc, aa+bb+bc$, & en prenant les moitiez des antecedens, $ab, ab+ac :: bc, aa+bb+bc$, & en mettant cc à la place de $aa+bb$, on aura cette autre Analogie moins composée $ab, ab+ac :: bc, cc+bc$, & enfin en divisant les deux premiers termes par a, & les deux derniers par c, on aura cette derniere Analogie, $b, b+c :: b, c+b$, laquelle étant connuë, servira pour faire la démonstration par l'Analyse en cette sorte.

ANALYSE.

Si l'on fait cette Analogie, $b. b+c :: b, c+b$, & qu'on multiplie les deux premiers termes par a, & les deux derniers par c, on aura cette autre Analogie, $ab, ab+ac :: bc, cc+bc$, & si à la place de cc, on met $aa+bb$, on aura celle-cy, $ab, ab+ac :: bc, aa+bb+bc$, & en doublant les antecedens, $2ab, ab+ac :: 2bc, aa+bb+bc$, & en divisant, $ab+ac, -ab+ac :: aa+bb+bc, aa+bb-bc$, & en permutant, $ab+ac, aa+bb+bc :: -ab+ac, aa+bb-bc$, & en composant, $aa+bb+bc, aa+bb+bc+ab+ac :: aa+bb-bc, aa+bb-bc-ab+ac$, & en doublant les antecedens, $2aa+2bb+2bc, aa+bb+bc+ab+ac :: 2aa+2bb-2bc, aa+bb-bc-ab+ac$, & en divisant, $aa+bb+bc+ab+ac, aa+bb+bc-ab-ac :: aa+bb-bc-ab+ac, aa+bb-bc+ab-ac$, & en doublant tous les termes, $2aa+2bb+2bc+2ab+2ac, 2aa+2bb+2bc-2ab-2ac :: 2aa+2bb-2bc-2ab+2ac, 2aa+2bb-2bc+2ab-2ac$, & en mettant $1cc$ à la place de $1aa+1bb$, on aura cette autre Analogie, $aa+bb+cc+2bc+2ab+2ac, aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc :: aa+bb+cc-2bc-2ab+2ac, aa+bb+cc-2bc+2ab-2ac$, & en prenant la Racine quarrée de chaque terme, $a+b+c, -a+b+c :: a-b+c, a+b-c$, & enfin en prenant les moitiez de tous les termes,

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c, -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$. *Ce qu'il falloit premierement démontrer.*

DEMONSTRATION.

Parce que la moitié du contour du Triangle rectangle est à l'excés de cette moitié sur l'un des deux côtez, comme l'excés de la même moitié sur l'autre côté, à l'excés de cette moitié sur l'hypotenuse, comme il vient d'être démontré, il s'ensuit *par* 16. 6. que le Rectangle sous la moitié du contour & l'excés de cette moitié sur l'hypotenuse, est égal au Rectangle sous les deux excés de cette moitié sur chacun des deux côtez : & parce que l'Aire du même Triangle est moyenne proportionnelle entre ces deux Rectangles égaux, *par Theor.* 2. il est de necessité qu'elle soit égale à chacun de ces deux Rectangles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME IV.

L'Aire d'un Trapezoïde est la moitié du Rectangle sous la somme des deux côtez paralleles, & la perpendiculaire tirée entre ces deux côtez.

JE dis que l'Aire du Trapezoïde ABCD, dont les deux côtez AB, CD, sont paralleles, est égale à la moitié du Rectangle qui a pour longueur la somme des deux côtez paralleles AB, CD, & pour largeur la perpendiculaire DE tirée entre ces deux côtez paralleles AB, CD. Planche 14. 114. Fig.

DEMONSTRATION.

Si à la Diagonale DB, on tire par le point C, la parallele CF, qui rencontre en F le côté AB prolongé, & qu'on joigne la droite DF, on connoîtra *par* 37. 1. que le Triangle CDF est égal au Triangle CBF, c'est pourquoy si de chacun on ôte le Triangle CGF, on aura le Triangle CGD égal au Triangle BGF, & si l'on ajoûte à chacun de ces deux Triangles égaux CGD, BGF, le Trapeze ABGD, on connoîtra que le Trapezoïde ABCD est égal au Triangle ADF, c'est à dire *par* 41. 1. à la moitié du Rectangle sous la perpendiculaire DE, & la somme AF des deux côtez paralleles AB, CD, parce que la figure BFCD étant un Parallelogramme, *par constr.* les deux côtez opposez BF, CD, sont égaux entre eux, *par* 34. 1. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEO-

THEOREME V.

L'Aire d'un Polygone regulier est la moitié du Rectangle sous son contour, & la perpendiculaire tirée du centre sur un côté.

115.Fig. JE dis que l'Aire du Pentagone regulier ABCDE est la moitié du Rectangle sous son contour ou circonference AL, & la perpendiculaire FG tirée du centre F sur le côté AB.

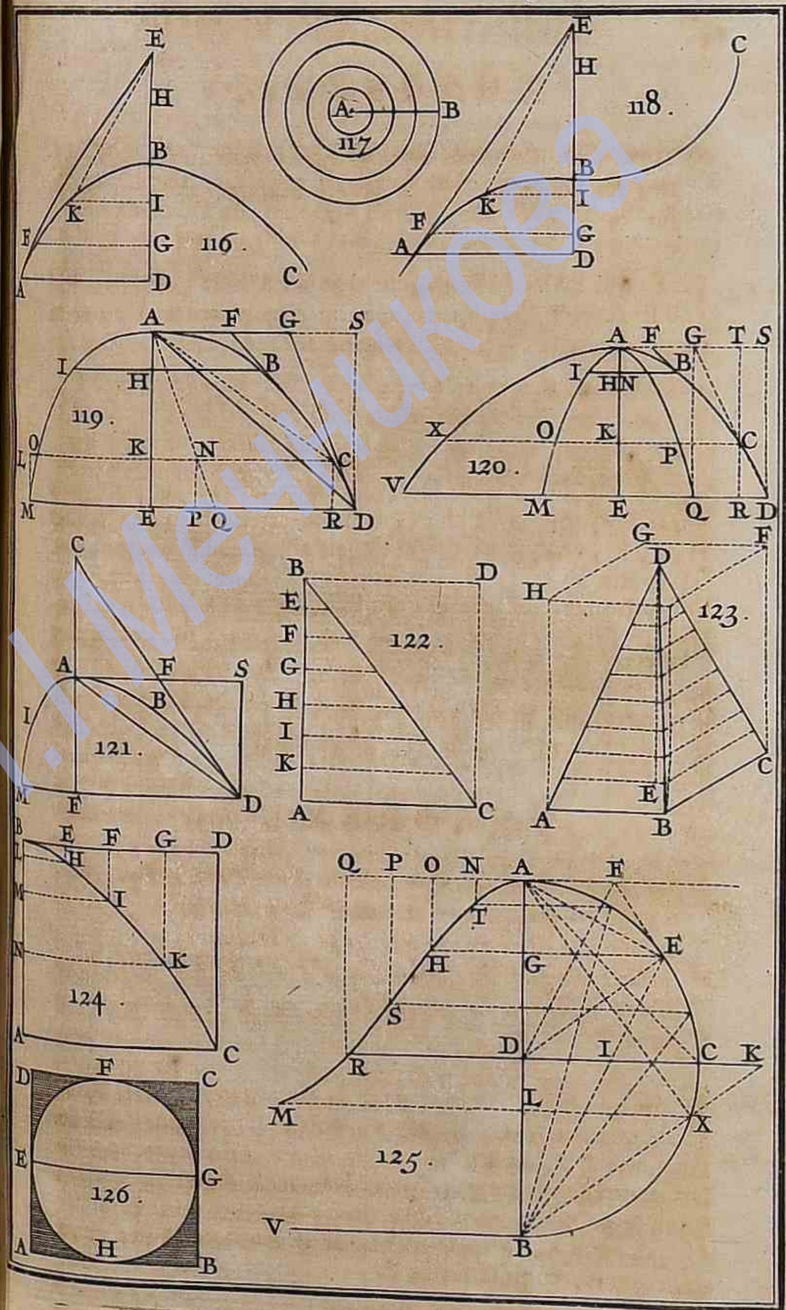
DEMONSTRATION.

Parce que la ligne AL represente la circonference du Pentagone ABCDE, si on la divise en autant de parties égales que ce Polygone a de côtez, comme icy en cinq aux points H, I, K, chaque partie sera égale au côté du Pentagone, & si l'on tire au centre F, par les points H, I, K, L, autant de lignes droites, on aura le grand Triangle AFL composé d'autant de Triangles égaux entre eux que ceux du Pentagone ABCDE, qui se font à son centre. D'où il suit que ce Pentagone ABCDE est égal au Triangle AFL, c'est à dire *par.* 41. 1. à la moitié du Rectangle sous le contour AL, & la perpendiculaire FG. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME VI.

Si par un point de la circonference d'une Parabole quarrée, il passe en dedans une ordonnée à un Diametre, & en dehors une ligne droite qui coupe ce Diametre en un point autant éloigné du sommet que l'ordonnée; cette ligne droite touchera la circonference de la Parabole en ce point.

Planche 14. 115.Fig. 116 JE dis que si par le point A de la circonference de la Parabole quarrée ABC, il passe en dedans, l'ordonnée AD au Diametre BD, & en dehors, la droite AE, qui coupe le Diametre BD prolongé au point E autant éloigné du sommet B que le point D, cette ligne droite AE touchera la Parabole ABC au point A, de sorte qu'elle ne la rencontrera pas en un autre point, comme seroit F.



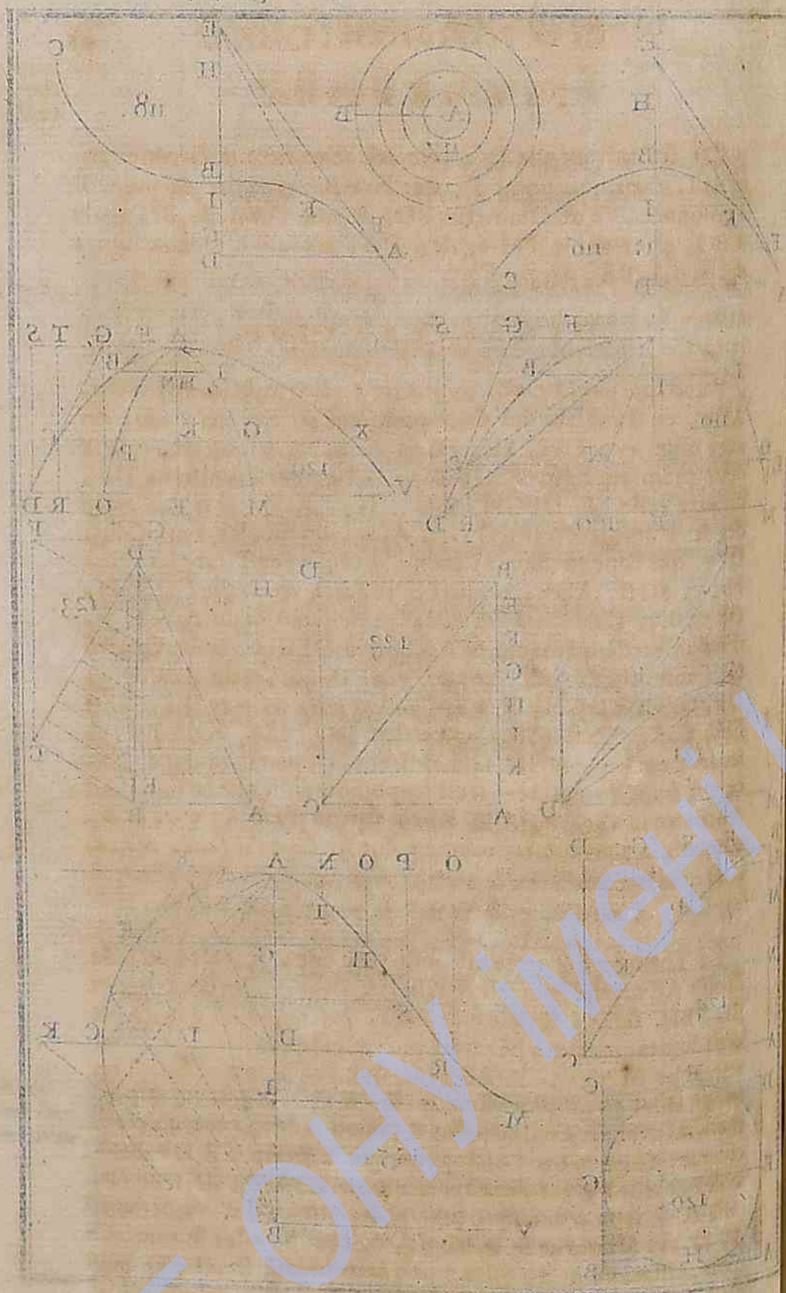
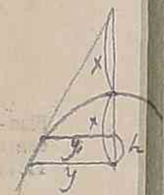


Planche 15. 116. Fig.

Preparation.

Car si l'on veut que la droite AE rencontre la circonference ABC encore au point F, que l'on imagine par ce point F l'ordonnée FG au Diametre BD, & que l'on fasse BH égale à BG, pour avoir EH égale à DG, à cause des deux lignes égales BD, BE, *par supp.*



Demonstration.

Parce que *par Déf.* 36. on a cette Analogie BG, BD::FG*q*, AD*q*, en doublant les deux premiers termes BG, BD, on aura celle-cy, GH, DE::FG*q*, AD*q*, & si l'on donne aux deux premiers termes BG, BD, la hauteur commune DE, on aura celle-cy, DEGH, DE*q*::FG*q*, AD*q*, & si à la place des deux derniers termes FG*q*, AD*q*, on met les deux GE*q*, DE*q*, qui sont en même Raison, à cause des Triangles semblables FGE, ADE, on aura cette autre Analogie, DEGH, DE*q*::GE*q*, DE*q*, où les deux consequens étant égaux, les deux antecedens sçavoir le Rectangle DEGH, & le Quarré GE seront égaux aussi, & *par* 17. 6. on aura cette Analogie, DE, GE::GE, GH, & *en divisant* on aura celle-cy DG, GE:: EH, GH, dont les deux antecedens DG, EH, étant égaux, les deux consequens GE, GH, doivent être pareillement égaux, ce qui étant impossible, il est impossible aussi que la ligne AE rencontre la Parabole ABC ailleurs qu'au point A: c'est pourquoy elle la touche en ce même point A. *Ce qu'il falloit démontrer.*

$$\frac{y_1^2}{y^2} = \frac{x-h}{x}$$

$$\frac{y_1}{y} = \frac{2x-h}{2x}$$

$$\frac{(2x-h)^2}{(2x)^2} = \frac{x-h}{x}$$

$$1-\frac{h}{x}+\frac{h^2}{4x^2} = 1-\frac{h}{x}$$

$$\frac{h^2}{4x^2} = 0 \;!$$

$$h = 0$$

Scolie.

Le Theorême inverse est aussi veritable, sçavoir que si la droite AE touche la Parabole ABC au point A, les deux lignes BD, BE, seront égales entre elles, parce que si l'une de ces deux lignes, comme BD étoit plus grande que BE, qu'on en retranche BI égale à BE, & que par le point I, l'on tire au Diametre BD l'ordonnée IK, & alors la droite EK touchera la Parabole ABC au point K, selon la démonstration precedente: & parce que l'on suppose que la droite AE la touche aussi au point A; ces deux touchantes AE, KE, doivent necessairement se rencontrer proche les points d'attouchement A, K, au dehors de la Parabole, & comme elles se rencontrent aussi au point E, elles renfermeront une figure, ce qui étant impossible, il est impossible aussi que les deux parties BD, BE, soient inégales.

THEOREME VII.

Si par un point de la circonference d'une Parabole cubique, il passe en dedans une ordonnée à un Diametre, & en dehors une ligne droite qui coupe ce Diametre en un point, dont la distance au sommet soit double de celle de l'ordonnée, cette ligne droite touchera la circonference de la Parabole au même point.

Planche 15. 118. Fig. JE dis que si par le point A de la circonference de la Parabole cubique ABC, il passe en dedans, l'Ordonnée AD au Diametre BD, & en dehors la droite AE, qui coupe le Diametre BD prolongé au point E, en sorte que la partie BE soit double de la partie DB, cette ligne droite AE touchera la Parabole ABC au point A, c'est à dire qu'elle ne la rencontrera pas en quelqu'autre point, comme seroit F.

PREPARATION.

Car si l'on veut que la droite AE rencontre la circonference ABC encore au point F, que l'on imagine par ce point F, l'ordonnée FG au Diametre BD, & que l'on fasse BH double de BG, pour avoir GH triple de BG, comme DE est triple de BD.

DEMONSTRATION.

Parce que par la proprieté de cette Parabole solide, on a cette Analogie, BG, BD :: FGc, ADc, en triplant les deux premiers termes BG, BD, on aura celle-cy, GH, DE :: FGc, ADc, & si à la place des deux derniers termes FGc, ADc, on met les deux GEc, DEc, qui sont en même Raison, à cause des Triangles semblables FGE, ADE, on aura cette autre Analogie, GH, DE :: GEc, DEc, & en donnant aux deux premiers termes GH, DE, le quarré DE pour base, on aura celle-cy, GHDEq, DEc :: GEc, DEc, où les deux consequens étant égaux, les deux antecedens, sçavoir le solide sous GH & le quarré DE, & le cube GE, seront égaux aussi, ce qui est impossible, parce qu'il s'ensuivroit que la ligne BD seroit égale à sa partie BG, comme vous allez voir.

Si l'on met a pour AD, b pour FG, c pour BD, & d pour BG, on aura $3d$ pour GH, $3c$ pour DE, & $2c+d$ pour GE, dont le cube est $8c^3+12ccd+6cdd+d^3$, & parce que le solide GHDEq, ou $27ccd$ doit être égal au cube DE, on aura cette Equation, $27ccd \backsim 8c^3+12ccd+6cdd+d^3$, ou $d^3+6cdd-15ccd+8c^3 \backsim 0$, laquelle étant divisée par $dd+7cd-8cc$, donne

donne celle-cy, $d-c \backsim 0$, ou $d \backsim c$ ou BG $\backsim$ BD, ce qui Planche 15. 118. Fig.
étant impossible, il est impossible aussi que le solide GHDEq soit égal au Cube DE, & que par consequent la droite AE rencontre la Ligne Parabolique ABC, ailleurs qu'au point A; d'où il suit qu'elle la touche en ce point A. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Le Theorême inverse est aussi veritable, sçavoir que si la droite AE touche la Parabole ABC au point A, la partie BE sera double de la partie BD, parce que si cela étoit autrement, comme si BD est plus grande que la moitié de BE, que l'on fasse BI égale à la moitié de BE, & que par le point I, l'on tire au Diametre BD l'ordonnée IK, & alors la droite EK touchera la Parabole ABC au point K, selon la démonstration precedente, ce qui est impossible, parce que la ligne AE, qui part du même point E, est une touchante *par supp.* comme vous avez déja vû au *Theor. 6.*

A l'imitation des deux démonstrations precedentes, on connoîtra facilement que la partie BE est triple de la partie correspondante BD dans une Parabole quarré-quarrée, & qu'elle est quadruple dans une Parabole d'un degré plus élevé, & ainsi ensuite. Ainsi vous voyez que dans toutes ces Paraboles infinies, la proprieté de la touchante est telle que la partie BD est à la partie correspondante BE, comme l'unité est aux nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. Ce qu'il est bon de remarquer, parce que cela nous servira dans la suite.

THEOREME VIII.

Planche 15. 119. Fig.

Si de la Ligne courbe ABCD, dont un Diametre est AE, & la touchante au sommet A, est AS, parallele à l'ordonnée DE; l'on forme sur le même Diametre AE, la courbe AIOM, dont une ordonnée, comme HI soit egale à la partie AF de la touchante au sommet AS, terminée en F par la touchante correspondante BF, & pareillement l'ordonnée EM égale à la partie AG de la même touchante au sommet AS, terminée en G par la touchante correspondante DG, & ainsi des autres, & que l'on tire la droite AD, cette droite AD retranchera le Segment ADCBA egal à la moitié de l'espace correspondant AEMOIA.

PREPARATION.

Faites la ligne DQ égale à la touchante AG, & joignez la droite AQ, qui sera égale & parallele à la touchante DG, *par* 33. 1 tellement que la figure AGDQ sera un Parallelogramme. Prenez par pensée sur la courbe ABCD, le point C infiniment proche du point D, auquel cas la partie CD pourra passer pour une ligne droite, & par consequent pour une partie de la touchante DG, & tirez par ce point C, la ligne CL parallele à la ligne DM, & la ligne CR parallele au Diametre AE, & encore par les points M, N, les droites LM, NP, paralleles au même Diametre AE. Enfin joignez la droite AC.

DEMONSTRATION.

Parce que les deux lignes paralleles DM, CL, sont supposées infiniment proches, les deux points L, O, sont aussi infiniment proches, ce qui fait que la figure mixtiligne MOKE sera la même que le Parallelogramme EMLK: & parce que la ligne EM est par la generation de la courbe AIOM, égale à la ligne AG, ou CN, le Parallelogramme EMLK, ou la figure mixtiligne EMOK, est *par* 36. 1. égale au Parallelogramme PNCR, ou *par* 35. 1. au Parallelogramme QNCD, c'est à dire *par* 41. 1. au double du Triangle ACD. D'où il est aisé de conclure, en tirant d'autres paralleles, & d'autres lignes correspondantes du point A, que toutes les figures mixtilignes, dont la figure AEMI est composée, sont doubles de tous les Triangles correspondans, dont tout le Segment ADCB est composé, & que par consequent la figure AEMI est double de la figure ADCB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCO-

Planche 15. 120. Fig.

SCOLIE.

Si par le point D, on tire la ligne DS parallele au Diametre AE, & qu'on fasse la courbe ANPQ semblable à la courbe AIOM, la courbe proposée ABCD divisera en deux également l'espace AQDS, c'est à dire que les deux espaces AQDB, ABDS, seront égaux entre eux.

PREPARATION.

Prenez comme auparavant, sur la courbe ABCD, le point C, infiniment proche du point D, & tirez par ce point C, la droite TR parallele au Diametre AE, ou à la ligne DS. Joignez encore la droite GQ, qui sera parallele au Diametre AE, ou à la ligne TR, à cause des deux lignes égales AG, EQ, par la generation de la courbe ANPQ.

DEMONSTRATION.

Parce que les Triangles GQD, CRD, sont semblables, on connoît *par* 4. 6. que les quatre lignes DR, CR, DQ, GQ, ou DS, sont proportionnelles, & *par* 16. 6. que le Rectangle des deux extrémes DR, DS, c'est à dire le Parallelogramme RDST, est égal au Rectangle des deux moyennes CR, DQ, c'est à dire à la figure mixtiligne DCPQ, qui peut passer pour un Parallelogramme: c'est pourquoy si de chacun de ces deux Plans égaux on ôte le Triangle commun CRD, il restera le Trapeze CDST égal au Trapeze QRCP. D'où il est aisé de conclure en tirant d'autres paralleles, que tous les Trapezes qui composent la figure ABDS, sont égaux à tous les Trapezes correspondans qui composent la figure AQDB, & que par consequent ces deux figures AQDB, ABDS, sont égales entre elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il s'ensuit que si l'on décrit la nouvelle courbe AXV, telle que la partie MV soit double de la partie correspondante QD, & pareillement la partie OX double de la partie correspondante PC, & ainsi des autres; l'espace AEVX est égal au Parallelogramme AEDS, à cause des deux espaces égaux AEMO, AEQP, *par constr.* & des deux égaux AMVX, AQDS, chacun étant double de l'espace AQDC, parce que le premier AMVX a ses lignes doubles de celles de l'espace AQDC, *par constr.* & que le second AQDS, a été démontré double du même espace AQDC. D'où il suit que les trois espaces AMV, MAQ, AQDS, sont égaux entre eux, &c.

 THEO-

THEOREME IX.

La Parabole quarrée est à un Parallelogramme de même base & de même hauteur, comme 2. est à 3.

Plan-che 15. 121 Fig. JE dis que si ABD est la circonference d'une Parabole quarrée, dont un Diametre soit AE, & une ordonnée à ce Diametre soit ED, *l'Espace Parabolique* AEB est au Parallelogramme AEDS décrit sur la même base DE, & sur la même hauteur AE, comme 2 est à 3.

PREPARATION.

Formez de la courbe ABD, la Courbe AIM, *par Theor.* 8. où nous avons démontré que l'espace AEMI est double du *Segment Parabolique* ADB, & tirez par le point D, la touchante DF, que vous prolongerez jusqu'au Diametre en C, & alors la ligne AF sera égale à la ligne EM, par la generation de la courbe AIM, & la ligne AC égale à la ligne AE, *par Theor.* 7.

DEMONSTRATION.

Parce que les Triangles CAF, CED, sont équiangles, & que le côté CE est double du côté CA, par la proprieté de la touchante de cette Parabole, le côté ED sera aussi double du côté AF, ou EM son égale, par la generation de la courbe AIM: & l'on démontrera de la même façon, en tirant d'autres touchantes, que toutes les ordonnées de l'espace AEDB sont doubles de toutes les ordonnées correspondantes de l'espace AEMI, & que par consequent l'espace AEDB est double de l'espace AEMI, lequel étant double de l'espace ADB, *par Theor.* 8. l'espace AEDB sera quadruple de l'espace ADB, & le Triangle ADE triple par consequent du même Segment ADB: c'est pourquoy le Parallelogramme AEDS, qui est double de ce Triangle, *par* 34. 1 sera sextuple du Segment Parabolique ADB; & comme l'espace Parabolique AEDB est quadruple de ce Segment, il s'ensuit que la Parabole AEDB est au Parallelogramme AEDS, comme 4 est à 6, ou comme 2 à 3. *Ce qu'il falloit demontrer.*

SCOLIE.

Parce que le Triangle ADE, ou ADS, est triple du Segment Parabolique ADB, il s'ensuit que l'espace ABDS, que nous appellerons *Complement Parabolique*, est double du même Segment ADB: & parce que le Parallelogramme AEDS est sextuple du Segment ADB, il s'ensuit que le Complement Parabolique ABDS est au Parallelogramme AEDS, comme 2 est à 6, ou comme 1 à 3. Plan-che 15. 121. Fig.

Lorsque la Parabole ABD sera solide, on connoîtra par un raisonnement semblable au precedent, que l'Espace Parabolique AEDB est au Parallelogramme AEDS, comme 3 est à 4, comme vous allez voir.

Parce que les Triangles CAF, CED, sont équiangles, & que le côté CE est au côté CA, comme 3 est à 2, à cause de AC double de AE, par la proprieté de la Touchante de cette Parabole, le côté ED sera aussi au côté AF, ou EM, comme 3 est à 2: & l'on connoîtra de la même maniere, en tirant d'autres Touchantes, que toutes les ordonnées de l'espace AEDB sont à toutes les ordonnées correspondantes de l'espace AEMI, comme 3 est à 2, & que par consequent l'espace AEDB est à l'espace AEMI, comme 3 est à 2, & à sa moitié ADB, comme 3 est à 1, c'est à dire que l'espace Parabolique AEDB est triple du Segment Parabolique ADB, & le Triangle ADE double du Segment ADB: c'est pourquoy le Parallelogramme AEDS sera quadruple du Segment ADB. Puisque donc le Parallelogramme AEDS est quadruple du Segment ADB, & que l'espace Parabolique AEDB est quadruple du même Segment ADB, il s'ensuit que la Parabole solide AEDB est au Parallelogramme AEDS, comme 3 est à 4.

Parce que le Triangle ADE, ou ADS, est double du Segment ADB, il s'ensuit que le complement Parabolique ABDS est égal au même Segment ADB: & parce que le Parallelogramme AEDS est quadruple du Segment ADB, il sera aussi quadruple du Segment Parabolique ABDS, c'est à dire que dans la Parabole solide, le Segment Parabolique ABDS est au Parallelogramme AEDS, comme 1 à 4.

Lorsque la Parabole ABD sera quarré quarrée, on connoîtra par un raisonnement semblable au precedent, que la Parabole AEDB est au Parallelogramme AEDS, comme 4 est à 5, & que le Complement Parabolique ABDS est au même Parallelogramme AEDS, comme 1 à 5: & lorsque la Parabole sera d'un degré plus élevé, la Parabole sera à son Parallelogramme, comme 5 à 6, & le Segment Parabolique au même Parallelogramme, comme 1 à 6. Ainsi vous voyez que dans une suite infinie de Paraboles de differens degrez, les Paraboles sont à leurs Parallelogrammes de même base & de même hauteur, comme 2 à 3, comme 3 à 4, comme 4 à 5, comme 5 à 6, & ainsi ensuite, & que les complemens Paraboliques sont aux mêmes Parallelogrammes comme 1 à 3, à 4, à 5, à 6, &c. à cause de la proprieté de la

Planche 15. 121 Fig. la touchante de toutes ces Paraboles, qui est que AF, ou EM, est à ED, comme 1 à 2, comme 2 à 3, comme 3 à 4, comme 4 à 5, &c. Ce qui fait que les espaces Paraboliques AEMI, AEDB, sont aussi dans cette Raison.

THEOREME X.

La somme des quantitez infinies en Progression arithmetique, en commençant depuis 0, est égale à la moitié du produit sous la plus grande & le nombre qui exprime la multitude de toutes ces quantitez.

122. Fig. POur la démonstration de ce Theorême, on considerera la plus grande de toutes les quantitez arithmetiquement proportionnelles, comme la base AC du Triangle rectangle ABC, & le nombre de leur multitude comme la hauteur AB, en supposant que cette hauteur AB est divisée en une infinité de parties égales, & en faisant passer par les points de division autant de lignes droites paralleles à la base AC, lesquelles on prendra pour les quantitez en progression arithmetique, parce qu'effectivement elles sont arithmetiquement proportionnelles, comme étant les côtez homologues d'une infinité de Triangles semblables entre eux & au Triangle ABC, ce qui fait qu'elles sont comme les hauteurs BE, BF, BG, BH, &c. qui sont en progression arithmetique; & comme toutes ces lignes paralleles, dont la plus petite est 0, ou le point B, & la plus grande est AC, accomplissent tout le Triangle ABC, qui par 41. 1. est la moitié du Rectangle ABDC, dont l'aire est égale au produit sous la base AC & la hauteur AB, il s'ensuit que la moitié du produit sous la plus grande quantité AC & le nombre AB de la multitude des quantitez arithmetiquement proportionnelles est égal à leur somme, que le Triangle ABC represente. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XI.

La somme des Quarrez des quantitez infinies en progression arithmetique, en commençant depuis 0, est égale au tiers du produit sous le plus grand Quarré & le nombre qui exprime la multitude de toutes ces quantitez.

JE dis que la somme des Quarrez 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, &c. des nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. qui representent des quantitez en progression arithmetique, est égale au tiers du produit sous le plus grand de

de tous ces Quarrez, & le nombre qui en exprime la multitude. Planche 15. 122. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on considere par exemple les trois premiers Quarrez 0, 1, 4, dont la somme est 5, laquelle si le nombre des Quarrez étoit infini, devroit être égale au tiers du produit 12 sous le plus grand Quarré 4, & le nombre 3 de leur multitude: & comme le tiers de ce produit 12, n'est que 4, au lieu qu'il devroit être 5, la difference 1, qui est $\frac{1}{5}$ de la veritable somme 5, & $\frac{1}{4}$ de la fausse somme 4, est assez considerable dans ce nombre de trois Quarrez seulement.

Si l'on considere un plus grand nombre de Quarrez, par exemple les six premiers Quarrez, 0, 1, 4, 9, 16, 25, dont la somme est 55, cette somme devroit être égale au tiers du produit 150, sous le plus grand Quarré 25, & le nombre 6 de leur multitude: & comme le tiers de ce produit 150, n'est que 50, au lieu qu'il devroit être 55, la difference 5, qui est $\frac{1}{11}$ de la veritable somme 55, ou $\frac{1}{10}$ de la fausse 50, est encore assez considerable, mais non pas tant que la premiere, parce que le nombre des Quarrez est plus grand.

0 —— 0
1 —— 1
2 —— 4

Somme 5 — $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{4}$

3 —— 9
4 —— 16
5 —— 25

Somme 55 — $\frac{1}{11}$ — $\frac{1}{10}$

6 —— 36
7 —— 49
8 —— 64

Somme 204 — $\frac{1}{17}$ — $\frac{1}{16}$

Prenons

Prenons donc encore un plus grand nombre de Quarrez, comme les neuf premiers 0, 1, 4, 5, 9, 16, 25, 36, 49, 64, dont la somme est 204, laquelle si le nombre des Quarrez étoit infini, devroit être égale au tiers du produit 576 sous le plus grand Quarré 64, & le nombre 9 de leur multitude: & comme le tiers de ce produit 576 est 192 seulement, au lieu qu'il devroit être 204, la difference 12, qui est $\frac{1}{17}$ de la veritable somme 204, ou $\frac{1}{16}$ de la fausse 192, est encore moins considerable que la precedente.

Puisque donc en augmentant également le nombre des Quarrez, la difference va toûjours en diminuant de la même façon, comme l'on void icy par les trois fractions $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{17}$, ou par les trois $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, dont les Dénominateurs se surpassent de 6, il est aisé de conclure, que plus on prendra de Quarrez, moins la difference sera considerable, de sorte qu'elle se reduira à rien, lorsque le nombre des Quarrez sera infini, & qu'ainsi la somme de ces Quarrez infinis est precisément égale au tiers du produit sous le plus grand & le nombre de leur multitude. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre Démonstration.

Planche 15. 123. Fig. Ou bien parce que l'on suppose que les côtez de tous ces Quarrez sont dans une continuelle proportion arithmetique, on peut considerer tous ces Quarrez dans une Pyramide, comme ABCD, dont la base ABC soit le plus grand Quarré, & le sommet D le plus petit Quarré, ou 0, en sorte que tous les Quarrez qui composent la Pyramide, divisent en une infinité de parties égales la hauteur DE, qui representera la multitude de tous ces Quarrez, dont les côtez seront dans une continuelle proportion arithmetique, sçavoir dans la même proportion que les parties de la hauteur DE, en les comptant depuis le sommet D. En concevant donc que tous ces Quarrez mis les uns sur les autres remplissent la Pyramide ABCD, qui *par* 7. 12. est le tiers du Prisme ABCFGH, qui a même base & même hauteur, & dont la solidité est égale au produit sous la base ABC, & la hauteur DE, ou AH, il s'ensuit que le tiers du produit sous le plus grand Quarré ABC, & le nombre DE de la multitude de tous ces Quarrez, est égal à leur somme, que la Pyramide ABCD represente. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Troi-

Troisiéme Démonstration.

Ou bien encore décrivez sur l'ordonnée AC, à l'Axe AB, de la Parabole quarrée ABC, le Rectangle ACDB, & divisez son côté BD en une infinité de parties égales, pour tirer par les points de division E, F, G, au côté CD, les paralleles EH, FI, GK, qui seront terminées par la circonference de la Parabole aux points H, I, K, par où vous tirerez à l'ordonnée AC, les paralleles HL, IM, KN. Il est évident que toutes les paralleles EH, FI, GK, composent le complement Parabolique BCD, & que la ligne BD represente le nombre de ces paralleles, dont toutes les valeurs sont dans la Raison des Quarrez des nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, &c. parce qu'elles sont égales aux parties de l'Axe BLBM, BN, qui sont dans cette même proportion, par la nature de la Parabole quarrée, & ainsi toutes les paralleles EH, FI, GK, DC, du Segment Parabolique BCD, peuvent être considerées comme des Quarrez des quantitez en progression arithmetique, dont le plus grand est CD, & le plus petit est 0, ou le point B; c'est pourquoy la somme de toutes ces paralleles, ou le complement Parabolique BCD, étant *par Theor.* 9. égal au tiers du Rectangle ACDB, dont l'aire est égale au produit sous les lignes BD, CD, il s'ensuit que la somme des Quarrez des quantitez infinies, arithmetiquement proportionnelles, en commençant depuis 0, est égale au tiers du produit sous le plus grand CD, & le nombre BD de leur multitude. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 15. 124. Fig.

THEOREME XII.

La somme des Cubes des quantitez infinies en progression arithmetique, en commençant depuis 0, est égale au quart du produit sous le plus grand Cube, & le nombre qui exprime la multitude de toutes ces quantitez.

JE dis que la somme des Cubes 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, &c. des nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, qui representent des quantitez en progression arithmetique, est égale au quart du produit sous le plus grand de tous ces Cubes & le nombre qui en exprime la multitude.

DEMONSTRATION.

Si l'on considere par exemple les quatre premiers Cubes

0,

0, 1, 8, 27, dont la somme est 36, laquelle si le nombre des Cubes étoit infini devroit être égale au quart du produit 108 sous le plus grand Cube 27 & le nombre 4 de leur multitude: & comme le quart de ce produit 108 n'est que 27, au lieu qu'il devroit être 36, la difference 9, qui est $\frac{1}{4}$ de la veritable somme 36, ou $\frac{1}{3}$ de la fausse somme 27, est assez considerable dans ce nombre de quatre Cubes seulement.

0	0		
1	1		
2	8		
3	27		
Somme	36	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
4	64		
5	125		
6	216		
7	343		
Somme	784	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$
8	512		
9	729		
10	1000		
11	1331		
Somme	4356	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{11}$

Si l'on considere un plus grand nombre de Cubes, par exemple les huit premiers Cubes 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, dont la somme est 784, cette somme 784 devroit être égale au quart du produit 2744, sous le plus grand Cube 343 & le nombre 8 de leur multitude : & comme le quart de ce produit 2744, n'est que 686, au lieu qu'il devroit être 784, la difference 98, qui est $\frac{1}{8}$ de la veritable somme 784, ou $\frac{1}{7}$ de la fausse 686, est encore assez considerable, mais non pas tant que la premiere, parce que le nombre des Cubes est plus grand.

Prenons donc encore un plus grand nombre de Cubes, comme les douze premiers 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, dont la somme est 4356, laquelle si le nombre des Cubes étoit infini, devroit être égale au quart

quart du produit 15972 sous le plus grand Cube 1331 & le nombre 12 de leur multitude: & comme le quart de ce produit 15972 est 3993 seulement, au lieu qu'il devroit être 4396, la difference 363, qui est $\frac{1}{12}$ de la veritable somme 4356, & $\frac{1}{11}$ de la fausse 3993, est encore moins considerable que la precedente.

Puisque donc en augmentant également le nombre des Cubes, la difference va toûjours en diminuant de la même façon, comme l'on void icy par les trois fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, ou par les trois $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, dont les Dénominateurs se surpassent de 4, il est aisé de conclure, que plus on prendra de Cubes, moins la difference sera considerable, de sorte qu'elle se reduira à rien, lorsque le nombre des Cubes sera infini, & qu'ainsi la somme de ces Cubes infinis est precisément égale au quart du produit sous le plus grand Cube & le nombre de leur multitude. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Autre Démonstration.

Ou bien décrivez sur l'ordonnée AC, à l'Axe AB de la Parabole solide ABC, le Rectangle ACDB, & ayant achevé le reste comme au Theorême precedent, vous connoîtrez que toutes les paralleles EH, FI, GK, composent le complement Parabolique BCD, & que la ligne BD represente le nombre de ces paralleles, dont toutes les valeurs sont dans la Raison des Cubes des Nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, &c. parce qu'elles sont égales aux parties de l'Axe BL, BM, BN, qui sont dans cette même proportion par la nature de la Parabole solide; & ainsi toutes les paralleles EH, FI, GK, DC, de ce Segment Parabolique BCD, peuvent être considerées comme des Cubes de quantitez en progression arithmetique, dont le plus grand est CD, & le plus petit est 0, ou le point B; c'est pourquoy la somme de toutes ces paralleles, ou le complement Parabolique BCD, étant *par Theor. 9.* égal au quart du Rectangle ACDB, dont l'aire est égale au produit des lignes BD, CD, il s'ensuit que la somme des Cubes des quantitez infinies arithmetiquement proportionnelles en commençant depuis 0, est égale au quart du produit sous le plus grand CD, & le nombre BD de leur multitude. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Planche 15. 124. Fig.

SCOLIE.

A l'imitation de ce Theorême & du precedent, il est aisé à démontrer, en prenant ABC pour une Parabole quarré-quarrée, que

Planche 15. 124. Fig. que *la somme des Quarré-quarrez des quantitez en continuelle proportion arithmetique, en commençant depuis* 0, *est égale à la cinquiéme partie du produit sous le plus grand & le nombre de leur multitude*: & en supposant que la Parabole ABC, soit sursolide, que *la somme des Sursolides des quantitez infinies en progression arithmetique en commençant depuis* 0, *est égale à la sixiéme partie du produit sous le plus grand & le nombre de leur multitude*, & ainsi ensuite.

