VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Acceſſerunt ſelectæ quædam ejuſdem Epiſtolæ, vel ad ipſum a pleriſque doctiſsimis viris Gallicè, Latine, vel Italice, de rebus ad Mathematicas diſciplinas, aut Phyſicam pertinentibus ſcriptæ.

TOLOSÆ,

Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxenſium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

Novo invento usi iterum expresserunt R. Friedlænder & Filius. BEROLINI MDCCCLXI.

CELSISSIMO
S. R. I. PRINCIPI
FERDINANDO
EPISCOPO PADERBORNENSI,
COADIVTORI MONASTERIENSI,
COMITI PYRMONTANO,
LIB. BARONI DE FURSTENBERG.

SAMVEL DE FERMAT S. P.

SI munus quod tibi, Celsissime Princeps, offero non respuas, grati simul animi & obsequii quodam erga te, ac pietatis officio erga Parentem fungi videbor : dum in illius operum Mathematicorum limine nomen statuo, quod injurias temporum & invidiæ morsus arcere possit. Quis enim unquam credat improbari quod tu semel probaveris, quem Arctoi syderis instar intuentur quicumque scientiarum pelagus sulcare cupiunt, mox tutius & tranquillius futurum, cùm fluctus omnino sedaverit lenior pacis aura quæ tandem spirare cœpit ? Sic autem per omnes orbis literarii partes lucem spargis, ut te cuncti suspiciant & neminem despicias ; ita multorum errorem Magnatum damnas qui veluti quodam summæ dignitatis privilegio sibi concessum existimant, ut non tantùm impune, verùm etiam splendidè possint esse indocti ; & se contemnendos putent nisi Musas spernere audeant. Sed abundè tua probat authoritas nulli magis utiles esse literas, quàm ei qui, ùt decet, Pastor populorum esse velit, nulli plus gloriæ afferre: quia raró conveniunt imperii comes sollicitudo, & aptus colendæ menti secessus. Idem profectò centrum ferè nunquam habent civilium curarum & sublimium disciplinarum circuli : in tanto negotiorum cir-

cuitu rectà ad doctrinæ culmen ascendere non minùs forsan difficile Politico videatur, quàm Geometræ curvas rectis æquare, cujus rei specimen exhibet hîc edita dissertatio. Superavit tamen omnes obices tua Celsitudo, tibique fidum in mediis tempestatibus portum condere potuisti, & egregiis plerisque scriptoribus quos tuarum fama virtutum ad Paderæ fontes allicit, ubi venam quovis latice puriorem nanciscuntur, ubi te præeunte citiùs discunt quò properandum sit, quàm si studiis in umbra educatis anxiè semotos calles investigarent. Longum scilicet iter est per præcepta, breve per exempla, brevissimum per exempla Principis viri, quem etiam avia peragrantem loca plurimi libenter sequi conantur; sed paucissimi sunt qui tuis inhærere vestigiis queant; & dum opias.

Voce ciere viros, Phœbumque accendere cantu,

*Vocis tuæ suavitas tuis non mediocriter votis obstat. Deterret nimirum qui sic hortatur; silere docet, qui tam doctè loquitur. Id ego experior quoties opera tua pervolvo, quæ mihi licet ignoto & immerenti mittere voluisti: illa semper, adulationis expers, cujus causas procul habeo, mirari simul & laudare gaudeo quæ vix quisquam imitari posse confidat. Monumentis enim Paderbornensibus, quæ tam munificè restaurans tam eleganter celebras, monumentum longè perennius exegisti: si Quinctilii Vari, cujus cladem cedro dignis carminibus memoras, Legiones Romæ reddi nequeunt, at saltem tui sermonis illecebris & venustate Vari vel Augusti sæculum ei reddere videris, Virgiliumque simul & Horatium ac utriusque præsidium & decus referre. Augurabatur olim lepidus Vates non defuturos Marones, quandiu sint Mæcenates, sed quidquid præclarum in Mæcenate & Marone fuit, in eodem pectore reperiri posse nemo speraverat, sive quòd nimia copia Poëtas inopes & steriles plerunque reddit (unde Theocritus * Diophanto fatetur artes excitari paupertate, quam laboris magistram vocat) sive quòd alienis carminibus ei non opus est qui suis satis oblectari potest, ut adoptivos liberos quærere non solet cui natura legitimam sobolem dedit. Verùm in te, Celsissime Princeps, collecta non sine stupore cernimus, quæ divisa tam illustres alios effecerunt; & tua singularis humanitas, quæ tot eximias dotes connectens, cœlestes gemmas auro inserere videtur, spondet à te benignè excipiendum, tuoque in sinu fovendum hunc ingenii paterni partum, qui suo defensore orbatus, ùt posthumus, tuo patrocinio indiget, quod venerabundus exposco.*

* Idyl. 16.

DE CELSISSIMO PRINCIPE

FERDINANDO FURSTENBERGIO,

Episcopo Paderbornensi, &c.

OB AVREVM NVMISMA, IN QVO illius imago conspicitur, missum.

AUREA Pierio quam culmine mittis imago
Quæ nostros ingressa lares fulgore replevit
Immeritamque manum, Phœbi ipsa referre videtur
Ora, solo qui cuncta fovet, nec florea tantum
Rura super lætus rutilat glebasque feraces,
Cernere sed sterilem non dedignatur arenam;
Sic hilares oculos simul & cum fronte serena
Innocuos mores insignis vultus adumbrat;
Sit tamen ars quamvis spectanda numismatis, illam
Effigiem superavit opus quodcunque Camænis
Sponte tuis fluxit dulci de fonte leporum:
Scilicet Aonij meliùs te vertice montis
Spirantem ostendunt Musæ, dum natus Olympo
Doctrinam pietate auges, castasque sorores
Ad superos tollens, dignoscis quam sit inane
Ornari ingenium, nimioque calescere motu,
Si vacuum æthereo pectus non uritur igne.
Luminibus quantis & quot virtutibus omnes
SUAVITER * alliciens animos, validique catenis
Eloquij blandus victor trahis! his ego sensi
Me placidè captum jampridem, nec tibi possim
Hoc magis addici, qui me devincit, honore.
At quas nunc grates referam? Te principe Vatum
Munera digna mihi Romanaque carmina desunt;
Carmina Mæcenas sed tu par ipse Maroni
Nostra nec expectas, nec vilia munera quæris.
Non eget exiguâ sublimis arundine laurus,
Et raucæ non vocis eget tua fama susurro;
Sat nitidis Latio quibus aurea redditur ætas
Eximias scriptis potuisti pandere dotes,
Purior illimi ceu splendens flumine solus,
Ut decet, ipse suis radijs se pingit Apollo.

* Illustrissimi Principis tessera SUAVITER & FORTITER.

DE PRINCIPIS EIUSDEM PRÆCLARO Monumentorum Paderbornensium opere.

DUM Paderæ fontes æterno carmine Princeps
Aonij celebrat spes columenque chori,
Ut superat quæ sic ponit monumenta, suisque
Altius ipse aliud tollit ad astra modis!
Hujus Cana fides ornat pia pectora, mentem
Lux Sophiæ, Latij priscus & ora lepor.
Amissas * his olim Aquilas quæ flevit in arvis,
Delicias illinc Roma decusque trahit.
Fernandi eloquium Tiberis miratur, & ævi
Immemor, Augusti sæcla redire putat.

* Natus est Illustris. Princeps in ea Germaniæ parte in qua cæsæ fuerunt Quinctilii Vari Legiones.

DE EODEM PRINCIPE QUI MIRANDIS *ingenii doctrinæque dotibus stemmatis ac dignitatum splendorem augens, pacem omnibus morum & facundiæ suavitate persuadere possit.*

ODE.

NUnc corda mulcens ô utinam Sacer
Notos recursans per fluvios Olor
Mox cogat infensos canorâ
Voce potens lituos silere;
Hic prima Pindi gloria cui favet
Phœbus, nitentem Lilia quem tegunt,
Quas ore non compescat iras
Pieriâ modulatus arte?
Ut cum querelis dulcisonis nemus
Vox blanda latè lusciniæ replet,
Discordis oblitæ susurri
Mille solent volucres tacere;
Non ille frustra sit patriæ datus
A quo feroces flecti animi queunt;
Martis nec incassum per arua
Threicius cecinit Sacerdos:
Orpheus parentem Calliopen colens
Lenire plectro quot didicit feras!
Sermone sic præstat domare
Pectora, quam superare ferro.

ERUDITO LECTORI.