Ainsi vous voyez par ce Theorême, & par les deux precedens, que *les sommes des quantitez infinies en progression arithmetique, de leurs Quarrez, de leurs Cubes, de leurs Quarré-quarrez, de leurs Sursolides, & de leurs autres Puissances plus élevées de degré en degré, sont aux produits sous la plus grande & le nombre de leur multitude, comme l'Unité est aux Nombres naturels qui la suivent* 2, 3, 4, 5, 6, &c. Ce qu'il faut bien remarquer parce que cela nous servira pour la Quadrature du Cercle & de l'Hyperbole.

THEOREME XIII.

Un Cercle est égal à la moitié du Rectangle sous sa circonference & son Rayon.

CE Theorême est évident par ce qui a été démontré du Polygone regulier au *Theor.* 5. parce qu'un Cercle est proprement un Polygone regulier composé d'une infinité de côtez, dont la perpendiculaire est égale à son Rayon.

117. Fig. Ou bien divisez par pensée le Rayon AB en une infinité de parties égales, & décrivez du centre A, par les points de division autant de circonferences de cercle, qui seront en progression arithmetique, parce que leurs Rayons qui croissent également, sont dans cette même progression, & que les circonferences des cercles sont en même Raison que leurs Rayons: & parce que la somme de toutes ces circonferences ou quantitez en progression arithmetique, qui remplissent le cercle, est égale à la moitié du produit sous la plus grande qui est la circonference du cercle, & le nombre de leur multitude, qui est le Rayon AB, *par Theor.* 10. il s'ensuit que le Cercle est égal à la moitié du Rectangle sous sa circonference & son Rayon. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

On démontrera de la même façon, que l'Aire d'un Secteur de cercle est égale à la moitié du Rectangle sous l'arc qui luy sert de base & le Rayon du cercle, qui est le côté de ce Secteur.

THEO-

THEOREME XIV.

Le Diametre d'un cercle est à sa Circonference, environ comme 100 *est à* 314.

JE dis que le Diametre AB d'un cercle, dont le centre est D, est à sa circonference, environ comme 100 est à 314. Planche 15. 125. Fig.

PREPARATION.

Décrivez comme dans le *Theor.* 8. de la courbe ou demi-circonference ACB, la courbe ASM, que nous appellerons *Quadratrice geometrique*, parce qu'elle contribuë à la *Quadrature du Cercle*; c'est à dire à la connoissance de l'aire du cercle: sçavoir en faisant l'ordonnée GH égale à la partie correspondante de la touchante au sommet AF, ou plus facilement à la ligne DI terminée par la droite BE sur la ligne indéfinie DK perpendiculaire au Diametre AB, parce que cette ligne DI est égale à la touchante correspondante AF, ou EF, comme l'on connoîtra en joignant la droite DF, qui divisera en deux également l'angle au centre ADE, dont la moitié ADF est égale à l'angle à la circonference ABE, ce qui rend équiangles & égaux les deux Triangles rectangles DAF, BDI, &c.

Il est évident que la courbe ASM étant continuée approchera toûjours de plus en plus de la droite BV perpendiculaire au Diametre AB, sans jamais la rencontrer, & qu'ainsi la droite BV luy est Asymptote: & que l'espace indéfini terminé par la courbe indéterminée ASM, par son Axe AB, & par son Asymptote indéfinie BV, est égale au Cercle, dont le Diametre est AB, parce que l'espace AGHT est double du Segment correspondant AE, *par Theor.* 8. & pareillement l'espace ADRH double du Segment correspondant ACE, & de même l'espace ALMS double du Segment correspondant AXE, & ainsi ensuite jusqu'à l'espace indéfini ABVM, qui sera double du Demi-cercle ABC, ou égal au Cercle, dont le Diametre est AB.

Il est évident aussi que l'ordonnée DR, qui part du centre D, est égale au Rayon DA, & que par consequent le Parallelogramme RDAQ est un Quarré, dont le côté AQ doit être divisé en une infinité de parties égales, pour tirer par les points de division les lignes NT, OH, PS, &c. qui rempliront le Complement ARQ, dont l'aire étant déterminée en termes analytiques, servira pour la

DE-

Planche 15. 125. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on met a pour le Rayon AD, ou BD, & par consequent $2a$ pour le Diametre AB, x pour l'ordonnée GH, ou AF, ou DI, & y pour la partie AG, on aura $2a-y$ pour BG, & par consequent $2ay-yy$ pour le Quarré GE, qui est égal au Rectangle des lignes AG, BG, *par* 35. 3. & parce que les quatre lignes BD, DI, BG, GE, sont proportionnelles, *par* 4. 6. à cause des Triangles équiangles BDI, BGE, leurs Quarrez seront aussi proportionnels, *par* 22. 6. & l'on aura en termes analytiques cette Analogie, $aa, xx :: 4aa-4ay+yy, 2ay-yy$, & en divisant les deux derniers termes par $2a-y$, on aura celle-cy, $aa, xx :: 2a-y, y$, & par consequent cette Equation $aay \backsim 2axx-xxy$, dans laquelle on trouvera y, ou $AG \backsim \frac{2axx}{aa+xx}$, & en divisant le Numerateur $2axx$ par le Denominateur $aa+xx$, on aura $AG \backsim \frac{2xx}{a}-\frac{2x^4}{a^3}+\frac{2x^6}{a^5}-\frac{2x^8}{a^7}$ &c. & si au lieu de x pour l'ordonnée GH, on avoit mis $2x$, on auroit trouvé $AG \backsim \frac{8xx}{a}-\frac{32x^4}{a^3}+\frac{128x^6}{a^5}-\frac{512x^8}{a^7}$: & si l'on avoit mis $3x$ pour la même ordonnée GH, on auroit trouvé $AG \backsim \frac{18xx}{a}-\frac{162x^4}{a^3}+\frac{1458x^6}{a^5}-\frac{13122x^8}{a^7}$, &c. & ainsi ensuite. C'est pourquoy si l'on met x pour la premiere partie AN, on aura $2x$ pour la deuxiéme AO, $3x$ pour la troisiéme AP, & ainsi des autres, jusqu'à toute la ligne $AQ \backsim a$, qui exprime le nombre de la multitude des ordonnées NT, OH, PS, &c. qui remplissent le Complement ARQ: & alors on trouvera

$$NT \backsim \frac{2xx}{a}-\frac{2x^4}{a^3}+\frac{2x^6}{a^5}-\frac{2x^8}{a^7}, \text{ \&c.}$$

$$OH \backsim \frac{8xx}{a}-\frac{32x^4}{a^3}+\frac{128x^6}{a^5}-\frac{512x^8}{a^7}, \text{ \&c.}$$

$$PS \backsim \frac{18xx}{a}-\frac{162x^4}{a^3}+\frac{1458x^6}{a^5}-\frac{13122x^8}{a^7}, \text{ \&c.}$$

& ainsi des autres, jusqu'à la derniere & plus grande $QR \backsim a$.

On

Planche 15. 125. Fig.

On peut trouver par le moyen des *Theor.* 11. & 12. la somme de toutes ces ordonnées infinies, c'est à dire le complement ARQ, parce que tous les termes semblables, dont les Numerateurs des valeurs trouvées de toutes ces lignes sont le double des Puissances, dont les côtez sont dans la progression des Nombres naturels, 1, 2, 3, 4, &c. & par consequent dans la progression arithmetique. Ainsi on connoîtra *par Theor.* 11. que la somme des Numerateurs de tous les premiers termes $2xx$, $8xx$, $18xx$, &c. vaut $\frac{2}{3}a^3$, & *par Theor.* 12. que la somme des Numerateurs de tous les seconds termes $2x^4$, $32x^4$, $162x^4$, &c. vaut $\frac{2}{5}a^5$, que la somme des Numerateurs de tous les troisiémes termes $2x^6$, $128x^6$, $1458x^6$, &c. vaut $\frac{2}{7}a^7$, & ainsi ensuite. D'où il suit que la somme de toutes ces lignes infinies NT, OH, PS, &c. ou le Complement ARQ vaudra $\frac{2}{3}aa-\frac{2}{5}aa+\frac{2}{7}aa-\frac{2}{9}aa$, &c. lequel étant ôté du Quarré RDAQ, qui vaut aa, il restera $aa-\frac{2}{3}aa+\frac{2}{5}aa-\frac{2}{7}aa+\frac{2}{9}aa$, &c. pour l'espace ARD, dont la moitié $\frac{1}{2}aa-\frac{1}{3}aa+\frac{1}{5}aa-\frac{1}{7}aa+\frac{1}{9}aa$, &c. sera par *Theor.* 8. l'aire du Segment correspondant ACE, à laquelle ajoûtant l'aire du Triangle isoscéle rectangle ADC, qui vaut $\frac{1}{2}aa$, on aura $aa-\frac{1}{3}aa+\frac{1}{5}aa-\frac{1}{7}aa+\frac{1}{9}aa$, &c. pour le Quart de Cercle ADCE, dont le quadruple $4aa-\frac{4}{3}aa+\frac{4}{5}aa-\frac{4}{7}aa+\frac{4}{9}aa$, &c. sera par consequent l'aire du Cercle entier, laquelle étant égale à la moitié du Rectangle sous sa circonference & son Rayon, *par Theor.* 13. si on la divise par la moitié du Rayon, c'est à dire par $\frac{1}{2}a$, on aura $8a-\frac{8}{3}a+\frac{8}{5}a-\frac{8}{7}a+\frac{8}{9}a$, &c. pour la circonference du Cercle. D'où il suit que le Diametre d'un Cercle est à sa circonference, comme $2a$ est à $8a-\frac{8}{3}a+\frac{8}{5}a-\frac{8}{7}a+\frac{8}{9}a$, &c. ou comme 1 à $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}$, &c. ou comme 1 à $\frac{8}{3}+\frac{8}{35}+\frac{8}{99}+\frac{8}{195}+\frac{8}{323}+\frac{8}{483}+\frac{8}{675}$, &c.

Planche 15. 125. Fig. Il est aisé de continuer ces Fractions à l'infini, parce qu'elles ont un même Numerateur 8, & que leurs Dénominateurs 3, 35, 99, 195, &c. qui sont des nombres quarrez moins l'Unité, sont dans une progression du second degré, parce que les differences de leurs differences sont égales, sçavoir 32. Il est évident que tant plus on continuëra ces fractions, d'autant plus prés, on approchera de la Raison du Diametre d'un Cercle à sa circonference, de sorte que si on les pouvoit toutes continuer, & avoir leur somme, cette Raison seroit precisément connuë. Nous l'avons continuée dans la Table suivante jusqu'au nombre de 315 dénominateurs, ce qui suffit pour avoir à une centiéme partie prés la Raison du Diametre d'un Cercle à sa circonference.

Table des Dénominateurs de 315 Fractions, dont le Numerateur commun est 8, & qui composent la circonference d'un Cercle, dont le Diametre est 1.

3	14883	58563	131043	232323	362403
35	15875	60515	133955	236195	367235
99	16899	62499	136899	240099	372099
195	17955	64515	139875	244035	376995
323	19043	66563	142883	248003	381923
483	20163	68643	145923	252003	386883
675	21315	70755	148995	256035	391875
899	22499	72899	152099	260099	396899
1155	23715	75075	155235	264195	401955
1443	24963	77283	158403	268323	407043
1763	26243	79523	161603	272483	412163
2115	27555	81795	164835	276675	417315
2499	28899	84099	168099	280899	422499
2915	30275	86435	171395	285155	427715
3363	31683	88803	174723	289443	432963
3843	33123	91203	178083	293763	438243
4355	34595	93635	181475	298115	443555
4899	36099	96099	184899	302499	448899
5475	37635	98595	188355	306915	454275
6083	39204	101123	191843	311363	459683
6723	40803	103683	195363	315843	465123
7395	42435	106275	198915	320355	470595
8099	44099	108899	202499	324899	476099
8835	45795	111555	206115	329475	481635
9603	47525	114243	209763	334083	487203
10403	49283	116963	213443	338723	492803
11235	51075	119715	217155	343395	498435
12099	52899	122499	220899	348099	504099
12995	54755	125315	224675	352835	509795
13923	56643	128163	228483	357603	515523

521283	708963	925443	1170723	1444803
527055	715715	933155	1179395	1454435
522899	722499	940899	1188099	1464099
538755	729315	948675	1196835	1473795
544643	736163	956483	1205603	1483523
550563	743043	964323	1214403	1493283
556515	749955	972195	1223235	1503075
562499	756899	980099	1232099	1512899
568515	763875	988035	1240995	1522755
574563	770883	996003	1249923	1532643
580643	777923	1004003	1258883	1542563
586755	784995	1012035	1267875	1552515
592879	992099	1020099	1276899	1562499
599075	799235	1028195	1285955	1572515
605283	806403	1036323	1295043	1582563
611523	813603	1044483	1304163	
617795	820835	1052675	1313315	
624099	828099	1060899	1322499	
630 35	835395	1069155	1331715	
636803	842723	1077443	1340963	
643203	850083	1085763	1350243	
649635	857475	1094115	1359555	
656099	864899	1102499	1368899	
662595	872355	1110915	1378275	
669123	879843	1119363	1387683	
675683	887363	1127843	1397123	
682275	894915	1136355	1406595	
688899	902499	1144899	1416099	
695555	910115	1153475	1425635	
702243	917763	1162083	1435203	

On peut changer ces Fractions en nombres entiers, pour les ajoûter ensemble, si au lieu de supposer 1 pour le Diametre du Cercle, on suppose 100000000, & alors au lieu du Numerateur commun 8, on aura celuy-cy, 800000000, qui étant divisé par les Dénominateurs de la Table precedente, sçavoir premierement par 3, & ensuite par 35. par 99, par 195, par 323, &c.

&c. on aura en leur place d'autres nombres tels que vous les voyez dans la Table suivante.

Table de 315 parties de la circonference d'un Cercle dont le Diametre est 100000000.

266666667	312236366	313178896	313501379
22857143	71206	18852	8544
8080808	66121	18141	8325
4102564	61562	17469	8114
2476780	57459	16834	7911
1656315	53753	16233	7716
305840277	312546467	313266425	313541989
1185185	50394	15663	7528
889878	47340	15123	7346
692641	44556	14611	7171
554400	42010	14124	7003
453772	32677	13661	6840
309616153	312770444	313339607	313577877
378250	37532	13220	6682
320128	35557	12800	6531
274442	33734	12400	6384
237883	32047	12019	6242
208171	30484	11655	6105
311035027	312939798	313401701	313609821
183697	29033	11307	5972
163299	27683	10974	5844
146119	26424	10656	5719
131514	25250	10352	5599
118994	24152	10060	5482
311778650	313072340	313455050	313638437
108181	23125	9780	5369
98778	22161	9513	5260
90549	21257	9255	5153
83307	20407	9009	5050
76901	19606	8772	4950
312236366	313178896	313501379	313664219

313664219	313777588	313848706	313897483
4853	2891	1917	1363
4759	2848	1893	1349
4668	2805	1870	1335
4579	2764	1848	1322
4492	2723	1825	1308
313687570	313791619	313858059	313904160
4408	2684	1804	1295
4327	2645	1782	1282
4247	2607	1761	1269
4170	2569	1740	1256
4095	2533	1720	1244
313708817	313804657	313866866	313910506
4022	2497	1700	1231
3951	2462	1680	1219
3881	2428	1661	1207
3814	2395	1642	1196
3748	2362	1623	1184
313728233	313816801	313875172	313916543
3684	2330	1605	1173
3622	2298	1587	1161
3561	2267	1569	1150
3501	2237	1552	1139
3443	2207	1535	1128
313746044	313828140	313883020	313922294
3387	2178	1518	1118
3332	2150	1501	1107
3278	2122	1485	1097
3226	2095	1469	1087
3175	2068	1453	1077
313762442	313838753	313890446	313927780
3125	2041	1438	1067
3076	2016	1422	1057
3028	1990	1407	1047
2981	1965	1392	1038
2936	1941	1378	1028
313777588	313848706	313897483	313933017

313933017	313956008	313974757	313990339
1019	823	678	569
1010	816	673	565
1001	810	668	561
992	803	664	557
983	797	659	554
313938022	313960057	313978099	313993145
975	790	654	550
966	784	649	546
958	778	645	543
949	772	640	539
941	766	635	536
313942811	313963947	313981322	313995859
933	760	631	532
925	754	627	529
917	748	622	525
909	742	618	522
902	737	613	519
313947397	313967688	313984433	313998486
894	731	609	515
886	726	605	512
879	720	601	509
872	715	597	506
864	709	592	
313951792	313971289	313987437	314000528
857	704	588	
850	699	584	
843	694	580	
836	688	577	
830	683	573	
313956008	313974757	313990339	

Si l'on ajoûte enſemble tous ces Nombres, comme nous avons fait icy de cinq en cinq, leur ſomme 314000528 ſera la circonference du Cercle, dont le Diametre eſt 100000000. Ainſi vous voyez que le Diametre d'un Cercle eſt à ſa circonference, environ comme 100000000 à 314000528, ou bien en moindres termes, comme 100 à 314. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Ludolphe de Cologne a trouvé par des Polygones inscrits & circonscrits, à la maniere d'Archimede, que le Diametre du Cercle étant 1000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, sa circonference est entre ces deux Nombres,

314, 159, 265, 358, 979, 323, 846, 264, 338, 327, 950,
314, 159, 265, 358, 979, 323, 846, 264, 338, 327, 951,

Dans les petits calculs, on peut se servir de la Raison d'Archimede, qui est celle de 7 à 22, & qui differe de celle de 100, à 314, en ce que 22 est un nombre trop grand, & 314 un nombre trop petit; mais ce défaut n'est pas si considerable que l'excés, c'est pourquoy dans la pratique il vaudra mieux se servir de la Raison de 100 à 314, pour les petits calculs, & dans les grands calculs de la Raison de 100000 a 314159, &c.

THEOREME XV.

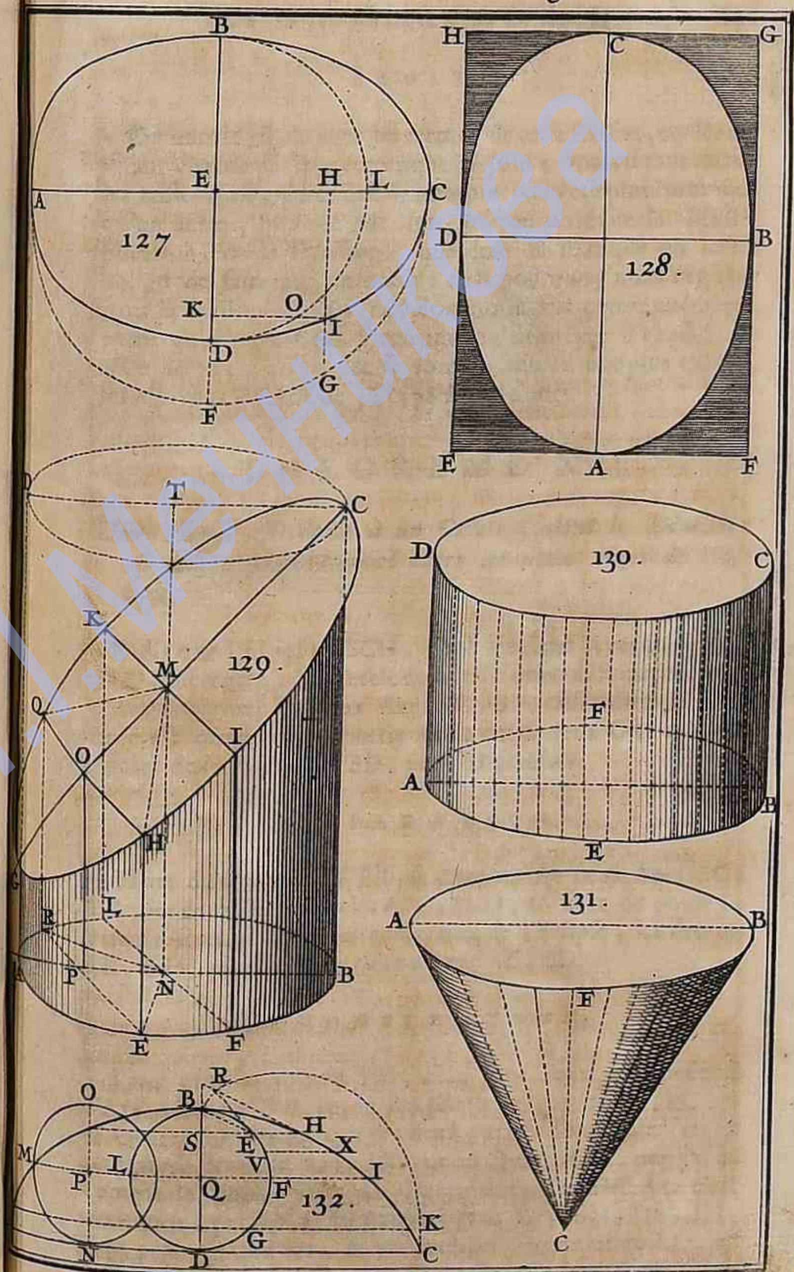
L'Aire d'un Cercle est au Quarré de son Diametre environ comme 785 est à 1000.

Planche 15. 126. Fig. JE dis que l'Aire du Cercle EFGH, est au Quarré ABCD de son Diametre EG, comme 785 est à 1000, c'est à dire que si l'Aire du Cercle EFGH est de 785 pieds quarrez, le Quarré circonscrit ABCD en contiendra environ 1000.

DEMONSTRATION.

Si l'on suppose que le Diametre EG soit de 100 pieds courans, auquel cas l'Aire du Quarré ABCD sera de 10000 pieds quarrez, la circonference EFGH, sera de 314 pieds courans, *par Theor.* 14. & le Rectangle sous le Diametre & la circonference sera de 31400 pieds quarrez, & sa moitié donnera 15700 pieds quarrez pour le double de l'Aire du Cercle, *par Theor.* 13. c'est pourquoy en prenant la moitié de cette moitié, on aura 7850 pieds quarrez pour l'Aire du Cercle EFGH. Ainsi vous voyez que l'Aire du Cercle EFGH est au Quarré ABCD de son Diametre EG, comme 7850 à 10000, ou en moindres termes, comme 785 à 1000. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCO-



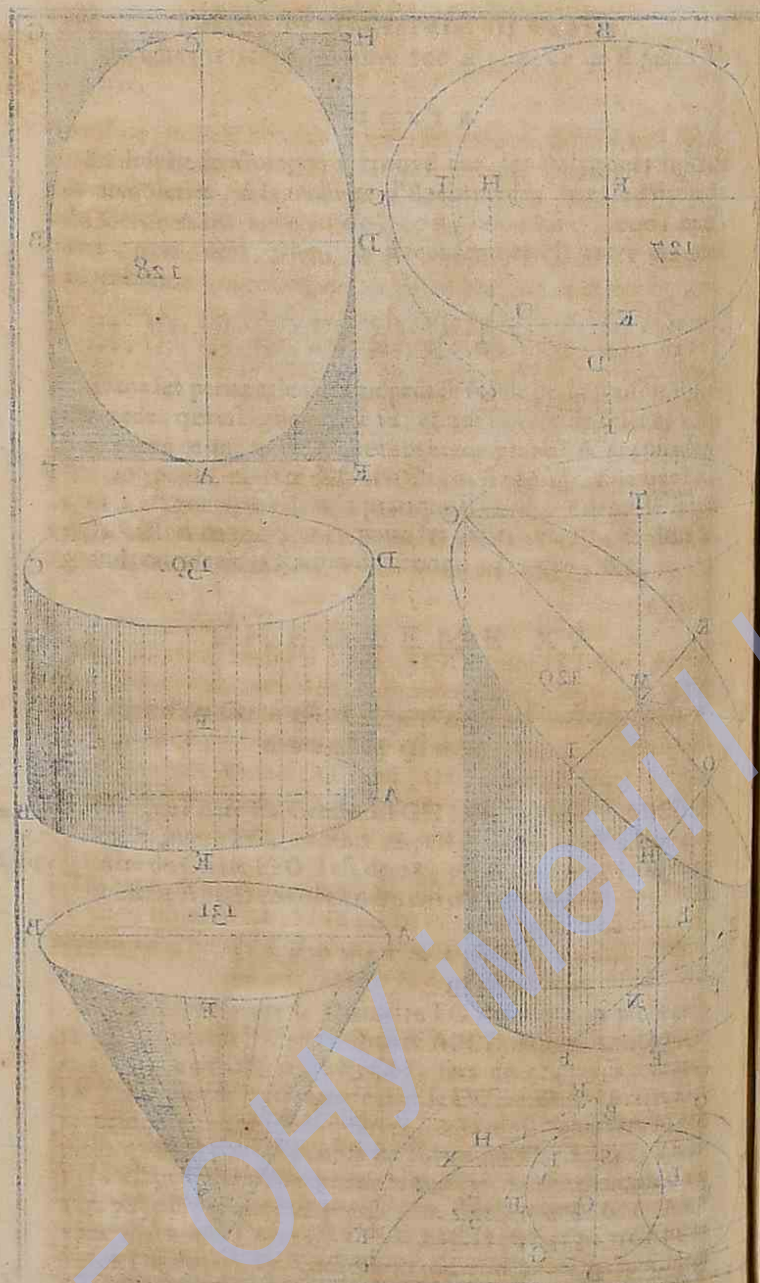


Planche 15. 126. Fig.

SCOLIE.

On auroit pû abreger les termes de cette Raiſon, en les diviſant chacun par leur commune meſure 5, mais il vaut mieux les laiſſer ainſi, parce que le nombre 1000 eſt plus commode qu'un autre, puiſque par ſon moyen on évite la Multiplication, ou la Diviſion, que dans la pratique on ſeroit obligé de faire par un autre : c'eſt pourquoy nous negligerons la Raiſon de 11 à 14, dont on ſe ſert communément, parce qu'elle n'eſt pas ſi commode, ni même ſi exacte que celle de 785 à 1000 ; & ſi vous en voulez une plus exacte, ſervez-vous de celle de 785398 à 1000000.

THEOREME XVI.

Une Ellipſe eſt égale à un Cercle, dont le Diametre eſt moyen proportionnel entre les deux Axes de l'Ellipſe.

JE dis que l'Ellipſe ABCD, dont les deux Axes ſont AC, BD, eſt égale à un Cercle dont le Diametre eſt moyen proportionnel entre les deux Axes AC, BD, c'eſt à dire que l'Ellipſe eſt moyenne proportionnelle entre deux Cercles, qui ont les deux Axes AC, BD, pour Diametres. Planche 16. 127. Fig.

PREPARATION.

Faites du centre E de l'Ellipſe, autour des deux Axes AC, BD, les deux Demi cercles AFC, BLD, & tirez du point I, pris à diſcretion ſur la circonference de l'Ellipſe, les droites IK, GH, paralleles aux deux Axes AC, BD.

DEMONSTRATION.

Parce que les droites ED, HI, ſont deux ordonnées à l'Axe AC, *par Déf.* 10. le Rectangle des parties AE, EC ou le Quarré EF, parce que ces deux parties ſont égales, eſt au Rectangle des deux AH, HC, ou au Quarré GH, *par* 35. 3. comme le Quarré DE, au Quarré IH, *par Déf.* 35. c'eſt pourquoy, par 22. 6. les quatre lignes EF, GH, DE, IH, ſont proportionnelles, & en doublant la premiere EF, & la troiſiéme DE, qui ſont les antecedens de cette Proportion, l'on connoîtra que la Raiſon de la ligne GH, qui eſt une ordonnée dans le Cercle AC, eſt à l'ordonnée IH de l'Ellipſe, comme le grand Axe AC, au petit BD. D'où il eſt aiſé de

Planche 16. 127. Fig. de conclure *par* 12. 5. en tirant d'autres ordonnées communes au Cercle AC, & à l'Ellipse, que toutes les ordonnées du Cercle AC, c'est à dire le Cercle AC, est à toutes les ordonnées de l'Ellipse, ou à l'Ellipse, comme le grand Axe AC, au petit BD.

Pareillement parce que les droites CE, IK, sont deux ordonnées à l'Axe BD, *par Déf.* 10. le Rectangle des parties BE, ED, ou le Quarré BE, parce que ces deux parties sont égales, est au Rectangle des deux BK, DK, ou au Quarré KO, *par* 35. 3. comme le Quarré CE, au Quarré KI, *par Déf.* 35. C'est pourquoy *par* 22. 6. les quatre lignes BE, KO, CE, KI, sont proportionnelles, & en doublant la premiere BE, & la troisiéme CE, qui sont les antecedens de cette Proportion, l'on connoîtra que la Raison de la ligne KO, qui est une ordonnée dans le Cercle BD, est à l'ordonnée KI dans l'Ellipse, comme le petit Axe BD, au grand AC. D'où il est aisé de conclure *par* 12. 5. en tirant d'autres ordonnées communes au Cercle BD, & à l'Ellipse, que toutes les ordonnées du Cercle BD, c'est à dire le Cercle BD, est à toutes les ordonnées de l'Ellipse, ou à l'Ellipse, comme le petit Axe BD, au grand AC.

Puisque donc l'Ellipse est au Cercle AC, comme le grand Axe AC, au petit BD, & que le Cercle BC est à l'Ellipse, aussi comme le grand Axe AC, au petit BD, il s'ensuit que l'Ellipse est moyenne proportionnelle entre les deux Cercles AC, BD, & que par consequent elle est égale au Cercle, dont le Diametre est moyen proportionnel entre les deux Axes AC, BD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XVII.

L'Aire d'une Ellipse, est au Rectangle de ses deux Axes, environ comme 785 est à 1000.

128. Fig. JE dis que l'Ellipse ABCD est au Rectangle EFGH des deux Axes AC, BD, environ comme 785 à 1000, de sorte que si l'Aire de l'Ellipse ABCD est de 785 pieds quarrez, celle du Rectangle circonscrit EFGH, sera d'environ 1000 pieds quarrez.

DEMONSTRATION.

Parce qu'un Cercle est au Quarré de son Diametre, comme 785 à 1000, *par Theor.* 15. si à la place des deux premiers termes, sçavoir du Cercle, & du Quarré de son Diametre, on met une Ellipse, & le Rectangle sous ses deux

deux Axes, qui sont en même Raison, parce que *par Theor.* 16. une Ellipse est égale à un Cercle, dont le Diametre est moyen proportionnel entre ses deux Axes, & par consequent tel que le Quarré de son Diametre est égal au Rectangle sous ses deux Axes, *par* 17. 6. on connoîtra qu'une Ellipse est au Rectangle sous ses deux Axes, comme 785 à 1000. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 16. 128. Fig.

SCOLIE.

La Raison de 11 à 14 peut aussi servir, mais elle n'est pas tout à-fait si exacte, & si vous en voulez une tres-exacte, servez-vous de celle de 785398 à 1000000, comme dans le Cercle. On void aisément par ce Theorême, que les Ellipses sont entre elles comme les Rectangles sous leurs deux Axes, & que celles qui ont deux Axes égaux, sont entre elles comme les deux autres Axes. D'où il est aisé de conclure que deux Ellipses sont égales entre elles, quand leurs Axes sont reciproquement proportionnels.

THEOREME XVIII.

Si l'on coupe un Cylindre droit par un Plan incliné à sa base, la section sera une Ellipse, dont le petit Axe sera égal au Diametre de la base du Cylindre.

JE dis que si l'on coupe le Cylindre droit ABCD, dont la base est le Cercle AEBL, & l'Axe est la ligne TN perpendiculaire à la même base, par le Plan GHCK incliné à cette base, la section GICK sera une Ellipse, dont le petit Axe sera égal au Diametre AB de la base. 129. Fig.

PREPARATION.

Faites passer par l'Axe TN, & par le Diametre AB, un Plan, qui étant perpendiculaire au Plan de la base AEBL, *par* 18. 11. coupera le Cylindre par le Plan rectangulaire ABCD, & la section GICK, par la ligne droite CG, qui representera la longueur de la courbe GICK, & qui étant prolongée rencontrera le Diametre AB aussi prolongé en un point comme S, où se fait l'angle de l'inclination des deux Plans GICK, AEBL, & où se termine le Plan triangulaire SBC, qui est perpendiculaire au Plan de la base AEBL, de sorte que tous les points de la ligne CG répondent perpendiculairement à tous les points du Diametre AB, comme tous les points du Plan GICK répondent perpendiculairement à tous les points du Plan AEBL.

Tirez

Plan che 16. 129. Fig. Tirez à volonté dans le Plan GICK, les deux lignes IK, HQ, perpendiculaires à la ligne CG, & sur la Surface du Cylindre par les deux points HI, les deux lignes HE, IF, perpendiculaires à la base AEBL, & enfin dans le Plan du Cercle AEBL, par les points E, F, les deux lignes ER, FL, perpendiculaires au Diametre AB, qui les divisera en deux également aux points P, N, *par* 3. 3. Cette construction est équivalente à celle qu'on feroit en coupant le Cylindre par les deux Plans IKLF, HQRE, perpendiculaires à la base AEBL; & au Plan triangulaire SBC, ce qui fait voir que tous les points des communes sections IK, FL, se répondent perpendiculairement les uns aux autres, aussi-bien que ceux des deux communes Sections HQ, ER, & que par consequent tous les points de la figure mixtiligne HIKQ répondent perpendiculairement à tous les points de la figure mixtiligne EFLR.

DEMONSTRATION.

Il est évident *par* 6. 11. que les deux lignes IK, FL, étant perpendiculaires au même Plan SBC, sont paralleles entre elles, & qu'elles sont aussi égales, *par* 34. 1. parce que la figure IKLF est un Parallelogramme. On connoîtra de la même façon que les deux lignes HQ, ER, sont égales & paralleles entre elles, parce que la figure HQRE est aussi un Parallelogramme.

Il est évident aussi que les deux points I, F, étant également éloignez du Plan SBC, à cause de la ligne IF parallele à ce Plan, les deux lignes IM, FN, qui ont été faites perpendiculaires au même Plan, sont égales entre elles: & comme la ligne FN est la moitié de la ligne FL, ou IK son égale, la ligne IM sera aussi la moitié de la ligne IK. On démontrera de la même façon, que la ligne HO est la moitié de la ligne HQ. D'où il suit *par Déf.* 10. que la ligne CG est un Diametre à l'égard des ordonnées IK, HQ, qui sont paralleles entre elles, *par* 29. 1. parce que chacune a été faite perpendiculaire au Diametre CG, lequel par consequent sera un Axe. Ainsi nous sçavons que la ligne CG est le grand Axe de la courbe GICK, & par consequent IK le petit Axe, en supposant que le point M soit au milieu de l'Axe CG, auquel cas le point N sera le centre du Cercle AEBL, dont le Diametre AB, ou FL, est par consequent égal au petit Axe IK. Il ne reste donc plus qu'à démontrer, que la courbe GICK est la circonference d'une Ellipse.

Parce que les deux Plans HQRE, IKLF, sont paralleles entre eux, comme étant perpendiculaires au même Plan AEBL, les deux lignes AB, CG, sont coupées proportionnellement par ces deux Plans, *par* 17. 11. & parce que le Rectangle de

des lignes GO, OC, est *par* 23. 6. au Rectangle des lignes GM, MC, en Raison composée de la Raison des côtez GO, GM, ou de la Raison des lignes AP, AN, & de la Raison des côtez OC, MC, ou de la Raison des lignes PB, NB: & que pareillement le Rectangle des lignes AP, PB, ou *par* 35. 3. le Quarré EP, ou HO, est au Rectangle des lignes AN, NB, ou au Quarré FN, ou IM, en Raison composée des mêmes Raisons; il s'ensuit que le Rectangle des lignes GO, OC, est au Rectangle des lignes GM, MC, comme le Quarré HO, est au Quarré IM, & *par Déf.* 35. que la courbe GICK est la circonference d'une Ellipse. *Ce qu'il falloit démontrer.* Plan-che 16. 129. Fig.

SCOLIE.

Comme tous les points de l'Ellipse GICK correspondent à tous les points du Cercle AEBL, & que les Diametres AB, CG, sont coupez proportionnellement par tous les Plans perpendiculaires au Plan SBC, il est aisé de conclure en inscrivant à la maniere d'Archimede un Polygone regulier d'une infinité de côtez dans le Cercle AEBL, que ce Cercle est à l'Ellipse, comme le Diametre AB égal au petit Axe IK, est au grand Axe CG, ce que nous avons déja démontré au *Theor.* 16. & que le *Segment d'Ellipse* GHQ, est à toute l'Ellipse GICK, comme le Segment de Cercle correspondant AER, est à tout le Cercle AEBL: & pareillement que le *Secteur d'Ellipse* GQMH est à toute l'Ellipse GICK, comme le Secteur de Cercle correspondant ARNE, est à tout le Cercle AEBL, &c.

THEOREME XIX.

L'Espace terminé par la Cycloïde & par la circonference du Cercle generateur, qui luy sert de base, est triple du même Cercle generateur.

JE dis que l'espace ACB terminé par la Cycloïde ABC, dont l'Axe est BD, & par la base AC, qui est égale à la circonference du Cercle generateur BFDL, dont le Diametre est le même Axe BD, est triple du même Cercle generateur BFDL: ce que nous aurons démontré, en faisant voir que l'espace BFDCH est égal au Cercle generateur. Pour cette fin il faut démontrer auparavant, que comme la base AC est égale à la circonference BFDL, ou la Demi-base AD à la Demi-circonference BLD, aussi une ligne droite quelconque ML parallele à la Demi-base AD est égale à l'arc correspondant BL. 132. Fig.

DI-

Planche 16. 132. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on donne la diſpoſition MNO au Cercle generateur, en le plaçant en N, en ſorte que le Diametre NO ſoit parallele au Diametre BD, ou perpendiculaire à la baſe AC, on connoîtra par la generation de la Cycloïde, que la partie AN eſt égale à l'arc correſpondant MN, ou DL, & par conſequent la partie ND, ou PQ, ou ML, égale à l'arc OM, ou BL. *Ce qu'il falloit premierement démontrer.*

Si l'on diviſe par penſée la Demi-circonference BFD en une infinité de parties égales aux points E, F, G, &c. en ſorte que les arcs BE, BF, BG, &c. ſoient en progreſſion arithmetique, & que par les points E, F, G, &c. on tire à la baſe AC, autant de paralleles, comme EH, FI, GK, &c. qui étant égales à leurs arcs correſpondans, ſeront auſſi en progreſſion arithmetique, on connoîtra *par Theor.* 10. que leur ſomme, ou l'eſpace BFDCH, eſt égal à la moitié du produit ſous la plus grande CD égale à la Demi-circonference BFD, & le Diametre BD, qui peut paſſer pour le nombre de leur multitude, car bien qu'elles ne le diviſent pas en parties égales, neanmois cette inégalité eſt recompenſée par l'uniformité qui ſe rencontre de part & d'autre depuis le centre Q du Cercle generateur. Or comme le produit ſous le Rayon DQ & la Demi-circonference CD eſt l'aire du Cercle generateur *par Theor.* 13. & que ce même produit eſt la moitié du produit ſous le Diametre BD & la Demi-circonference CD, il s'enſuit que l'eſpace BFDCH eſt égal à l'aire du Cercle generateur BFDL. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

Nous démontrerons icy par occaſion ce que nous avons avancé ſans aucune preuve dans nôtre *Dictionnaire Mathematique*, ſçavoir que deux touchantes correſpondantes de la Cycloïde & du Cercle generateur placé au milieu de l'eſpace terminé par la Cycloïde, comme HR, ER, ſe coupent au point R, qui appartient à la *Ligne d'évolution* du Demi-cercle BFD, c'eſt à dire à la courbe BRC, qu'on décriroit en mouvant continuellement l'extremité d'un filet tendu & attaché par ſon autre extremité au point D, aprés avoir été appliqué le long de la Demi-circonference BFD, & alors la partie de ce filet, qui ſeroit tenduë, comme ER, toucheroit la courbe BFD au point E, & ſeroit égale à l'arc correſpondant EB, & par conſequent à la ligne correſpondante EH. Il faut donc démontrer que la touchante ER eſt égale à la ligne correſpondante EH.