NON te latet, Erudite Lector, opera Mathematica præfatione vix indigere: nam ut Paralogismi culpam frustrà longo sermone Geometra deprecari vellet, aut pro vera demonstratione falsam obtrudere; ita non opus est assensum solidæ rationis viribus debitum suppliciter efflagitare, quem adversarius videns sciensque, licet valdè reluctans, denegare non possit. Præterea supervacaneum foret laudes Mathematum fusè celebrare, cùm hanc spartam tot egregij scriptores adornandam jampridem susceperint. Quis enim nescit Geometriam & uberes illius fructus ad cœlum evehi à Platone, qui non solùm eam divinitùs humanæ menti insitam, sed etiam ab ipso numine excoli putavit? nonne meritò Mathesis à Philone vocata fuit liberalium artium metropolis, quas, ubi desit illa, luminibus, & veluti manibus orbatas esse liquet? Unde à vero non aberrat qui ut manum instrumentum ante instrumenta, sic & Mathesin dici posse credit artem ante alias artes, cum illius terrâ marique, & bello ut pace, tam evidens utilitas sit; quod unus instar omnium docuit olim Archimedes, dum infirmus corpore sed invictus ingenio senex, obsidionis Syracusanæ pars maxima, patriæ vis summa fuit, Briareus & Centimanus à Romanis appellatus: Quamobrem admiratione perculsum Marcellum licet hostem ab eo tot damnis affectum ei tamen inimicum esse noluisse Livius tradit, sed propinquis inquisitis honori præsidioque nomen, ac memoriam tanti viri fuisse. Mathematicas deinde disciplinas ansas Philosophiæ videri quis diffiteatur? cum Philosophus quamvis abundè Logicæ versutijs & argutijs instructus, si lux mathematica non affulgeat in Physica comparari possit Polyphemo in spelunca occæcato, & muneris, quo frui potuit, usum nescienti, vini scilicet, cui præclarus non ita pridem Philosophus Geometriam similem dici posse arbitratus est, quod recens inflat, vetus oblectat & vires auget. At non istorum operum Authorem inflavit unquam Mathesis, & tot demonstrationes, dum ab ipso non sunt editæ, quibuslibet argumentis meliùs demonstrant eum ab ostentatione laudisque cupidine alienum fuisse. Quòd autem de illarum sorte sollicitus non fuit, ferè semper autographa nullo servato responsorum exemplari mittere solitus, parum abfuit quin hæc, quæ fortè non interitura credes, omninò extincta fuerint, antequam in publicam lucem prodirent. Hinc fit ut quia hæc sparsim disjecta colligere facile non fuit, fato posthumorum operum serò, pauciora, & minus culta typis edantur. Hinc etiam contingere poterit ut omnia quæ hîc occurrent tibi non videantur nova: sed quamvis alij de quibusdam rebus, quas hîc invenies, scripserint & lucubrationes suas priùs vulgaverint, non ideò minùs hæc inventa istorum operum Authori debentur, qui adeò fastûs, & invidiæ expers fuit, ut aliena suis sat aliunde notis immiscuisse credi non possit, qui sua vix sibi tribuebat. Ab eo, exempli causâ, libri duo Apollonij Pergæi de locis planis procul dubio restituti sunt, licet Franciscus Schooten Academiæ Lugduno Batavæ Professor illos à se restitutos asserat; nam sua typis mandavit Franciscus Schooten anno 1657. sed libros duos, qui hîc extant, Apollonij Pergæi de locis planis se vidisse Lutetiæ manuscriptos, nec non ad locos planos & solidos Isagogen, testis omni exceptione major Herigonius asserit tomo 6. cursûs Mathematici editi anno 1634. Credere tamen, vt dixi, malim Batavum Professorem eâdem de re scripsisse, quàm ab eo, vel à quovis alio aliquid perpetratum esse suspicari quod ingenuum animum dedeceat, vel inverecundiam plagij probare possit. Verum in istis, ni fallor, operibus, de quibus te non ex parva mole judicaturum sat scio, occurret tibi non injucunda varietas, ut & in epistolis, quæ vel ab Authore, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris scriptæ fuerunt. Has inter sunt nonnullæ Pascalij in quibus ingenij non minùs tersi quàm perspicacis radios agnosces, quos ejusdem aliæ lucubrationes, & ipsæ satis exhibent Pascalij cogitationum reliquiæ: illud enim opus in quo *pendent opera interrupta*, multis eximium Matheseos circa res sacras specimen videtur, *æquataque machina cœlo*. Quis autem ignorat qualis quantusque Geometra & quam insignis in Academia Parisiensi Professor fuerit Robervallius, cujus hîc aliquot epistolas legere poteris & perlegisse gaudebis? Eduntur hîc quoque nonnullæ Gallicè vel Italicè scriptæ à Kenelmo Digbæo, qui præter generis nobilitatem & honores gestos, non solùm ingenio doctrinâque, sed etiam pietate conspicuus fuit, ac veræ Religionis cultu, quam ut gladio, sic & calamo tueri conatus est, ut fidem facit aureus illius liber de veritate Catholicæ Religionis Anglicè scriptus. Illis epistolis additur una aut altera Frenicli, cujus miram Arithmetica problemata solvendi facilitatem à multis prædicatam, & ejusdem responsis confirmatam Analystæ norunt. Quas verò non adjecimus circà Cartesianam Dioptricam epistolas legere poteris in tertio volumine epistolarum Cartesij cujus stupendæ sagacitatis circà Geometriam admiratione se captum fatetur is etiam qui nonnunquam ab eo dissentit. Ut autem in varijs istis operibus, sic & in epistolis multa reperies quæ ad Geometriam, vel Analyticen pertinent aut numerorum arcana, de quibus si plura videre cupias, habes observationes ad Diophantum, cujus opera typis mandari curavi anno 1670. & Doctrinæ Analyticæ inventum novum collectum è variis epistolis D. Petri de Fermat ab insigni Geometra R. P. Jacobo de Billy S. J. Sacerdote. Est hîc prætereà nonnihil circa Mechanicam & Geostaticam, nec non Dioptricam ac Physicam, circà quàm v. g. non contemnendam fore confido epistolam de proportione quâ gravia decidentia accelerantur, ad Gassendum, quæ ipsi Gassendo viro exquisitæ eruditionis, & candore ac moribus qui Christianum Philosophum decent, prædito non displicuit, ut ejus responso, licet brevi, satis patet. Sic etiam celebris Itali Geometræ Abbatis Bened. Castelli epistola probat ei non displicuisse quæ hîc scripta sunt circà motum gravium aut centrum gravitatis. Cæterùm in his Parentis mei operibus & epistolis quæ multas disputationes circà quæstiones arduas continent, & quibus duas addidimus criticis observationibus non spernendis refertas, nullam vocem quæ sit acerbior, nullum pervicacis controversiæ vel amarulentæ contentionis occurrere vestigium, poteris observare. Id innatam mansuetudinem Authoris arguit, qui nullâ contradicendi libidine veritatem quærens, illam ab alijs inveniri gaudebat & gratulabatur: qui secùs agunt eam ut juvenes proci colere videntur, dum sibi dumtaxat affulgere vellent quod diligunt; sed qui veritatem divino, ut par est, amore prosequuntur, ipsam omnibus innotescere cupiunt, suamque felicitatem augeri putant, cum ejusdem plurimi fiunt participes. Epistolas verò ad Authorem scriptas, quæ hîc extant, ut nactus sum, edendas ingenuè existimavi, nullomodò minuere sed augere cupiens tantorum virorum famam, quorum alia responsa, nondum prælo commissa, si mihi suppeterent, ut harum disputationum seriem edere non pigeret. Ex istis autem operibus, Erudite Lector, fructûs, ni fallor, & voluptatis non parùm percipere poteris & si quid incuriâ Typographorum erratum sit, illud suppleas aut ignoscas quæso.