Pour

Pour cette fin, imaginez la droite VX parallele & infiniment proche de la ligne EH, auquel cas les arcs EV, HX, pourront paſſer pour des lignes droites, & pour des parties des touchantes ER, HR, & la difference des deux paralleles EH, VX, ou des deux arcs BE, BV, ſera égale à la ligne EV, & enfin dans les Triangles ſemblables REH, RVX, on aura *par* 4. 6. cette Analogie, RV, RE :: VX, EH, & en *diviſant*, on aura celle-cy, EV, RE :: EV, EH, qui fait connoître que la touchante RE eſt égale à la ligne EH, & que par conſequent le point R appartient à la Ligne d'évolution BRC. *Ce qu'il falloit démontrer.* D'où il eſt aiſé de conclure que la touchante HR de la Cycloïde eſt parallele à la correſpondante BE, qui diviſe l'angle SER en deux également, &c. Planche 16. 132. Fig.

THEOREME XX.

La Surface convexe d'un Cylindre droit eſt égale au Rectangle ſous ſa hauteur & la circonference de ſa baſe.

JE dis que la Surface convexe du Cylindre droit ABCD eſt égale à un Rectangle, qui a pour baſe la circonference de la baſe AEBF, & pour hauteur la hauteur AD, ou BC du Cylindre. 130. Fig.

DEMONSTRATION.

Si par tous les points de la circonference AEBF, on imagine autant de lignes paralleles entre elles & à la hauteur AD, ou BC leſquelles ſeront égales entre elles, on connoîtra que la Surface du Cylindre ABCD eſt compoſée d'une infinité de petits Rectangles égaux, dont la hauteur commune eſt la même que celle du Cylindre : & comme la ſomme de tous ces Rectangles infinis, ou la Surface du Cylindre droit ABCD, eſt *par* 1. 2. égale au Rectangle ſous la hauteur commune AD, ou BC du Cylindre & la ſomme des baſes des mêmes Rectangles, il s'enſuit que la même Surface eſt égale au Rectangle ſous la hauteur AD, ou BC du Cylindre & la circonference AEBF du Cercle qui ſert de baſe au Cylindre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

La verité de ce Theorême ſera encore évidente, ſi l'on déplie par penſée la Surface du Cylindre ABCD, en la faiſant rouler ſur un Plan, car on connoîtra aiſément par cette circonvolution entiere, que la Surface de ce Cylindre ainſi étenduë occupera ſur ce Plan un Rectangle, qui aura pour longueur la circonference AEBF, qui ſe trouvera étenduë en ligne droite, & pour largeur la hauteur AD, ou BC du Cylindre.

THEO

THEOREME XXI.

La Surface convexe d'un Cylindre droit est au Rectangle sous sa hauteur & le Diametre de sa base, environ comme 314 est à 100.

Planche 16. 130. Fig. JE dis que la Surface du Cylindre droit ABCD, est au Rectangle sous sa hauteur AD, ou BC, & le Diametre AB de sa base AEBF, comme 314 est à 100.

DEMONSTRATION.

Parce que la Surface convexe du Cylindre droit ABCD est égale au Rectangle sous sa hauteur AD, ou BC, & la circonference de sa base AEBF, *par Theor.* 20. ce Rectangle, ou la Surface du Cylindre ABCD sera au Rectangle sous la même hauteur AD, ou BC, & le Diametre AB de sa base, comme la circonference AEBF, est au Diametre AB, *par* 1. 6. c'est pourquoy si à la place de cette circonference AEBF, & de son Diametre AB, on met 314, & 100, qui sont en même Raison, *par Theor.* 14. on connoîtra que la Surface du Cylindre ABCD, est au Rectangle sous sa hauteur AD, ou BC, & le Diametre AB de sa base, comme 314 est à 100. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXII.

La Surface convexe d'un Cone droit est égale à la moitié du Rectangle sous le côté du Cone, & la circonference de sa base.

341 Fig. JE dis que la Surface convexe du Cone droit ABC, est égale à la moitié du Rectangle sous son côté AC, ou BC, & la circonference de sa Base AEBF.

DEMONSTRATION.

Si par tous les points de la circonference AEBF, on tire des lignes droites à la pointe C, ces lignes droites formeront une infinité de petits Triangles isoscéles égaux entre eux & de même hauteur qui est le côté du Cone: & parce que chacun de ces Triangles égaux est égal à la moitié d'un Rectangle de même base & de même hauteur, *par* 41. 1. il s'ensuit que leur somme, ou la Surface du Cone est égale à la moitié de la somme de tous les Rectangles, c'est à dire au seul Rectangle sous le côté du Cone AC ou BC, & la circonference de la base AEBF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Planche 16. 131. Fig.

Ou bien divisez par pensée le côté AC, ou BC, du Cone en une infinité de parties égales, & décrivez de la pointe C, comme Pole, par les points de division autant de circonferences de Cercle, qui seront en Progression arithmetique: & parce que la somme de toutes ces circonferences, ou quantitez en Progression arithmetique, qui remplissent la Surface du Cone, est égale à la moitié du produit sous la plus grande, qui est la circonference de la base AEBF, & le nombre de leur multitude, qui est le côté AC, ou BC, *par Theor.* 10. il s'ensuit que la Surface du Cone ABC, est égale à la moitié du Rectangle sous son côté AC, ou BC, & la circonference de sa base AEBF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXIII.

La Surface convexe du Cone droit est au Rectangle sous son côté & le Diametre de sa base, environ comme 157 est à 100.

JE dis que la Surface convexe du Cone droit ABC, est au Rectangle sous son côté AC, ou BC, & le Diametre AB de sa base AEBF, comme 157 est à 100. 131. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que la Surface du Cone ABC, est *par Theor.* 22. égale à la moitié du Rectangle sous le côté AC, ou BC, & la circonference AEBF de sa base, ou égale au Rectangle sous le côté AC, ou BC, & la Demi-circonference AEB, ce Rectangle, ou la Surface du Cone ABC, sera au Rectangle sous le même côté AC, ou BC, & le Diametre AB de la base, comme la Demi-circonference AEB, au Diametre AB, c'est à dire *par Theor.* 14. comme 157 à 100. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXIV.

La Surface convexe d'un Cone droit tronqué est égale à la moitié du Rectangle sous son costé, & la somme des circonferences des deux bases opposées & paralleles.

Planche 17. 133. Fig. JE dis que la Surface convexe du Cone droit tronqué ABCD, est égale à la moitié du Rectangle sous son côté AD, ou BC, & la somme des circonferences des deux bases opposées & paralleles AEBF, CODG.

DEMONSTRATION.

Si l'on divise par pensée chacune des deux circonferences AEBF, CODG, en autant de parties égales infiniment plus petites l'une que l'autre, & que par les points opposez des divisions on tire autant de lignes droites, qui seront égales entre elles, & au côté AD, ou BC, on connoîtra que la Surface du Cone tronqué ABCD, est composée d'une infinité de petits Trapezoïdes égaux entre eux, & de même hauteur qui est le côté AD, ou BC, du Cone tronqué: & parce que chacun de ces Trapezoïdes égaux est égal à la moitié du Rectangle sous la même hauteur, ou sous le même côté AD, ou BC, & la somme des deux côtez opposez, & paralleles, *par Theor.* 4. il s'ensuit que leur somme, ou la Surface du Cone tronqué est égale à la moitié de la somme de tous les Rectangles, c'est à dire au seul Rectangle sous le côté AD, ou BC, du Cone tronqué, & la somme des deux circonferences opposées AEBF, CODG. *Ce qu'il falloit démontrer.*

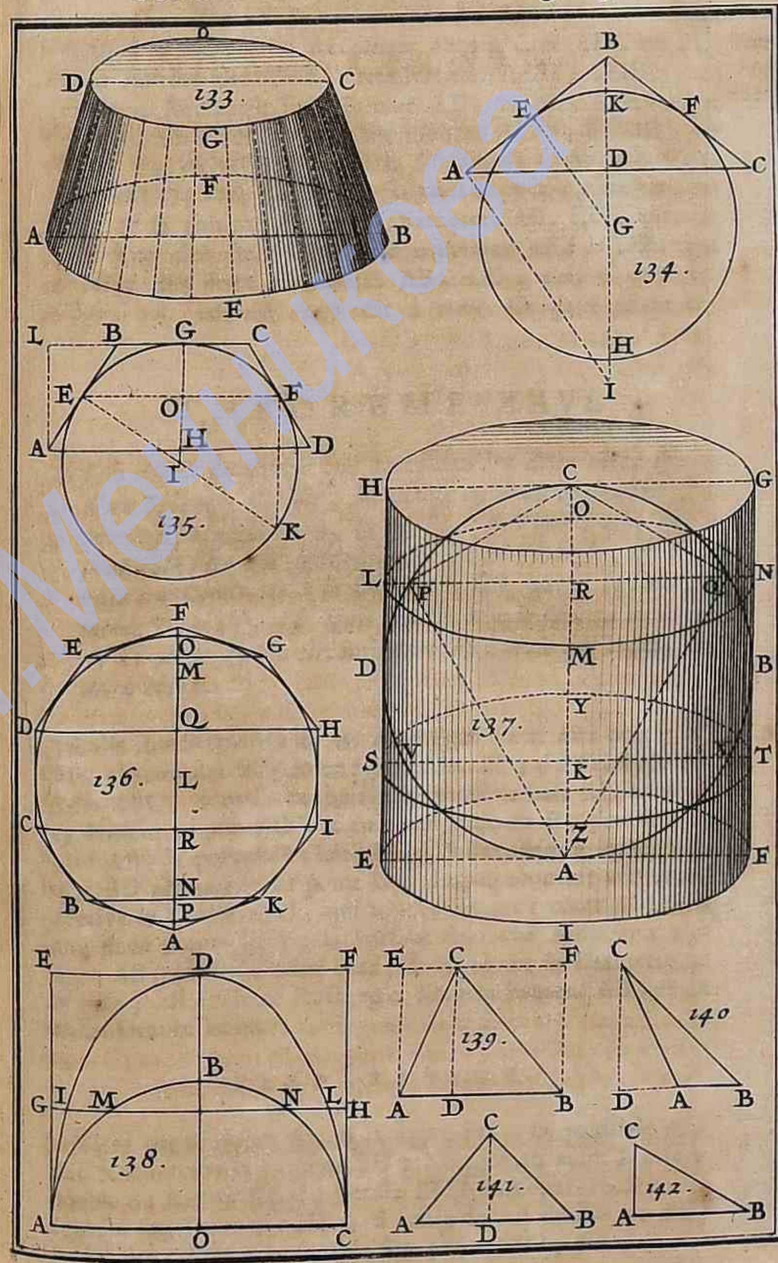
THEOREME XXV.

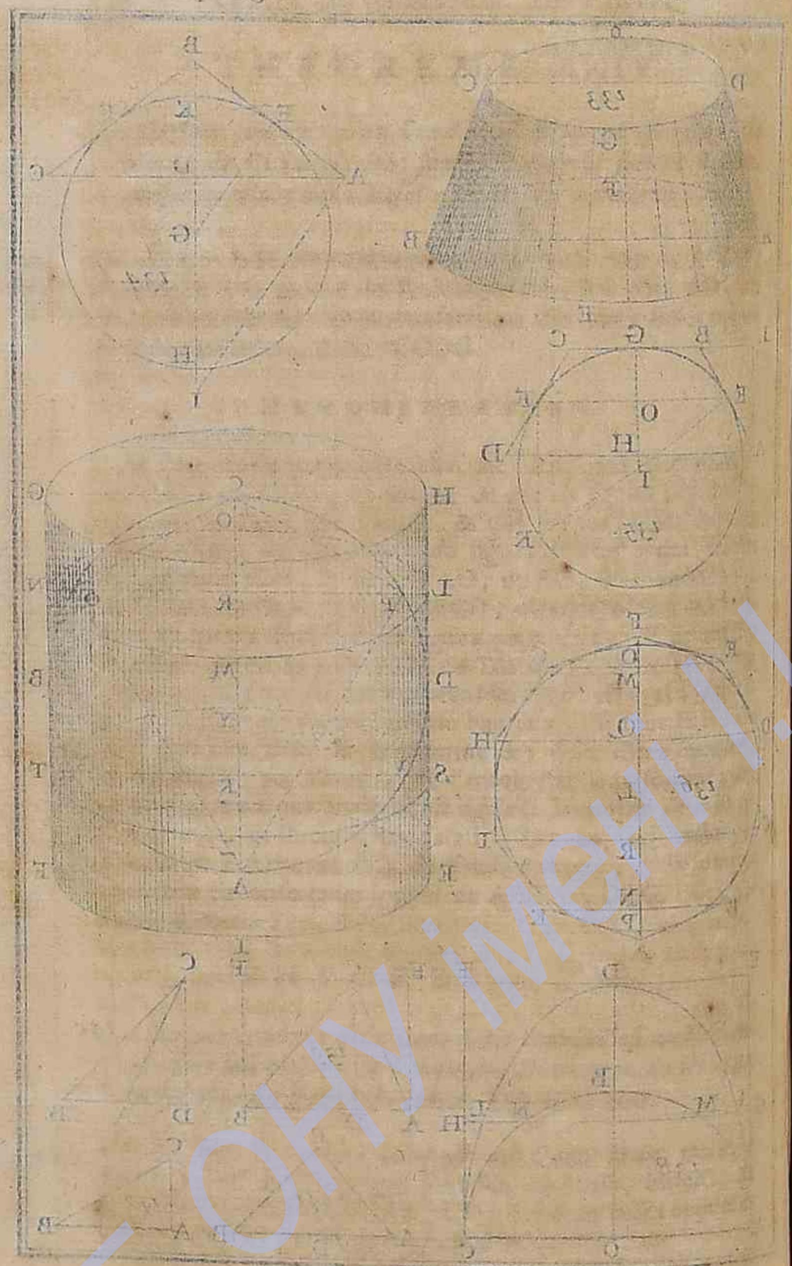
La Surface convexe d'un Cone droit tronqué est au Rectangle sous son côté & la somme des Diametres de ses deux bases opposées, environ comme 157 est à 100.

133. Fig. JE dis que la Surface convexe du Cone droit tronqué ABCD, est au Rectangle sous son côté AD, ou BC, & la somme des Diametres AB, CD, des deux bases opposées AEBF, CODG, comme 157 est à 100.

DEMONSTRATION.

Parce que la Surface du Cone droit tronqué ABCD, est égale





égale à la moitié du Rectangle sous le côté AD, ou BC, & la somme des deux circonferences AEBF, CODG, ou égale au Rectangle sous le côté AD, ou BC, & la moitié de la somme des deux circonferences AEBF, CODG, *par Theor.* 24. ce Rectangle, ou la Surface du Cone droit tronqué ABCD, sera au Rectangle sous le même côté AD, ou BC, & la somme des deux Diametres AB, CD, comme la somme des deux Demi-circonferences AEB, COD, à la somme des deux Diametres AB, CD, c'est à dire *par Theor.* 14. comme 157 est à 100. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 17. 133. Fig.

THEOREME XXVI.

Si l'on décrit un Cercle qui touchant les deux côtez égaux d'un Triangle isoscéle, les divise en deux également aux points d'attouchement, la Surface du Cone droit, qui a pour côté l'un des deux côtez égaux du Triangle, & pour base un Cercle dont le Diametre soit égal à la base du même Triangle, est égale au Rectangle sous la hauteur du Triangle & la circonference du Cercle qui touche les deux côtez.

JE dis que si l'on divise en deux également aux points E, F, chacun des deux côtez égaux AB, BC, du Triangle isoscéle ABC, dont la hauteur BD divise la base AC en deux également au point D, & que par le point E, l'on tire au côté AB, la perpendiculaire EG, qui rencontre icy la hauteur BD prolongée au point G, duquel comme centre on décrive le Cercle EFH, qui touche les deux côtez AB, BC, aux deux points E, F; la Surface du Cone droit qui a la ligne AB, ou BC, pour côté, & AC pour le Diametre de sa base, est égale au Rectangle sous la hauteur BD, & la circonference EFH. 134. Fig.

Preparation.

Tirez par le point A, à la ligne EG, la parallele AI, qui rencontrant la hauteur BD prolongée au point I, sera double du Rayon GE du Cercle EFH, & par consequent égale à son Diametre HK, à cause de AB double de BE, & des deux Triangles semblables ABI, EBG, &c.

Demonstration.

Parce que *par* 8. 6. les deux Triangles Rectangles ABD, ADI, Planche 16. 134. Fig. ADI, qui composent le Triangle rectangle ABI, sont semblables, & que *par* 4. 6. la Raison des deux lignes AB, BD, est égale à celle de la ligne AI, ou KH, à la ligne AD, si à la place des deux dernieres lignes KH, AD, considerées comme les Diametres de deux Cercles, on met leurs circonferences qui sont en même Raison, on connoîtra que la Raison des deux lignes AB, BD, est égale à la Raison de la circonference EFH, à la circonference du Diametre AD, moitié de la circonference du Diametre double AC, & *par* 16. 6. que le Rectangle sous AB, & la circonference du Diametre AD, c'est à dire *par Theor.* 22. la circonference du Cone droit ABC, est égale au Rectangle sous BD, & la circonference EFH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXVII.

Si l'on décrit un Cercle, qui touchant les deux côtez égaux, & le plus petit des deux autres côtez paralleles d'un Trapezoïde isoscéle, divise chacun de ces trois côtez en deux également aux points d'attouchement, la Surface du Cone droit tronqué, qui a pour côté l'un des deux côtez égaux du Trapezoïde, & pour base un Cercle dont le Diametre est égal au plus grand des deux côtez paralleles, est égale au Rectangle sous la ligne perpendiculaire tirée entre les deux côtez paralleles, & la circonference du Cercle qui touche les trois côtez.

135. Fig. JE dis que si l'on divise en deux également aux points E, F, G, chacun des deux côtez égaux AB, CD, & le plus petit BC des deux côtez paralleles AD, BC, du Trapezoïde isoscéle ABCD, & qu'on décrive par les trois points E, F, G, le Cercle EGFK, qui touchera les trois côtez AB, BC, CD, aux mêmes points E, F, G, & qui aura son centre dans la ligne GH, qui divise à angles droits & en deux également les deux côtez paralleles AD, BC; la Surface du Cone droit tronqué qui a la ligne AB ou CD, pour côté, & AD pour le Diametre de sa base, est égale au Rectangle sous la hauteur GH, & la circonference EGFK.

PREPARATION.

Tirez par le point E, le Diametre EK, qui sera perpendiculaire au côté AB, *par* 18. 3. & par les deux points E, F, la droite EF qui étant parallele aux deux côtez AD, BC, coupera à angles droits & en deux également au point O,

la

la droite GH, tirez encore du point A, au côté BC prolongé, la perpendiculaire AL, qui sera égale à la ligne GH, & fera le Triangle rectangle ALB semblable au Triangle rectangle EOI, comme il sera aisé à connoître à celuy, qui considerera que l'angle L étant droit, les deux autres LAB, LBA, sont ensemble égaux à un droit, *par* 32. 1. & par consequent aux deux LAB, BAH, ou EIO, ou LBA, &c. D'où il suit que le Triangle rectangle ALB est aussi semblable au Triangle EFK, qui est rectangle en F, *par* 31. 3. Planche 16. 135. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que la ligne EF divise les deux côtez AB, CD, en deux également, & qu'ainsi elle est moyenne arithmetique entre les deux côtez AD, BC, ausquels elle est parallele, elle sera égale à la moitié de leur somme, *par Prop.* 3. *Chap.* 4. *L.* 1. *Trigon.* C'est pourquoy en considerant ces trois lignes arithmetiquement proportionnelles BC, EF, AD, comme des circonferences de Cercle, la circonference de la moyenne EF sera égale à la moitié de la somme des circonferences des deux extrémes AD, BC.

Dans les Triangles semblables ALB, EFK, on connoît *par* 4. 6. que la ligne AB est à la ligne AL, ou GH son égale, comme le Diametre EK, est au Diametre EF: c'est pourquoy si à la place de ces deux Diametres EF, EK, on met leurs circonferences qui sont en même Raison, on connoîtra que la ligne AB est à la ligne GH, comme la circonference EGKF, est à la circonference EF, ou à la moitié des deux AD, BC, & *par* 16. 6. que le Rectangle sous le côté AB, & la moitié de la somme des deux circonferences AD, BC, est égal au Rectangle sous la hauteur GH, & la circonference EGFK, c'est à dire *par Theor.* 24. à la Surface du Cone droit tronqué ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXVIII.

Si autour d'un Cercle on circonscrit un Polygone régulier d'un nombre pair de côtez, & que l'on fasse tourner ce Cercle avec son Polygone autour d'un Diametre qui passe par deux angles opposez le Cercle formera par cette circonvolution entiere une Sphere, & le Polygone un corps terminé par plusieurs Surfaces convexes, dont la somme sera égale au Rectangle sous la circonference du Cercle & la ligne droite ou Axe tiré par les deux angles opposez du Polygone.

Planche 17. 136. Fig. JE dis que si autour du Cercle, dont le centre est L, & le Diametre est OP, on circonscrit un Polygone regulier d'un nombre pair de côtez, par exemple le Decagone ABCDEFGHIK, & qu'autour de la ligne AF, comme Axe, on fasse rouler ce Polygone, il se formera par cette circonvolution entiere un corps, dont les Surfaces convexes qui le bornent, sçavoir celles des deux Cones droits EFG, BAK, des deux Cones droits tronquez DEGH, BCIK, & du Cylindre CDHI, sont ensemble égaux au Rectangle sous l'Axe AF, & la circonference du Cercle generateur, dont le Diametre est OP.

DEMONSTRATION.

Parce que *par Theor.* 26. la Surface du Cone droit EFG est égale au Rectangle sous la circonference du Diametre OP, & la partie de l'Axe FM, & pareillement la Surface du Cone droit BAK égale au Rectangle sous la circonference du Diametre OP, & la partie correspondante de l'Axe AN: & que *par Theor.* 27. la Surface du Cone droit tronqué DEGH est égale au Rectangle sous la circonference du même Diametre OP, & la partie correspondante de l'Axe MQ, & pareillement la Surface du Cone droit tronqué BCIK, égale au Rectangle sous la circonference du Diametre OP, & la partie de l'Axe RN: & qu'enfin *par Theor.* 20. la Surface du Cylindre CDHI est égale au Rectangle sous la circonference du Diametre de sa base CI, égal au Diametre OP, & sa hauteur CD, ou la partie correspondante de l'Axe QR; il est aisé de conclure *par* 1. 2. que toutes ces Surfaces sont ensemble égales au Rectangle sous la circonference du Diametre OP, & tout l'Axe AF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEO-

THEOREME XXIX.

La Surface d'une Sphere est égale au Rectangle sous son Diametre, & la circonference du Cercle de ce Diametre.

JE dis que la Surface de la Sphere ABCD, dont le Diametre est AC, est égale au Rectangle sous ce Diametre AC, & la circonference ABCD du Cercle de ce Diametre, qui est la même que celle du grand Cercle de la Sphere. Planche 17. 137. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que le Cercle peut être consideré comme un Polygone regulier d'une infinité de côtez, & que la Sphere est produite par la circonvolution entiere du Cercle ou Polygone ABCD, autour de son Diametre AC, comme Axe, toutes les Surfaces convexes qui sont produites par cette circonvolution, étant ensemble les mêmes que celles de la Sphere, seront égales, *par Theor.* 28. au Rectangle sous l'Axe AC, & la circonference du Cercle generateur ABCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il suit de ce Theorême, que *la Surface d'une Sphere est quadruple de celle de son grand Cercle*, parce que le Rectangle sous son Diametre & sa circonference, auquel la Surface de la Sphere est égale, est quadruple du Cercle de ce Diametre, puisque *par Theor.* 13. ce Cercle est égal à la moitié du Rectangle sous sa circonference & son Diametre.

COROLLAIRE II.

Il s'ensuit aussi que *la Surface de la Sphere ABCD, est égale à celle du Cylindre circonscrit EFGH*, dont la hauteur EH, ou FG est égale au Diametre AC de la Sphere, & la base EIFK a pour Diametre la ligne EF égale au même Diametre AC: parce que *par Theor.* 20. la Surface de ce Cylindre est comme la Surface de la Sphere, égale au Rectangle sous la hauteur EH, ou AC, & la circonference du Cercle EIFK, dont le Diametre EF est égal au même Diametre AC de la Sphere.

 COROL-

Planche 17. 137. Fig.

COROLLAIRE III.

Il s'ensuit encore que *la Surface de la Sphere ABCD, est au Quarré EFGH, de son Diametre AC, environ comme* 314. *est à* 100, parce que *par Theor.* 21. la Surface du Cylindre circonscrit EIFGH, est au même Quarré EFGH, qui est le Rectangle sous sa hauteur EH, & le Diametre EF de sa base EIFK, dans la même Raison de 314 à 100.

COROLLAIRE IV.

Il s'ensuit encore, que si l'on coupe la Sphere ABCD, & le Cylindre circonscrit EIFGH par un Plan perpendiculaire à l'Axe AC, comme par le Plan LMNO, la Surface de la partie Cylindrique HLMNG, est égale à celle de la portion correspondante de la Sphere PQC, & pareillement la partie du Cylindre LEIFNO est égale à la portion correspondante de la Sphere PAQ.

COROLLAIRE V.

D'où il suit que la Surface d'un Segment de Sphere, comme PCQ, est égale au Rectangle sous sa hauteur CR, & la circonference ABCD du grand Cercle de la même Sphere, parce que la Surface du Cylindre HLMNG, auquel elle est égale, *par Coroll.* 4. est égale à un semblable Rectangle, *par Theor.* 20. & que par consequent la Surface du même Segment de Sphere PCQ, est au Rectangle HLNG, sous sa hauteur CR, & le Diametre LN de la Sphere, environ comme 314 est à 100, parce que la Surface du Cylindre HLMNG, auquel elle est égale, *par Coroll.* 4. est au même Rectangle HLNG, dans la même Raison de 314 à 100; par *Theor.* 21.

THEOREME XXX.

La Surface d'un Segment de Sphere est égale à un Cercle, dont le Rayon est égal à la corde de la moitié de l'arc de ce Segment.

137. Fig. JE dis que la Surface du Segment de Sphere PCQ, est égale au Cercle, dont le Rayon est égal à la corde CP, ou CQ de la moitié de l'arc PCQ: & que pareillement la Surface du Segment de Sphere ADPQB est égale au Cercle, dont le Rayon est égal à la corde AP, ou AQ de la moitié de l'arc PAQ.

Planche 17. 137. Fig.

DEMONSTRATION.

Parce que l'angle APC est droit, *par* 31. 3. & que la ligne PR est perpendiculaire à l'hypotenuse AC du Triangle rectangle APC, on connoît *par* 8. 6. que chacun des deux Triangles rectangles ARP, CRP, est équiangle au grand APC, & *par* 4. 6. que la ligne CP est moyenne proportionnelle entre les deux AC, CR, & pareillement la ligne AP moyenne proportionnelle entre les deux AC, AR; c'est pourquoy *par* 17. 6. le Quarré CP sera égal au Rectangle des lignes AC, CR, & pareillement le Quarré AP sera égal au Rectangle des lignes AC, AR: & comme ces deux Rectangles ont une même hauteur AC, ils seront entre eux comme leurs bases CR, AR, *par* 1. 6. Ainsi le Quarré CP, sera au Quarré AP, comme CR est à AR, ou comme LH est à LE, & si à ces deux dernieres lignes LH, LE, considerées comme des hauteurs, on donne la circonference ABCD du grand Cercle de la Sphere pour base commune, on connoîtra *par* 1. 6. que le Quarré CP est au Quarré AP, comme le Rectangle sous LH, & la circonference ABCD, est au Rectangle sous LE, & la même circonference ABCD, c'est à dire *par Coroll.* 5. *Theor.* 29. comme la Surface du Segment de Sphere PCQ, est à la Surface du Segment de Sphere ADPQB.

Puisque donc le Quarré CP est au Quarré AP, comme la Surface du Segment PCQ, est à la Surface du Segment ADPQB, on connoîtra *en composant*, que le Quarré AC est au Quarré AP, comme la Surface de la Sphere ABCD, est à la Surface du Segment ADPQB: & si à la place des Quarrez des lignes AC, AP, considerées comme des Rayons de Cercle, on met les aires de ces Cercles, qui sont en même Raison, *par* 2. 12. on connoîtra que le Cercle du Rayon AC, est au Cercle du Rayon AP, comme la Surface de la Sphere ABCD, est à la Surface du Segment ADPQB; & parce que les deux antecedens sont égaux, sçavoir le Cercle du Rayon AC, & la Surface de la Sphere ABCD, parce que *par* 2. 12. le Cercle du Rayon AC est quadruple du grand Cercle de la Sphere, dont le Rayon n'est que la moitié du Rayon AC, & que la Surface de la Sphere ABCD est aussi quadruple de l'aire de son grand Cercle, *par Coroll.* 1. *Theor.* 29. il s'ensuit que les deux Consequens sont aussi égaux, sçavoir le Cercle du Rayon AP, & la Surface du Segment ADPQB, & que par consequent le Cercle du Rayon CP est aussi égal à la Surface du Segment PQC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXXI.

La Surface d'une Zone est égale à celle d'un Cylindre de même hauteur, & ayant pour base le grand Cercle de la Sphere.

Planche 71. 137. Fig. JE dis que si l'on coupe la Sphere ABCD, & le Cylindre circonscrit EIFGH, par les deux Plans LMNO, SZTY, perpendiculaires à l'Axe AC, la Surface de la Zone VPQX est égale à celle du Cylindre LSZTNO, dont la hauteur LS est égale à la hauteur RK de la Zone, & la base SZTY est égale au grand Cercle de la Sphere.

DEMONSTRATION.

Parce que la Surface du Segment de Sphere CPQ est égale à celle du Cylindre HLMNG, *par Coroll. 4. Theor. 29.* & que pareillement la Surface du Segment VPCQX, est égale à celle du Cylindre correspondant HSZTG, la difference des Surfaces des deux Segmens, qui est la Surface de la Zone VPQX, sera égale à la difference des Surfaces des deux Cylindres, qui est la Surface du Cylindre LSZTNO. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ce Theorême, que la Surface d'une Zone, comme VPQX, est égale au Rectangle sous sa hauteur RQ, & la circonference ABCD du grand Cercle de la Sphere, parce que la Surface du Cylindre LSZTNO, à laquelle elle est égale, est égale au même Rectangle, *par Theor. 20.*

SCOLIE.

138. Fig. En finissant cette Theorie, je desabuseray icy en passant plusieurs qui croyent que comme la Surface de la Zone AMNC de l'Hemisphere ABC, dont le centre est O, & le Diametre est AC, est égale à la Surface du Cylindre correspondant AGHC: de même la Surface de la Zone AILC du Demi-spheroïde ADC, dont le petit Axe est le même Diametre AC de l'Hemisphere ABC, & la moitié du grand Axe est OD, est égale à la Surface du même Cylindre AGHC de même base & de même hauteur que l'Hemisphere, & que le Demi-spheroïde, & que par consequent les Surfaces des

des deux Zones AILC, AMNC, sont égales entre elles; ce qui n'est pas vray, étant certain que celle de la Zone AILC du Demi-spheroïde est plus petite que celle de la Zone AMNC de l'Hemisphere, ou que celle de la Zone AGHC du Cylindre, comme il a été tres bien démontré par le R. P. Nicolas de la Compagnie de Jesus, qui est le plus habile Geometre que je connoisse de ce temps. D'où il est aisé de conclure que la Surface du Cylindre AEFC est plus grand que la Surface du Demi-spheroïde inscrit ADC, & qu'ainsi il n'est pas vray ce qu'un Auteur moderne a avancé dans un Livre qu'il a publié à Paris en l'année 1691. & aussi Errard dans sa *Geom. L. 3. Chap. 10.* sçavoir que la Surface d'un Spheroïde long est à la Surface d'une Sphere inscrite dans le même Spheroïde, comme le grand Axe est au petit. Voyez la fin de la *Sect. 2. Chap. 3. Liv. 2. Mecan.* Planche 171. 138. Fig.

CHAPITRE II.

Des Problêmes.

APrés avoir expliqué la Theorie à part, nous viendrons à la pratique, sans y mettre d'autre démonstration qu'en citant le Theorême d'où elle dépend, afin qu'étant ainsi dégagée de la Theorie, elle en soit plus agreable & plus propre pour ceux qui se contentent de la seule pratique.

PROBLEME I.

Mesurer un Triangle.

L'Aire d'un Triangle se peut connoître en deux façons, sçavoir par le moyen d'un de ses côtez connus, & de sa perpendiculaire, qu'on peut mesurer mécaniquement sur le terrain: ou bien au moyen de ses trois côtez connus, sans aucune perpendiculaire, comme vous allez voir. Planche 17. 139. Fig.

Pour donc mesurer l'Aire du Triangle ABC, par le moyen du côté connu AB, qui soit par exemple de 28 toises, & de sa perpendiculaire CD, que nous supposerons de 24 toises: multipliez ensemble ces deux nombres 28 & 24 du côté AB, & de sa perpendiculaire CD, & la moitié du produit 672, donnera 336 toises quarrées pour l'Aire du Triangle proposé ABC, parce qu'en multipliant le côté AB par sa perpendiculaire CD, le produit 672 est l'aire du Rectangle AEFB, Planche 17. 139. Fig. AEFB, de même base & de même hauteur, qui est double de celle du Triangle ABC, *par* 41. 1.

Pour mesurer le même Triangle ABC, par le moyen de ses trois côtez connus AB, que nous

```
                 42    42    42
       ⎧ 28      28    26    30
côtez  ⎨ 26      —     —     —
       ⎩ 30      14    16    12
         —
         84 contour du Triangle.
         —
         42 moitié du contour.
         14 premier excés.
         —
        588 premier produit.
         16 second excés.
       ————
       9408 second produit.
         12 troisiéme excés.
      —————
    11|28|96 troisiéme produit.
     3|  |  ( 336 Aire du Triangle.
   —————————
    228
     63
    ———
    3996
     666
     ———
     000
```

supposerons de 28 toises, AC de 26 toises, & BC de 30 toises, ajoûtez ensemble ces trois nombres 28, 26, 30, & la somme 84 sera le contour du Triangle ABC, dont la moitié est 42. Otez separément de cette moitié 42 les côtez 28, 26, 30, pour avoir les trois excés 14, 16, 12. Multipliez la même moitié 42 par l'un des trois excés precedens, comme par le premier 14, & le produit 588 par l'un des deux autres excés, 16, 12, comme par 16, & le second produit 9408 par le dernier excés 12, pour avoir un troisiéme produit 112896, dont la Racine quarrée donnera 336 toises quarrées pour le contenu du Triangle proposé ABC, comme il est évident *par Theor.* 2.

Remar-

Remarques sur la premiere Methode.

Il est évident qu'au lieu de multiplier la base AB par la hauteur CD, & prendre la moitié du produit pour avoir l'Aire du Triangle ABC, on peut multiplier la base AB par la moitié de la perpendiculaire CD: ou bien la moitié de la base AB par la perpendiculaire CD: mais dans la pratique, il est plus commode de multiplier ensemble ces deux lignes, & de prendre la moitié de leur produit, parce qu'elles n'auront pas toûjours exactement leurs moitiez, & que la multiplication des Fractions est toûjours moins commode que celle des Nombres entiers. Planche 17. 139. Fig.

Lorsque la perpendiculaire CD ne sera pas bien longue, on la pourra mesurer tres-facilement par le moyen d'un cordeau attaché au point C, en l'étendant jusqu'à ce qu'il touche & raze le côté AB, pour avoir dans la longueur de ce cordeau ainsi tendu, celle de la perpendiculaire CD: autrement, sçavoir lorsque la perpendiculaire CD sera bien longue, auquel cas on ne peut pas si commodément étendre le cordeau, on trouvera par le moyen du Bâton de l'Arpenteur, ou autrement le point D de la perpendiculaire, comme nous avons enseigné dans nôtre *Introduction aux Mathematiques*, aprés quoy il ne sera pas difficile de mesurer avec une chaîne & plusieurs Piquets, la longueur de la perpendiculaire CD, au cas qu'on la puisse parcourir, soit qu'elle tombe au dedans ou au dehors du Triangle, mais dans la pratique il sera plus facile de la faire tomber en dedans, parce qu'on est délivré de la peine de prolonger en dehors le côté sur lequel on veut tirer cette perpendiculaire.

Si l'on ne peut pas mesurer actuellement la longueur de la perpendiculaire CD, & qu'on puisse mesurer les trois côtez AB, AC, BC, on pourra connoître par leur moyen la perpendiculaire CD, *par* 13. 2. lorsqu'elle tombe au dedans du Triangle ABC, ou *par* 12. 2. lorsqu'elle tombe en dehors. 140. Fig.

Que si l'on ne peut mesurer que deux côtez, comme les deux AB, AC, que l'on mesure à la place du troisiéme côté BC, l'angle A, afin que la perpendiculaire CD se puisse trouver *par Probl.* 2. *Chap.* 3. *L.* 2. *Trig.* & ensuite l'Aire du Triangle ABC, qui se peut aussi connoître *par Theor.* 1.

Lorsque le Triangle ABC sera isoscéle, comme si les deux côtez AC, BC, sont égaux entre eux, il ne sera pas besoin de calcul pour trouver les Ségmens AD, BD, dont l'un doit être connu pour connoître la perpendiculaire CD, parce que chacun est égal dans ce cas à la moitié de la base AB. 141. Fig.

Il sera encore moins besoin de calcul pour l'invention de la perpendiculaire, lorsque le Triangle sera rectangle, car si par exemple l'angle A est droit, le côté AC servira de perpendiculaire 142. Fig.

Planche 17. 142. Fig. diculaire à l'égard de la base AB ; ainsi il n'y aura qu'à multiplier ensemble les deux côtez AB, AC, & prendre la moitié du produit, pour avoir l'Aire du Triangle proposé ABC. Comme si le côté AC est de 15 toises, & le côté AB de 20, multipliant ensemble ces deux nombres 15, & 20, & prenant la moitié de leur produit 300, on aura 150 toises quarrées pour l'Aire du Triangle rectangle ABC.

Si les deux côtez AB, AC, sont exprimez par des toises & par des pieds, on les reduira en pieds, en multipliant les toises par 6, parce qu'une toise courante a six pieds courans, & en ajoûtant au produit les pieds de surplus, & l'on trouvera l'Aire en pieds quarrez, que l'on reduira si l'on veut en toises quarrées, en les divisant par 36, parce qu'une toise quarrée a 36 pieds quarrez. Cecy s'entendra mieux dans le Problême suivant.

Remarques sur la seconde Methode.

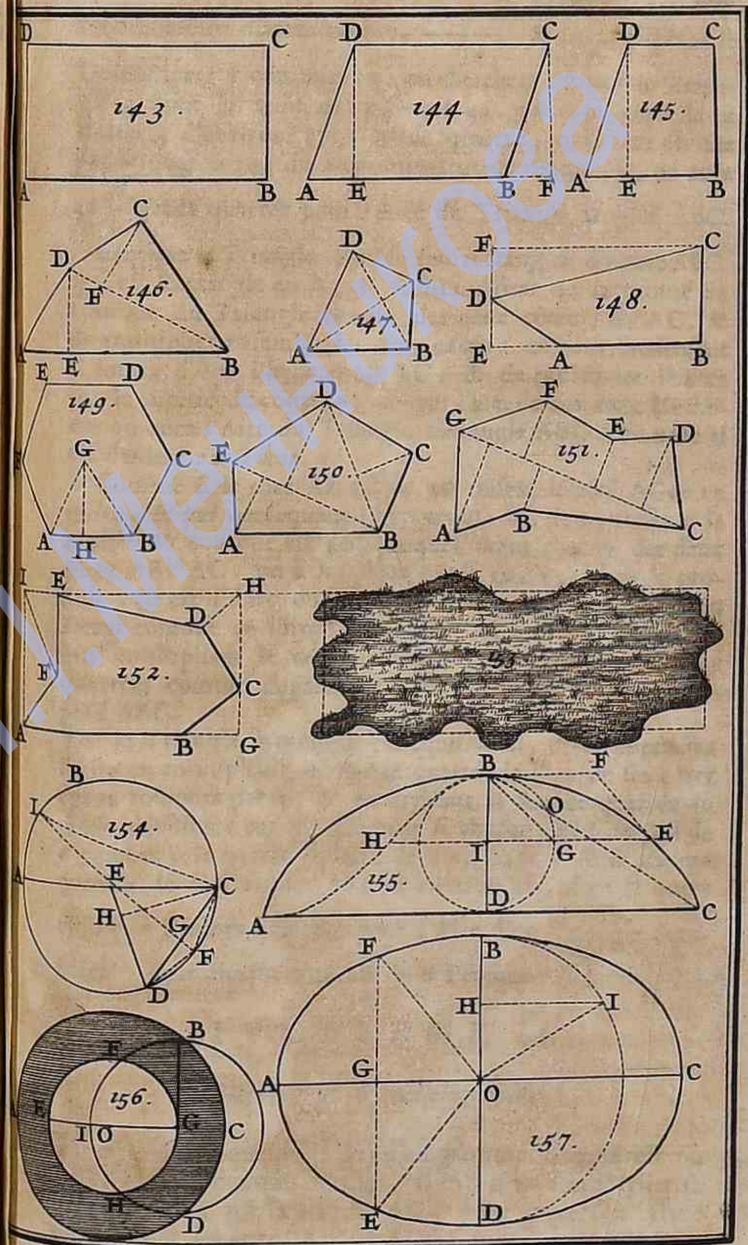
Si l'on ne peut pas exactement prendre la moitié de tous les côtez, en sorte qu'il reste 1, il ne faut pas negliger ce reste, parce que l'Aire du Triangle se trouveroit tres-imparfaite : & alors pour éviter les fractions, c'est à dire pour faire qu'il ne reste rien, on doublera tous les côtez, & par ces côtez doubles on cherchera l'Aire du Triangle qui sera quadruple de celle du Triangle proposé, *par* 19. 6. c'est pourquoy si l'on divise cette Aire trouvée par 4, on aura celle qu'on cherche.