Schemata suis locis in toto opere, ut in illius parte, reperirentur, nisi defuisset sculptor ligni notis Geometricis incidendi peritus; sed figuræ quæ cum textu edita non fuerunt, ad libri calcem sunt rejecta, numeris paginarum, ad quas referuntur, appositis, quod semel monuisse sufficiat.

ELOGE DE MONSIEVR DE FERMAT,

Conseiller au Parlement de Tolose.

Du Iournal des Sçavans, du Lundy 9. Fevrier 1665.

ON a appris icy avec beaucoup de douleur la mort de M. de Fermat Conseiller au Parlement de Tolose. C'estoit un des plus beaux esprits de ce siecle, & un genie si universel & d'une estenduë si vaste, que si tous les sçavans n'avoient rendu témoignage de son merite extraordinaire, on auroit de la peine à croire toutes les choses qu'on en doit dire, pour ne rien retrancher de ses loüanges.

Il avoit toûjours entretenu une correspondance tres-particuliere avec Messieurs Descartes, Toricelli, Pascal, Frenicle, Roberval, Hugens, &c. & avec la pluspart des grands Geometres d'Angleterre & d'Italie. Mais il avoit lié une amitié si étroite avec M. de Carcavi, pendant qu'ils estoient confreres dans le Parlement de Tolose, que comme il a esté le confident de ses estudes, il est encore aujourd'huy le depositaire de tous ses beaux écrits.

Mais parce que ce Journal est principalement pour faire connoître par leurs ouvrages les personnes qui se sont renduës celebres dans la republique des lettres; on se contentera de donner icy le catalogue des écrits de ce grand homme; laissant aux autres le soin de luy faire un éloge plus ample & plus pompeux.

Il excelloit dans toutes les parties de la Mathematique; mais principalement dans la science des nombres & dans la belle Geometrie. On a de luy une methode pour la quadrature des paraboles de tous les degrez.

Une autre *de maximis & minimis*, qui sert non seulement à la determination des problemes plans & solides; mais encore à l'invention des touchantes & des lignes courbes, des centres de gravité des solides, & aux questions numeriques.

Une introduction aux lieux, plans & solides; qui est un traité analytique concernant la solution des problemes plans & solides; qui avoit esté veu devant que M. Descartes eut rien publié sur ce sujet.

Un traité *de contactibus sphæricis*, où il a demonstré dans les solides ce que M. Viet Maître des Requestes, n'avoit demonstré que dans les plans.

Un autre traité dans lequel il rétablit & demonstre les deux livres d'Apollonius Pergæus, des lieux plans.

Et une methode generale pour la dimension des lignes courbes, &c.

De plus, comme il avoit une connoissance tres-parfaite de l'antiquité, & qu'il estoit consulté de toutes parts sur les difficultez qui se presentoient; il a éclaircy une infinité de lieux obscurs qui se rencontrent dans les anciens. On a imprimé depuis peu quelques-unes de ses observations sur Athenée; & celuy qui a traduit le Benedetto Castelli de la mesure des eaux courantes, en a inseré dans son ouvrage une tres-belle sur une Epistre de Synesius, qui estoit si difficile, que le Pere Petau qui a commenté cét autheur, a advoüé qu'il ne l'avoit peu entendre. Il a encore fait beaucoup d'observations sur le Theon de Smyrne & sur d'autres Autheurs anciens. Mais la pluspart ne se trouveront qu'éparses dans ses Epitres; parce qu'il n'écrivoit gueres sur ces sortes de sujets, que pour satisfaire à la curiosité de ses amis.

Tous ces ouvrages de Mathematique, & toutes ces recherches curieuses de l'antiquité, n'empéchoient pas que M. de Fermat ne fit sa charge avec beaucoup d'assiduité, & avec tant de suffisance, qu'il a passé pour un des plus grands Jurisconsultes de son temps.

Mais ce qui est de plus surprenant, c'est qu'avec toute la force d'esprit qui estoit necessaire pour soûtenir les rares qualitez dont nous venons de parler, il avoit encore une si grande delicatesse d'esprit, qu'il faisoit des vers Latins, François & Espagnols avec la méme elegance, que s'il eût vêcu du temps d'Auguste, & qu'il eût passé la plus grande partie de sa vie à la Cour de France & à celle de Madrid.

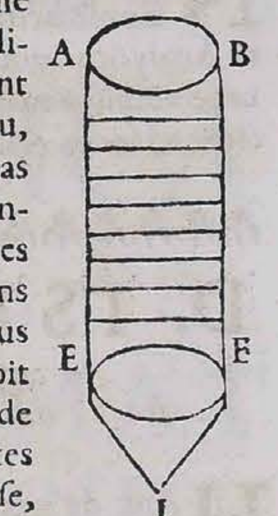
On parlera plus particulierement des ouvrages de ce grand homme, lors qu'on aura recouvert ce qui en a esté publié, & qu'on aura obtenu de M. son fils la liberté de publier ce qui ne l'a pas encore esté.

OBSERVATION DE MONSIEUR de Fermat sur Synesius, rapportée à la fin de la traduction du livre de la mesure des eaux courantes, de Benedetto Castelli.

LES pages qui restent vuides dans ce cayer m'ont donné la pensée de les remplir de la belle observation que j'ay apprise ces jours passez, de l'incomparable Monsieur de Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, & de me souffrir souvent dans sa conversation. C'est sur la quinziéme Lettre de Synesius Evéque de Cyrene, qui traite d'une matiere qui n'a esté entenduë par aucun des interpretes, non pas mémes par le sçavant Pere Petau, ainsi qu'il l'advouë luy-méme dans les Notes qu'il a faites sur cét Autheur; Et je donne d'autant plus volontiers cette observation, qu'elle a beaucoup de rapport avec les traitez qui sont cy-devant.