140. Fig. Comme si le côté AB est de 6 Perches, le côté AC de 11, & le côté BC de 12, en doublant ces trois côtez on a 12, 22, 24, pour les côtez d'un Triangle quadruple, dont l'Aire se trouvera d'environ 135 Perches quarrées, dont le quart donne $33\frac{3}{4}$ Perches quarrées pour l'Aire du Triangle proposé ABC.

Si les côtez du Triangle à mesurer sont exprimez par des fractions de diverse espece, on reduira ces fractions en même dénomination, aprés quoy on negligera leur Dénominateur commun, ayant seulement égard aux Numerateurs considerez comme les côtez du Triangle, & alors l'Aire qu'on trouvera doit être divisée par le quarré du Dénominateur commun, pour avoir l'Aire du Triangle proposé.

Comme si le côté AB est de $3\frac{1}{2}$, ou $\frac{7}{2}$ pieds, AC de $4\frac{2}{3}$, ou $\frac{14}{3}$ pieds, & BC de $5\frac{3}{4}$, ou $\frac{23}{4}$ pieds, on reduira ces trois fractions impropres $\frac{7}{2}$, $\frac{14}{3}$, $\frac{23}{4}$, en ces trois au-

tres



tres de même dénomination, $\frac{42,\ 56,\ 69,}{12}$ & en negligeant le Dénominateur commun 12, on cherchera l'Aire d'un Triangle, dont les trois côtez soient 42, 56, 69, laquelle se trouvera d'environ 4702 pieds quarrez, qui étant divisez par le quarré 144 du Dénominateur commun 12, on aura $32\frac{47}{72}$ pieds quarrez pour l'Aire du Triangle proposé ABC.

Plan-che 17. 140. Fig.

Lorsque le Triangle proposé sera rectangle, comme ABC, qui est Rectangle en A, il suffira d'ôter de la moitié du contour du Triangle chacun des deux côtez AB, AC, & de multiplier ensemble les deux excés : ou plus facilement il suffira d'ôter l'hypotenuse BC, & de multiplier l'excés par la moitié du contour, car par l'une de ces deux Methodes on aura l'Aire du Triangle rectangle ABC, comme il est évident *par Theor.* 3. 142. Fig.

Comme si le côté AB est de 20 toises, le côté AC de 15 toises, & par consequent l'hypotenuse BC de 25 toises : la moitié du contour est 30, duquel ôtant chacun des deux côtez AB, AC, on a les deux excés 10, 15, dont le produit 150 est l'Aire du Triangle ABC. Ou bien ôtant du Demi-contour 30 l'hypotenuse BC, on a l'excés 5, par lequel multipliant le demi-contour 30, il vient 150 toises quarrées comme auparavant pour l'Aire du Triangle proposé ABC.

Si le Triangle à mesurer est équilateral, on en connoîtra l'Aire en multipliant le quarré-quarré de l'un de ses côtez égaux toûjours par 3, & en divisant la Racine quarrée du produit toûjours par 4. Comme si chacun des côtez est de 6 perches, le quarré-quarré de 6 est 1296, & la Racine quarrée de son triple 3888 est environ 62, dont le quart est $15\frac{1}{2}$ Perches quarrées pour l'Aire d'un Triangle équilateral, dont chaque côté est de 6 Perches.

PROBLEME II.

Mesurer un Parallelogramme.

IL est évident que si le Parallelogramme proposé est un Rectangle, comme ABCD, il n'y a qu'à multiplier sa longueur AB, par sa largeur AC, pour avoir son Aire : comme si la longueur AB est de 125 toises, & la largeur AC de 64 toises, en multipliant ensemble ces deux nombres 125, 64, on aura 8000 toises quarrées pour l'Aire du Rectangle proposé ABCD. Plan-che 18. 143. Fig.

Planche 18. 144. Fig.

Il est évident aussi que si le Parallelogramme proposé est *obliquangle*, comme ABCD, dont les angles sont obliques, il faut multiplier l'un de ses côtez comme AB par sa perpendiculaire DE, qui part de l'angle opposé D, pour avoir son Aire, parce que par cette Multiplication, on a l'Aire du Rectangle DEFC, qui est égal au proposé ABCD, *par* 36. 1. Nous n'en donnons pas un exemple particulier, parce que la chose est trop facile à comprendre.

SCOLIE.

Comme tout l'artifice de ce Problême se reduit à multiplier ensemble deux lignes, & qu'il arrive souvent que ces lignes sont exprimées par des fractions, j'ay crû qu'il étoit à propos de donner icy quelques exemples des difficultez qui peuvent arriver, pour ceux qui manquent de pratique, & qui ne sont pas assez versez dans l'Arithmetique.

Pour trouver l'Aire du Parallelogramme ABCD, dont la base AB soit par exemple de 5 toises & 2 pieds, & la hauteur ED de 4 toises, reduisez ces 4 toises en pieds, en les multipliant par 6, pour avoir en leur place 24 pieds. Reduisez aussi la base AB en pieds, en multipliant par 6 les 5 toises qu'elle contient, pour avoir en leur place 30 pieds, ausquels on ajoûtera les 2 pieds qui sont de surplus, & l'on aura 32 pieds pour la base AB, laquelle étant multipliée par la hauteur DE de 24 pieds, on aura 768 pieds quarrez, qui font 21 toises quarrées & 12 pieds quarrez pour l'Aire du Parallelogramme proposé ABCD.

Ou bien sans reduire les côtez en pieds, multipliez premierement les 5 toises de la base AB, par les 4 toises de la hauteur ED, & vous aurez 20 toises quarrées: & ensuite les 2 pieds de la base AB, par les 4 toises, qui valent 24 pieds, de la même hauteur ED, & vous aurez 48 pieds quarrez, ou 1 toise quarrée & 12 pieds quarrez, tellement qu'on aura en tout 21 toises quarrées & 12 pieds quarrez, comme auparavant, pour la superficie qu'on cherche.

On peut aussi faire cette Multiplication par les parties aliquotes, en cette sorte. Ayant multiplié comme auparavant 5 toises par 4 toises, pour avoir 20 toises quarrées, il reste à multiplier encore 2 pieds par 4 toises, ce qui se fera en divisant 4 par 3, parce que 2 pieds sont la troisiéme partie de la toise qui vaut 6 pieds, & il viendra 1 toise quarrée & 2 pieds de toise quarrée, ce qui fait en tout 21 toises quarrées, & 2 pieds de toise quarrée, ou 12 pieds quarrez, parce qu'un pied de toise quarrée vaut 6 pieds quarrez, sçavoir autant que la toise courante a de pieds courans, comme nous avons dit ailleurs.

Mais

Mais comme la memoire se trouve chargée par cette Methode, & qu'il est facile de s'y tromper, j'aime mieux reduire les côtez qu'il faut multiplier ensemble, en la plus basse espece, quand il y a des especes differentes. Comme si la base AB étoit de 3 toises & 2 pieds, & la hauteur ED de 2 toises & 3 pieds, il faudroit reduire chacune de ces deux lignes en pieds, & multiplier les 20 pieds de la base AB, par les 15 pieds de la hauteur ED, & le produit donneroit 300 pieds quarrez, qui font 8 toises quarrées & 12 pouces quarrez pour l'Aire du Parallelogramme ABCD, comme l'on connoît en divisant par 36 les 300 pieds quarrez trouvez, parce qu'une toise quarrée a 36 pieds quarrez. Planche 18. 144. Fig.

Pareillement si la base AB, & la hauteur ED, étoient exprimez en toises, pieds, & pouces, il les faudroit reduire en la plus basse espece, sçavoir en pouces, en multipliant premierement les toises par 6, parce qu'une toise courante a 6 pieds courans, pour avoir des pieds, ausquels on ajoûtera les pieds de surplus, & en multipliant la somme de ces pieds par 12, parce qu'un pied courant a 12 pouces courans, & l'on aura des pouces, ausquels on ajoûtera les pouces de surplus, aprés quoy on multipliera les pouces de la base AB, par les pouces de la hauteur ED, pour avoir l'Aire qu'on cherche en pouces quarrez, que l'on pourra reduire si l'on veut en pieds quarrez, en les divisant par 144, parce qu'un pied quarré a 144 pouces quarrez, & les pieds quarrez en toises quarrées, en les divisant par 36, parce qu'une toise quarrée a 36 pieds quarrez.

Comme si la base AB étoit par exemple de 5 toises, 3 pieds, & 6 pouces, & la hauteur ED de 2 toises, 4 pieds, & 8 pouces; en reduisant chacune de ces deux lignes en pouces, on aura 402 pouces pour la base AB, & 200 pouces pour la hauteur ED: & si l'on multiplie ensemble ces deux nombres 402, 200, on aura 80400 pouces quarrez pour l'Aire du Parallelogramme ABCD, si l'on reduit ces 80400 pouces quarrez trouvez en pieds quarrez, en les divisant par 144, on aura 558 pieds quarrez, & 48 pouces quarrez: & encore si l'on reduit ces 558 pieds quarrez en toises quarrées, en les divisant par 36, on aura 15 toises quarrées, & 18 pieds quarrez, & en tout 15 toises quarrées, 18 pieds quarrez, & 48 pouces quarrez pour l'Aire qu'on cherche.

On peut venir tout d'un coup aux toises, en divisant les 80400 pouces quarrez trouvez par 5184, qui est la valeur d'une toise quarrée en pouces quarrez, parce qu'une toise courante a 72 pouces courans, & l'on aura 15 toises quarrées, & le reste 2640 sera pris pour des pieds quarrez, lesquels étant divisez par 144, on aura 18 pieds quarrez, & le

 reste

Planche 18. 144. Fig. reste de la division donnera 48 pouces quarrez comme auparavant.

SCOLIE.

Il ne sera pas besoin de mesurer aucune perpendiculaire, lorsque le Parallelogramme proposé sera un Rhombe, parce que son Aire est égale à la moitié du produit sous ses deux Diagonales, comme il est aisé à démontrer.

PROBLEME III.

Mesurer un Trapeze.

145. Fig. PRemierement si le Trapeze proposé est un Trapezoïde, comme ABCD, dont les deux côtez opposez AB, CD, sont paralleles, mesurez exactement la longueur de chacun de ces deux côtez paralleles AB, CD, & aussi celle de leur perpendiculaire DE, & multipliez la somme des deux mêmes côtez AB, CD, par cette perpendiculaire DE, pour avoir en la moitié du produit l'Aire du Trapezoïde proposé ABCD, *par Theor.* 4. Comme si la perpendiculaire DE est de 24 toises, le côté AB de 25, & l'autre côté parallele CD de 16 : la somme de ces deux côtez paralleles AB, CD, est 41, laquelle étant multipliée par la perpendiculaire DE, que nous avons supposé de 24 toises, la moitié du produit 984, donnera 492 toises quarrées pour l'Aire qu'on cherche.

146. Fig. Mais si le Trapeze proposé n'a point de côtez paralleles, comme ABCD, dont le côté AB sera supposé de 21 toises, BC de 15, CD de 8, & AD de 10, on le reduira en deux Triangles par la Diagonale BD, qui soit par exemple de 17 toises. Dans cette supposition, l'Aire du Triangle BCD, dont les trois côtez sont connus, sera de 60 toises quarrées, & celle du Triangle ADB se trouvera de 84 toises quarrées, *par Probl.* 1. C'est pourquoy si l'on ajoûte ensemble ces deux Aires trouvées 60, 84, on aura 144 toises quarrées pour la Surface du Trapeze proposé ABCD.

SCOLIE.

Quand on voudra mesurer les deux Triangles ABD, BCD, par leurs perpendiculaires, on les pourra tirer de tel angle que l'on voudra sur son côté opposé, selon la commodité : comme icy on a tiré la perpendiculaire DE de l'angle D, sur son côté opposé AB, & la perpendiculaire CF de l'angle

l'angle C, sur son côté opposé ou Diagonale BD. Mais quand on le pourra commodément, il sera bon de tirer les deux perpendiculaires sur la même Diagonale BD, parce que cette Diagonale BD étant multipliée par la somme de ses deux perpendiculaires, on aura en la moitié du produit l'Aire du Trapeze proposé ABCD, comme il est évident *par* 1. 2. Planche 18. 146. Fig.

La Diagonale BD se doit mesurer sur le terrain, parce qu'elle n'a point de rapport déterminé avec les quatre côtez, excepté quand le Quadrilatere ABCD est dans un Cercle, auquel cas si l'on nomme a le côté AB, b le côté BC, c le côté CD, & d le côté AD, le quarré de la Diagonale BD sera proportionnel aux trois Plans $ad+bc$, $ab+cd$, $ac+bd$, & le quarré de l'autre Diagonale AC sera proportionnel aux trois Plans $ab+cd$, $ac+bd$, $ad+bc$. Ainsi quand les quatre côtez seront connus, les Diagonales seront aussi connuës, & par consequent l'Aire du Trapeze ABCD. Mais cette Aire se peut trouver indépendamment de la Diagonale AC, ou BD, par cette regle qui a sa démonstration. 147. Fig.

Ayant ajoûté ensemble les quatre côtez AB, BC, CD, AD, ôtez separément de la moitié de leur somme chaque côté, & multipliez ensemble les quatre excés, pour avoir en la Racine quarrée de leur produit plan-plan l'Aire qu'on cherche. Comme si le côté AB est de 100 pieds, le côté BC de 63, le côté CD de 45, & le côté AD de 80, la moitié de la somme de ces quatre côtez 100, 63, 45, 80, est 144, de laquelle ôtant separément les mêmes côtez 100, 63, 45, 80, il reste ces quatre nombres ou excés 44, 64, 81, 99, dont le produit plan-plan est 22581504, duquel la Racine quarrée donne 4752 pieds quarrez pour l'Aire du Quadrilatere proposé ABCD.

Pareillement si le côté AB est de 18 toises, BC de 11, CD de 2, & AD de 23, son contour sera de 54 toises, & sa moitié par consequent de 27 toises, d'où ôtant separément les quatre côtez 18, 11, 2, 23, il reste ces quatre nombres 9, 16, 25, 4, qui se rencontrant quarrez, leur produit plan-plan sera aussi un nombre quarré, sçavoir 14400, dont la Racine quarrée donnera 120 toises quarrées pour l'Aire qu'on cherche.

Si le terrain ne vous permet pas de mesurer commodément aucune des deux Diagonales, décrivez autour du Quadrilatere ABCD le Parallelogramme EBCF, dont l'Aire étant mesurée *par Probl.* 2. aussi bien que celles des deux Triangles AED, CFD, on ôtera la somme de ces deux Aires de celle du Parallelogramme, pour avoir au reste la superficie du Trapeze proposé ABCD. 148. Fig.

PROBLEME IV.

Mesurer un Polygone regulier.

Planche 18. 149. Fig.

POur trouver la superficie d'un Polygone regulier, comme de l'Exagone ABCDEF, dont le centre G est le même que celuy du cercle circonscrit, tirez de ce centre G, sur le milieu d'un des côtez, comme de AB, la perpendiculaire GH, qu'il faudra connoître avant toute autre chose par le moyen du côté connu AB, que nous supposerons de 120 toises, en cette sorte.

Divisez le cercle entier, ou 360 degrez par le nombre des côtez du Polygone, comme icy par 6, le quotient donnera 60 degrez pour l'angle du centre AGB, c'est pourquoy sa moitié, ou l'angle AGH sera de 30 degrez, dont le complement GAH, qui est la moitié de l'angle du Polygone, sera par consequent de 60 degrez. Ainsi dans le Triangle rectangle AGH, on connoît outre les angles, le côté AH de 60 toises, comme étant la moitié du côté AB, que nous avons supposé de 120 toises, c'est pourquoy on pourra trouver l'autre côté, ou la perpendiculaire GH, par cette Analogie,

Comme le Sinus Total	100000
A la Tangente de la moitié de l'angle du Polygone	173205
Ainsi la moitié du costé du Polygone	60
A la perpendicularie GH	103. 5. 6.

qui se trouvera de 103 toises, 5 pieds, & d'environ 6 pouces, par laquelle multipliant le contour de l'Exagone, qui est de 720 toises, la moitié du produit donnera 37410 toises quarrées pour l'Aire de l'Exagone proposé ABCDEF, dont la démonstration est évidente *par Theor. 5.*

SCOLIE.

Tant soit peu qu'on s'éloigne de la veritable longueur de la perpendiculaire, en negligeant les fractions, on s'éloignera sensiblement de la veritable Aire du Polygone, sur tout quand son côté sera d'une grandeur considerable: car pour avoir icy negligé les fractions de pouces dans la longueur de la perpendiculaire, nous nous sommes manqué de deux toises quarrées dans l'Aire de l'Exagone, comme vous connoîtrez en suivant cette Regle particuliere pour trouver autant

autant exactement qu'il est possible l'Aire d'un Polygone regulier, dont le côté est connu. Planche 18. 149. Fig.

Multipliez la Tangente de la moitié de l'angle du Polygone par le costé du même Polygone, & multipliez le produit par le contour du Polygone, pour avoir un second produit, dont le quart étant divisé par le Sinus Total, on aura l'Aire qu'on cherche. Comme dans cet exemple, la moitié de l'angle du Polygone étant de 60 degrez, si l'on multiplie sa Tangente 173205 par le côté du Polygone, que nous avons supposé de 120 toises, on aura ce premier produit 20784600, lequel étant multiplié par le contour du Polygone, qui est de 720 toises, on aura ce second produit 14964912000, dont le quart 3741228000 étant divisé par le Rayon 100000, on aura 37412 toises quarrées pour la superficie de l'Exagone proposé ABCDEF.

C'est par ce Canon que nous avons supputé la Table suivante, qui montre les Aires des Polygones reguliers, depuis le Triangle jusqu'au Dodecagone, le côté du Polygone étant par tout supposé de 1000 toises, ayant choisi ce nombre 1000 plûtôt qu'un autre, parce qu'il est plus commode non-seulement pour la supputation de la Table,

Triangle	433013
Quarré	1000000
Pentagone	1720477
Exagone	2598075
Eptagone	3633526
Octogone	4828427
Enneagone	6181824
Decagone	7694209
Endecagone	9363808
Dodecagone	11196132

mais encore pour son usage, qui est que par son moyen, l'on peut aisément connoître l'Aire d'un Polygone proposé, dont le côté est plus grand & plus petit que de 1000 toises, ou que de 1000 pieds, &c. car comme les Polygones semblables sont entre eux comme les Quarrez de leurs côtez homologues, *par 20. 6.* on connoît aisément qu'il n'y a qu'à multiplier le quarré du côté du Polygone proposé par l'Aire qui luy répond dans la Table precedente, & diviser le produit par le quarré de 1000, qui est 1000000, ce qui se fera en retranchant de ce produit six figures à la droite. Comme icy, on multipliera l'Aire de l'Exagone que l'on trouve dans la Table precedente, sçavoir 2598075, par le quarré 14400 du côté de l'Exagone, que nous avons supposé de 120 toises, & l'on divisera le produit

Planche 18. 149. Fig. duit 3741228000 par 100000, le quotient donnera, comme auparavant, 37412 toises quarrées pour l'Aire qu'on cherche.

PROBLEME V.

Mesurer un Polygone irregulier.

150. Fig. UN Polygone irregulier se mesurera comme le Trapeze, que nous avons reduit en deux Triangles par une Diagonale, sçavoir en reduisant le Polygone irregulier en Triangles par plusieurs Diagonales tirées comme l'on voudra d'un angle à l'autre, & en mesurant *par Probl.* 1. les Aires de tous ces Triangles, parce que leur somme donnera celle du Polygone proposé. C'est ainsi que nous avons reduit le Pentagone ABCDE, aux trois Triangles ABE, BDE, BCD, par les deux Diagonales BE, BD: & c'est de la même façon que l'on pourra reduire en Triangles l'Eptagone irregu-
151. Fig. lier ABCDEFG, ou bien si on le trouve plus commode, on menera une ligne droite par les deux angles les plus éloignez, comme CG, qu'on appelle communément *Ligne fondamentale*, à laquelle on tirera de tous les autres angles autant de perpendiculaires qui diviseront la figure proposée en des Triangles rectangles, & en des Trapezoïdes, dont on pourra connoître les Aires par les *Probl.* 1. 2. pour avoir en leur somme l'Aire qu'on cherche.

SCOLIE.

152. Fig. Lorsqu'il n'est pas libre de tirer des Diagonales au dedans du Polygone à mesurer, comme de l'Exagone ABCDEF, pour le reduire en Triangles, on décrira tout autour le Parallelogramme AGHI, dont l'Aire se pourra connoître *par Probl.* 2. de laquelle si l'on ôte les aires de tous les Triangles qui se forment autour de la figure, & qui se pourront aisément mesurer *par Probl.* 1. le reste sera l'Aire de l'Exagone proposé ABCDEF.

Il est évident que par cette maniere on peut aisément lever par le dehors un Plan accessible sur la terre, comme ABCDEF, parce qu'ayant mesuré bien exactement les côtez de tous les Triangles qui se forment au dedans du Parallelogramme AGHI, il sera facile en prenant les mesures de toutes ces lignes sur une échelle particuliere, ou sur les parties égales du Compas de proportion, de racourcir tous ces Triangles, & avoir ainsi la figure reduite en petit volume sur le papier.

Comme

Comme il arrive souvent que les Terres que l'on veut arpenter sont bornées par des lignes courbes, on prendra ces lignes courbes pour droites, quand la difference sera petite; ou bien on les divisera en plusieurs petites parties, qui pourront passer pour des lignes droites, en considerant la figure comme un Polygone de plusieurs petits côtez, que l'on mesurera, comme il vient d'être enseigné, sans que l'erreur puisse être considerable: ou bien encore en tirant des lignes droites au travers des lignes courbes, en sorte qu'à la veuë elles recompensent en dehors ce qu'elles retrancheront de la figure, sans que l'erreur puisse être sensible, sur tout lorsqu'on veut mesurer sur une carte particuliere le contenu d'un Lac, ou de quelque Province. Planche 18. 152. Fig. 153. Fig.

PROBLEME VI.

Mesurer la circonference d'un Cercle par son Diametre connu.

POur trouver la circonference du Cercle ABCD, dont le Diametre AC soit par exemple de 125 pieds, on multipliera ce Diametre 125 toûjours par 314, & l'on divisera le produit 39250 toûjours par 100, & le quotient donnera 392 pieds, 6 pouces, pour la circonference ABCD qu'on cherche, comme il est évident *par Theor.* 14. qui nous apprend qu'on pourroit aussi multiplier le Diametre 125 par 22, & diviser le produit 2750 par 7, & l'on auroit 392 pieds, 10 pouces pour la circonference ABCD, qui se rencontre plus grande qu'auparavant, parce que comme nous avons remarqué, le nombre 22 est plus grand qu'il ne faut à l'égard du Diviseur 7, comme le nombre 314 est moindre qu'il ne faut à l'égard du Diviseur 100, mais la difference n'est pas si grande. C'est pourquoy la circonference ABCD approchera plus de 392 pieds, 6 pouces, que de 392 pieds 10 pouces: & pour l'avoir encore plus proche, multipliez le Diametre 125 par 314159, & divisez le produit 39269875 par 100000, & alors la circonference ABCD se trouvera de 392 pieds, & d'environ 8 pouces. 154. Fig.

K 4 PRO-

PROBLEME VII.

Mesurer le Diametre d'un cercle par sa circonference connuë.

Planche 18. 154. Fig. POur trouver le Diametre AC d'un cercle, dont la circonference ABCD soit par exemple de 125 toises, multipliez cette circonference 125 toûjours par 100, & divisez le produit 12500 toûjours par 314, le quotient donnera 39 toises & environ 5 pieds pour le Diametre AC qu'on cherche, comme il est évident *par Theor.* 14. où nous avons dit que pour les grands calculs on doit se servir de la Raison de 100000 à 314159, comme pour trouver le Diametre de la Terre, dont la circonference est de 7200 lieuës de Marine, parce qu'on a remarqué qu'un degré de la circonference de la Terre est de 20 lieuës de Marine, on multipliera cette circonference 7200 par 100000, & l'on divisera le produit 720000000, par 314159, le quotient donnera environ 2292 lieuës pour le Diametre qu'on cherche, ou pour la distance qu'il y a d'ici à nos Antipodes, dont la moitié donne 1146 lieuës pour le Demi-diametre de la Terre, ou pour la distance qu'il y a d'icy au centre de la Terre.

PROBLEME VIII.

Mesurer l'Aire d'un Cercle par son Diametre connu.

154. Fig. POur trouver l'Aire du Cercle ABCD, dont le Diametre AC soit par exemple de 125 pieds, on multipliera ce Diametre 125 par sa circonference, qui *par Probl.* 6. a été trouvée de 392 pieds, 8 pouces, ou de 4712 pouces, & le quart du produit donnera 12270 pieds quarrez, & environ 120 pouces quarrez pour l'Aire du cercle proposé ABCD, comme il est évident *par Theor.* 13.

SCOLIE.

Pour éviter les fractions qui arrivent à la circonference du cercle, aprés avoir multiplié le Diametre 125 par 314, ne divisez pas encore le produit 39250 par 100, comme il faudroit faire pour avoir la circonference, mais multipliez-le par le même Diametre 125, pour avoir un second produit

duit 4906250, dont le quart 1226562 $\frac{1}{2}$ étant divisé par 100, vous aurez 12265 pieds quarrez & 90 pouces quarrez pour l'Aire du cercle proposé ABCD. Planche 18. 154. Fig.

Ou bien parce que *par Theor.* 15. le quarré du Diametre d'un cercle est à l'Aire du même cercle, environ comme 1000 à 785, si vous multipliez le Diametre 125 par luy-même, pour avoir son quarré 15625, & ce quarré 15625 toûjours par 785, & que vous divisiez le produit 12265625 toûjours par 1000, vous aurez comme auparavant 12265 pieds quarrez, & 90 pouces quarrez pour l'aire qu'on cherche.

Cette Aire se trouve plus facilement que la premiere, où nous avons negligé les fractions de pouce: & si vous en voulez une troisiéme plus exacte, servez-vous de la Raison de 1000000 à 785398, au lieu de celle de 100 à 785, c'est à dire, multipliez le quarré 15625 du Diametre 125 par 785398, & divisez le produit 12271843750 par 1000000, le quotient donnera 12271 pieds quarrez, & environ 121 pouces quarrez pour la superficie du cercle proposé ABCD.

C'est par cette maniere que nous avons construit la Table suivante, qui montre en nombres entiers & en parties cent-milliémes qui sont separées des entiers par un point à la droite, les Aires des cercles, dont les Diametres sont connus depuis 1 jusqu'à 100.

Table

Table des Aires des Cercles pour un Diametre d'une grandeur connuë, depuis 1, jusqu'à 100.

Diam.	Aires.	Diam.	Aires.
1	0.78540	31	754.76763
2	3.14159	32	804.24771
3	7.06858	33	855.29859
4	12.56637	34	907.92027
5	19.63495	35	962.11275
6	28.27433	36	1017.87601
7	38.48451	37	1075.21008
8	50.26548	38	1134.11494
9	63.61725	39	1194.59060
10	78.53981	40	1256.63706
11	95.03317	41	1320.25431
12	113.09733	42	1385.44230
13	132.73228	43	1452.20120
14	153.93804	44	1520.53084
15	176.71458	45	1590.43128
16	201.06192	46	1661.90251
17	226.98006	47	1734.94454
18	254.46900	48	1809.55736
19	283.52873	49	1885.74099
20	314.15926	50	1963.49540
21	346.36059	51	2042.82062
22	380.13271	52	2123.71663
23	475.47562	53	2206.18344
24	452.38934	54	2290.22104
25	490.87385	55	2375.82944
26	530.92915	56	2463.00864
27	572.55526	57	2551.75863
28	615.75216	58	2642.07942
29	660.51985	59	2733.97100
30	706.85834	60	2827.43338

Diam.

Diam.	Aires.	Diam.	Aires.
61	2922.46656	81	5152.99735
62	3019.07054	82	5281.01725
63	3117.24531	83	5410.60794
64	3216.99087	84	5541.76944
65	3318.30724	85	5674.50173
66	3421.19439	86	5808.80481
67	3525.65235	87	5944.67869
68	3631.68110	88	6082.12337
69	3739.28065	89	6221.13885
70	3848.45100	90	6361.72512
71	3959.19214	91	6503.88219
72	4071.50407	92	6647.01005
73	4185.38681	93	6792.90871
74	4300.84034	94	6039.77817
75	4417.86466	95	7088.21842
76	4536.45979	96	7238.22947
77	4656.62571	97	7389.81131
78	4778.36242	98	7542.96396
79	4901.06993	99	7697.68739
80	5026.54824	100	7853.98163

Ainsi l'on connoît par cette Table, que l'Aire d'un cercle qui a 56 pieds de Diametre, est de 2463 pieds quarrez, & 864 centmilliémes parties, qui valent environ 1 pouce quarré, comme l'on connoît en multipliant le Numerateur 864 par 144, parce qu'un pied quarré a 144 pouces quarrez, & en divisant le produit 124416 par le Dénominateur 100000.

PRO

PROBLEME IX.

Mesurer l'Aire d'un Cercle par sa circonference connuë.

Planche 18. 154. Fig.

POur trouver la superficie du cercle, dont le Diametre est AC, par sa circonference connuë ABCD, qui soit par exemple de 125 toises, comme seroit le contour du Bassin d'une Fontaine, on multipliera cette circonference 125 par le Diametre AC, qui *par Probl.* 7. a été trouvé de 39 toises 5 pieds, ou de 239 pieds, & le quart du produit donnera 1244 toises quarrées, & environ 28 pieds quarrez pour l'Aire du cercle proposé ABCD.

SCOLIE.

Pour éviter les fractions qui arrivent au Diametre du cercle, aprés avoir multiplié la circonference 125 par 100, ne divisez pas encore le produit 12500 par 314, comme il faudroit faire pour avoir le Diametre, mais multipliez-le par la même circonference 125, pour avoir un second produit 1562500, dont le quart 390625 étant divisé par 314, vous aurez 1244 toises quarrées, & environ 1 pied quarré pour l'Aire qu'on cherche.

Comme le second produit 1562500 n'est autre chose que le produit sous le quarré de la circonference & 100, & que la Raison de 100000 à 314159 est plus exacte que celle de 100 à 314, comme nous avons reconnu au *Probl.* 14. on aura l'Aire qu'on cherche, encore plus exactement qu'auparavant, *si on multiplie par* 100000 *le quarré* 15625 *de la circonference* 125, *& qu'on divise le quart* 390625000 *du produit* 1562500000, *par* 314159, *le quotient donnera* 1243 *toises quarrées, & environ* 14 *pieds quarrez pour l'Aire tres-exacte du cercle proposé ABCD.*

PRO-

PROBLEME X.

Mesurer le Diametre d'un Cercle, par son Aire connuë.

PArce que *par Theor.* 13. l'Aire d'un cercle est égale à la moitié du Rectangle sous sa circonference & son Rayon, & par consequent au quart du Rectangle sous sa circonference & son Diametre, il s'ensuit que si par le moyen du Problême suivant, on trouve la circonference, & que par cette circonference on divise le quadruple de l'Aire connuë, on aura le Diametre répondant à cette Aire. Mais comme nous n'avons pas la circonference, on fera ainsi.

Pour trouver le Diametre AC du cercle ABCD, dont l'Aire soit par exemple de 125 pieds quarrez, il faut se souvenir de ce que nous avons démontré au *Theor.* 15. sçavoir que l'Aire d'un Cercle est au quarré de son Diametre, environ comme 785 à 1000: c'est pourquoy si l'on multiplie l'Aire 125 par 1000, & qu'on divise le produit 125000 par 785; la Racine quarrée du quotient 159 donnera 12 pieds, & environ 7 pouces pour le Diametre qu'on cherche. Planche 18. 154. Fig.

SCOLIE.

Comme la Raison de 785398 à 1000000 est plus exacte que celle de 785 à 1000, en se servant de cette seconde Raison plus exacte, on trouvera aussi plus exactement le Diametre AC. Si donc on multiplie l'Aire donnée 125 par 1000000, & qu'on divise le produit 125000000 par 785398, la Racine quarrée du quotient 159, donnera 12 pieds & environ 7 pouces pour le Diametre AC.

C'est par cette maniere que nous avons supputé la Table suivante, qui montre en nombres entiers & en parties cent-milliémes qui sont separées des entiers par un point à la droite, les Diametres des cercles, dont les Aires sont connuës depuis 1 jusqu'à 100.

Table

Table des Diametres des Cercles, dont les Aires sont connuës depuis 1 jusqu'à 100.

Aires.	Diamet.	Aires.	Diamet.
1	1.12838	31	6.28254
2	1.59576	32	6.38304
3	1.95441	33	6.48204
4	2.25676	34	6.57952
5	2.52313	35	6.67558
6	2.76395	36	6.77028
7	2.98541	37	6.86366
8	3.19152	38	6.95579
9	3.38514	39	7.04673
10	3.56824	40	7.13648
11	3.74240	41	7.22515
12	3.90882	42	7.31272
13	4.06843	43	7.39928
14	4.22200	44	7.48480
15	4.37019	45	7.56939
16	4.51352	46	7.65304
17	4.65242	47	7.73578
18	4.78728	48	7.81764
19	4 91849	49	7.89865
20	5.04626	50	7.97885
21	5.17088	51	8.05824
22	5.29256	52	8.13686
23	5.41151	53	8.21481
24	5.52790	54	8.29185
25	5.64190	55	8.36829
26	5.75362	56	8.44400
27	5.86323	57	8.51907
28	5.97082	58	8.59347
29	6.07650	59	8.66724
30	6.18038	60	8.74038

Aires.

Aires.	Diamet.	Aires.	Diamet.
61	8.81292	81	10.15541
62	8.88487	82	10.21790
63	8.95623	83	10.28001
64	9.02703	84	10 34176
65	9.09727	85	10 40314
66	9.16700	86	10.46416
67	9.23618	87	10.52482
68	9.30484	88	10.58512
69	9.37302	89	10.64516
70	9.44069	90	10.70474
71	9.50789	91	10.76405
72	9.57456	92	10.82302
73	9.64072	93	10.88169
74	9.70668	94	10.94004
75	9.77205	95	10.99806
76	9.83698	96	11.05581
77	9.90148	97	11.11325
78	9.96557	98	11.17038
79	10 02924	99	11.22723
80	10.09253	100	11.28379

Ainsi l'on connoît par cette Table, que le Diametre d'un cercle, dont l'Aire contient 30 pieds quarrez, est de 6 pieds, & 18038 centmilliémes parties d'un pied, qui valent environ 2 pouces que l'on a trouvez en multipliant le Numerateur 18038 par 12, parce qu'un pied courant a 12 pouces courans, & en divisant le produit 216456 par le Dénominateur 100000.

PRO.

PROBLEME XI.

Mesurer la circonference d'un Cercle, par son Aire connuë.

Planche 18. 154. Fig. PArce que *par Theor.* 13. l'Aire d'un cercle est égale à la moitié du Rectangle sous sa circonference & son Demi-diametre, & par consequent le quadruple de l'Aire, égal au Rectangle sous la circonference & le Diametre, il s'ensuit que si l'on divise le quadruple de l'Aire connuë par son Diametre, qui se peut trouver *par Probl.* 10. on aura la circonference du Cercle.

Comme si l'on donne 125 pieds quarrez pour l'Aire du Cercle ABCD, dont le Diametre AC a été trouvé au *Probl.* 10. de 12 pieds, 7 pouces, ou de 151 pouces, en divisant 500 pieds quarrez, ou 72000 pouces quarrez, qui est le quadruple de l'Aire proposée 125, par le Diametre 151, on aura 477 pouces, ou 39 pieds, 9 pouces pour la circonference ABCD, du Cercle, dont l'Aire est de 125 pieds quarrez.

SCOLIE.

On peut trouver immediatement cette circonference, sçavoir *en multipliant le quadruple* 500 *de l'Aire donnée* 125, *toûjours par* 314, *& en divisant la Racine quarrée* 396 *du produit* 157000 *toûjours par* 10, le quotient donnera 39 pieds & environ 7 pouces pour la quantité de la circonference ABCD, qui est plus exacte que la premiere: & l'on en peut avoir une troisiéme encore plus exacte, *en multipliant le quadruple* 500 *de l'Aire donnée* 125, *toûjours par* 3141592, *& en divisant la Racine quarrée* 39633 *du produit* 1570796000 *toûjours par* 1000, le quotient donnera 39 pieds, & environ 7 pouces, comme auparavant, pour la circonference qu'on cherche.

PROBLEME XII.

Mesurer un Secteur de Cercle, moindre qu'un Demi-cercle.

154. Fig. POur trouver l'Aire du Secteur de Cercle CEDF, moindre que le Demi-cercle ADC, par son Diametre connu AC, qui soit par exemple de 125 pieds, & par son angle

angle connu CED, ou l'arc CFD, que nous supposerons de 80 degrez; l'Aire de tout le Cercle ABCD se trouvera *par Probl.* 8. de 12271 pieds quarrez & d'environ 121 pouces quarrez, & parce que l'Aire du Secteur CEDF est telle partie de celle de tout le Cercle ABCD, que son arc CFD de toute la circonference ABCD, c'est à dire que 80 de 360, on connoît aisément qu'on aura l'Aire de ce Secteur, en multipliant l'Aire du Cercle, qui est de 12271 pieds quarrez, & 121 pouces quarrez, par le nombre 80 des degrez de l'arc CFD, ou de l'angle CED, & en divisant le produit 981747 pieds quarrez & 32 pouces quarrez par le nombre 360 des degrez de la circonference du Cercle, car le quotient donnera 2727 pieds quarrez, & environ 10 pouces quarrez pour l'Aire du Secteur proposé CEDF. Planche 18. 154. Fig.

SCOLIE.

Pour éviter les fractions qui arrivent ordinairement à l'Aire du Cercle, *multipliez le quarré* 15625 *du Diametre* 125, *toûjours par* 21816 $\frac{1}{2}$, *& multipliez encore le produit* 340882812 $\frac{1}{2}$ *par le nombre* 80 *des degrez de l'angle du Secteur, pour avoir un second produit* 27270625000, *qu'il faudra toûjours diviser par* 10000000, & le quotient donnera 2727 pieds quarrez, & 9 pouces quarrez pour le contenu du Secteur CEDF.

Comme en multipliant la circonference ABCD, par le Rayon AE, ou EC, on a en la moitié du produit l'Aire du Cercle, *par Theor.* 13. De même en multipliant l'Arc CFD par le Rayon EC, ou ED, on aura en la moitié du produit l'Aire du Secteur CEDF. Ainsi vous voyez que pour connoître cette Aire indépendamment de celle du Cercle, il ne faut que sçavoir mesurer l'arc CFD, ce qui se fera en cette sorte.

Parce que l'arc CFD est telle partie de la circonference ABCD, que le nombre 80 des degrez qu'il contient, du nombre 360 des degrez que contient la circonference du Cercle; ayant trouvé *par Probl.* 6. la circonference du Cercle ABCD de 392 pieds, 8 pouces, il la faut multiplier par le nombre 80 des degrez de l'arc CFD, & diviser le produit 31413 pieds, 4 pouces, par le nombre 360 des degrez de la circonference du Cercle, le quotient donnera 87 pieds & environ 3 pouces pour la quantité de l'arc CFD.