Cét Evéque écrit à la sçavante Hypatia, qui estoit la merveille de son siecle, & laquelle enseignoit publiquement la Philosophie, avec l'admiration de tous les sçavans, dans la celebre Ville d'Alexandrie. J'ay traduit cette Lettre du Grec en cette maniere. Je me trouve si mal, que j'ay besoin d'un hydroscope. Je vous prie d'en faire faire un de cuivre, & de me l'acheter. C'est un tuyau en forme de Cylindre, qui a la figure & la grandeur d'une fleute; sur sa longueur il porte une ligne droite, qui est coupée en travers par de petites lignes, par lesquelles nous jugeons du poids des eaux. L'un des bouts est couvert d'un cone, qui est posé également dessus, en telle sorte que le tuyau & le cone ont une méme base. L'on appelle cét instrument Baryllion. Si on le met dans l'eau par la pointe il y demeurera debout, & l'on peut aisement compter les sections qui coupent la ligne droite, & par là l'on connoit le poids de l'eau.

Comme nous avons perdu la figure & l'usage de cét instrument, de méme qu'une infinité d'autres belles choses, que les Anciens avoient inventées, & dont ils se servoient, les sçavans de ce temps icy se sont donnez beaucoup de peine pour comprendre quel estoit cét instrument dont parle Synesius. Il y en a qui ont crû que c'estoit une Clepsydre, mais le Pere Petau a rejetté avec raison cette opinion. Pour luy, il advouë, qu'il ne le comprend pas, il soupçonne pourtant que c'estoit un instrument qui servoit à niveler les eaux, & qui avoit du rapport avec celuy dont Vitruve fait mention au livre 8. ch. 6. de son Architecture, qu'il appelle Chorobates, mais il est aisé de juger par la lecture de Vitruve, & de Synesius, que ce sont deux instrumens fort differens, & en figure, & en usage, & que si tous deux ont des sections, comme remarque le Pere Petau, celles du Chorobates sont perpendiculaires sur l'horizon, & celles de l'hydroscope luy sont paralleles. Je passe sous silence plusieurs autres differences, que je pourrois remarquer, pour rapporter le sentiment de Monsieur de Fermat, qui est sans doute le veritable sens de Synesius. Cét instrument servoit pour examiner le poids des differentes eaux pour l'usage des malades; car les Medecins sont d'accord que les plus legeres sont les meilleures; le terme ῥοπὴ, dont se sert Synesius le monstre clairement. Il ne signifie pas icy *libramentum* le nivelement, comme a crû le Pere Petau, mais en matiere de Machines, il signifie le poids, que les Latins appellent *momentum*, & de la le traité des equiponderans d'Archimede a pour titre Ἰσοῤῥοπικῶν. Mais dautant que la balance, ny aucun autre instrument artificiel, ne pouvoit pas donner exactement la difference du poids des eaux, à cause qu'elle est petite entre elles, les Mathematiciens inventerent sur les principes du traité d'Archimede *de his quæ vehuntur in aqua*, celuy dont parle Synesius, qui monstre par la nature des eaux mêmes, la difference du poids qu'elles ont entr'elles, la figure en est telle; A F est un Cylindre de cuivre, A B est le bout d'en haut, qui est toûjours ouvert, E F est le bout d'embas, qui est couvert du cone E I F, qui a la même base que le bout d'embas, A E, B F, sont deux lignes droites coupées par diverses petites lignes, tant plus il y en aura, tant plus exact sera l'instrument. Si on le met par la pointe du cone dans l'eau, & qu'on l'ajuste en telle sorte qu'il se tienne debout, il n'y enfoncera pas entierement; car le vuide qu'il a au dedans l'en empéchera; mais il y enfoncera jusques à une certaine mesure, qui sera marquée par les petites lignes; & il y enfoncera diversement, suivant que l'eau sera plus ou moins pesante; car plus l'eau sera legere, plus il y enfoncera: & moins, plus elle sera pesante, comme il nous seroit aisé de le demonstrer, s'il en estoit question icy. Voila la figure & l'usage de cét instrument, & la raison de cét usage. La lettre de Synesius s'y rapporte si exactement dans toutes ses circonstances, que feu Monsieur de Monchal, Archevéque de Tolose, ayant envoyé cette explication au Pere Petau, il advoüa que Monsieur de Fermat estoit le seul qui avoit compris quel estoit l'instrument, & il avoit écrit que dans une seconde impression il la mettroit dans ses notes. Mais parce que cela n'a pas esté fait, j'ay crû que le Lecteur sçavant & curieux ne sera pas marry que je luy en aye fait part.



LETTRE DE MONSIEUR DESCARTES A MONSIEUR DE FERMAT,

pag. 347. tom. 3. des Lettres de Monsieur Descartes.

MONSIEUR,

Je n'ay pas eu moins de joye de recevoir la Lettre par laquelle vous me faites la faveur de me promettre vostre amitié, que si elle me venoit de la part d'une Maistresse, dont j'aurois passionnement desiré les bonnes graces. Et vos autres écrits qui ont precedé me font souvenir de la Bradamante de nos Poëtes, laquelle ne vouloit recevoir personne pour serviteur, qui ne se fut auparavant éprouvé contr'elle au combat. Ce n'est pas toutefois que je pretende me comparer à ce Roger, qui estoit seul au monde capable de luy resister; mais tel que je suis, je vous asseure que j'honnore extremement vôtre merite. Et voyant la derniere façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ay autre chose à y répondre, sinon qu'elle est tres-bonne, & que si vous l'eussiez expliqué au commancement en cette façon, je n'y eusse point du tout contredit, &c.

P. Herigonius, tom. 6. Curſus Mathematici p. 68.

De Maximis & minimis.

NUnquam fallit hæc methodus, ut aſſerit ejus inventor, qui eſt doctiſſimus Fermat Conſiliarius in Parlamento Toloſano excellens Geometra nec ulli ſecundus in arte Analytica : qui optimè etiam reſtituit omnia loca plana Apollonij Pergæi, quæ in hac urbe vidimus manuſcripta in manibus plurimorum, quibus ſubnexa eſt ab eodem auctore ad locos planos & ſolidos Iſagoge.

D. ISMAEL BULLIALDUS
Exercitatione de Poriſmatibus.

HAnc de poriſmatibus ſcriptiunculam datâ mihi occaſione compoſui, cùm ante biennium vir illuſtriſſimus ac ampliſſimus Dominus de Fermat in ſuprema Curia Toloſana Senator integerrimus & in judicijs exercendis peritiſſimus, rerum Mathematicarum doctiſſimus, propoſitiones quaſdam ſubtiliſſimas & poriſmata quæ tam theorematicè quam problematicè proponi poſſunt, ad amicos ſuos huc miſiſſet. Ex Pappi unius monumentis & collectionibus Mathematicis poriſmatum naturam & uſum diſcere poſſumus, cùm ex Veteribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipſum nullus ſuperſit. Illius tamen ſententia legenti ſtatim obuia non eſt; textuſque corruptione, & applicationis poriſmatum defectu obſcurior proculdubio evadit. Interea dum tanto viro ſua edere libuerit, noſtra, qualiacumque tandem ſint, publici juris facere placuit; ut alios ad eorundem inveſtigationem impelleremus; ipſumque Ampliſſimum Dominum de Fermat, ad ſua edenda, utinam & ad alia ſublimis intellectus ſui ἀἐήματα cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim eſt, quem omnes Europæ Mathematici ſuſpiciunt; quem à ſubtiliſſimis ætatis noſtræ Geometris Bonaventura Cavallerio Bononiæ, & Evangeliſta Toricello Florentiæ ſummis laudibus in cœlum ferri, ejuſque inventa mirabilia prædicari auribus meis audivi, quem etiam virum tam eximiis virtutibus clarum, multâque eruditione ornatum, ac in rebus Mathematicis oculatiſſimum toto pectore veneror ac colo.

R. P. Marinus Merſennus Ordinis Minimorum, Reflexionum Phyſicomathematicarum pag. 215.

CUm autem vivos potiùs quam mortuos quærerem, unus abſuit Clariſſimus Fermatius, Geometrarum Coryphæus; quem tamen Burdigalam redux, ductore integerrimo, doctiſſimoque Senatore, Domino d'Eſpagnet, velut avulſum Bergeraco, triduò amplexus ſum.

Samuel Sorberius in præfatione operum Gaſſendi.

PETRUM Fermatium tam longo intervallo Vietam, Diophantum & Pythagoreos omnes poſt ſe relinquentem.

VARIA

VARIA OPERA MATHEMATICA D. PETRI DE FERMAT SENATORIS TOLOSANI.

AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS ISAGOGE.

DE locis quàm plurima ſcripſiſſe veteres, haud dubium. teſtis Pappus initio libri 7. qui Appollonium de locis planis, Ariſtæum de ſolidis ſcripſiſſe aſſeverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis ſatis ipſis fuit locorum inveſtigatio. Illud auguramur ex eo quod locos quàm plurimos non ſatis generaliter expreſſerunt, ut infra patebit.

Scientiam igitur hanc propriæ & peculiari analyſi ſubjicimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.

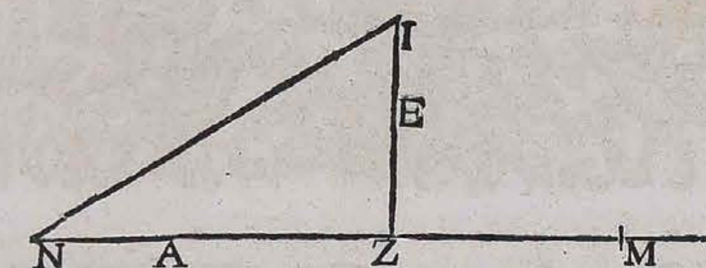
Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, fit locus loco, & terminus alterius ex illis deſcribit lineam rectam, aut curvam, linea recta unica & ſimplex eſt, curva infinita, circulus, parabole, hyperbole, ellipſis, &c.

Quoties quantitatis ignotæ (lineæ rectæ reponendum) terminus localis deſcribit lineam rectam, aut circularem, fit locus planus : at quando deſcribit parabolem, hyperbolem, vel ellipſim, fit locus ſolidus : ſi alias curvas, dicitur locus linearis. De hoc nihil adjungemus, quia facillimè ex planorum & ſolidorum inveſtigatione, linearis loci cognitio derivabitur, mediantibus reductionibus.

Commode autem poſſunt inſtitui æquationes, ſi duas quantitates ignotas ad datum angulum conſtituamus, quem ut plurimum rectum ſumemus, & alterius ex illis poſitione datæ terminus unus ſit datus, modò neutra quantitatum ignotarum quadratum prætergrediatur, locus erit planus aut ſolidus, ut ex dicendis clarum fiet.