Cet arc CFD se peut aussi trouver assez exactement, *en ajoûtant au double de la corde FC, ou FD, de la moitié de l'arc CFD, le tiers de l'excès de ce double sur la corde de l'arc entier CD.* Le double de la corde CF se trouvera

vera

Planche 18. 154. Fig. vera de 85 pieds, 6 pouces, d'où ôtant la corde CD, qui se trouvera de 80 pieds, 4 pouces, il restera 5 pieds, 2 pouces, dont le tiers 1 pied, 9 pouces étant ajoûté au double de la corde CF, ou à 85 pieds, 6 pouces, on a 87 pieds, 3 pouces pour l'arc CFD, comme auparavant.

Le double de la corde CF, ou FD, a été trouvé par cette Analogie,

Comme le Sinus Total	100000
Au double du Diametre AC	500
Ainsi le Sinus du quart de l'angle CED	34202
Au double de la corde CF	85.6.

& la corde CD a été trouvée par cette autre Analogie,

Comme le Sinus Total	100000
Au Diametre AC	125
Ainsi le Sinus de la moitié de l'angle CED	64278
A la corde CD	80.4.

On tire de ces deux Analogies le Canon suivant, pour trouver avec facilité & avec justesse l'arc CFD. *Otez le Sinus 64278 de la moitié de l'angle du Secteur, de l'Octuple 273616 du Sinus 34202 du quart du même angle, & multipliez le reste 209338 par le Diametre 125, pour avoir le produit 26167250, dont le tiers 8722417 étant divisé par le Sinus Total 100000, le quotient donnera 87 pieds & environ 3 pouces pour la quantité de l'arc CED.*

PROBLEME XIII.

Mesurer un Secteur de Cercle, plus grand qu'un demi cercle.

154. Fig. POur trouver l'Aire du Secteur de Cercle EDABCE, qui est plus grand que le Demi cercle ABC, dont le Diametre AC soit par exemple de 125 pieds, & l'arc DABC de 280 degrez; ôtez ces 280 degrez de 360 degrez, & il restera 80 degrez pour l'arc CFD. Cherchez *par Probl.* 13. l'Aire du Secteur CEDF, qui se trouvera de 2727 pieds quarrez, & 9 pouces quarrez, & ôtez-la de l'Aire du Cercle entier, qui *par Probl.* 8. se trouvera de 12271 pieds quarrez, & 121 pouces quarrez, le reste donnera 9544 pieds quarrez, & 112 pouces quarrez pour l'Aire du grand Secteur de Cercle EDABCE.

PRO-

PROBLEME XIV.

Mesurer un Segment de Cercle, moindre qu'un Demi-cercle.

POur trouver l'Aire du Segment de Cercle CDF, qui est moindre que le Demi-cercle ACD, par son Diametre connu AC, qui soit par exemple de 125 pieds, & par son arc connu CFD, que nous supposerons de 80 degrez; l'Aire du Secteur CEDF se trouvera *par Probl.* 12. de 2727 pieds quarrez, & d'environ 9 pieds quarrez, de laquelle on ôtera l'Aire du Triangle isoscéle DEC, que l'on connoîtra en cette sorte. Planche 18. 154. Fig.

Ayant tiré de l'angle E sur la base CD, la perpendiculaire EG, qui divisera cette base CD, & l'angle du Segment CED, en deux également, cherchez la longueur de cette perpendiculaire EG, en faisant dans l'un des deux Triangles rectangles EGC, EGD, cette Analogie;

Comme le Sinus Total	100000
Au Demi-diametre EC, ou ED	$62\frac{1}{2}$
Ainsi le Sinus du complement de la moitié de l'angle CED	76604
A la ligne EG	47. 10.

qui se trouvera de 47 pieds, & d'environ 10 pouces, & qui étant multipliée par la ligne DG, ou CG, de 40 pieds, 2 pouces, moitié de la ligne CD, qui au *Probl.* 13. a été trouvée de 80 pieds, 4 pouces, on aura 1921 pieds quarrez & 44 pouces quarrez pour l'Aire du Triangle CED.

Ou bien tirez de l'un des deux angles C, D, comme de l'angle C, sur son côté opposé DE, la perpendiculaire CH, dont la longueur se connoîtra en faisant dans le Triangle rectangle CHE, cette Analogie,

Comme le Sinus Total	100000
Au Demi-diametre EC	$62\frac{1}{2}$
Ainsi le Sinus de l'angle CED	98480
A la perpendiculaire CH	61. 6.

qui se trouvera de 61 pieds & d'environ 6 pouces, & qui étant multipliée par la moitié $31\frac{1}{4}$ du Rayon ED, ou par le quart du Diametre AC, que nous avons supposé de 125 pieds, on aura 1921 pieds quarrez & 26 pieds quarrez pour l'Aire du Triangle CED.

Comme

Planche 18. 154. Fig. Cette Aire trouvée par ces deux manieres, n'est pas trop exacte, parce que nous y avons negligé les fractions de pouces. C'est pourquoy pour l'avoir tres-exactement, suivez ce Canon, qui se tire de l'Analogie precedente; *Multipliez la huitiéme partie, 12310 du Sinus 98480 de l'angle CED, par le quarré 15625 du Diametre 125, & divisez le produit 192343750 par le Sinus Total 100000, le quotient donnera 1923 pieds quarrez & 63 pouces quarrez pour l'Aire du Triangle CED*, laquelle étant ôtée de celle du Secteur CED, qui a été trouvée de 2727 pieds quarrez, & 9 pouces quarrez, il restera 803 pieds quarrez & 90 pouces quarrez pour l'Aire du Segment proposé CDF.

SCOLIE.

Si le Segment CDF étoit separé de son Cercle, auquel cas on ne connoîtroit pas le Diametre AC, ou FI, il faudroit mesurer sa base ou corde CD, & sa hauteur FG, qu'on appelle *Fléche*, par laquelle divisant le quarré de la demi-base CG, ou DG, on aura l'autre partie GF du Diametre FI, parce que l'angle ICF étant droit *par* 31. 3. la ligne CG, qui est perpendiculaire au Diametre FI, est moyenne proportionnelle entre les deux parties GI, GF, *par* 8. 6. outre que *par* 25. 3. le quarré CG est égal au Rectangle sous les deux parties GI, GF. Ainsi en ajoûtant ensemble ces deux parties GI, GF, le Diametre FI sera connu, & par consequent le Demi-diametre EC, dont le quarré étant diminué du quarré CG, ou du Rectangle sous les parties GI, GF, le reste sera *par* 47. 1. le quarré EG, &c.

PROBLEME XV.

Mesurer un Segment de Cercle plus grand qu'un Demi-cercle.

145. Fig. POur trouver l'Aire du Segment de Cercle CDAB, qui est plus grand que le Demi-cercle ABC, dont le Diametre AC soit par exemple de 125 pieds, & l'arc DABC de 280 degrez, auquel cas l'arc CFD sera de 80 degrez; ôtez de l'Aire de tout le Cercle ABCD, qui *par Probl.* 8. se trouvera de 12271 pieds quarrez & 121 pouces quarrez, l'Aire du petit Segment CDF, qui *par Probl.* 14. se trouvera de 803 pieds quarrez & 90 pouces quarrez, & le reste donnera 11468 pieds quarrez & 31 pouces quarrez pour l'Aire du grand Segment CDAB, qu'on auroit aussi trouvé en ajoûtant à l'Aire du grand Secteur CEDAB, qui *par Probl.* 13, se trouvera de

de 9544 pieds quarrez & 112 pouces quarrez, l'Aire du Triangle CED, qui *par Probl.* 14. se trouvera de 1923 pieds quarrez & 63 pouces quarrez. Planche 18. 154. Fig.

PROBLEME XVI.

Mesurer un espace terminé par une Cycloïde.

POur trouver l'Aire de l'espace ABCD, terminé par la Cycloïde ABC, & par la droite AC, qui est égale à la circonference du Cercle generateur, dont le Diametre est l'Axe BD, qui soit par exemple de 12 pouces, auquel cas la circonference du Cercle generateur, ou la base AC se trouvera *par Probl.* 6. de 37 pouces, 8 lignes, & l'Aire du Cercle generateur se trouvera *par Probl.* 8. de 113 pouces quarrez & 14 lignes quarrées; triplez cette Aire trouvée, & vous aurez 339 pouces quarrez, & 42 lignes quarrées pour l'Aire de la Cycloïde ABCD, dont la démonstration est évidente *par Theor.* 19. 155. Fig.

Ou bien *multipliez le quarré* 144 *de l'Axe* 12 *toûjours par* 2356194, & *divisez le produit* 339291936 *toûjours par* 1000000, & le quotient donnera comme auparavant 339 pieds quarrez, & environ 42 lignes quarrées, pour l'Aire qu'on cherche.

SCOLIE.

Parce que *par Theor.* 19. l'Aire ABCD de la Cycloïde est triple de celle du Cercle generateur BGD, on void aisément que l'espace BGDCE est égal au Cercle generateur, & par consequent de 113 pouces quarrez & 14 lignes quarrées, dont la moitié donnera 56 pouces quarrez & 79 lignes quarrées pour l'Aire du Segment BCE, parce que ce Segment BCE est égal à la moitié de l'espace BCE, ou de la moitié de l'espace BDAH, terminé par la courbe BHA décrite par le moyen des touchantes de la Cycloïde BEC, *par Theor.* 8. où nous avons démontré que le Segment BCE est la moitié de l'espace BDAH, qui est égal à l'espace BGDCE, chacun étant composé d'un nombre égal de lignes égales, comme il est aisé de conclure par la proprieté de la touchante EF qui est parallele à la corde correspondante BG, comme il a été démontré au *Theor.* 19. où nous avons démontré aussi, que la ligne GE, ou BF, ou IH, est égale à l'arc correspondant BOG.

PROBLEME XVII.

Mesurer une Couronne.

Planche 18. 156. Fig. Il est évident que pour trouver l'Aire de la Couronne terminée par les deux circonferences de Cercles concentriques ABCD, EFGH, dont les Diametres AC, EF, seront connus, comme AC de 18 toises, & EG de 12 toises, il n'y a qu'à ôter l'Aire du Cercle EFGH, qui *par Probl.* 8. se trouvera de 113 toises quarrées & d'environ 3 pieds quarrez, de celle du Cercle ABCD, qui se trouvera de 254 toises quarrées & d'environ 17 pieds quarrez, pour avoir au reste 141 toises quarrées, & 14 pieds quarrez pour l'Aire de la Couronne proposée.

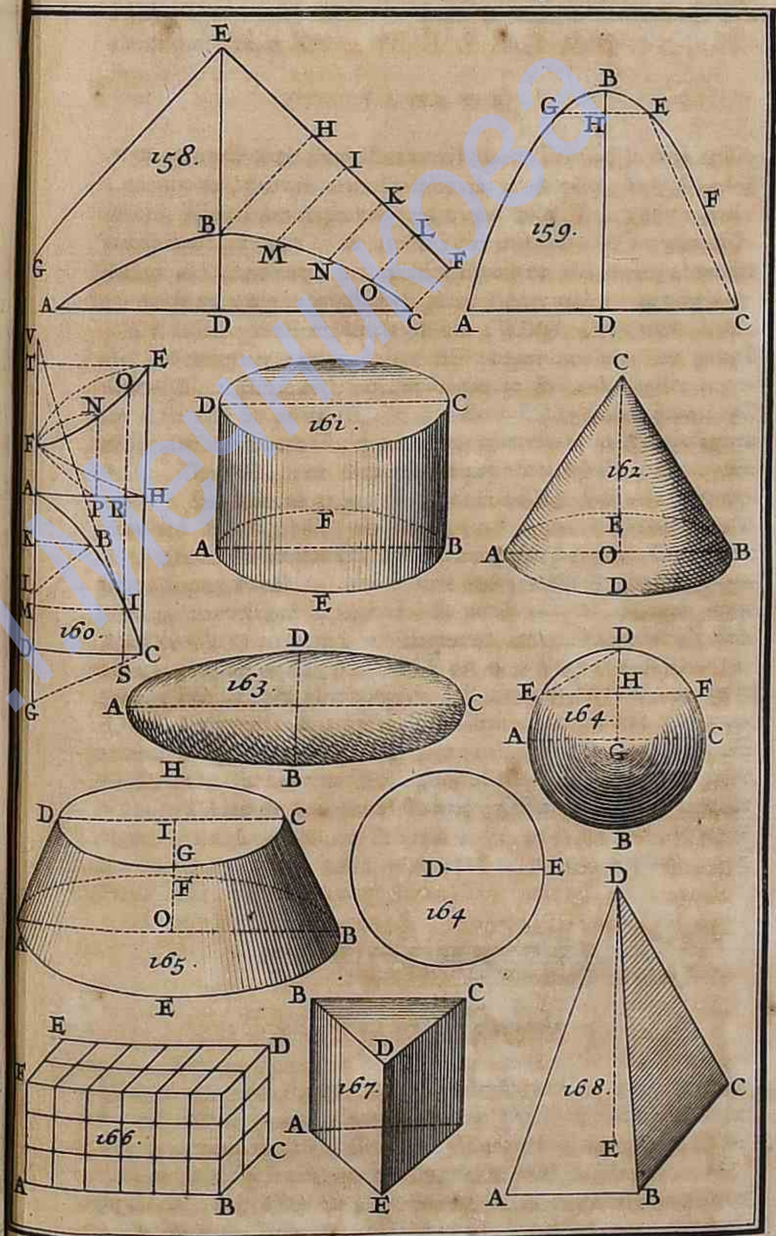
Cette Aire se peut trouver en plusieurs autres manieres, mais la plus facile de toutes est celle-cy; *Multipliez la somme* 30 *des deux Diametres* 18, 12, *par leur difference* 6, *& multipliez le produit* 180 *toûjours par* 785398, *pour avoir un second produit* 141371640, *lequel étant divisé toûjours par* 1000000, *on aura* 141 *toises quarrées, & environ* 13 *pieds quarrez pour l'Aire qu'on cherche.*

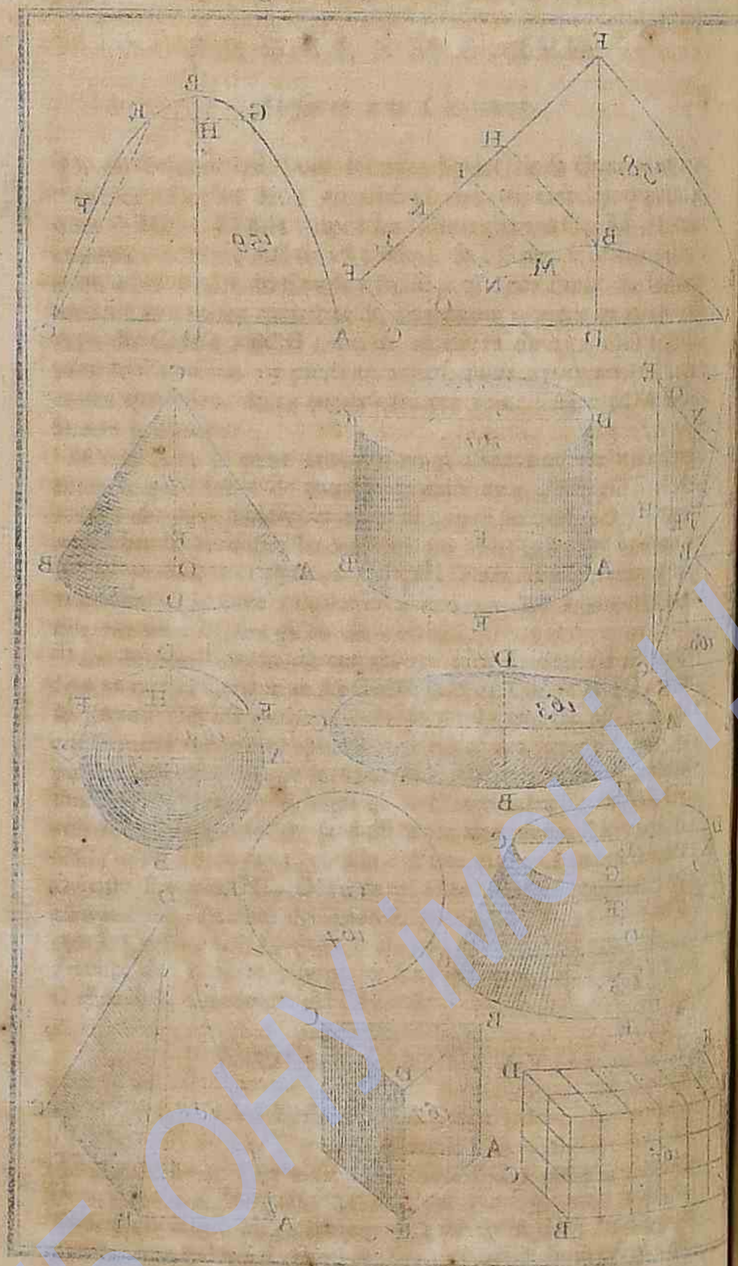
La démonstration de cet abregé sera évidente à celuy qui sçaura que la Couronne AFC est égale au Cercle HIBD, dont le Rayon GB est perpendiculaire au Diametre AC, & par consequent moyen proportionnel entre les lignes AG, GC, *par* 13. 6. car puisque le Quarré de cette moyenne proportionnelle est *par* 17. 6. égal au Rectangle des lignes AG, GC, qui sont la somme & la difference des deux Rayons OC, OG; c'est à dire *par* 5. 2. à la difference des Quarrez des deux mêmes Rayons OC, OG; & que les Cercles sont entre eux comme les Quarrez de leurs Rayons, *par* 2. 12. il s'ensuit que le Cercle HIBD, dont le Rayon est GB, est égal à la difference des Cercles, dont les Rayons sont OC, OG, c'est à dire à la Couronne AFCH, &c.

PROBLEME XVIII.

Mesurer une Ellipse.

157. Fig. Pour trouver l'Aire de l'Ellipse ABCD, dont le grand Axe, ou la longueur AC soit par exemple de 20 toises, & le petit Axe, ou la largeur BD de 12 toises; multipliez ensemble ces deux Axes 20, 12, pour avoir le produit 240, qu'il faudra multiplier toûjours par 785, & divisez le produit 188400 toûjours par 1000, & le quotient donnera 188 toises quarrées, & environ 14 pieds quarrez pour l'Aire de l'Ellipse





l'Ellipse proposée ABCD, dont la démonstration est évidente *par Theor.* 17. Planche 18. 157. Fig.

Scolie.

Pour avoir une Aire plus exacte, au lieu de la Raison de 1000 à 785, servez-vous de celle de 1000000 à 785398, c'est à dire multipliez le produit 240 des deux Axes 20, 12, toûjours par 785398, & divisez le produit 188495520 toûjours par 1000000, le quotient donnera 188 toises quarrées & environ 18 pieds quarrez pour l'Aire qu'on cherche.

S'il falloit mesurer un Segment d'Ellipse, comme AEF, qui est terminé par la droite EF perpendiculaire au grand Axe AC, il faudroit mesurer la partie AG, & diviser le petit Axe BD au point H, de la même façon que le grand AC est divisé au point G, sçavoir en cherchant aux trois lignes AC, AG, BD, une quatriéme proportionnelle BH: aprés quoy il faudroit tirer par le point H à l'Axe BD, la perpendiculaire HI, qui sera terminée en I, par le Demi-cercle BID décrit du centre O, autour du petit Axe BD. Cela étant fait, si *par Probl.* 14. on mesure le Segment de Cercle, dont BHI en represente la moitié, & *par Probl.* 8. le Cercle dont BDI en est la moitié, ce Segment sera telle partie de son Cercle, que le Segment AEF est de l'Ellipse ABCD, *par Theor.* 18. C'est pourquoy si à l'Aire du Cercle, à celle de son Segment, & à celle de l'Ellipse, on trouve une quatriéme proportionnelle, on aura celle du Segment proposé AEF. On se servira d'un semblable raisonnement pour trouver l'Aire du Secteur d'Ellipse EOFA: mais au lieu de l'Aire du Cercle & de l'Ellipse, on peut mettre le petit Axe BD, & le grand AC, qui sont en même Raison, *par Theor.* 16.

PROBLEME XIX.

Mesurer une Hyperbole.

Pour trouver l'Aire de l'Hyperbole ABC, dont la base AC est perpendiculaire à l'Axe BD, & dont les deux Asymptotes sont EF, EG, qui se coupent au centre E de l'Hyperbole, par des angles égaux de part & d'autre à l'égard de l'Axe ED; tirez du point C, la droite CF parallele à l'Asymptote EG, & par le sommet B, à la même Asymptote EG, la parallele BH, qui sera égale à la ligne EH. Divisez par pensée la partie FH en une infinité de parties égales aux points I, K, L, & menez par ces points les Planche 19. 158. Fig.

Planche 19. 158. Fig. droites IM, KN, LO, paralleles entre elles & à la ligne BH, ou à la ligne CF.

Cette preparation étant faite, si l'on met a pour la ligne EH, ou BH, b pour la ligne HF, & x pour la partie HI, ou IK, ou KL, &c. auquel cas on aura HK $\backsim 2x$, HL $\backsim 3x$, & ainsi ensuite jusqu'à la plus grande HF, que nous avons appellée b, & par conséquent EI $\backsim a + x$, EK $\backsim a + 2x$, EL $\backsim a + 3x$, &c. & parce que par la proprieté des Asymptotes le Rectangle des lignes EH, BH, ou le quarré aa est égal au Rectangle des lignes EI, IM, & aussi au Rectangle des lignes EK, KN, & pareillement au Rectangle des lignes EL, LO, on aura

$$\text{IM} \backsim \frac{aa}{a+x} \backsim a - x + \frac{1xx}{a} - \frac{x3}{aa} + \frac{x4}{a3} - \frac{x5}{a4} \text{ \&c.}$$

$$\text{KN} \backsim \frac{aa}{a+2x} \backsim a - 2x + \frac{4xx}{a} - \frac{8x3}{aa} + \frac{16x4}{a3} - \frac{32x5}{a4} \text{ \&c.}$$

$$\text{LO} \backsim \frac{aa}{a+3x} \backsim a - 3x + \frac{9xx}{a} - \frac{27x3}{aa} + \frac{81x4}{a3} - \frac{243x5}{a4} \text{ \&c.}$$

$$\text{BCFH} \backsim ab - \frac{1}{2}bb + \frac{b3}{3a} - \frac{b4}{4aa} + \frac{b5}{5a3} - \frac{b6}{6a4} \text{ \&c.}$$

où l'on void que tous les infinis a valent ab, parce que la lettre b, ou la ligne HF represente le nombre de leur multitude: & *par Theor.* 10. que tous les infinis x, $2x$, $3x$, &c. dont le plus grand est GK, ou b, valent $\frac{1}{2}bb$, & *par Theor.* 11. que tous les quarrez infinis xx, $4xx$, $9xx$, &c. dont le plus grand est bb, valent $\frac{1}{3}b3$: & enfin *par Theor.* 12. que tous les cubes infinis $x3$, $8x3$, $27x3$, &c. dont le plus grand est $b3$, valent $\frac{1}{4}b4$: & pareillement que tous les quarré-quarrez infinis $x4$, $16x4$, $81x4$, &c. dont le plus grand est $b4$, valent $\frac{1}{5}b5$, & ainsi ensuite; & que par consequent la somme de toutes les paralleles infinies IM, KN, LO, &c. ou l'espace Hyperbolique BCFH vaut $ab - \frac{bb}{2} + \frac{b3}{3a} - \frac{b4}{4aa} + \frac{b5}{5a3} - \frac{b6}{6a4} + \frac{b7}{7a5}$, &c.

Si

Si a vaut 1, & que b vaille $\frac{1}{10}$ on connoîtra que l'espace BCFH vaut $\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{500000} - \frac{1}{6000000}$, &c. ou $\frac{571861}{6000000}$. Il y a plusieurs belles remarques à faire là-dessus, mais ce n'est pas icy le lieu d'en dire davantage. Je diray seulement que l'espace BCFH étant connu, le reste est facile à connoître. Planche 19. 158. Fig.

PROBLEME XX.

Mesurer une Parabole quarrée.

Pour trouver l'Aire de la Parabole quarrée ABC, dont l'Axe BD, qui divise à angles droits & en deux également la base AC, soit par exemple de 124 pieds, & la base AC de 135 pieds: multipliez ensemble les valeurs 124, 135, de ces deux lignes BD, AC, pour avoir leur produit 16740, dont le double 33480 étant divisé par 3, on aura 11160 pieds quarrez pour l'Aire de la Parabole proposée ABC, dont la démonstration est évidente *par Theor.* 9. qui fournit aussi la Methode de mesurer les Paraboles plus élevées, sans qu'il soit besoin d'en parler davantage. 159. Fig.

SCOLIE.

Si l'on vouloit connoître l'Aire du *Segment Parabolique* ECF, il faudroit outre la Parabole ABC, mesurer encore la Parabole GBE, terminée par la ligne GE perpendiculaire à l'Axe BD, & le Trapezoïde DHEC: car si de la Demi-parabole DBC, on ôte la Demi-parabole HBE, & le Trapezoïde DHEC, il restera l'Aire du Segment Parabolique ECF.

Si l'on vouloit connoître la longueur de la circonference de la Parabole ABC, cela se pourroit faire par le moyen de la Quadrature de l'Hyperbole, en cette sorte.

Pour trouver la quantité de la circonference de la Demi-parabole ABC, dont l'Axe est AD, & la base est CD perpendiculaire à l'Axe AD; tirez par le point C, la ligne CE parallele à l'Axe AD, & par le sommet A, la droite AH perpendiculaire au même Axe AD. Prenez sur cet Axe AD prolongé de part & d'autre, les lignes AF, DG, égales chacune à la moitié du *Parametre*, qui est une ligne troisiéme proportionnelle aux deux AD, CD, & faites HE égale à CG, ou à HF. Pareillement tirez du point B pris à discretion sur la ligne Parabolique 160. Fig.

ABC,

Planche 19. 160. Fig. ABC, la droite BN parallele à l'Axe AD, & aprés avoir fait BK perpendiculaire à l'Axe AD, & KL égale à DG, ou à AF, c'est à dire à la moitié du Parametre, faites PN égale à BL ou à PF. Enfin décrivez par les points F, N, E, & par une infinité d'autres que l'on peut trouver de la même façon, la courbe FNE, qui sera la circonference d'une Hyperbole, comme nous le démontrerons en aprés.

Cette preparation étant faite, imaginons que la partie, CI, de la ligne Parabolique ABC, est infiniment petite; & par consequent une ligne droite, & que par le point I infiniment proche du point C, il passe la ligne IM parallele à la base CD, & la ligne SO parallele à la ligne CE, ou à l'Axe AD; & alors on connoîtra *par* 4. 6. dans les Triangles équiangles CIS, CDG, que les quatre lignes CI, CS, CG, DG, sont proportionnelles, & *par* 16. 6. que le Rectangle des deux extrémes CI, DG, est égal au Rectangle des deux moyennes CS, CG, ou des deux HR, HE, c'est à dire à la figure RHEO, qui peut passer pour un Rectangle, parce que la ligne RH est supposée infiniment petite. D'où il est aisé de conclure par la Methode des Indivisibles, que l'espace Hyperbolique AHEF est égal au Rectangle sous la ligne droite CG, & la courbe ABC. Si donc, *par Probl.* 19. on mesure l'Aire de l'espace Hyperbolique AHEF, & qu'on la divise par la droite CG, on aura la longueur de la ligne Parabolique ABC.

Pour démontrer que la courbe FNE est une ligne Hyperbolique, tirez du point E, pris à discretion sur cette Courbe, la droite ET perpendiculaire à l'Axe AD prolongé, & alors si l'on met *a* pour AF, *x* pour AT, ou pour HE, ou pour HF, & *y* pour ET, ou pour AH, on trouvera dans le Triangle rectangle AHF, cette Equation, $aa+yy \backsim xx$, ou $xx-aa \backsim yy$, qui est un Lieu à une Hyperbole équilatere, dont le centre est A, &c.

Il faut aussi démontrer, que les deux Triangles rectangles CIS, CDG, sont équiangles, parce que cela n'est pas évident de soy-même. Pour cette fin, prenez sur l'Axe AD prolongé, la ligne AV égale à la partie AD, & menez la droite VC, qui touchera au point C, la ligne Parabolique ABC, *par Theor.* 6. Parce que par la nature de la Parabole le Quarré CD est égal au Rectangle sous AD, & le Parametre, c'est à dire le double de DG, ou au Rectangle sous la simple DG, & le double de AD, c'est à dire la ligne DV, on connoît *par* 17. 6. que les trois lignes DV, DC, DG, sont proportionnelles, & *par* 6. 6. que les deux Triangles rectangles CDV, CDG, sont équiangles. D'où il est aisé de conclure, que le Triangle GCV est rectangle en C, & *par* 8. 6. que le Triangle CDG, aussi bien que le Triangle CIS

CIS luy est semblable, & qu'ainsi ces deux Triangles CDG, CIS, sont équiangles. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 19. 160. Fig.

PROBLEME XXI.

Mesurer la Surface convexe d'un Cylindre droit.

Pour trouver l'Aire de la Surface convexe du Cylindre droit ABCD, dont la hauteur AD, ou BC, soit par exemple de 24 pieds, & la circonference AEBF de sa base de 132 pieds; on multipliera ensemble ces deux lignes 24, 132, & leur produit donnera 3168 pieds quarrez pour la Surface convexe du Cylindre proposé ABCD, dont la démonstration est évidente *par Theor.* 20. Fig. 161.

SCOLIE.

Si au lieu de connoître la circonference de la base AEBF, l'on connoît son Diametre AB, ou CD, ce qui semble plus facile, on trouvera la circonference AEBF, *par Probl.* 6. pour trouver ensuite la Surface du Cylindre, comme il vient d'être enseigné. Mais pour éviter les fractions qui peuvent arriver à la circonference, *multipliez le Diametre AB par la hauteur AD, pour avoir leur produit, qu'il faudra multiplier toûjours par 314, & diviser le second produit toûjours par 100*, le Quotient donnera la Surface qu'on cherche, *par Theor.* 21. comme si le Diametre AB est de 12 pouces, & la hauteur AB de 9 pouces, le produit de ces deux lignes 12, 9, sera 108, qui étant multiplié par 314, & le produit 33912 étant divisé par 100, on aura 339 pouces quarrez, & environ 17 lignes quarrées pour la Surface convexe du Cylindre proposée ABCD.

PROBLEME XXII.

Mesurer la Surface convexe d'un Cone droit.

Pour trouver l'Aire de la Surface convexe du Cone droit ABC, dont le côté AC, ou BC, soit par exemple de 42 pieds, & la circonference de sa base ADBE de 112 pieds; on multipliera ensemble ces deux lignes 42, 112, & la moitié de leur produit 4704, donnera 2352 pieds quarrez pour la Surface convexe du Cone proposé ABC, *par Theor.* 22. 162. Fig.

SCO-

Planche 19. 162. Fig.

SCOLIE.

Si au lieu de connoître la circonference de la base ADBE, l'on connoît son Diametre AB, on trouvera la circonference ADBE, *par Probl.* 6. pour trouver ensuite la Surface du Cone, comme il vient d'être enseigné. Mais pour éviter les fractions qui peuvent arriver à la circonference, *Multipliez le Diametre AB par le côté AC, pour avoir leur produit, qu'il faudra multiplier toûjours par* 157, *& diviser ce second produit toûjours par* 100, le Quotient donnera la Surface qu'on cherche, *par Theor.* 23. Comme si le Diametre AB est de 36 pieds, & le côté AC de 32, le produit de ces deux lignes 36, 32, sera 1152, qui étant multiplié par 157, & le produit 180864 étant divisé par 100, le Quotient donnera 1808 pieds quarrez, & environ 92 pouces quarrez pour la Surface convexe du Cone proposé ABC.

PROBLEME XXIII.

Mesurer la Surface d'un Cone droit tronqué.

165. Fig. POur trouver l'Aire de la Surface convexe du Cone droit tronqué ABCD, dont le côté AD, ou BC, soit par exemple de 12 pieds, la circonference de sa plus grande base AEBF de 108 pieds, & la circonference de sa plus petite base DGCH de 72 pieds; ajoûtez ensemble ces deux circonferences 108, 72, & multipliez leur somme 180 par le côté 12, & la moitié du produit 2160, donnera 1080 pieds quarrez pour la Surface convexe de la figure proposée ABCD, *par Theor.* 24.

SCOLIE.

Si au lieu de connoître les circonferences AEBF, DGCH, on connoît leurs Diametres AB, CD, on pourra trouver les circonferences AEBF, DGCH, *par Probl.* 6. & ensuite la Surface qu'on cherche, comme il vient d'être enseigné. Mais pour éviter les fractions qui peuvent arriver aux circonferences, *ajoûtez ensemble les deux Diametres AB, CD, pour avoir leur somme, qu'il faudra multiplier toûjours par* 157, *& diviser le produit toûjours par* 100, le Quotient donnera la Surface qu'on cherche, *par Theor.* 25. Comme si le grand Diametre AB est de 24 pieds, & le petit CD de 18 pieds, on multipliera leur somme 42 par le côté AD que je suppose de 12 pieds, le produit sera 504, qui étant multiplié par

par 157, & le produit 79128 étant divisé par 100, on aura 791 pieds quarrez, & environ 40 pouces quarrez pour la Surface convexe du Cone tronqué ABCD. Planche 19. 165. Fig.

PROBLEME XXIV.

Mesurer la Surface d'une Sphere.

POur trouver la Surface de la Sphere ABCD, dont le Diametre AC soit par exemple de 18 pouces, multipliez ce Diametre 18 par sa circonference, qui *par Probl.* 6. se trouvera de 56 pouces & d'environ 6 lignes, & le produit donnera 1017 pouces quarrez pour la Surface de la Sphere proposée ABCD, *par Theor.* 29. 164. Fig.

Ou bien, ce qui revient au même, multipliez par 4 l'Aire du grand Cercle de la Sphere ABCD, qui *par Probl.* 8. se trouvera de 254 pouces quarrez, & d'environ 49 lignes quarrées, & le produit donnera 1017 pouces quarrez & 52 lignes quarrées pour l'Aire de la Surface proposée ABCD.

Ou bien encore pour éviter les fractions, multipliez le quarré 324 du Diametre 18, toûjours par 314, & divisez le produit 101734 toûjours par 100, le Quotient donnera 1017 pouces quarrez & environ 49 lignes quarrées pour la Surface qu'on cherche, comme il est évident *par Coroll.* 3. *Theor.* 29.

SCOLIE.

Au lieu de vous servir de la Raison de 100 à 314, servez-vous de celle de 100000 à 314159 dans les grandes supputations, pour avoir plus exactement la Surface qu'on cherche; comme pour connoître la Surface de la Terre, dont le Diametre a été trouvé au *Probl.* 7. de 2292 lieuës de Marine, multipliez le quarré 5253264 de ce Diametre 2292 par 314159, & divisez le produit 1650360164976 par 100000, le quotient donnera environ 16503601 lieuës quarrées pour la Surface qu'on cherche.

Le Diametre d'une Sphere se peut connoître en le prenant avec un Compas Spherique, pour le porter sur une ligne divisée en pieds ou en pouces, &c. Mais si l'on trouve quelque difficulté à connoître ce Diametre, on appliquera un filet tout autour de la Sphere, & ce filet étant étendu en donnera la circonference, au moyen de laquelle on pourra connoître le Diametre *par Probl.* 7. & ensuite la Surface de la Sphere, comme il vient d'être enseigné: ou bien on pourra connoître *par Probl.* 9. l'Aire du grand Cercle de la Sphere, Planche 19. 164. Fig. Sphere, dont le quadruple sera la Surface de la Sphere, *par Theor.* 28. Ou bien encore servez-vous de ce Canon, qui a sa démonstration ; *Multipliez le Quarré de la circonference toûjours par* 100, *& divisez le produit toûjours par* 314. Comme si la circonference est de 56 pieds, son quarré sera 3136, lequel étant multiplié par 100, & le produit 313600 étant divisé par 314, on aura 998 pieds quarrez, & environ 104 pouces quarrez pour la Surface de la Sphere qui a 56 pieds de circonference.

PROBLEME XXV.

Mesurer la Surface d'une portion de Sphere.

164. Fig. POur connoître l'Aire de la Surface du Segment ou Portion de Sphere EFD, dont l'arc BDF soit par exemple de 100 degrez, par le Diametre connu AC, que nous supposerons de 18 pouces, auquel cas la circonference du grand Cercle ABCD, se trouvera *par Probl.* 6, de 56 pouces & d'environ 6 lignes: on multipliera cette circonference par la Fléche DH: qui se trouvera de 3 pouces & d'environ 3 lignes, par cette Analogie,

Comme le Sinus Total	100000
Au Sinus verse de la moitié de l'Arc EDF	35721
Ainsi le Demi-diametre AG	9
A la Fléche DG	3. 3.

& le produit donnera 183 pouces quarrez & environ 90 lignes quarrées pour l'Aire du Segment proposé EFD, *par Coroll.* 5. *Theor.* 18.

Ou bien trouvez la corde DE de la moitié de l'arc EDF, par cette Analogie,

Comme le Sinus Total	100000
Au Sinus du quart de l'arc EDF	42262
Ainsi le Diametre AC	18
A la corde DE	7. $7\frac{1}{2}$

qui se trouvera de 7 pouces & d'environ 7 lignes & $\frac{1}{2}$, & la considerez comme le Rayon d'un Cercle, dont l'Aire se trouvera *par Probl.* 8. de 182 pouces quarrez, & d'environ 94 lignes quarrées, laquelle *par Theor.* 39. est égale à la Surface de la Portion de Sphere EFD.

SCO-

Planche 19. 164. Fig.

SCOLIE.

Pour éviter les Fractions, qui étant negligées empêchent d'avoir l'Aire qu'on cherche, bien exactement, *Multipliez le quarré* 324 *du Diametre* 18 *par le Sinus verse* 35721 *de la moitié de l'arc EDF, & multipliez le produit* 11573604 *toûjours par* 157, *pour avoir un second produit* 1817055828, *lequel étant divisé par le centuple du Sinus Total, c'est à dire par* 10000000, *on aura* 181 *pouces quarrez, & environ* 102 *lignes quarrées pour l'Aire assez exacte de la Surface proposée EFD.*

Ce Canon est tres-commode pour trouver l'Aire de la Surface de cette partie de la Terre, qu'on appelle Zone froide, & qui est terminée par l'un des Cercles Polaires, & dont l'arc est de 47 degrez, comme étant le double de la plus grande Declinaison du Soleil, que l'on suppose ordinairement de 23 degrez & 30 minutes, parce que le Diametre de la Terre est connu, sçavoir de 2292 lieuës de Marine, &c.

PROBLEME XXVI.

Mesurer la Surface d'une Zone.

IL est évident que pour connoître la Surface de la Zone AEFC, terminée par les deux circonferences AC, EF, dont on connoît les distances DA, DE, ou DC, DF, de leur Pole commun D ; il n'y a qu'à mesurer *par Probl.* 25. les Surfaces des deux Portions de Sphere ACD, EFD, & ôter la plus petite de la plus grande ; mais cela se peut faire plus facilement, sçavoir en multipliant la circonference du grand Cercle de la Sphere par la partie GH de l'Axe commun GD, car ainsi on aura la Surface de la Zone proposée AEFC, *par Theor.* 31. Cette partie GH étant égale à la difference des Sinus verses des deux distances DA, DE, se trouvera aisément par cette Analogie, 164. Fig.

Comme le Sinus Total,
A la difference des Sinus verses des distances DA, DE ;
Ainsi le Demi-diametre de la Sphere,
A la partie GH.

Comme si la distance DE est de 24 degrez, & la distance DA de 36, & que le Diametre de la Sphere ABCD, soit

par

Planche 19. 164. Fig. par exemple de 18 pouces, les Sinus verses des arcs DE, DA, seront 8646, 19099, & leur difference sera 10453, au moyen de laquelle & du Diametre de la Sphere, que nous avons supposé de 18 pouces, la partie GH se trouvera par l'Analogie precedente de 11 lignes, par laquelle multipliant la circonference du grand Cercle de la Sphere ABCD, qui par *Probl.* 6. se trouvera de 56 pouces & d'environ 6 lignes, on aura 51 pouces quarrez & 114 lignes quarrées pour l'Aire qu'on cherche.

PROBLEME XXVII.

Mesurer la Surface d'un Spheroïde.