A

Recta data positione sit N Z M. cujus punctum datum N. N Z. æquetur quantitati ignotæ A. & ad angulum datum N Z I. elevata recta Z I. sit æqualis alteri quantitati ignotæ E. D in A æquetur B. in E. Punctum I. erit ad lineam rectam positione datam.



DA § BE.

Erit enim ut B ad D. ita A. ad E. Ergo ratio A ad E. data est, & datur angulus ad Z. triangulum igitur N I Z. specie, & angulus I N Z. Datur autem punctum N. & recta N Z. positione. Ergo dabitur N I. positione, & est facilis compositio.

Ad hanc æqualitatem reducentur omnes, quarum homogenea partim sunt data, partim ignotis A & E admixta, vel in datas ductis, vel simpliciter sumptis.

Zp — D A § B in E.

fiat D in R. æquale Zp

Erit ut B. ad D. ita R — A ad E.

Fiat M N. æqualis R. dabitur punctum M. ideoque M Z. æquabitur R — A. dabitur ergo ratio M Z. ad Z I. sed angulus ad Z. datur: ergo triangulum I Z M. specie, & concludetur rectam M I. junctam dari positione: ideoque punctum I. erit ad rectam positione datam: idemque nullo negotio concludetur in qualibet æqualitate cujus homogenea quædam afficientur ab A. vel E.

Et est simplex hæc & prima locorum æqualitas, cujus beneficio invenientur loci omnes ad lineam rectam; verbi gratia 7. prop. lib. 1. Appollonii de locis planis, quæ generaliùs jam poterit enuntiari & construi.

Huic æqualitati subest pulcherrima propositio sequens, quam illius ope deteximus.

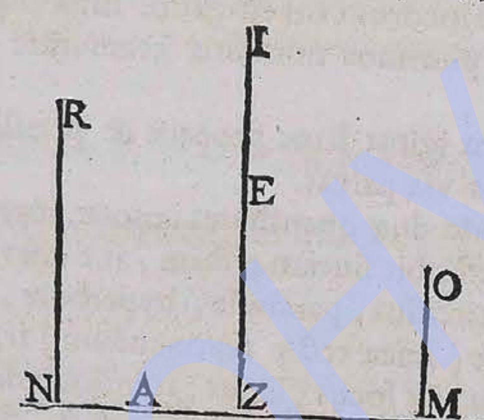
Si sint quotcumque lineæ positione datæ atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis, sit autem quod sub ductis & datis efficietur dato spatio æquale, punctum rectam lineam positione datam continget.

Infinitas omittimus, quæ Appollonianis meritò possent opponi.

Secundus hujusmodi æqualitatum gradus est, quando,

A in E. æq. Z. pl. — AE § Zp

quo casu punctum I. est ad hyperbolem.



Fiat N R. parallela Z I. sumatur in N Z. quodvis punctum, ut M. à quo ducatur M O. parallela Z I. & fiat rectang. N M O. æquale Z pl. per punctum O. circa asymptotos N R. N M. describatur hyperbole, dabitur positione, & transibit per punctum I. cùm ponatur rectang. A. in E. sive N Z I. æquale N M O. ad hanc æqualitatem reducentur omnes quarum homogenea partim sunt data vel ab A. vel E aut A in E. affecta.

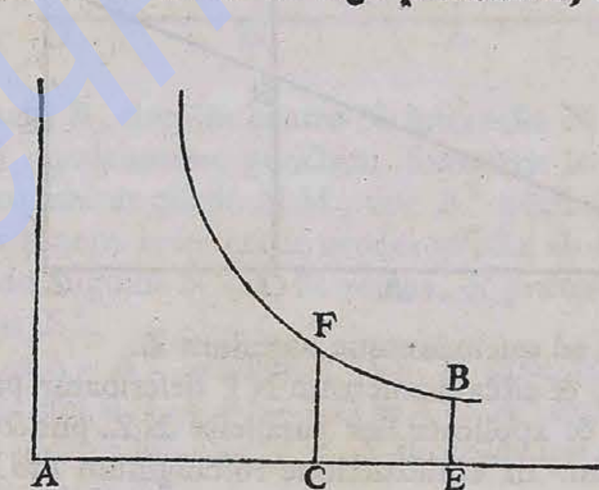
Ponatur Dp + A in E. (æq.) R in A + S in E. Igitur ex artis præceptis, R in A + S in E — A in E. æquabitur Dp — Dp + AE ∞ RA + SE.