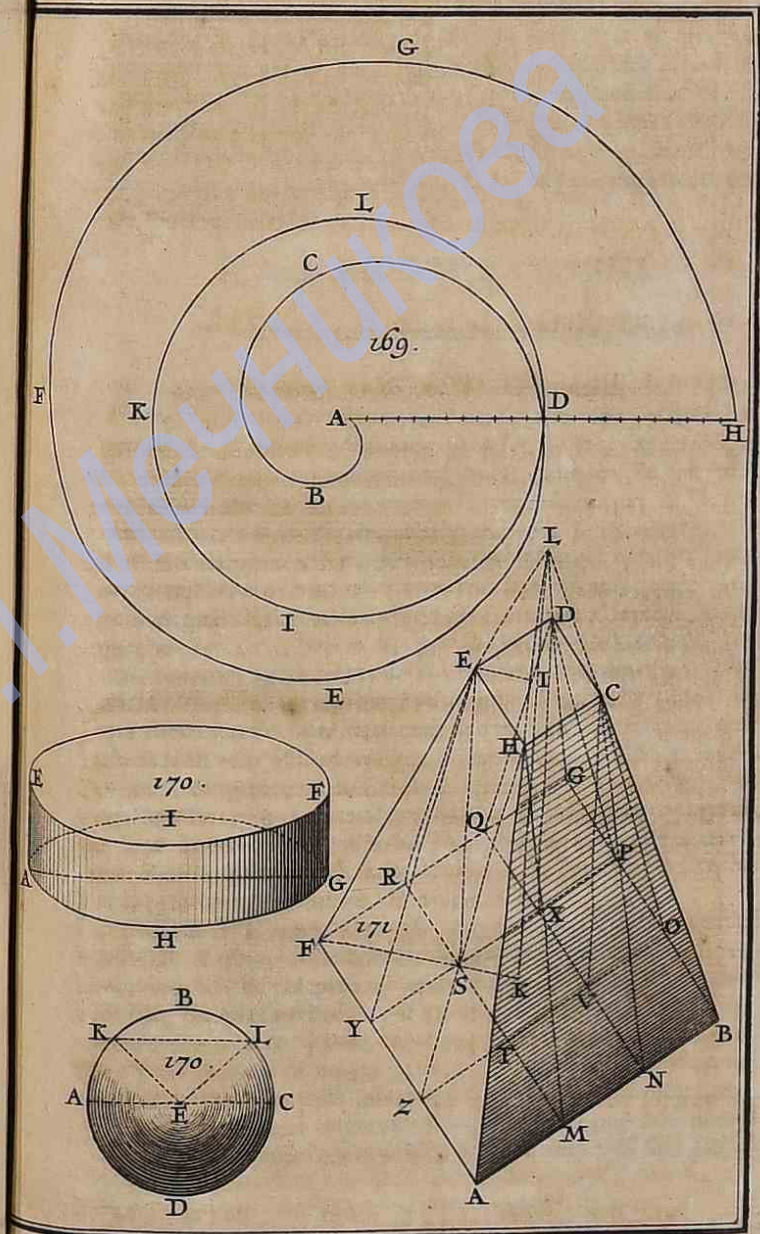
Quelques Geometres modernes nous ont donné des Methodes qu'ils ont crû geometriques, pour mesurer la Surface d'un Spheroïde : mais comme ces Methodes sont trop speculatives, & d'une longue execution, j'aime mieux vous enseigner icy la maniere qui est commune parmi les Arpenteurs pour trouver l'Aire de la Surface d'un Spheroïde, quoy qu'elle ne soit pas dans une juste precision, comme nous avons déja remarqué au *Theor.* 31. ce qui sert à la mesure des Voutes en Ovale.

163. Fig. Pour donc mesurer l'Aire de la Surface du Spheroïde ABCD, dont le grand Axe AC soit l'*Axe de circonvolution*, c'est à dire celuy autour duquel on a fait rouler une Ellipse pour produire le Spheroïde. Supposons que ce grand Axe AC soit de 45 pieds, & le petit BD de 35, la Surface de la Sphere qui aura ce petit Axe 35 pour Diametre, se trouvera *par Probl.* 24 de 3846 pieds quarrez, & d'environ 72 pouces quarrez : & comme cette Surface est à celle du Spheroïde, à peu prés comme le petit Axe 35, au grand Axe 45, si l'on multiplie cette Surface trouvée de Sphere, c'est à dire 3846 pieds quarrez, & 72 pouces quarrez par le nombre 45 du grand Axe, & qu'on divise le produit 173087 pieds quarrez & 72 pouces quarrez, par le nombre 35 du Diametre du petit Axe, on aura 4945 pieds quarrez & environ 51 pouces quarrez pour la Surface du Spheroïde proposé ABCD.

SCOLIE.

Parce que comme nous avons déja dit, ce Problême est tres-utile pour la mesure des Voutes en Ovale, j'ajoûteray icy pour ceux qui aiment la pratique un Canon aisé, pour trouver la Surface concave, d'une Voute en Ovale, en supposant que cette Surface est justement la moitié d'un Spheroïde.

Multi-



Multipliez ensemble les deux Axes AC, BD, pour avoir leur produit, qu'il faudra multiplier toûjours par 157, & diviser ce second produit toûjours par 100, pour avoir la Surface qu'on cherche. Comme icy, où nous avons supposé le grand Axe AC de 45 pieds, & le petit BD, de 35, leur produit sera 1575, lequel étant multiplié par 157, & le produit 247275 étant divisé par 100, on a 2472 pieds quarrez & 108 pouces quarrez pour la Surface proposée. Planche 19. 163. Fig.

PROBLEME XXVIII.

Mesurer un espace terminé par une ligne spirale.

ARchimede nous a laissé un Traité particulier de la Spirale, dont nous n'avons pas voulu parler icy, pour ne pas grossir inutilement ce Volume, parce que l'usage de cette ligne n'est pas de grande consequence dans la pratique, & que même les Arpenteurs du commun ne la connoissent pas, & la sçavent encore moins décrire. C'est pourquoy je me contenteray de vous enseigner ici en peu de mots la simple pratique pour mesurer l'espace compris par la premiere Spirale, par le moyen duquel il sera facile de juger du contenu des autres, parce que *par Prop.* 27. *Archim. des Spirales*, l'espace de la seconde Spirale contient six fois celuy de la premiere, comme étant double du Cercle de la premiere revolution, lequel est triple de la premiere Spirale: que l'espace de la troisiéme Spirale contient douze fois celuy de la premiere, comme étant double de la seconde, & quadruple du Cercle de la premiere revolution, ou égal au Cercle de la seconde revolution: que l'espace de la quatriéme Spirale contient dix-huit fois celuy de la premiere, comme étant triple de celuy de la seconde, & sextuple du Cercle de la premiere revolution, & ainsi ensuite.

Comme si la ligne AD, qui répond à la premiere Spirale ABCD, & qui à cause de cela est appellée *Ligne de premiere revolution*, est de 12 pieds, auquel cas le Diametre du Cercle DIKL, qu'on appelle *Cercle de premiere revolution*, sera de 24 pieds; l'Aire de ce Cercle de premiere revolution se trouvera *par Probl.* 8. d'environ 452 pieds quarrez, dont le tiers donnera environ 151 pieds quarrez pour l'Aire du premier Plan Spiral ABCD, dont le sextuple donne environ 904 pieds quarrez pour le contenu du second espace Spiral ABCDEFGH, &c. Planche 20. 169. Fig.

QUATRIE'ME PARTIE

DE LA STEREOMETRIE.

LA *Stereometrie*, qu'on appelle aussi *Toisé*, comme nous avons déja dit ailleurs, enseigne à mesurer ou toiser un corps: & comme dans la Planimetrie nous avons mesuré les Plans par des Plans plus petits, de même dans la Stereometrie on mesure les Solides par des Solides plus petits, qui sont ordinairement des Cubes, & quelquefois des Parallelepipedes rectangles plus longs que larges, en conservant toûjours l'angle droit, parce qu'il est invariable, certain, & unique dans son espece, & d'ailleurs plus commode.

Le nombre des mesures cubiques qui sont contenuës dans un Solide, se trouve toûjours par la Multiplication, parce qu'on le conçoit ordinairement égal à un Parallelepipede rectangle, dont la Solidité se trouve en multipliant ensemble deux de ses dimensions, pour avoir l'Aire de l'une de ses faces, qui peut passer pour la base du corps, & en multipliant cette base par la hauteur, c'est à dire par la troisiéme dimension.

Planche 19. 166. Fig. Comme si du Parallelepipede rectangle ABCDEF, on multiplie la longueur AB, que je suppose de 6 toises, par la largeur BC de 2 toises, on aura 12 toises quarrées pour la base ABC de ce Corps, qui etant multipliée par la hauteur CD de 3 toises, on a 36 toises cubiques pour la solidité de ce Parallelepipede, lesquelles sont produites par les intersections de certains Plans tirez en long & en travers par les divisions des côtez opposez.

D'où il suit qu'une Toise courante ayant 6 Pieds courans, une Toise cubique aura 216 Pieds cubiques, parce qu'en multipliant 6 par 6, on a 36 Pieds quarrez pour la Toise quarrée qui sert de base à la Toise cubique, & qu'en multipliant cette base 36 encore par 6, qui est la hauteur de la Toise cubique, on a 216 Pieds cubiques pour la valeur d'une Toise cube. On connoîtra par un semblable raisonnement qu'un Pied courant ayant 12 Pouces courans, un pied cube aura 1728 Pouces cubes, &c.

C'est pourquoy quand on aura des Toises cubiques à reduire

en Pieds cubiques, au lieu de les multiplier par 6, on les doit multiplier par 216. Ainsi ayant connu que la Solidité du Parallelepipede ABCDEF est de 36 Toises cubes, si l'on veut sçavoir combien elles font de Pieds cubes, on les multipliera par 216, & l'on aura 7776 Pieds cubes pour la capacité du Parallelepipede ABCDEF. Tout au contraire quand on aura des Pieds cubiques à reduire en toises cubiques, au lieu de les diviser par 6, on les divisera par 216. Ainsi des autres.

Nous avons dit que les Solides se mesurent quelquefois par des Parallelepipedes rectangles plus longs que larges, ce qui se fait principalement pour avoir un calcul plus aisé, lorsqu'il y a des especes differentes à multiplier ensemble: & alors on appelle *Pied de toise cube* un Parallelepipede rectangle, qui contient 36 Pieds cubes, comme la Toise quarrée contient 36 Pieds quarrez, ce Solide rectangle étant mis dans la pratique à la place d'une Toise cube qui vaut 216 Pieds cubes, & ayant été appellé *Pied de Toise cube*, parce qu'il a un Pied de hauteur sur une Toise quarrée pour base.

Pareillement on appelle *Pouce de Pied cube* un Solide rectangle, qui contient 144 Pouces cubes, comme le Pied quarré contient 144 Pouces quarrez, ce Solide étant mis dans la pratique à la place d'un Pied cube qui vaut 1728 Pouces cubes, & ayant été appellé *Pouce de Pied cube*, parce qu'il a un Pouce de hauteur sur un Pied quarré pour base.

On appelle de la même façon *Ligne de Pouce cube*, un Solide rectangle, qui contient 144 Lignes cubes, comme le Pouce quarré contient 144 Lignes quarrées, ce Solide étant mis dans la pratique à la place d'un Pouce cube qui vaut 1728 Lignes cubes, & ayant été appellé *Ligne de Pouce cube*, parce qu'il a une Ligne de hauteur sur un Pouce quarré de base.

On doit appeller de la même maniere, *Pouce de Toise cube*, un Solide rectangle, dont la hauteur est d'un Pouce, & la base une Toise quarrée qui vaut 5184 Pouces quarrez, parce qu'une Toise courante a 72 Pouces courans, & dont la Solidité est par consequent de 5184 Pouces cubes: & *Ligne de Toise cube* un Solide rectangle, dont la hauteur est d'une Ligne, & la base une Toise quarrée qui vaut 746496 Lignes quarrées, parce qu'une Toise courante a 864 Lignes courantes, & dont la Solidité est par consequent 746496 Lignes cubes. Ainsi des autres.

Cela fait dire aux Arpenteurs, que des Toises quarrées multipliées par des Toises courantes, produisent des *Toises cubes*: & que pareillement des Pieds quarrez multipliez par des Pieds courans, produisent des *Pieds cubes*: & ainsi des autres. Mais que des Toises quarrées multipliées par des Pieds courans, produisent des *Pieds de toise cube*: & que pareillement des Pieds quarrez multipliez par des Pouces de long, c'est à dire par des Pouces courans, produisent des *Pouces de pied cube*: & que de la même façon des Pouces quarrez multipliez par des Lignes de long, produisent des *Lignes de Pouce cube*, &c.

CHAPITRE I.

Des Theorêmes.

NOus ferons comme dans la Trigonometrie & dans la Planimetrie, preceder la Theorie, afin que la pratique s'en trouvant dégagée, soit plus facile à comprendre, & qu'étant appuyée sur les Theorêmes que nous allons démontrer, elle puisse plaire par son évidence aux plus & aux moins habiles.

THEOREME I.

La Solidité d'une Sphere est le tiers de celle d'un Prisme, qui a pour base un Plan égal à la Surface de la Sphere, & dont la hauteur est égale au Rayon de la même Sphere.

Planche 20. 170. Fig. JE dis que la Sphere ABCD est égale à la troisiéme partie d'un Prisme, comme par exemple du Cylindre AEFG, dont la hauteur AE, ou FG, est égale au Rayon AE, ou EC de la Sphere, & la base AHGI est un Cercle égal à la Surface de la Sphere, duquel par consequent le Diametre AG est double du Diametre AC de la même Sphere.

DEMONSTRATION.

Si l'on divise par pensée toute la Surface de la Sphere en une infinité de parties égales, elles pourront passer pour des Plans égaux, & pour les bases d'autant de Cones, dont les pointes conviennent au centre E de la Sphere, & dont la hauteur commune est par consequent égale au Rayon EK, ou EL de la même Sphere. D'où il est aisé de conclure que comme *par* 10. 12. l'un de ces Cones est égal au tiers d'un Prisme de même base & de même hauteur, aussi la Sphere ABCD est égale au tiers d'un Prisme, qui a pour base la somme des bases de tous ces Cones, c'est à dire la Surface de la Sphere, & pour hauteur le Rayon de la même Sphere. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCO-

SCOLIE.

Planche 20. 170. Fig.

On démontrera de la même façon qu'un Secteur de Sphere, comme KELB, est égal au tiers d'un Prisme qui a pour base la Surface KBL, qui sert de base au Secteur, & le Rayon de la Sphere EK, ou EL, qui est le côté de ce Secteur, pour hauteur; & comme un Prisme est triple d'une Pyramide de même base & de même hauteur, il s'ensuit qu'une Sphere est égale à un Cone, dont la hauteur est égale au Rayon de la Sphere, & la base un Cercle, dont le Diametre est double de celuy de la Sphere: & qu'un Secteur de Sphere est égal à un Cone, dont la hauteur est égale au Rayon de la Sphere, & la base un Cercle, dont le Rayon est égal à la corde de la moitié de l'arc du Secteur, parce que ce Cercle est égal à la Superficie Spherique qui sert de base au Secteur de Sphere.

THEOREME II.

La Solidité d'une Sphere est à celle du Cube de son Diametre, environ comme 157 est à 300.

JE dis que la Solidité de la Sphere ABCD est à celle du Cube de son Diametre AC, environ comme 157 est à 300, c'est à dire que si le Cube du Diametre AC contenoit par exemple 300 pieds Cubes, la Sphere ABCD en contiendroit presque 157. 170. Fig.

DEMONSTRATION.

Si l'on suppose que le Diametre AC soit de 30 pieds, la Surface de la Sphere ABCD où l'Aire de la base AHGI, se trouvera *par Probl. 2. Chap. 2. Part. 3.* de 2826 pieds quarrez, lesquels étant multipliez par la hauteur AE, qui est de 15 pieds, on aura 42390 pieds cubiques pour la Solidité du Cylindre AEFG, lequel étant triple de la Sphere ABCD, *par Theor. 1.* le tiers de ce produit 42390, donnera 14130 pieds cubes pour la Solidité de la Sphere ABCD, dont le Diametre AC est de 30 pieds, & le cube de ce Diametre est par consequent de 27000 pieds cubes. Nous sçavons donc que la Sphere ABCD est au cube de son Diametre AC, comme 14130 est à 27000, ou en divisant chaque terme par 90, comme 157 est à 300. *Ce qu'il falloit démontrer.*

M 3 THEO-

THEOREME III.

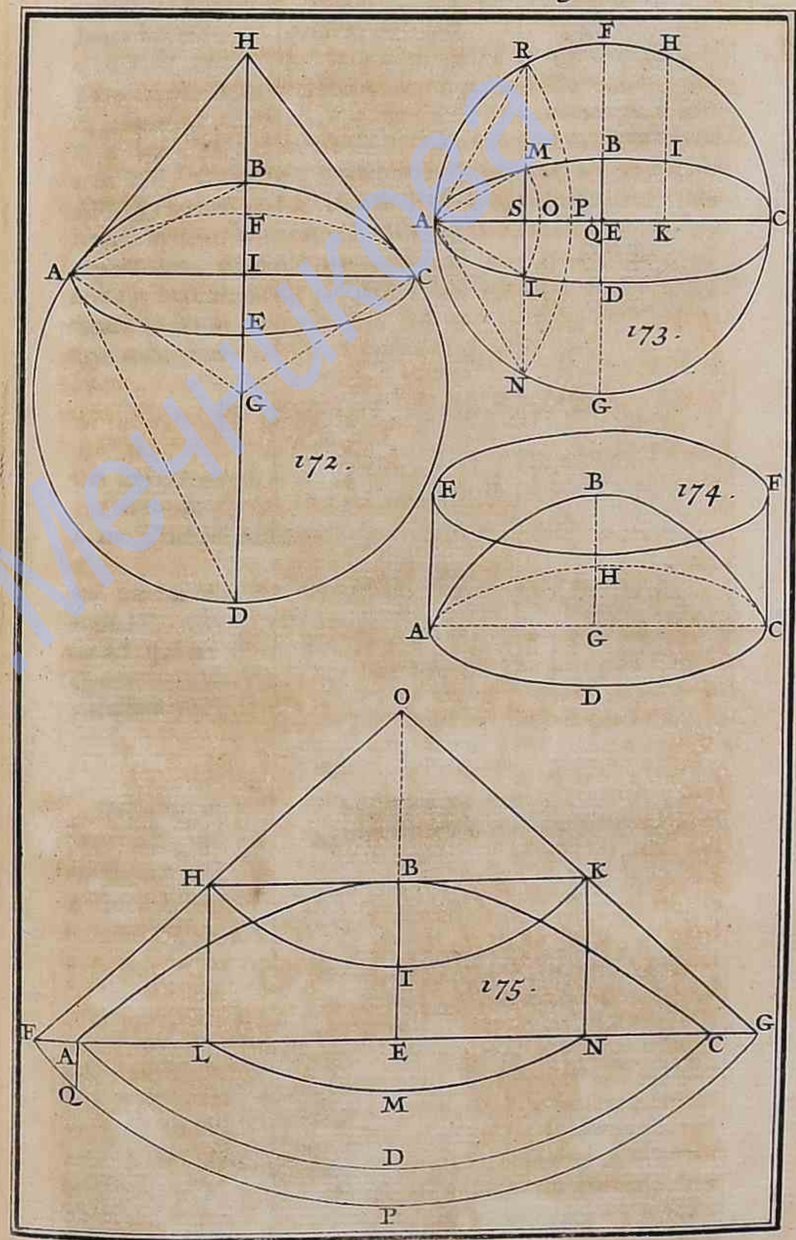
Si un Plan coupe une Sphere en deux parties inégales, l'une de ces deux Portions ſera égale à un Cone, dont la baſe eſt la même que celle de la Portion, & dont la hauteur eſt composée de celle de la même Portion, & d'une ligne qui eſt quatriéme proportionnelle à trois autres, dont la troiſiéme eſt le Rayon de la Sphere, la deuxiéme eſt la hauteur de la même Portion, & la premiere eſt la hauteur de l'autre Portion.

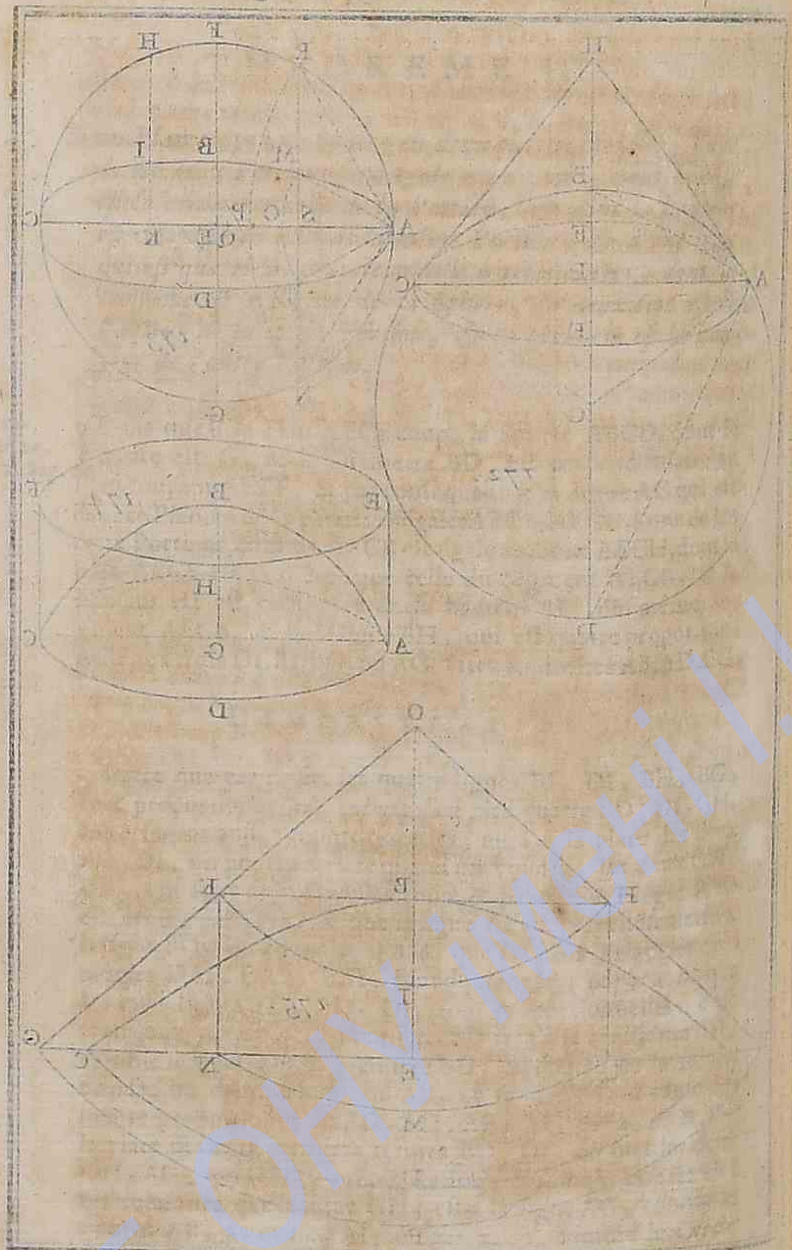
Planche 21. 172. Fig. JE dis que ſi le Plan AECF coupe la Sphere ABCD, dont le centre eſt G, & le Diametre BD, eſt perpendiculaire au Plan coupant AECF, & par conſequent à la ligne AC qui eſt dans ce Plan, en deux parties inégales AECB, AFCD, l'une de ces deux Portions, comme AECB eſt égale au Cone AECH, dont la baſe AECF eſt la même que celle du Segment AECB, & la hauteur HI eſt composée de la hauteur BI, du même Segment AECB, & de la ligne BH, qui eſt quatre proportionnelle aux trois DI, BI, BG, ou AG. Tirez les droites AB, AD, CG.

DEMONSTRATION.

Parce que *par conſtr.* les quatre lignes BI, DI, BH, BG, ſont proportionnelles, *en compoſant*, les quatre BD, DI, GH, BG, ſeront auſſi proportionnelles; ainſi à la place des deux BD, DI, on pourra mettre quand on voudra, les deux GH, BG, qui ſont en même Raiſon: & parce que l'angle BAD eſt droit, *par* 31. 3. & que la ligne AI eſt perpendiculaire à la ligne BD, on connoît *par* 8. 6. que les trois Triangles rectangles DAI, DAB, BAI, ſont équiangles, & *par* 4. 6. que les trois lignes BD, AD, DI, ſont proportionnelles: c'eſt pourquoy *par* 20. 6. la premiere BD ſera à la troiſiéme DI, comme le quarré de la premiere BD, au quarré de la ſeconde AD, ou comme le quarré AB, au quarré AI, à cauſe des quatre proportionnelles BD, AD, AB, AI, *par* 4. 6. & ſi à la place des deux premiers termes BD, DI, on met les deux GH, AG, qui ſont en même Raiſon, comme vous avez vû, on connoîtra que la ligne GH, eſt à la ligne AG, comme le quarré AB, au quarré AI, ou *par* 2. 12. comme le Cercle dont le Rayon eſt AB, au Cercle dont le Rayon eſt AI, c'eſt à dire au Cercle AECF. Or ſi l'on conſidere le Cercle AB comme la baſe d'un Cone dont la hauteur eſt AG, & le Cercle AEFC, comme la baſe d'un Cone dont la hauteur eſt GH, on

con





connoîtra *par* 15. 11. que ces deux Cones qui ont leurs bases & leurs hauteurs en raison reciproque, sont égaux entre eux, c'est à dire que le Cone dont la base est le Cercle AECF, & la hauteur est GH, est égal au Cone dont la base est le Cercle AB, & la hauteur est AG, c'est à dire *par Theor.* 1. au Secteur AGCB: & comme le Cone dont la base est le Cercle AECF, & la hauteur GH, est égal à la somme HAGC, des deux Cones AECH, AFCG, parce que leurs hauteurs HI; GI, sont ensemble égales à la hauteur GH, & que la base AECF est commune à ces trois Cones; il s'ensuit que tout le Solide HAGC est égal au Secteur AGCF, c'est pourquoy si de chacun de ces deux Solides égaux on ôte le Cone commun AFCG, il restera le Cone AECH égal au Segment AECB. *Ce qu'il falloit démontrer.* Planche 21. 172. Fig.

THEOREME IV.

Un Spheroïde est à une Sphere, dont le Diametre est égal à l'Axe de circonvolution, comme le Quarré de l'autre Axe, au Quarré du même Axe de circonvolution.

Je dis que le Spheroïde ABCD, dont l'Axe de circonvolution est AC, est à la Sphere circonscrite AFCG, dont le Diametre est égal au même Axe de circonvolution AC, comme le Quarré de l'autre Axe BD, est au quarré de l'Axe de circonvolution AC. 173. Fig.

Preparation.

Décrivez du centre E du Spheroïde, dans le Plan de l'Ellipse ABCD, qui par sa circonvolution a produit le Spheroïde, autour de l'Axe de circonvolution AC, le Cercle AFCG, & tirez dans le Plan de ce Cercle une ligne quelconque HIK perpendiculaire à l'Axe de circonvolution AC.

Demonstration.

Lorsqu'on fait tourner autour de l'Axe AC la demi-Ellipse ABC, pour produire le Spheroïde ABCD, & le Demi-cercle AFC, pour produire la Sphere AFCG, les perpendiculaires KH, KI, & une infinité d'autres que l'on peut imaginer, produisent des Cercles, dont les centres sont dans l'Axe de circonvolution AC: tellement qu'on peut considerer le Spheroïde de ABCD, & la Sphere AFCG, comme des sommes d'autant de Cercles infinis l'une que l'autre, & comme tous ces Cercles infinis sont *par* 2. 12. entre eux comme les quarrez de leurs Rayons KH, KI, qui sont proportionnels aux deux EF, EB, & par consequent aux deux Axes AC, BD, *par Theor.* 16. *Chap.* 1. *Part.* 3.

Plan-che 21. 173. Fig. *Part.* 3. il s'ensuit que la somme de tous les Cercles du Spheroïde ABCD, ou le Spheroïde ABCD est à la somme de tous les Cercles de la Sphere ACFG, ou à la Sphere ACFG, comme le Quarré de l'Axe BD, au Quarré de l'Axe AC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME V.

Un Spheroïde est au Solide sous l'Axe de circonvolution & le Quarré de l'autre Axe, environ comme 157 *est à* 300.

173. Fig. Je dis que le Spheroïde ABCD, dont l'Axe de circonvolution est AC, est au Parallelepipede rectangle dont la hauteur est égale à l'Axe de circonvolution AC, & la base est le Quarré de l'autre Axe BD, environ comme 157 est à 300.

DEMONSTRATION.

Parce que *par Theor.* 4. le Spheroïde ABCD est à la Sphere AFCG, comme le Quarré BD, au Quarré AC, si l'on donne à ces deux Quarrez BD, AC, considerez comme les bases de deux Solides, l'Axe de circonvolution AC pour hauteur commune, on connoîtra *par* 32. 11. que le Spheroïde ABCD, est à la Sphere ACFG, comme le Solide sous l'Axe de circonvolution AC, & le Quarré de l'autre Axe BD, est au Cube de l'Axe de circonvolution AC, & *en permutant*, que le Spheroïde ABCD, est au Solide sous l'Axe de circonvolution AC, & le Quarré de l'autre Axe BD, comme la Sphere ACFG, au Cube AC, ou *par Theor.* 2. comme 157 est à 300. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME VI.

Un Segment de Spheroïde, dont la hauteur est une partie de l'Axe de circonvolution, est au Segment de Sphere correspondant comme le Cone inscrit dans le Segment de Spheroïde, est au Cone inscrit dans le Segment de Sphere.

173. Fig. Je dis que le Segment de Spheroïde LMA, dont l'Axe de circonvolution est AC, est au Segment de Sphere correspondant NRA, comme le Cone LOMA, est au Cone NPRA, la hauteur AS étant commune à ces quatre Solides.

DE-

DEMONSTRATION.

Plan-che 21. 173. Fig. Car on démontrera comme dans le *Theor.* 4. que la Portion du Spheroïde LMA, est à la Portion correspondante de Sphere NRA, comme le Quarré de l'Axe BD, est au Quarré de l'Axe de circonvolution AC, ou comme le Quarré MS, au Quarré RS, ou *par* 2. 12. comme le Cercle LOM, au Cercle NPR: C'est pourquoy si à ces deux Cercles considerez comme les bases de deux Cones, on donne la hauteur commune AS, on connoîtra *par* 11. 12. que le Segment LMA, est au Segment NRA, comme le Cone LOMA, est au Cone NPRA. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que le Segment de Spheroïde LMA est égal à un Cone, dont la base est la même que celle du Segment, sçavoir le Cercle LOM, & la hauteur est égale à la ligne AQ composée de la hauteur AS du Segment & de la ligne SQ quatriéme proportionnelle à trois autres, dont la troisiéme est le Demi-axe AE, de circonvolution, la seconde est la hauteur AS du Segment, & la premiere est la hauteur CS du Segment opposé, comme dans la Sphere, parce que le Segment de Sphere, NRA est *par Theor.* 3. égal à un Cone, dont la hauteur est la même ligne composée AQ, & la même base est la meme que celle du Segment; sçavoir le cercle NPR. Ainsi en mettant ce Cone à la place du Segment NRA, on pourra faire ainsi la

DEMONSTRATION.

Parce que le Segment LMA est au Segment NRA, comme le Cone LOMA, est au Cone NPRA, *en permutant*, le Segment LMA sera à son Cone inscrit LOMA, comme le Segment NRA est à son Cone inscrit NPRA, & en mettant à la place du Segment NRA, le Cone precedent, dont la hauteur est la ligne composée AQ, & la base est la même que celle du Cone NPRA, sçavoir le Cercle NPR, & qu'à la place de ces deux derniers Cones de bases égales, on mette leurs hauteurs AQ, AS, qui sont en même Raison, par 14. 12. on connoîtra que le Segment LMA, est à son Cone inscrit LOMA, comme la hauteur AQ, est à la hauteur AS, & enfin si à ces deux lignes AQ, AS, considerées comme les hauteurs de deux Cones, on donne le Cercle LOM pour base commune, on connoîtra *par* 14. 12. que le Segment LMA est au Cone LOMA, comme le Cone dont la hauteur est AQ, & la base est le Cercle LOM, au Cone LOMA, & que par consequent le Spheroïde LMA est égal au Cone, dont la hauteur est la ligne composée AQ, & la base est le Cercle LOM, sçavoir la même que celle du Segment. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEO-

THEOREME VII.

Un Conoïde Parabolique est égal à la moitié d'un Cylindre de même base & de même hauteur.

Planche 21. 174. Fig. JE dis que le Conoïde Parabolique, ou le Paraboloïde ABCD, qui est produit par la circonvolution de la Parabole quarrée ABC, autour de son Axe BG, & dont la hauteur est la ligne BG, & la base le Cercle ADCH, est égal à la moitié du Cylindre AEFCD, dont la base est le même Cercle ADCH, & la hauteur la même ligne BG.

DEMONSTRATION.

Si par tous les points de la hauteur ou Axe BG, que je suppose divisé en une infinité de parties égales, on tire par pensée des lignes droites perpendiculaires à l'Axe BG, ou paralleles à la base AC de la Parabole ABC, toutes ces paralleles infinies, qui sont des Ordonnées à l'Axe BG, décriront par la circonvolution de la Parabole ABC, autour de son Axe BG, autant de Cercles paralleles entre eux, dont les centres seront dans l'Axe BG, & dont les Diametres seront ces paralleles ou Ordonnées: & comme les Quarrez de ces Ordonnées ou Diametres des Cercles sont par la nature de la Parabole quarrée comme les parties correspondantes de l'Axe BG, & par consequent dans une continuelle proportion arithmetique, les Cercles qui composent le Paraboloïde, seront aussi dans une Progression arithmetique. Ainsi en considerant le Paraboloïde ABCD, comme une somme de Cercles infinis en continuelle proportion arithmetique, dont le plus grand est la base ADCH, on connoît *par Theor. 11. Chap. 1. Part 3.* que la somme de tous ces Cercles infinis, ou le Paraboloïde ABCD, est égal à la moitié du plus grand ADCH multiplié par la ligne BG, qui exprime le nombre de leur multitude, c'est à dire à la moitié du Cylindre AEFCD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEO-

THEOREME VIII.

Un Conoïde Hyperbolique produit par la circonvolution d'une Hyperbole autour de son Axe, est égal à l'excés d'un Cone tronqué, ayant pour base celle du Cone Asymptotique, & pour hauteur celle du Conoïde, sur le Cylindre inscrit dans le Cone Asymptotique, & de même hauteur que le Conoïde.

JE dis que si autour de l'Axe BE, de l'Hyperbole ABC, dont le centre est O, & les Asymptotes OF, OG & dont la base AC est perpendiculaire à l'Axe BE, on fait mouvoir & l'Hyperbole ABC, & le Triangle isoscéle FOG, afin de produire par cette circonvolution le Conoïde Hyperbolique ABCD, & le Cone Asymptotique OFPG; le Conoïde ABCD est égal à l'excés du Cone tronqué HFPGK, dont la hauteur BE est la même que celle du Conoïde ABCD & la base FPG la même que celle du Cone Asymptotique OFPG, sur le Cylindre HLMNK de même hauteur que le Conoïde ABCD. Planche 12. 175. Fig.

PREPARATION.

Tirez du point A dans le Plan de la base FPG, au Diametre FG, la perpendiculaire AQ, qui touchant en A le Cercle ADC, *par 32. 3.* sera *par Probl. 17. Chap. 2. Part. 3.* le Rayon d'un Cercle égal à la Couronne FADCGP terminée par les circonferences des deux Cercles FPG, ADC, dont le centre commun est E, qui est aussi le centre du Cercle LMN, qui sert de base au Cylindre HLMNK. Tirez encore dans le Cercle HIK, au Diametre FG, le Diametre parallele HK, qui touchera l'Hyperbole ABC au sommet B.

DEMONSTRATION.

Parce que le Quarré AQ est *par 36. 3.* égal au Rectangle des lignes AF, AG, c'est à dire par la nature des Asymptotes, au Quarré de la touchante BH, ces deux lignes AQ, BH seront égales entre elles, & leurs Cercles seront par consequent égaux entre eux, c'est à dire que le Cercle HIK, ou LMN, sera égal au Cercle dont le Rayon est AQ, ou à la Couronne FADCGP: c'est pourquoy à cause de l'égalité des bases & des hauteurs, le Cylindre HLMNK sera égal à l'espace solide BKGPFH, qui entoure le Conoïde ABCD; & comme en ôtant cet espace solide du Cone tronqué HFPGK, on a le Conoïde ABCD pour excés, il faut de même qu'en ôtant le

Planche 21. 175. Fig. le Cylindre HLMNK égal à cet espace solide BKGPFH du même Cone tronqué HFPGK, on ait aussi le Conoïde Hyperbolique ABCD pour excés. *Ce qu'il falloit démontrer.*

CHAPITRE II.

Des Problêmes.

CE Chapitre est comme un Corollaire du precedent, dont les Theorêmes nous fournissent des pratiques courtes & faciles pour mesurer toute sorte de Solides, comme vous allez voir dans les Problêmes suivans.

PROBLEME I.

Mesurer un Prisme.

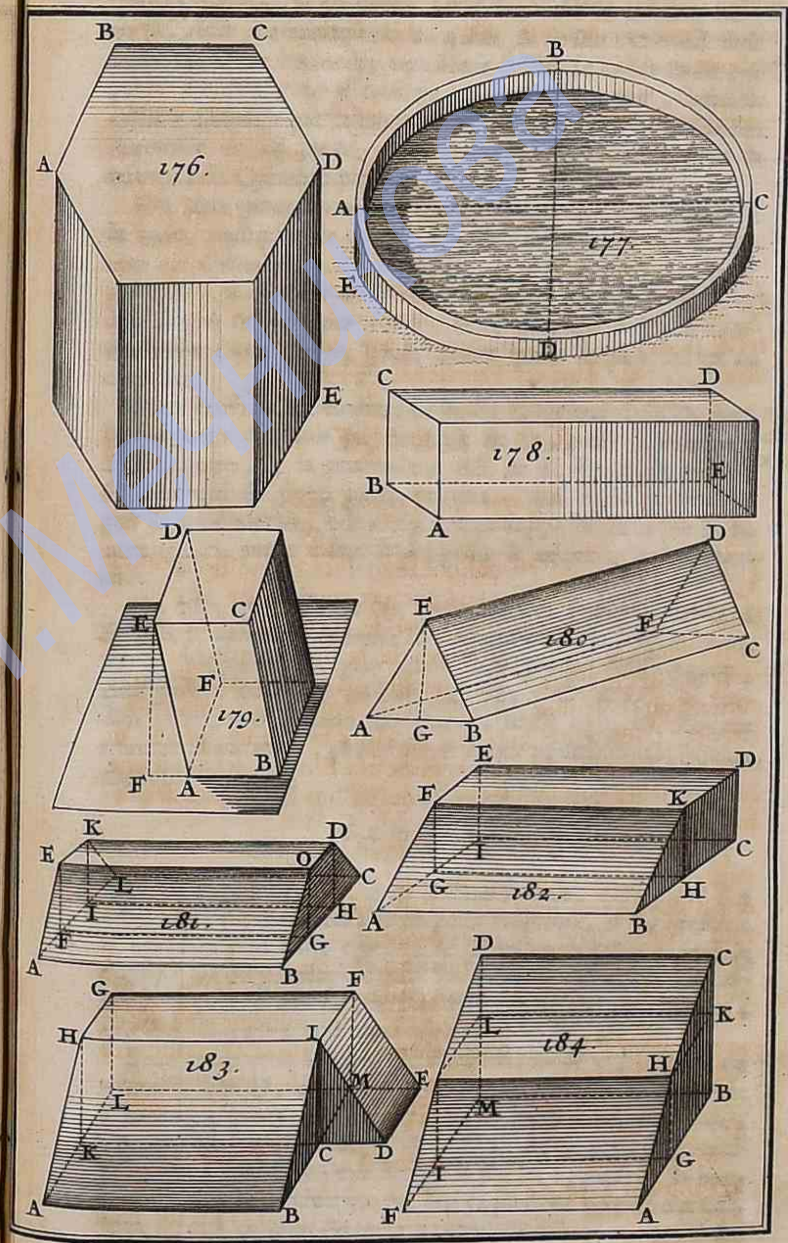
UN Prisme droit ou oblique se mesure en multipliant par sa hauteur, qui est une ligne perpendiculaire aux deux bases paralleles & opposées, l'une de ces deux bases, qu'on peut connoître par les principes de la Planimetrie, sçavoir en la mesurant comme un Triangle, si elle est triangulaire: comme un Polygone, si elle est un Polygone: comme un Cercle, si elle est circulaire, & alors le Prisme prend le nom de Cylindre: & enfin comme une Ellipse, si elle est une Ellipse, telles que sont les bases des Bassins Elliptiques de plusieurs Fontaines.

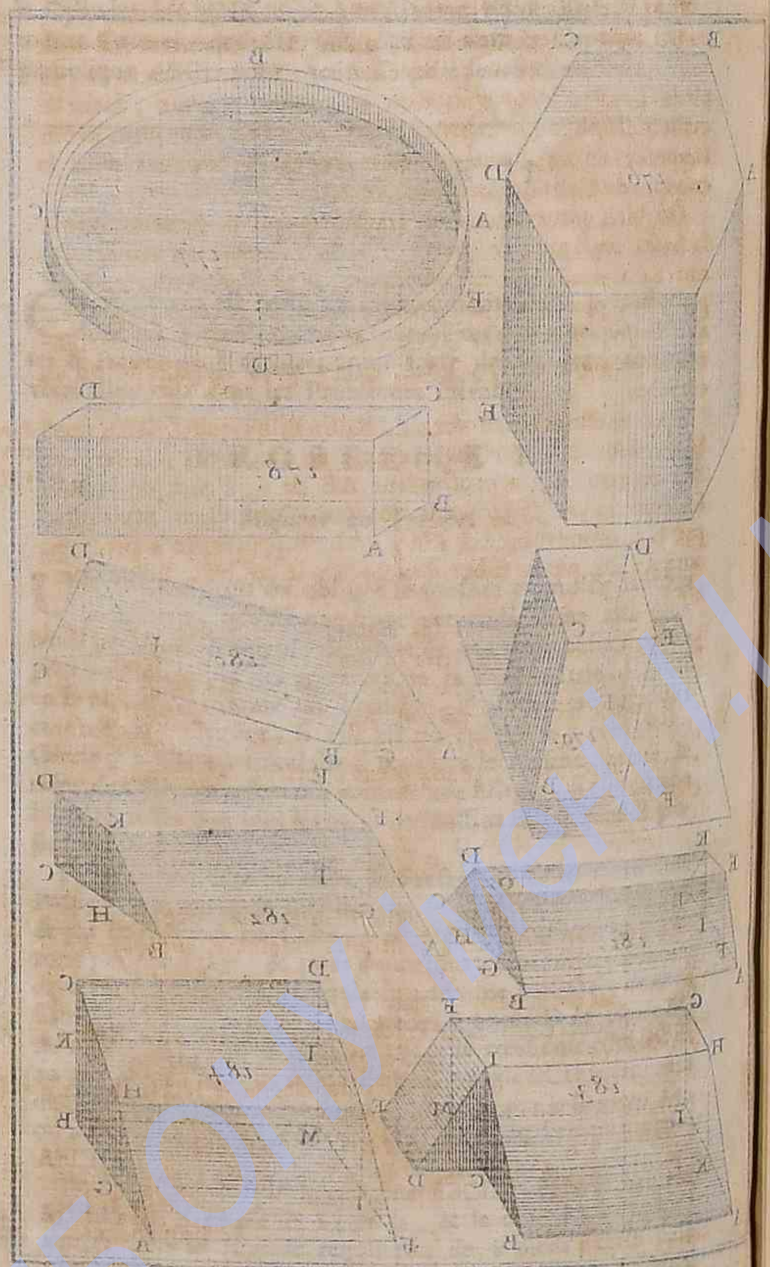
Nous avons déja vû dans la Preface de cette quatriéme Partie, la maniere de mesurer un Parallelepipede rectangle, & par consequent un Cube, c'est pourquoy nous n'en parlerons pas davantage: & nous donnerons icy premierement un Planche 19. 167. Fig. exemple d'un Prisme triangulaire, comme ABCDE, dont la hauteur AB sera supposée de 24 pieds, le côté BD de sa base BC de 10 pieds, l'autre côté CD de 17, & le troisiéme côté BC de 21, & alors l'Aire de cette base ou Triangle BCD se trouvera de 84 pieds quarrez, qui étant multipliez par la hauteur 24, on aura 2016 pieds cubes pour la solidité du Prisme proposé ABCDE.

Planche 22. 176. Fig. Pour mesurer le Prisme exagone ABCDE, dont la hauteur ED soit par exemple de 24 pieds, & le côté AB de sa base ABCD, que je suppose reguliere, de 8 pieds; cette base ABCD se trouvera de 166 pieds quarrez, qui étant multipliez par la hauteur 24, on aura 3984 pieds cubes pour la solidité qu'on cherche.

Pour

Geometrie Planche 22. Page 188.





Pour meſurer le Cylindre AEBCD, dont la hauteur AD, ou BC, ſoit par exemple de 24 pieds, & le Diametre AB de ſa baſe AEBF de 25 pieds; cette baſe AEBF ſe trouvera de 490 pieds quarrez, & d'environ 90 pouces quarrez, laquelle étant multipliée par la hauteur AD; ou BC, que nous avons ſuppoſée de 24 pieds, on aura 11775 pieds cubes pour le contenu du Cylindre propoſé AEBCD. Planche 19. 161. Fig.

Ou bien pour éviter les fractions qui peuvent arriver à la baſe, *multipliez le quarré 625 du Diametre 25 par la hauteur du Cylindre 24, & multipliez le produit 15000 toûjours par 785, pour avoir un ſecond produit 11775000, qu'il faudra diviſer toûjours par* 1000, & le quotient donnera comme auparavant 11775 pieds cubes pour la Solidité qu'on cherche.

Pour meſurer le contenu du Baſſin Elliptique ABCD, dont la longueur AC ſoit par exemple de 124 pieds, la largeur BD de 100, & la profondeur AE de 6, l'Aire de la baſe ſe trouvera de 9734 pieds quarrez, qui étant multipliée par la profondeur, que nous avons ſuppoſée de 6 pieds, on aura 58404 pieds cubes d'eau pour le contenu qu'on cherche. Planche 22. 177. Fig.

Ou bien pour éviter les fractions qui peuvent arriver à la baſe, *multipliez enſemble la longueur 124, la largeur 100, & la profondeur 6, pour avoir leur produit ſolide 74400, qu'il faudra multiplier toûjours par 785, & diviſer le produit 58404000 toûjours par* 1000, & le quotient donnera comme auparavant, 58404 pieds cubes pour la capacité qu'on cherche.

Scolie.

Nous avons déja dit dans la Planimetrie, que quand il y a des eſpeces differentes à multiplier enſemble, il faut reduire le tout à la plus baſſe eſpece, & alors aprés avoir trouvé la ſolidité du corps propoſé dans les meſures cubiques plus baſſes, on pourra par la Diviſion les reduire aux plus hautes; comme vous allez voir dans les exemples ſuivans.

Pour trouver la ſolidité du Parallelepipede rectangle, ou muraille ABCD, dont la longueur CD ſoit par exemple de 8 toiſes, 4 pieds, ou de 52 pieds, la hauteur BC de 2 toiſes, 3 pieds, ou de 15 pieds, & l'épaiſſeur AB de 2 pieds; multipliez les 2 pieds de l'épaiſſeur AB par les 15 pieds de la hauteur BC, & le produit 30 par les 52 pieds de la longueur CD, & ce ſecond produit donnera 1560 pieds cubiques, qui étant diviſez par 216, parce qu'une toiſe cube a 216 pieds cubes, on aura 7 toiſes cubes, & 48 pieds cubes, pour la ſolidité de la muraille proproſée ABCD. 178. Fig.

Planche 22. 178. Fig. Si la longueur CD étoit de 6 toises, 3 pieds, 4 pouces, qui font en tout 472 pouces, la hauteur BC de 2 toises, 4 pieds, 9 pouces, qui font en tout 201 pouces, & l'épaisseur AB de 2 pieds, 8 pouces, qui font en tout 32 pouces, en multipliant ensemble ces trois lignes 472, 201, 32, on a 3035904 pouces cubes, qui étant divisez par 1728, parce qu'un pied cube a 1728 pouces cubes, on aura 1756 pieds cubes, & 1536 pouces cubes pour la solidité de la muraille proposée ABCD. Que si l'on divise encore les 1756 pieds cubes par 216, qui est le nombre des pieds cubes contenus dans une toise cube, on aura 8 toises cubes, 28 pieds cubes, & 1536 pouces cubes pour la solidité qu'on cherche.

Ou bien pour venir tout d'un coup aux toises, divisez les 3035904 pouces cubes trouvez, par 373248 qui est la valeur d'une toise cube en pieds cubes, & le quotient donnera 8 toises cubes, comme auparavant, & le reste de la division, sçavoir 49920 étant divisé par 1728, qui est la valeur d'un pied cube en pouces cubes, on aura 28 pieds cubes, & il restera 1536 pouces cubes, comme auparavant.

Il y a dans la Stereometrie, comme dans la Planimetrie, plusieurs abregez, dont les Arpenteurs se servent pour faire cette multiplication, qui de la maniere que nous l'avons icy enseignée donne de la peine à ceux qui ne sont pas accoûtumez à faire de grands calculs : mais comme la plûpart de ces abregez ne font qu'approcher de la verité, & que les autres chargent beaucoup la memoire, ils ne meritent pas que nous en parlions icy davantage.

Lorsque le Prisme que l'on se propose de mesurer est droit, comme le precedent ABCD, il est évident que le côté BC en represente la hauteur, parce qu'il est perpendiculaire à sa base ABE: mais quand il sera *oblique*, c'est à dire quand ses côtez

179. Fig. ne seront pas perpendiculaires à sa base; comme ABCDE, dont le côté AE est oblique à la base ABF, alors ce côté AE ne peut pas être pris pour la hauteur du Prisme, mais on doit prendre la ligne EF, qui est perpendiculaire au Plan de la base AEF. Cette remarque servira pour tous les autres corps qui ne seront pas droits.

180. Fig. Quand un Prisme triangulaire est appuyé sur l'une de ses faces Parallelogrammes, comme ABCD, qui s'appuye sur le Parallelogramme ABCF, lequel dans ce cas est consideré comme sa base, à l'égard de laquelle la hauteur du Prisme sera égale à la hauteur EG, du Triangle ABE, qui en represente le *Profil*, ou *Porfil*, il ne faudroit pas multiplier la base ABCF, par la hauteur EG, mais seulement par la moitié de cette hauteur, pour avoir la solidité du Prisme, parce qu'en multipliant par la hauteur entiere, on a la solidité d'un Prisme de même base & de même hauteur, qui *par* 49. 11. est double du

du Prisme proposé ABCDE, lequel à cause de cela nous appellerons dans la suite *Demi-prisme*, lorsque sa base sera un Parallelogramme. Planche 22. 180. Fig.

Supposons que la base ABCF soit un Parallelogramme rectangle, dont la longueur BC soit de 24 pieds, & sa largeur AB de 14, auquel cas l'Aire de ce Parallelogramme se trouvera de 336 pieds quarrez, comme l'on connoît en multipliant la longueur 24 par la largeur 14 : or si l'on suppose que le côté BE soit de 15 pieds, & le côté AE de 13, la perpendiculaire EG se trouvera de 12 pieds, dont la moitié 6 étant multipliée par l'Aire 336 de la base ABCF, on aura 2016 pieds cubes pour la solidité du Prisme ABCDE, que l'on aura aussi, comme nous avons déja dit, en multipliant l'Aire du Triangle ABE, qui se trouvera de 84 pieds quarrez, par la longueur BC, que nous avons supposée de 24 pieds.

PROBLEME II.

Mesurer une Pyramide.

Pour connoître la solidité de la Pyramide ABCD, dont la hauteur ED soit par exemple de 36 pieds, & le côté AB ou BC de sa base que je suppose quarrée, de 18 pieds; multipliez la base ABC qui se trouvera de 324 pieds quarrez, par la hauteur 36, & divisez le produit 11664 toûjours par 3, & le quotient donnera 3888 pieds cubes pour la solidité de la Pyramide proposée ABCD, parce que par cette Multiplication, l'on a le contenu d'un Prisme de même base & de même hauteur, qui est triple de la Pyramide *par* 7. 12. Planche 19. 168. Fig.

On mesurera de la même façon la solidité d'un Cone, comme du Cone ABC, dont la hauteur CO soit par exemple de 36 pieds, & le Diametre AB, de sa base ADBE, de 30 pieds, auquel cas cette base ou Cercle ADBE se trouvera de 706 pieds quarrez & 72 pouces quarrez, laquelle étant multipliée par le tiers 12 de la hauteur 36, on aura 8478 pieds cubes pour la solidité du Cone proposé ABC. 162. Fig.

Ou bien pour éviter les fractions qui arrivent ordinairement à la base, *multipliez le quarré 900 du Diametre 30 toûjours par 785, & le produit 706500 par le tiers 12 de la hauteur 36, pour avoir ce second produit 8478000, lequel étant divisé toûjours par 1000, le quotient donnera comme auparavant, 8478 pieds cubes pour la solidité qu'on cherche.*

Planche 19. 162. Fig.

SCOLIE.

Les Cones qui servent dans la pratique, sont ordinairement droites, auquel cas la ligne qui en represente la hauteur, tombe au centre de leur base : & comme il arrive quelquefois que cette hauteur ne peut pas être facilement mesurée, comme quand on a ce Cone entre les mains ; dans ce cas on mesurera son côté AC, ou BC, que nous supposerons de 25 pouces, & le Demi-diametre AO, ou BO, que nous supposerons de 15 pouces, dont le quarré 225 étant ôté du quarré 625 du côté AB, la Racine quarrée du reste 400, donnera 20 pieds pour la hauteur CO, dont la démonstration est évidente par 47. 1.

PROBLEME III.

Mesurer une Pyramide tronquée.

Planche 20. 171. Fig.

POur trouver la solidité de la Pyramide tronquée ABCDEF, prolongez par pensée ses côtez jusqu'en L, pour avoir la Pyramide entiere ABLF, de laquelle ôtant la Pyramide ajoûtée HCLE, le reste sera la Pyramide tronquée. Mais pour trouver les soliditez de ces deux Pyramides, qui sont icy droites, supposons que la base ABGF soit un Quarré dont le côté AB soit par exemple de 36 pieds, & que le côté CD de la petite base HCDE, qui sera aussi un Quarré, soit de 8 pieds, auquel cas cette petite base HCDE sera de 64 pieds quarrez, & la grande ABGF de 1296 pieds quarrez. Supposons encore que la hauteur IK de la Pyramide tronquée soit de 42 pieds, au moyen de laquelle & des côtez connus de chaque base, on trouvera la hauteur LI de la petite Pyramide HCLE, en faisant l'Analogie suivante, qui tire sa démonstration des deux Triangles semblables LIE, LKF, &c.

Comme la difference des côtez AB, CD.	28
Au petit côté CD	8
Ainsi la hauteur IK	42
A la hauteur LI	12

qui se trouvera de 12 pieds, à laquelle ajoûtant les 42 pieds de la hauteur IK, on aura 54 pieds pour la grande hauteur LK, que l'on peut aussi trouver immediatement par cette Analogie,

Comme

Planche 21. 171. Fig.

Comme la difference des côtez AB, CD	28
Au grand côté AB	36
Ainsi la hauteur IK	42
A la grandeur LK	54

qui se trouvera de 54 pieds, comme auparavant.

Si l'on multiplie la grande base 1296 par le tiers 18 de la grande hauteur LK, on aura 23328 pieds cubes pour la solidité de la grande Pyramide ABLF : & si l'on multiplie la petite base 64 par le tiers 4 de la petite hauteur, on aura 256 pieds cubes pour la solidité de la petite Pyramide HCLE, laquelle étant ôtée de la solidité 23328 de la plus grande ABLF, le reste donnera 23072 pieds cubiques pour la Pyramide tronquée ABCDEF.

Ou bien pour éviter les fractions qui peuvent arriver dans les hauteurs LI, LK, *ajoûtez ensemble les deux bases 1296, 64, pour avoir leur somme 1360, & les multipliez ensemble, pour avoir leur produit 82944, dont la Racine quarrée 288 doit être ajoûtée à la somme precedente 1360, pour avoir une seconde somme 1648, qui étant multipliée par le tiers 14 de la hauteur IK, on aura 23072 pieds cubes pour la solidité qu'on cherche, comme auparavant.*

SCOLIE.

Comme cette Pyramide tronquée ABCDEF est icy droite, ce qui arrive ordinairement, on la peut encore mesurer en la reduisant en un Prisme, dont la base est le Quarré STVX égal à la petite base CDEH : en quatre Demi-prismes égaux, dont les bases sont les Rectangles égaux YZTS, MNVT, VOPX, QRSX, dans chacun desquels la largeur est égale au côté 8 de la petite base CDHE, & la longueur est égale à la moitié 14 de l'excés 28 du côté 36 de la grande base ABCD, sur le côté 8 de la petite CDHE : & en quatre Pyramides égales, dont les sommets sont aux quatre points C, D, E, H, & dont les bases sont les quatre Quarrez égaux BV, PQ, RY, AT, chacun desquels est de 196 pieds quarrez, parce que son côté est de 14 pieds, sçavoir la moitié de la difference des deux côtez AB, CD.

Si donc on multiplie l'Aire 64 de la base STVX du Prisme, par la hauteur 42, on aura 2688 pieds cubes pour la solidité de ce Prisme. Si l'on multiplie la base ZTSY, dont l'Aire se trouvera de 112 pieds quarrez, par la moitié 21 de la hauteur 42, on aura 2352 pieds cubiques pour le Demi prisme, dont la base est ZTSY, & multipliant cette solidité trouvée 2352 par 4, on aura 9408 pieds cubiques pour les quatre Demi prismes. Enfin si l'on multiplie la base d'une des quatre Pyrami-

Plan-che 21. 171. Fig. Pyramides, qui est de 196 pieds quarrez, par le tiers 14 de la hauteur 42, on aura 2744 pieds cubes pour une Pyramide, dont le quadruple donnera 10976 pieds cubes pour les quatre Pyramides. Ainsi en ajoûtant ensemble les soliditez trouvées 2688, 9408, 10976, du Prisme, des quatre Demi-prismes, & des quatre Pyramides, on aura 23072 pieds cubes pour la solidité de la Pyramide tronquée ABCDEF, comme auparavant.

PROBLEME IV.

Mesurer un Cone tronqué.

Plan-che 19. 165. Fig. POur trouver la solidité du Cone tronqué ABCD, dont la hauteur IO soit par exemple de 15 pieds, le Diametre AB de la grande base AEBF, de 24 pieds, & le Diametre CD de la petite base DGCH, de 18 pieds, auquel cas la grande base AEBF se trouvera de 452 pieds quarrez, & la petite DGCH de 254; on pourra comme dans le Problême precedent, prolonger les côtez du Cone tronqué, pour avoir un Cone entier, mais on aura plûtôt fait de se servir du Canon precedent, que nous repeterons encore icy.

Ajoûtez donc ensemble les deux bases 452, 254, pour avoir leur somme 706, & les multipliez ensemble, pour avoir leur produit 114808, dont la Racine quarrée 339 étant ajoûtée à la somme precedente 706, on aura cette seconde somme 1045, laquelle étant multipliée par le tiers 5 de la hauteur IO, on aura 5225 pieds cubes pour la solidité du Cone tronqué ABCD.

Ou bien pour éviter les fractions qui peuvent arriver à chaque base, & même à la Racine quarrée de leur produit, suivez cet autre Canon, qui comme le precedent, a sa démonstration.

Multipliez ensemble les Diametres 24, 18, pour avoir leur produit 432, qu'il faut ajoûter à la somme 900 des quarrez 576, 324 des mêmes Diametres 24, 18, pour avoir cette seconde somme 1332, qu'il faut multiplier toûjours par 157, pour avoir ce produit 209124, lequel étant multiplié par le tiers 5, de la hauteur IO, & la moitié 522810 du produit 1045620, étant divisée toûjours par 100, on aura plus exactement qu'auparavant, 5228 pieds cubes pour la solidité qu'on cherche.

PRO-

PROBLEME V.

Mesurer un corps taludé.

POur trouver la solidité d'un *Corps taludé*, c'est à dire d'un corps plus large d'un côté que d'autre, comme de la murail- Plan-che 22. 182. Fig.
le ABCDEF, qui est plus large par le bas que par le haut, sa base ABCI étant plus grande que la face superieure DEFK, ou que le Rectangle GHCI, qui est son *Plan ortographique*, de tout le Rectangle ABHG, qui sert de base au Demi-prisme ou *Talud* ABHKF, dont le Profil est le Triangle rectangle BHK, comme le Profil de la muraille est le Trapezoïde BCDK; on multipliera l'Aire du Triangle rectangle BHK par la longueur AB de la muraille, pour avoir la solidité du Prisme ABHKF, que l'on aura aussi en multipliant la base ABHG par la moitié de la hauteur HK. Pareillement on multipliera l'Aire du Rectangle GHCI par la même hauteur HK, ou CD, pour avoir la solidité du Parallelepipede GHCDEF, à laquelle ajoûtant celle du Talud ABHKF, on aura la solidité entiere de la muraille proposée ABCDEF, que l'on trouvera plus facilement, en multipliant l'Aire de son Profil BCDK par sa longueur AB.

Supposons que la longueur AB soit de 48 pieds, la largeur BH du Talud de 6 pieds, la hauteur HK de 12 pieds, & l'épaisseur DK par en haut de 4 pieds, auquel cas l'épaisseur BC par en bas sera de 10 pieds; la solidité du Demi-prisme ABHKF se trouvera de 1728 pieds cubes, & celle du Prisme GHCDE de 2304 pieds cubes, & toute la muraille ABCDEF de 4032 pieds cubes. Ou bien l'Aire du Trapezoïde BCDK se trouvera de 84 pieds quarrez, laquelle étant multipliée par la longueur AB, que nous avons supposée de 48 pieds courans, on aura comme auparavant, 4032 pieds cubiques pour la solidité qu'on cherche.

C'est de la même façon que l'on mesurera la solidité de la 181. Fig.
muraille ABCDKE, qui est taludée des deux côtez, sçavoir en ajoûtant à la solidité du Prisme FGHDKI, dont le Plan ortographique est le Rectangle FGHI, la solidité du Talud ABGOEF, dont la base est le Rectangle ABGF, & encore la solidité de l'autre Talud IHCDKL; dont la base est le Rectangle IHCL, & le Profil est le Triangle DHC rectangle en H. Ou bien en multipliant le Profil BCDO de la muraille par sa longueur AB.

Comme si la longueur AB de la muraille est de 48 pieds, la largeur BG du Talud ABGOEF de 6 pieds, la largeur CH de l'autre Talud IHCDKL de 5 pieds, la hauteur GO, ou HD de la muraille de 12 pieds, & son épaisseur OD par en haut de 3

pieds,

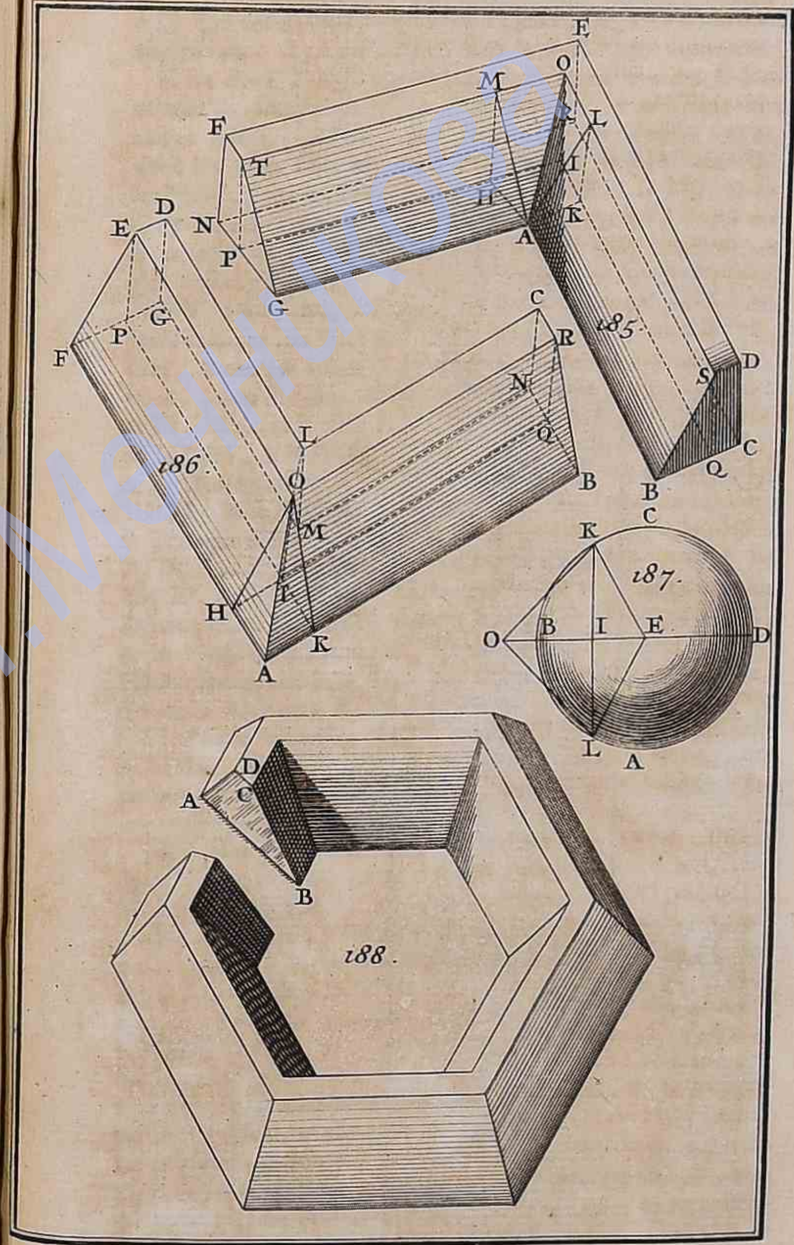
Planche 22. 181. Fig. pieds, auquel cas son épaisseur BC par en bas sera de 14 pieds; la solidité du Talud ou Demi-prisme ABGOF se trouvera de 1728 pieds cubes, celle de l'autre Talud IHCDKL de 1440 pieds cubes, & celle du Parallelepipede rectangle FGHDKI de 1728 pouces cubes, & toute la muraille ABCDKE de 4896 pieds cubes, qu'on auroit trouvez en multipliant l'Aire du Profil BCDO, qui se trouvera de 102 pieds quarrez, par la longueur AB, que nous avons supposée de 48 pieds.

183. Fig. Lorsque les deux Taluds se joindront, comme il arrive dans la muraille ABCDEFGH, dont les deux Taluds ABCIHK, CDEFI, se joignent au point I, on ajoûtera pareillement à la solidité du Parallelepipede rectangle KCMFGH, dont la base est le Rectangle KCML, & le Profil le Rectangle CMFI, ou KLGH, ou si vous voulez le Rectangle KCIH, ou LMFG, la solidité du Talud ABCIHK, dont la base est le Rectangle ABCK, & le Profil le Triangle BCI rectangle en C, & la solidité de l'autre Talud CDEFI, dont la base est le Rectangle CDEM, & le Profil le Triangle CDI rectangle en C pour avoir la solidité de la muraille proposée ABCDEFGH.

Comme si AB, ou KC, ou LM est de 24 pieds, BC, ou AK de 6 pieds, CD, ou ME de 5 pieds, DE, ou CM, ou KL, ou GH, ou FI, de 4 pieds, & CI, ou FM, ou KH, ou LG de 12 pieds, la solidité du Parallelepipede KCMFGH sera de 1152 pieds cubiques, celle du Talud ABCIHK de 864 pieds cubiques, & la solidité de l'autre Talud CDEFI, de 120 pieds cubiques, de sorte que la somme de ces trois soliditez trouvées 1152, 864, 120, donnera 3136 pieds cubes pour la solidité entiere de la muraille proposée ABCDEFGH.

184. Fig. Si des deux Taluds qui se joignent, l'un est à côté, & l'autre en dessus, qui dans cette situation prend le nom de *Glacis*, comme il arrive au corps ABCDEF, qui a en devant, le Talud AGHEIF, dont la base est le Rectangle FAGI, & le Profil le Triangle AGH rectangle en G : & en haut, le Glacis EHKCDL, dont la base est le Rectangle EHKL, & le Profil le Triangle HKC rectangle en K ; on ajoutera comme auparavant, à la solidité du Parallelepipede rectangle IGBKLE, dont la base est le Rectangle IGBM, les soliditez du Talud FAGHEI, & du Glacis EHKCDLE, pour avoir la solidité entiere du corps proposé ABCDEF, que l'on aura aussi en multipliant son Profil ABCH par la longueur AF.

Comme si AF est de 24 pieds, AG de 4, BG de 6, BK de 8, & KC de 5, la solidité du Parallelepipede IGBKLE se trouvera de 1152 pieds cubes, celle du Talud AGHEIF de 384 pieds cubes, & celle du Glacis EHKCDL, de 360 pieds cubes, & ces trois soliditez 1152, 384, 360, étant ajoûtées ensemble, donnent 1896 pieds cubiques, pour la solidité du corps FABCDE, que l'on trouvera plus facilement, en multipliant l'Aire du Profil



fil ABCH, qui se trouvera de 79 pieds quarrez, par la longueur AF, que nous avons supposée de 24 pieds, car on aura comme auparavant, 1896 pieds cubes pour la solidité qu'on cherche. Planche 22. 184. Fig.

Si les deux Taluds qui se joignent, appartiennent à deux murailles taludées en dehors, comme il arrive aux deux murailles ABCL, AFDL, que je suppose également hautes, dont les bases sont les deux Trapezoïdes AMNB, AMGF, les Profils sont les deux Trapezoïdes BNCR, DEFG, & les deux Taluds exterieurs sont AIORQB, AIOEPF, qui ont pour bases les Trapezoïdes AIQB, AIPF, & les deux Triangles rectangles BQR, EPF pour Profils; tirez de l'angle I dans la Base de chaque Talud, les deux lignes IK, IH, perpendiculaires aux deux AB, AF, & joignez les droites OK, OH, & chaque muraille se trouvera reduite comme auparavant, en un Prisme, & en un Demi-prisme, sçavoir la muraille ABCL, au Prisme IQRCLO, dont la Base est le Trapezoïde IQNM, & le Profil est le Rectangle QRCN, ou IOLM, & au Demi-prisme KIORQB, dont la Base est le Rectangle KIQB, & le Profil est le Triangle BQR rectangle en Q, ou le Triangle KIO rectangle en I: & pareillement la muraille AFDL, au Prisme IMLDEP, dont la Base est le Trapezoïde IMGP, & le Profil est le Rectangle PGDE, ou IMLO, & au Demi prisme HIOEPF, dont la Base est le Rectangle HIPF, & le Profil est le Triangle FPE rectangle en P, ou le Triangle HIO rectangle en I. Si donc on ajoûte ensemble les soliditez des deux Prismes, & des deux Demi-prismes, & de plus la solidité de la Pyramide AHOK, dont la Base est le Quadrilatere AHIK, & le sommet est l'angle O, qu'on appelle *Angle saillant*, parce qu'il sort en dehors, on aura la solidité des deux murailles proposées ABCL, AFDL. Planche 23. 186. Fig

Supposons que les deux murailles ABCL, AFDL, soient égales, & que la longueur AB soit de 40 pieds, IQ de 30, MN de 25, QR de 8, & BQ de 6, auquel cas AK sera de 10 pieds, & QN de 3: l'Aire du Trapezoïde IMNQ sera de 82 pieds quarrez, & 72 pouces quarrez, & la solidité du Prisme IQRCLO sera de 660 pieds cubes: l'Aire du Rectangle KIQR sera de 180 pieds quarrez, & la solidité du Demi-prisme KBQROI sera de 720 pieds cubes, & la somme de ces deux soliditez trouvées 660, 720, est 1380, dont le double donne 2760 pieds cubes pour la somme des Prismes & des Demi-prismes qui se trouvent dans les deux murailles, à laquelle il faut ajoûter la solidité de la Pyramide OKAH, qui se trouvera de 160 pieds cubes, parce que sa base AHIK est de 60 pieds quarrez, & l'on aura en tout 2920 pieds cubiques pour la solidité des deux murailles ABCL, AFDL.

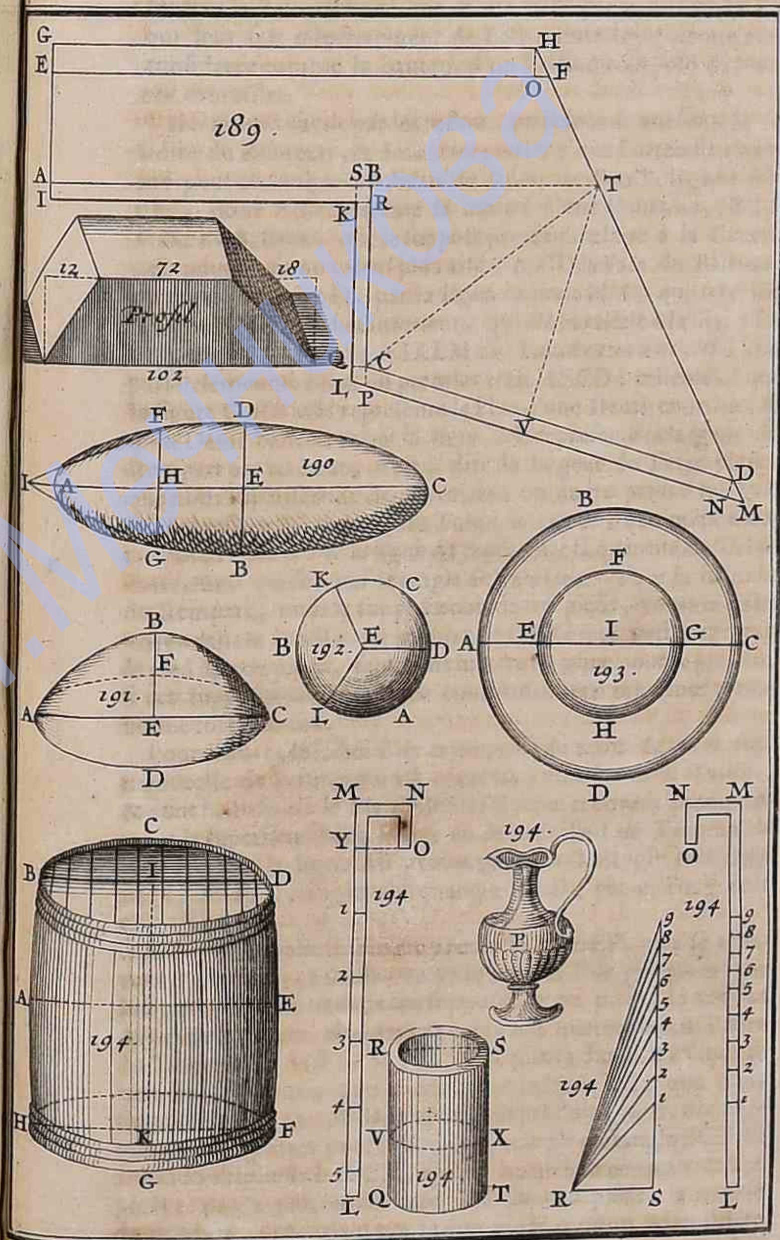
Si les deux Taluds qui se joignent, appartiennent à deux murailles taludées en dedans, comme il arrive aux deux murail- 185. Fig.

Planche 23. 185. Fig. les ABCDER, AGNFER, que je suppose également hautes, dont les Bases sont les deux Trapezoïdes ABCR, AGNR, le Profil commun le Trapezoïde BCDS, parce que je suppose que les deux murailles sont également épaisses par en bas, aussi-bien que par en haut, & les deux Taluds interieurs sont AOSQB, AOTPG, qui ont pour bases les Trapezoïdes ABQI, AGPI, & le Triangle BQS rectangle en Q pour Profil commun; Tirez de l'angle A, qu'on appelle *Angle entrant*, parce qu'il rentre en dedans, dans la Base de chaque Talud, les deux lignes AH, AK, perpendiculaires aux deux IP, IQ, & dans la face verticale de chaque Prisme, par les points H, K, les deux lignes HM, KL, perpendiculaires aux deux IP, IQ, ou bien aux deux AH, AK, & menez les droites AL, AM, qui feront deux Pyramides, dont les hauteurs seront les deux perpendiculaires AH, AK, les Bases seront les deux Rectangles IOMH, IOLK, & le sommet commun sera le point A. Ainsi les deux murailles proposées ABCDE, AGNFE, se trouveront ensemble reduites en deux Prismes QDSLK, PFTMOEL, ou en un seul, dont la Base est le Plan PNRCQIP, & la hauteur est CD, ou QS, en deux Demi-prismes, sçavoir BQSLKA, dont la base est le Rectangle AKQB, & le Profil est le Triangle BQS rectangle en Q, ou le Triangle AKL rectangle en K, & PFTMHA, dont la base est le Rectangle AGPH, & le Profil le Triangle AHM rectangle en M, & en deux Pyramides AIOLKA, AIOMHA. C'est pourquoy si l'on ajoûte ensemble les soliditez de tous ces corps, on aura la solidité des deux murailles proposées ABCDE, AGNFE.

Supposons comme auparavant, que les deux murailles ABCDE, AGNFE soient égales, & que la longueur AB soit de 40 pieds, IQ de 50, RC de 55, BQ de 6, & CD de 8, auquel cas QC sera de 3 pieds, & IK de 10: le Plan PNRCQI sera de 315 pieds quarrez, & son Prisme PIQCDEF de 2520 pieds cubes: le Demi-prisme ABQSLK se trouvera de 960 pieds cubes, & la Pyramide AIOLKA de 160 pieds cubes, dont le double 320 étant ajoûté au double 1920, du precedent solide 960, & la somme 2240 étant ajoûtée au premier solide 2520, on aura en tout 4760 pieds cubes pour la solidité des deux murailles ABCDE, AGNFE.

SCOLIE.

188. Fig. Par ce qui vient d'être dit, il sera facile de mesurer deux ou plusieurs murailles jointes ensemble, & taludées en dedans & en dehors: mais quand elles auront une même hauteur, que leur Talud interieur & exterieur seront égaux, & qu'elles feront par tout des angles égaux, on pourra trouver tout d'un coup leur solidité, en multipliant leur Profil comme ABCD, qui en represente-



sentera la Base par une ligne droite tirée par le milieu du Plan qui leur sert effectivement de Base, cette ligne droite étant considerée comme la hauteur d'un Prisme composé de toutes ces murailles. Planche 23. 188. Fig.

Il sera aussi facile par les mêmes principes de mesurer la solidité du Rempart, & des autres parties d'une Forteresse : comme pour connoître la solidité du Rempart d'un Polygone fortifié, dont AB represente la moitié d'une Courtine, BC le Flanc du Bastion, que je suppose perpendiculaire à la Courtine, pour avoir un calcul plus aisé, & CD la Face du Bastion, terminée au point D, par la ligne capitale HM, qui termine la ligne GH du Talud interieur, qui est parallele à la ligne EF du Rempart, & la ligne IKLM du Talud exterieur, qui suit parallelement la ligne du premier trait ABCD : tellement que la figure GIKLMH represente le Plan d'une Demi-courtine, & d'un Demi bastion, où la ligne AE represente la largeur du Rempart par en haut, c'est à dire la largeur du Terre-plain, que nous supposerons de 12 toises, ou de 72 pieds : la ligne EG represente la quantité du Talud interieur, que nous mettrons de 18 pieds : & la ligne AI represente la quantité du Talud exterieur, qui soit par exemple de 12 pieds. Pour la hauteur du Rempart, nous la supposerons de 18 pieds, comme vous voyez dans le Profil, qui montre que le Rempart est large par le pied de 102 pieds, sans nous mettre en peine pour le present, si ces suppositions sont bien conformes aux maximes d'une bonne fortification. Planche 24. 189. Fig.

Pour trouver la solidité de cette masse de terre, & premierement celle du Prisme qui est compris entre les deux Taluds, & dont la base est le Plan ABCDFE, on trouvera premierement la superficie de ce Plan, en le reduisant au Trapezoïde AEFT, par la ligne AB prolongée : au Triangle rectangle BCT, & au Triangle obliquangle CTD, par la Diagonale CT.

Si l'on multiplie la somme 720 de la ligne EF, qui se trouvera d'environ 344 pieds, & de la ligne AT de 376 pieds, par la ligne AE, que nous avons supposée de 72 pieds, la moitié du produit 51840, donnera 25920 pieds quarrez pour l'Aire du Trapezoïde AEFT. Si l'on multiplie la ligne BT, qui se trouvera d'environ 160 pieds, par la ligne BC, que nous supposerons de 120 pieds, la moitié du produit 19200, donnera 9600 pieds quarrez pour l'Aire du Triangle rectangle BCT. Et si l'on multiplie la Face CD, qui se trouvera à peu prés de 270 pieds, par sa perpendiculaire TV de 160 pieds, la moitié du produit 43200 donnera 21600 pieds quarrez pour l'Aire du Triangle obliquangle CTD. Que si l'on ajoûte ensemble ces trois Aires trouvées 25920, 19200, 21600, on aura 66700 pieds quarrez pour le Plan ABCDFE, lequel étant

N 4 multi-

Planche 24. 189. Fig. multiplié par la hauteur du Rempart, que nous avons supposée de 18 pieds, on aura 1200600 pieds cubes pour la solidité du Prisme terminé par les deux Taluds, & posé sur la base ABCDFE.

Pour trouver la solidité des Taluds, on les reduira en des Demi-prismes, & en des Pyramides, en tirant des angles de leurs Bases des lignes perpendiculaires entre les deux côtez paralleles, sçavoir HO, DN, CP, CQ, KR, KS: & le Talud interieur, dont la Base est le Trapezoïde GEFH, se trouvera divisé en un Prisme, dont la Base est le Rectangle GEOH, & la hauteur la même que celle du Rempart, & en une Pyramide, dont le sommet est en H, la hauteur est la perpendiculaire HO, & la Base est un Rectangle, dont la largeur est la ligne OF, & la longueur égale à la hauteur du Rempart: & le Talud exterieur se trouvera divisé en trois Demi-prismes, dont la hauteur commune est la même que celle du Rempart, & les Bases les trois Rectangles AK, CK, CN, & en trois Pyramides, entre lesquelles il y en a deux, dont les sommets sont en haut, ayant par consequent la hauteur du Rempart pour hauteur commune, & dont les Bases sont le Triangle rectangle DNM, & le Quadrilatere CPLQ; & la troisiéme est prise dans la pratique pour celle qui a même hauteur que le Rempart, & le Quarré KRBS pour base, parce que cette petite partie est peu considerable: mais en prenant la chose à la rigueur, au lieu de cette Pyramide on doit prendre le double d'une autre, qui a sa pointe en bas au point K, la perpendiculaire KR pour hauteur; & un Rectangle pour base, dont la largeur est la ligne BR, & la longueur est égale à la hauteur du Rempart.

Si l'on multiplie la longueur EO, ou GH, qui se trouvera d'environ 330 pieds, par la largeur EG, que nous avons supposée de 18 pieds, on aura 5940 pieds quarrez pour l'Aire du Rectangle GO, qui étant multipliée par la moitié 9 de la hauteur du Rempart, on aura 53460 pieds cubes pour la solidité du Demi prisme, dont la Base est le Rectangle GO: & si l'on multiplie la ligne OF, qui se trouvera d'environ 14 pieds, par la hauteur du Rempart, que nous avons supposée de 18 pieds, & le produit 252 par le tiers 6 de la ligne HO, on aura 1512 pieds cubes pour la solidité de la Pyramide, dont la pointe est H, & la hauteur est HO, à laquelle ajoûtant la solidité 53460 du Demi-prisme precedent, on aura 54972 pieds cubiques pour la solidité du Talud interieur.

Si l'on multiplie la somme 580 de la ligne IK, qui se trouvera d'environ 206 pieds, de la ligne KQ, de 109 pieds, & de la ligne PN de 265 pieds, par la largeur commune AI, que nous avons supposée de 12 pieds, on aura 6960 pieds quarrez pour la somme des Aires des trois Rectangles AK, CK, CN, qui

qui étant multipliée par la moitié 9 de la hauteur du Rempart, on aura 62640 pieds cubes pour la solidité des trois Demi-prismes, dont les trois Rectangles AK, CK, CN, en representent les bases: & si l'on multiplie la somme 26 de la ligne KR de 12 pieds, de la ligne QL de 8 pieds, & de la moitié 6 de la ligne MN de 12 pieds, par la largeur commune DN de 12 pieds, on aura 312 pieds quarrez pour la somme des Bases des trois Pyramides qui se trouvent comprises dans le Talud exterieur, c'est pourquoy si l'on multiplie cette somme 312 par la troisiéme partie 6 de la hauteur du Rempart, qui est commune aux trois Pyramides, on aura 1872 pieds cubes pour la solidité de ces trois Pyramides, à laquelle ajoûtant la solidité 62640 des trois Demi-prismes precedens, la somme donnera 64512 pieds cubiques pour la solidité du Talud exterieur. Planche 24. 189. Fig.

Enfin si l'on ajoûte ensemble les trois soliditez trouvées 1200600, 54972, 64512, du Prisme compris entre les deux Taluds; du Talud interieur & exterieur, on aura 1320084 pieds cubes, qui font 6111 toises cubes, & 108 pieds cubes pour la solidité de la partie proposée du Rempart, dont la Base est le Plan IKLMHG.

C'est de la même maniere que l'on mesurera la solidité d'un Fossé, c'est à dire la quantité de la terre qu'on en aura tirée: & aussi la solidité du Parapet avec sa Banquette, & encore la solidité de l'Esplanade: mais pour ces derniers corps qui ont les lignes opposées de leurs Bases paralleles entre elles, il y a des abregez, qui quoy qu'ils ne soient pas dans la derniere precision, à cause de l'inégalité des angles, ne sont pas à negliger, qui sont de multiplier leur Profil par la quantité d'une ligne droite tirée par le milieu du Plan qui leur sert de Base, car ainsi on aura tout d'un coup leur solidité, sans que l'erreur puisse être considerable.

On se peut aussi servir tres utilement de cette methode, pour trouver par une seule operation la solidité d'un Rempart avec son Parapet & sa Banquette, lorsque les Bastions sont creux, ce que l'on est obligé de sçavoir, pour pouvoir juger à peu prés de la quantité de la terre que l'on doit tirer du fossé pour la construction du Rempart & de son Parapet: & aussi pour trouver la solidité de la Massonnerie que l'on fait pour soûtenir les Terrasses, ce que l'on est aussi obligé de connoître, pour en déterminer la dépense, & pour sçavoir en combien de temps un ouvrage pourra être achevé avec un certain nombre d'hommes, ou bien pour sçavoir combien on y doit employer d'hommes, pour l'achever en un temps déterminé, &c.

PRO-

PROBLEME VI.

Mesurer une Sphere par son Diametre connu.

Planche 24. 192. Fig. POur trouver la solidité de la Sphere ABCD par son Diametre connu BD, qui soit par exemple de 18. pouces, ayant trouvé sa Surface de 1017 pouces quarrez & d'environ 49 lignes quarrées, multipliez-la par la sixiéme partie 3 du Diametre 18, & le produit donnera 3052 pouces cubes, & 36 lignes cubiques pour la solidité de la Sphere proposée ABCD, comme il est évident *par Theor.* 1.

Ou bien pour éviter les fractions qui peuvent arriver à la Surface de la Sphere, *multipliez le Cube* 5832 *du Diametre* 18 *toûjours par* 157, *&* *divisez le tiers* 305208 *du produit* 915624 *toûjours par* 100, *& le quotient donnera* 3052 *pouces cubiques, &* 138 *lignes cubiques pour la solidité qu'on cherche*, dont la démonstration est évidente *par Theor.* 2.

PROBLEME VII.

Mesurer une Sphere par sa circonference connuë.

192. Fig. POur trouver la solidité de la Sphere ABCD par sa circonference connuë, qui soit par exemple de 56 pieds, son Diametre se trouvera de 17 pieds & d'environ 10 pouces, & sa Surface se trouvera de 998 pieds quarrez, & d'environ 104 pouces quarrez, laquelle étant multipliée par le Diametre, la sixiéme partie du produit donnera 2968 pieds cubes, & environ 733 pouces cubes pour la solidité de la Sphere proposée ABCD.

Ou bien pour éviter les fractions qui arrivent ordinairement au Diametre & à la Surface de la Sphere, & qui empêchent que sa solidité ne se trouve pas si exactement; *Multipliez le cube* 175616 *de la circonference* 56, *toûjours par* 10000, *& divisez le produit* 1756000 *toûjours par* 592175, *& le Quotient donnera* 2965 *pieds cubes & environ* 636 *pouces cubes pour la solidité qu'on cherche.*

PRO-

PROBLEME VIII.

Mesurer un Secteur de Sphere.

POur trouver la solidité du Secteur de Sphere LEKB, dont l'arc KBL soit par exemple de 100 degrez, par le Diametre BD connu, que nous supposerons de 18 pouces; la Surface qui sert de base à ce Secteur de Sphere se trouvera de 181 pouces quarrez & d'environ 102 lignes quarrées, laquelle étant multipliée par la sixiéme partie 3 du Diametre 18, on aura 545 pouces cubes & 216 lignes cubiques pour la solidité du Secteur proposé KBLE, dont la démonstration est évidente *par Theor.* 1. Planche 24. 192. Fig.

Ou bien pour éviter les fractions qui peuvent arriver à la Base du Secteur de Sphere, *Multipliez le Sinus verse* 35721 *de la moitié BK ou BL de l'arc KBL, par le cube* 5832 *du Diametre* 18, *& multipliez le produit* 208324872 *toûjours par* 157, *pour avoir ce second produit* 32707004904, *dont la sixiéme partie* 5451167484 *étant divisée toûjours par le centuple du Sinus Total* 100000, *sçavoir par* 10000000, *on aura* 545 *pouces cubes, & environ* 201 *lignes cubes pour la solidité qu'on cherche.*

PROBLEME IX.

Mesurer un Segment de Sphere.

POur trouver la solidité du Segment ou Portion de Sphere KLB, dont l'arc KBL soit par exemple de 100 degrez, par le Diametre connu BD, que nous supposerons de 18 pouces, ôtez du Secteur KELB, qui au *Probl.* 8. a été trouvé de 545 pouces cubiques & 201 lignes cubes, le Cone KLE qui se trouvera de 287 pouces cubes, & d'environ 1402 lignes cubes, le reste donnera 257 pouces cubes, & 527 lignes cubiques pour la solidité du Segment proposé KLB. Planche 23. 187. Fig

SCOLIE.

La hauteur EI du Cone KEL se trouvera de 5 pouces, & d'environ 9 lignes dans le Triangle KIE rectangle en I, & le Diametre KL de la Base du même Cone KEL, se trouvera de 13 pouces, & d'environ 9 lignes dans le Triangle isoscéle KEL, aprés quoy il sera facile de trouver la solidité du Cone KEL, *par Probl.* 2. Mais pour éviter les fractions qui peuvent

Planche 23. 187. Fig. peuvent arriver à la hauteur EI, & au Diametre KL, suivez ce Canon qui a sa démonstration.

Multipliez le quarré 5868172816 du Sinus 76604 de la moitié BK, ou BL, de l'arc KBL, par le Sinus 64279 du complement de cette moitié, & multipliez le produit 377200280439664 par le cube 5832 du Diametre 18, pour avoir ce second produit 2199832035524120448, qu'il faudra multiplier toûjours par 157, & diviser la douziéme partie 28781135798107242528 du troisiéme produit 345373629577286910336, toûjours par le centuple du cube 1000000000000000 du Sinus Total 100000 sçavoir par 100000000000000000, & le quotient donnera 287 pouces cubes, & environ 1402 lignes cubes pour la solidité du Cone KEL, qui se pourra connoître tres-commodément, par le moyen des Logarithmes, qui vous épargneront de si longues Multiplications.

Le même Segment KLB se peut connoître indépendamment du Secteur, en ajoûtant à sa hauteur BI, la ligne BO quatriéme proportionnelle aux trois DI, BI, BE, & en mesurant le Cone KOL, qui *par Theor.* 3. est égal au Segment BKL. Mais dans la pratique, il vaut mieux se servir du Canon precedent.

PROBLEME X.

Mesurer un Spheroïde.

Planche 24. 190. Fig. POur trouver la solidité du Spheroïde ABCD, dont l'Axe de circonvolution AC soit par exemple de 32 pouces, & l'autre Axe BD de 18 pouces; la Sphere qui a pour Diametre l'Axe de circonvolution AC, se trouvera *par Probl.* 6. de 17148 pouces cubes, & d'environ 1019 lignes cubes, laquelle étant multipliée par le nombre 324, qui est le quarré du Diametre BD; & le produit 5556143 pouces cubes, & 108 lignes cubes, étant divisé par le nombre 1024: qui est le quarré de l'Axe de circonvolution AC, on aura 5425 pouces cubes, & environ 1591 lignes cubes pour la Solidité du Spheroïde proposé ABCD, comme il est évident *par Theor.* 4.

Ou bien pour éviter les fractions qui peuvent arriver à la solidité de la Sphere: *Multipliez le quarré 324 de l'Axe BD, par l'Axe de circonvolution AC, que nous avons supposé de 32 pouces, & multipliez le produit 10368 toûjours par 157, pour avoir ce second produit 1627776, dont le tiers 542592 étant divisé toûjours par 100, on aura 5425 pouces cubes, & environ 1590 lignes cubes pour la solidité qu'on cherche*, dont la démonstration est évidente *par Theor.* 5.

PRO-

PROBLEME XI.

Mesurer un Segment de Spheroïde.

POur trouver la solidité du Segment de Spheroïde AGF, qui a pour base un Cercle, dont le Diametre FG, qui est perpendiculaire à l'Axe de circonvolution AC, que nous supposerons de 36 pieds, soit par exemple de 12 pieds, & dont la hauteur AH soit de 9 pieds, auquel cas le reste CH sera de 27 pieds, ajoûtez à la hauteur AH, la ligne HI de 6 pieds, sçavoir quatriéme proportionnelle aux trois CH, AH, AE, & alors la ligne HI se trouvera de 15 pieds, qui sera la hauteur du Cone FIG égal au Segment AFG, *par Coroll. Theor.* 6. La Base de ce Cone qui est la même que celle du Segment, sçavoir le cercle dont le Diametre FG a été supposé de 12 pieds, se trouvera de 103 pieds quarrez, & d'environ 6 pouces quarrez, laquelle étant multipliée par le tiers 5 de la hauteur HI, on aura 565 pieds cubes, & 360 pouces cubes pour la solidité du Cone IFG, ou du Segment proposé AFG. Planche 24. 190. Fig.

SCOLIE.

Un Segment de Spheroïde se peut encore mesurer autrement, parce que *par Theor.* 6. il est à son Cone inscrit: comme le Segment de Sphere correspondant est à son Cone inscrit: mais comme la pratique que l'on peut tirer de ce Theorême, est plus longue que la precedente, elle ne merite pas que nous en parlions davantage.

PROBLEME XII.

Mesurer un Conoïde Parabolique.

POur trouver la solidité du Paraboloïde ABCD, dont l'Axe BE soit par exemple de 8 pieds, & le Diametre AC de sa Base ADCF de 12 pieds, cette Base ADCF se trouvera de 113 pieds quarrez, & d'environ 6 pouces quarrez, laquelle étant multipliée par la moitié 4 de l'Axe BE, on aura 452 pieds cubes, & 288 pouces cubes pour la solidité du Paraboloïde proposé ABCD, dont la démonstration est évidente *par Theor.* 7. 191. Fig.

Ou bien pour éviter les fractions qui arrivent ordinairement à la Base du Paraboloïde, *Multipliez le quarré 144 du Diametre AC, que nous avons supposé de 12 pieds, par l'Axe BE,* Planche 24. 191. Fig. *BE, qui a été supposé de 8, & multipliez le produit 1152 toûjours par 785, pour avoir ce second produit 904320, dont la moitie 452160 étant divisée toûjours par 1000, on aura 452 pieds cubiques, & 23 pouces cubes pour la solidité qu'on cherche.*

PROBLEME XIII.

Mesurer un Conoïde Hyperbolique.

Planche 21. 175. Fig. POur trouver la solidité du Conoïde Hyperbolique ABCD, dont le Cone Asymptotique est FOGP, & le Cone tronqué est FHKGP, comme vous avez vû au *Theor.* 8. d'où nous tirerons la maniere de trouver la solidité de ce Conoïde, qui peut neanmoins être mesuré plus facilement, comme nous dirons en aprés; nous supposerons le Demi-diametre traversant OB de 36 pieds, le second Diametre HK, ou LN de 48, & l'Axe BE de 9, auquel cas le Rayon AE sera de 18 pieds, l'autre Rayon FE de 30, l'Axe OE de 45, le Diametre AC de 36, & l'autre Diametre FG de 60 pieds: le Cylindre HLMNK se trouvera d'environ 16278 pieds cubes, lequel étant ôté du Cone tronqué HFPGK, qui se trouvera de 20686 pieds cubes, il restera 4408 pieds cubes pour la solidité du Conoïde proposé ABCD.

Ou bien pour éviter les fractions qui peuvent arriver au Cylindre & au Cone tronqué, *Multipliez la somme* 108 *des deux Diametres AC, LN, par le plus grand AC, & multipliez le produit* 6480 *toûjours par* 157, *pour avoir ce second produit* 1017360, *duquel il faut ôter le produit* 723456 *du nombre invariable* 314; *& du quarré* 2304 *du plus petit Diametre LN, & il restera* 293904, *qui étant multiplié par l'Axe BE, que nous avons supposé de* 9 *pieds, & la sixiéme partie* 440856 *du produit* 2645136, *étant divisée toûjours par* 100, *on aura comme auparavant,* 4408 *pieds cubes pour la solidité qu'on cherche.*

Ou bien encore multipliez le Cone ABCD, qui se trouvera de 3052 pieds cubes, par la somme 117 de la ligne OE & du double de la ligne OB, & divisez le produit 357084 par la somme 81 des lignes OE, OB, & le Quotient donnera comme auparavant, 4408 pieds cubiques pour la solidité du Conoïde, ou *Conicoïde* proposé ABCD. Mais comme il peut aussi arriver des fractions au Cone ABCD, vous éviterez ces fractions par cet autre Canon, qui tire sa démonstration de la *Prop.* 27. *d'Archimede, des Conoïdes & des Spheroïdes.*

Multipliez le produit 405 *des deux lignes OE, BE, toûjours par*

par 471, *& ôtez du produit* 190755, *le produit* 25434 *du nombre invariable* 314, *& du quarré* 81 *de l'Axe BE, & le reste* 165321 *étant multiplié par le quarré* 1296 *du Diametre AC, & le produit* 214256016 *étant divisé par l'excés* 48600 *de douze cent fois la ligne OE sur six cent fois la ligne BE, c'est à dire de* 54000 *sur* 5400, *on aura comme auparavant,* 4408 *pieds cubes pour la solidité du Conicoïde Hyperbolique ABCD.* Planche 21. 175. Fig.

PROBLEME XIV.

Mesurer un Orbe.

POur trouver la solidité de l'Orbe ABCDH terminé par la petite Sphere EFGH renfermée dans la grande ABCD, on ôtera de cette plus grande la plus petite, & le reste sera la solidité qu'on cherche. Comme si le Diametre AC est par exemple de 24 pieds, & le Diametre EG de 18 pieds, la Sphere EFGH se trouvera de 3052 pieds cubes & d'environ 138 pouces cubes, laquelle étant ôtée de la Sphere ABCD, qui *par Probl.* 6. se trouvera de 7234 pieds cubes, & d'environ 967 pouces cubes, il restera 4182 pieds cubes, & 829 pouces cubes pour la solidité de l'Orbe ABCDH. Planche 24. 193. Fig.

Ou bien pour éviter les fractions qui peuvent arriver à chaque Sphere, *Multipliez la difference* 7992 *des cubes* 13824, 5832, *des Diametres AC, EG toûjours par* 157, *& divisez le tiers* 418248 *du produit* 1254744 *toûjours par* 100, *le quotient donnera comme auparavant,* 4182 *pieds cubes, & environ* 829 *pouces cubes pour la solidité qu'on cherche.*

PROBLEME XV.

Mesurer les cinq Corps reguliers.

NOus avons dit dans la *Défin.* 59. que l'on ne compte que cinq Corps reguliers, sçavoir le Tetraëdre, l'Exaëdre, l'Octaëdre, le Dodecaëdre & l'Icosaëdre. Le Tetraëdre étant une espece de Pyramide, se mesure *par Probl.* 2. & l'Exaëdre ou cube étant une espece de Prisme se mesure *par Probl.* 1. On aura la solidité des trois autres en les reduisant en des Pyramides égales, ayant leur sommet commun au centre du solide regulier, & leurs Bases étant les mêmes que les Faces du Polyëdre. Ainsi comme il y a autant de Pyramides égales que le Corps regulier a de Faces, il n'y a qu'à multiplier l'Aire d'une de ces Faces par le nombre des mêmes Faces & multiplier encore le produit par le tiers de la hauteur commune des Pyramides.

Com-

Comme pour mesurer un Octaëdre, on multipliera l'Aire d'un des Triangles équilateraux par huit, & le produit par le tiers de la perpendiculaire tirée du centre de l'Octaëdre par le centre du même Triangle équilateral, & le produit de cette seconde Multiplication donnera la solidité de l'Octaëdre proposé.

Pour mesurer un Dodecaëdre, on multipliera l'Aire d'un des Pentagones reguliers par douze, & le produit par le tiers de la perpendiculaire tirée du centre du Dodecaëdre par le centre du Pentagone : & pareillement pour trouver la solidité de l'Icosaëdre, on multipliera l'Aire d'un des Triangles équilateraux par vingt, & le produit par le tiers de la perpendiculaire.

SCOLIE.

Quand on a un Polyëdre entre les mains, il n'est pas difficile de mesurer le côté d'une de ses Faces, & la hauteur d'une de ses Pyramides : mais comme ce Corps peut être conçu seulement par imagination, nous enseignerons icy la maniere de connoître la hauteur commune des Pyramides qui le composent, en supposant le côté d'une de ses Faces d'une certaine grandeur, comme de 100000 parties, qui peuvent representer des Pouces, des Lignes, & toute autre mesure qu'il vous plaira, ayant choisi ce nombre 100000 plûtôt qu'un autre, parce qu'il est plus commode dans la pratique, & qu'ayant une fois connu la Solidité d'un tel Corps pour ce nombre 100000, on la pourra aisément trouver par la Regle de trois directe pour un autre nombre tel que l'on voudra, puisque *par* 33. 11. les Corps semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtez homologues.

Premierement pour trouver la hauteur d'une des Pyramides égales de l'Octaëdre, son côté étant supposé de 100000 parties, tel qu'est le Sinus Total dans les Tables de Sinus, à l'égard duquel la Secante de 45 degrez, sçavoir 141421 est le Diametre de l'Octaëdre, ou de la Sphere circonscrite, & la Tangente de 30 degrez, sçavoir 57735 est le Rayon du Cercle circonscrit autour de l'un des Triangles équilateraux, qui sert de base à l'Octaëdre ; ôtez le quarré 3333330225 de ce Rayon ou Tangente 57735 de la moitié 5000000000 du quarré 10000000000 du Sinus Total ou côté 100000 & la Racine quarrée du reste 1666669775 donnera 40824 pour la hauteur de la Pyramide qu'on cherche, dont la Base se connoîtra en multipliant le Sinus 86602 de 60 degrez, par la moitié 50000 du Sinus Total, ou côté 100000, car le produit 4330100000 sera l'Aire de la Base de la Pyramide, qui étant multipliée par 8, & le produit 34640800000 étant multiplié par le tiers 13608 de la hauteur trouvée 40824, on aura 471392006400000 pour la solidité de l'Octaëde proposé.

Mais on aura cette solidité plus facilement & plus exactement, en multipliant le Diametre trouvé ou la Secante de 45 degrez 141421 par le quarré 10000000000 du Sinus Total ou côté 100000, car la troisiéme partie 471403333333333 du produit 1414210000000000 sera la solidité exacte du Polyëdre proposé. D'où il est aisé de conclure que pour trouver la solidité d'un Octaëdre, dont le côté soit un autre nombre que 100000, par exemple 80, il faut multiplier le cube 512000 de ce côté 80, toûjours par 4714 & diviser le produit 2413568000 toûjours par 10000, le quotient donnera $241356\frac{4}{5}$ pour la solidité qu'on cherche.

Secondement pour trouver la hauteur d'une des Pyramides égales du Dodecaëdre, son côté étant supposé de 100000 parties ; tel qu'est le Sinus Total dans les Tables de Sinus, à l'égard duquel la moitié 85065 de la Secante 170130 d'un arc de 54 degrez, est le Rayon du Cercle circonscrit au Pentagone, qui sert de Base au Dodecaëdre, ôtez le quarré 7236054225 de ce Rayon 85065 du quarré du Rayon du Dodecaëdre, c'est à dire du triple 19635400812 du quarré 654133604 du Sinus 80902 du même arc de 54 degrez, & la Racine quarrée du reste 12399346587 donnera 111352 pour la hauteur de l'une des douze Pyramides égales, dont le Dodecaëdre est composé, par laquelle multipliant le produit 68819000000 sous le Sinus Total ou côté 100000 & le quintuple 688190 de la Tangente 137638 du même arc de 54 degrez, on aura 7663133288000000 pour la solidité du Dodecaëdre proposé. D'où il est aisé de conclure que pour trouver la solidité d'un Dodecaëdre, dont le côté soit un autre nombre que 100000, comme 80, il faut multiplier le cube 512000 de ce côté 80, toûjours par 7663, & diviser le produit 3923456000 toûjours par 1000, le quotient donnera 3923456 pour la solidité qu'on cherche.

Mais sans nous arrêter davantage à parler de ces Corps reguliers, dont l'usage est fort rare, nous finirons en disant que pour trouver la solidité d'un Icosaëdre, dont le côté est connu, comme de 8 pieds, il faut multiplier le cube 512 de ce côté 8 toûjours par 218, & diviser le produit 111616 toûjours par 100, le quotient donnera 1116 pieds cubes, & environ 276 pouces cubes pour la solidité d'un Icosaëdre, dont le côté est de 8 pieds.

PROBLEME XVI.

Mesurer un Corps irregulier.

La pratique du *Probl.* 5. & de quelques autres, fait assez connoître, que pour trouver la solidité d'un Corps irregulier, il le faut reduire, quand on le peut, en des Prismes, en des Demi-prismes, en des Pyramides, ou en d'autres Corps qui se puissent mesurer au moyen des Problêmes precedens : car les soliditez de tous ces Corps étant ajoûtées ensemble donneront la solidité du Corps proposé.

Que si le Corps à mesurer n'est pas trop grand, & qu'il soit tellement irregulier, qu'on ne puisse pas facilement le reduire en deux ou en plusieurs autres, dont les soliditez puissent être connuës par les Problêmes precedens, il faut dans ce cas avoir un Vaisseau fait en Prisme, dont la Base soit exactement connuë, & le remplir en partie d'eau ; dans laquelle on plongera le Corps proposé, qui fera monter un Prisme d'eau égal à sa masse, c'est pourquoy si l'on multiplie la Base par la hauteur de l'eau qui sera montée, on aura ce Prisme d'eau, & par consequent la solidité du Corps proposé.

Ou bien on remplira entierement d'eau tout le Vaisseau dans lequel on doit mettre ensuite le Corps proposé, qui chassera une masse d'eau égale à sa solidité, c'est pourquoy aprés avoir ôté ce Corps de l'eau, on mesurera l'espace vuide qui restera en haut, c'est à dire qu'on multipliera la Base du Vaisseau par la hauteur du bord superieur au dessus de la Surface de l'eau, pour avoir la solidité du Prisme d'eau qui aura été chassé, & par consequent celle du Corps proposé.

SCOLIE.

Il peut arriver que le Vaisseau ne soit pas assez grand pour pouvoir contenir le Corps proposé, dans ce cas, il faut, s'il se peut, avoir un Corps plus petit de même matiere, & en connoître la solidité, par le moyen de laquelle on pourra connoître celle du Corps proposé plus grand, en pesant bien exactement ces deux Corps, dont les pesanteurs sont comme les soliditez, parce qu'on les suppose d'une même matiere homogêne, &c.

PRO-

PROBLEME XVII.

Mesurer un Corps vuide.

Il est évident que pour mesurer la solidité d'un Corps vuide ou creux, il n'y a qu'à le mesurer comme s'il étoit plein, & ôter de toute cette solidité la solidité du vuide, pour avoir au reste la solidité du Corps proposé.

SCOLIE.

La mesure de semblables Corps sert principalement pour le toisé de plusieurs murailles jointes ensemble, c'est à dire qui font une clôture, dont nous avons déja parlé au *Probl.* 5. & la mesure du vuide sert pour les Fossez, dont il a été aussi parlé, & encore pour les Puits & pour les Caves, mais les Arpenteurs ont des Methodes particulieres pour toiser ces sortes de Corps, & plusieurs autres, comme les Voutes, les Escaliers, &c. que nous n'expliquerons point icy, pour ne pas sortir hors de nôtre sujet, parce qu'elles ne sont pas dans la précision geometrique. Je ne sçaurois neamoins m'empêcher de dire quelque chose de la mesure des Tonneaux, dont l'usage est fort frequent.

PROBLEME XVIII.

Mesurer un Tonneau.

Si tous les Tonneaux étoient semblables entre eux, ayant connu la solidité de l'un, il seroit facile de trouver les soliditez des autres, parce que les Corps semblables sont entre eux comme les Cubes de leurs côtez homologues : mais comme ils ne sont pas tous faits d'une même façon, ni par une regle certaine, on ne peut pas aussi établir une Methode certaine pour les mesurer, quoique tous ayent leurs Fonds circulaires, & ordinairement égaux, mais les douves qui en font les côtez, sont quelquefois plates en se recourbant par le milieu, & quelquefois convexes.

Quand les Douves sont plates, le Tonneau peut être consideré comme un assemblage de deux Cones tronquez, que l'on mesurera par les preceptes du *Probl.* 4. & si les deux fonds opposez sont des Cercles égaux, ce qui arrive ordinairement, on trouvera la solidité de ce Tonneau en multipliant l'excés du quarré de la somme des deux Diametres BD, AE, sur

 leur

Planche 24. 194. Fig.

leur produit, par la longueur ou hauteur IK du Tonneau, & en multipliant le produit toûjours par 157, pour avoir un second produit, dont la sixiéme partie doit toûjours être divisée par 100.

Comme si le grand Diametre AE est de 24 pouces & le petit BD, ou HF de 18, leur produit sera 432, & leur somme sera 42, dont le quarré 1764 étant diminué du produit 432, on aura 1332 pour l'excés, qui étant multiplié par la longueur IK, que nous supposerons de 36 pouces, on aura ce produit 47952, lequel étant multiplié par 157, on aura ce second produit 7528464, dont la sixiéme partie 1254744 étant divisée par 100, on aura 12547 pouces cubes, & environ 760 lignes cubes pour la solidité du Tonneau ACEG.

Il y en a, qui pour avoir plûtôt fait, multiplient la moitié de la somme des deux Cercles, dont les Diametres sont AE, BD, par la longueur IK du Tonneau: & alors pour éviter les fractions qui peuvent arriver à chaque Cercle, il faut multiplier la somme 900 des quarrez 576, 324, des Diametres 24, 18, par la longueur IK, que nous avons supposée de 36 pouces, & multiplier le produit 32400 toûjours par 785, pour avoir un second produit 25434000, dont la moitié 12717000 étant divisée toûjours par 1000, on aura 12717 pouces cubes pour la solidité qu'on cherche, laquelle, comme vous voyez, étant ainsi trouvée, est un peu plus grande qu'il ne faut, mais dans la pratique on ne se soucie pas d'une erreur si peu considerable, pour le moins quand on jauge les Tonneaux, dont nous parlerons en aprés, parce qu'en cette façon les Jaugeurs y trouvent mieux leur compte.

L'erreur sera moins considerable, si au lieu de prendre un Cercle moyen, on prend un Diametre moyen entre les deux AE, BD, qui se trouvera de 21 pouces, comme étant la moitié de la somme des deux AE, BD. L'Aire du Cercle répondant à ce Diametre moyen 21 sera de 346 pouces quarrez, laquelle étant multipliée par 36, qui est la longueur IK, on aura 12456 pouces cubes pour la solidité qu'on cherche, qui est moindre que la veritable 12547, mais elle n'est pas tant au dessous que la precedente 12717 est au dessus.

Quand les Douves sont convexes, comme BAH, DEF, on pourra considerer le Tonneau comme un assemblage de deux parties de Spheroïdes, que l'on pourra mesurer par les preceptes du *Probl.* 11. mais cette speculation est assez inutile dans la pratique, où l'on ne cherche que grossierement la *capacité* du Tonneau, que les Artisans appellent *continence*, en des mesures usitées dans le Païs, comme en Pots, Pintes, Chopines, &c.

Ayant trouvé que la solidité du Tonneau ACEG, est de 12547 pouces

Planche 24. 194. Fig.

pouces cubes, il sera facile de connoître combien il contient de pintes par exemple de Paris, sçavoir en divisant cette solidité trouvée 12547 par 49, qui est à peu prés le nombre des Pouces cubes que contient une Pinte de Paris, & le quotient donnera environ 256 pintes pour la continence ou capacité du Tonneau proposé ACEG.

Mais on peut avoir cette capacité plus exactement, si l'on prend garde que dans l'usage un Muid est supposé de 8 pieds cubes, ou de 280 pintes, ou de 13824 pouces cubes, ce qui fait connoître que 280 pintes de Paris valent 13824 pouces cubes: c'est pourquoy pour sçavoir combien de pintes il y a dans 12547 pouces, qui est la capacité trouvée du Tonneau ACEG, on dira par la Regle de trois directe, si 13824 pouces cubes font 280 pintes, combien en feront 12547 pouces cubes? de sorte qu'en multipliant la solidité trouvée 12547 toûjours par 280, & en divisant le produit 3513160 toûjours par 13824, ou bien plus facilement, en multipliant la solidité trouvée 12547 toûjours par 35, & divisant le produit 439145 toûjours par 1728, le quotient donnera environ 254 pintes pour la capacité qu'on cherche.

Voilà pour la Theorie, & ce que nous allons dire dans la suite est pour la pratique ordinaire des Jaugeurs, qui *jaugent*, c'est à dire mesurent promptement les Tonneaux par le moyen d'une Verge de fer, qui est divisée d'un côté en un certain nombre de parties égales, & de l'autre côté en parties inégales. Cette Vierge de fer, qu'on appelle communément *Jauge*, est faite comme LMNO, & se divise en cette sorte.

Ayant determiné la mesure dont on veut se servir pour jauger tous les Tonneaux qui se presenteront, comme la Pinte P, dont la figure étant irreguliere, doit être reduite en reguliere, en la remplissant d'eau, ou de quelqu'autre liqueur, & en versant cette liqueur dans quelque vase regulier, comme dans le Cylindre concave QRST, & supposant que cette liqueur occupe le Prisme cylindrique QVXT, dont la base est un Cercle, qui a pour Diametre une ligne égale au Diametre interieur RS du Cylindre concave, portez la hauteur QV, ou TX de ce Prisme cylindrique sur la Jauge, en l'une de ses faces, depuis le point Y, qui repond au point O, vers L, autant de fois qu'elle y pourra entrer, & y marquez des points, où vous écrirez les chifres 1, 2, 3, 4, 5, &c. & cette face ainsi divisée également sera appellée *le côté des parties égales.*

Il faut marquer ensuite sur l'autre face opposée de la même Jauge, que je suppose quarrée, & longue d'environ quatre ou cinq pieds, les Diametres d'une Base double, triple, quadruple, &c. de celle du Prisme cylindrique QVXT, ce que l'on fera en cette sorte.

Ayant tiré à part au Diametre RS, la perpendiculaire indéfinie

Planche 24. 194. Fig.

definie S9, prenez sur cette ligne S9 la partie S1 égale à RS, & la partie S2, qui *par* 47. 1. sera le Diametre d'une Base double, égale à R1, & de même la partie S3, qui sera le Diametre d'une Base triple égale à R2, & ainsi ensuite : & transportez les Divisions inégales de la ligne S9 sur la Jauge depuis L vers M, par des points ausquels vous ajoûterez les mêmes chifres 1, 2, 3, 4, &c. & cette face ainsi divisée inégalement sera appellée *le côté des parties inégales*, que l'on peut encore diviser en cette sorte.

Divisez le Diametre RS, en un certain nombre de parties égales bien petites, comme en 100 ; dont le quarré 10000 doit être doublé, triplé, quadruplé, &c. & l'on aura 20000, 30000, 40000, &c, dont les Racines quarrées donneront 141, 173, 200, &c. pour la quantité des Diametres des Bases, doubles, triples, quadruples, &c. Ayant donc fait comme auparavant, la ligne L1 égale à RS, ou de 100 parties, faites la ligne S2 de 141 parties, la ligne S3 de 173 parties, la ligne S4 de 200 parties, & ainsi ensuite, & la division se trouvera faite.

La Jauge étant ainsi divisée, voici la maniere de s'en servir. Appliquez la Jauge le long du Tonneau à mesurer, en sorte que le point O du crochet NO touche l'un des fonds, pour connoître sur le côté des parties égales la distance interieure IK des deux fonds, en rabatant à peu prés l'épaisseur des deux fonds : nous supposerons cette distance IK de 14 parties égales ou hauteurs. Aprés cela, si le Tonneau est vuide, faites entrer l'extremité L de la Jauge par le Bondon, pour connoître sur le côté des parties inégales la quantité du grand Diametre AE, que nous supposerons de 24 parties inégales, ou Diametres : & mesurez pareillement la quantité du petit Diametre BD, ou HF, qui soit par exemple de 16 parties inégales. Enfin ajoûtez ensemble ces deux Diametres trouvez 24, 16, & multipliez leur somme 40 par la longueur IK, que nous avons supposée de 14 parties égales, & la moitié du produit 560, donnera 280 pintes pour la capacité du Tonneau proposé ACEG.

Cela suppose que les deux petits Diametres BD, HF, sont égaux, & s'ils sont inégaux, on prendra la moitié de leur somme pour l'un de ces deux Diametres, comme s'ils étoient égaux, aprés quoy l'on travaillera comme il vient d'être enseigné.

La Jauge se peut faire autrement & plus facilement en cette sorte. Parce qu'un Cylindre cube qui a pour hauteur 3 pieds, 3 pouces, & 6 lignes, & autant par consequent pour le Diametre de sa Base, contient mille pintes mesure de Paris, on fera la Jauge LM longue de 3 pieds, 3 pouces, & 6 lignes, & la divisez premierement en dix parties égales dont chacune

Planche 24. 194. Fig.

chacune sera le Diametre & la Hauteur d'un Cylindre Cube contenant une pinte, & divisez encore pour une plus grande précision, chacune de ces dix parties en dix autres parties égales plus petites, & chacune de ces nouvelles parties sera la hauteur & le Diametre d'un Cylindre cube contenant la milliéme partie d'une pinte. Enfin ajoûtez à ces divisions des chifres de cinq en cinq, ou de dix en dix, & la Jauge sera achevée, dont l'usage sera tel.

Ayant connu comme auparavant combien de petites parties de la Jauge contiennent la longueur du Vaisseau, & les Diametres des deux fonds & de la bonde, ajoûtez comme auparavant le grand Diametre AE avec l'un des deux petits HF, BD, si ces deux petits sont égaux, autrement on prendra à la place de l'un de ces deux la moitié de leur somme, comme nous avons déja dit auparavant, & multipliez la somme par elle-même, pour avoir son quarré, qu'il faudra toûjours multiplier par la longueur interieure IK du Vaisseau, & diviser le produit toûjours par 4000, pour avoir le nombre des Pintes contenuës dans le Vaisseau proposé.

Cette maniere donne la capacité du Vaisseau un peu moindre qu'elle n'est, & si vous la voulez avoir plus exactement, faites ainsi. Otez du grand Diametre AE, l'un des deux petits HF, BD, s'ils sont égaux, ou la moitié de leur somme s'ils sont inégaux, & multipliez la somme par elle-même, pour avoir son quarré, lequel étant multiplié par la longueur interieure IK du Vaisseau, & le produit étant divisé toûjours par 1000, on aura plus juste qu'auparavant le nombre des Pintes qu'on cherche.

F I N.

TABLE

TABLE

Des Termes expliquez dans la Geometrie.

demi-

Ligne

Surfa-

Fin de la Table des Matieres.