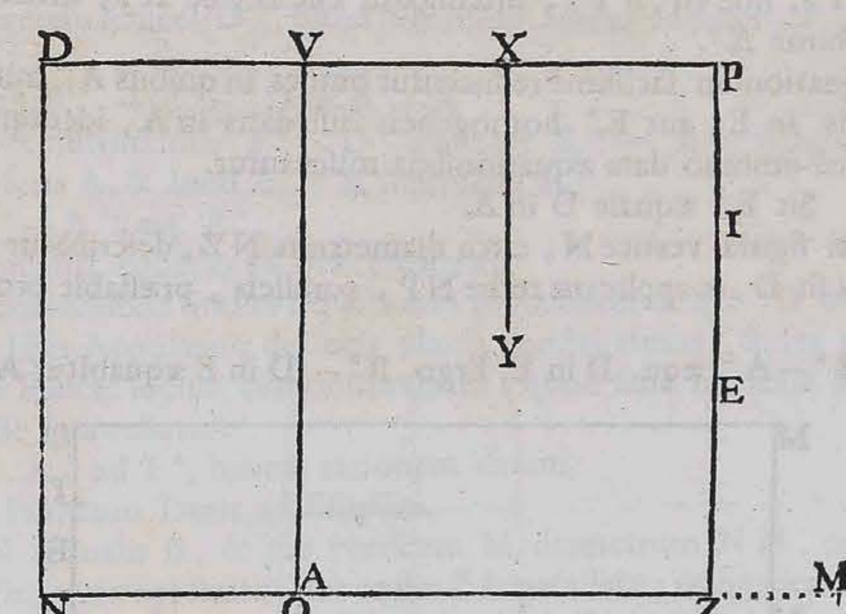
Effingatur rectang. abs duob. laterib. in quo homogenea R in A + S in E — A in E. reperiantur. Uno verbo A S. æquetur O. & R — E. æquetur I. igitur O I ∞ Dp quod proponitur, & hæc erit constructio, Dp æquetur A E B. rectang. igitur A C F. erit O in I. erunt duo latera A — S & R — E. & rectang. sub ipsis æquabitur.

R in A + S in E — A in E — R in S.

Si igitur à Dp abstuleris R in S. rectangulum sub A — S, in R — E. æquabitur Dp — R in S.

Fiat N O. æqualis S. & N D. parallela Z I. fiat æqualis R. per punctum D. ducatur D P. parall. N M. O V. parall. N D. & Z I. producatur in P. Cùm N O. æquetur S, & N Z, A: ergo A — S. æquabitur O Z, sive V P, similiter cùm N D. sive Z P. æquetur R, & Z I, E, ergo R — E, æquabitur P I, Rectangulum igitur sub V P, in P I. æquatur dato Dp — R in S: ergo punctum I, erit ad hyperbolem, cujus asymptoti





PV, VO. Rectangulo enim Dp — R in S, æquetur sumpto quovis puncto X, & ductâ parall. X Y, Rectang V X Y, & per punctum Y, circa asymptotos P V, V O, hyperbole describatur, per punctum I, transibit, nec est difficilis in quibuslibet casibus analysis aut constructio.

Sequens æqualitatum localium gradus est cùm A^2 vel æq. E^2 vel est in ratione data ad E^2 vel etiam A^2 + A in E, est ad E^2 in data ratione, denique hic casus omnes æquationes comprehendit intra metam quadratorum, quarum homogenea omnia vel à quadrato A, vel à quad. E, vel à rectang. A in E. afficiuntur.

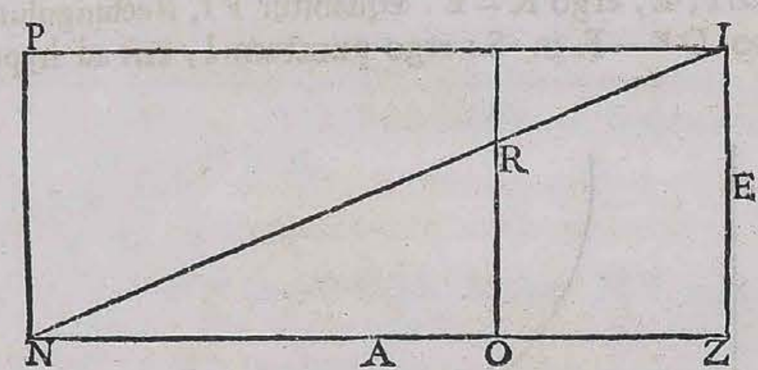
$A^2 \infty E^2$ A^2 ad E^2 in ratione data $A^2 + AE$, ad E^2 in ratione.

His omnibus casibus punctum I, est ad lineam rectam, cujus rei demonstratio facillima.

Sit NZ, quad. $+ NZ$, in ZI, ad ZI, quad. in ratione data, ducatur quævis parallela OR, quadratum $NO + NO$ in OR erit ad OR quadratum, in eadem ratione, ut est facillimum demonstrare. Punctum igitur I, erit ad rectam positione. Sumatur enim quodvis punctum, ut O, & fiat data ratio quadrati $NO + NO$, in OR, ad OR, quadratum. Juncta NR. dabitur positione, & satisfaciet proposito; idemque continget in quibuslibet æquationibus, quarum omnia homogenea à potestatibus ignotarum, vel rectangulo sub ipsis afficientur, ut inutile sit singulos casus scrupulosiùs perquirere.

Si potestatibus ignotarum, vel rectangulis sub ipsis, admisceantur homogenea, partim omnino data, partim sub data recta in alteram ignotarum, difficilior evadit constructio, singulos casus construimus breviter & demonstramus.

$A^2 \infty DE$. Si A^2 æq. D in E, punctum I, est ad Parabolem.



constituantur NZ, & ZI, ad quemcumque angulum Z.

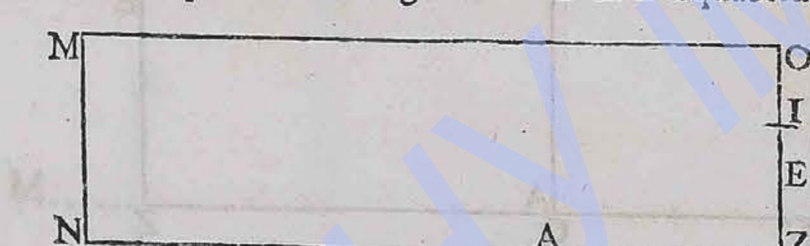
Fiat NP, Parallela ZI, & circa diametrum NP describatur parabole, cujus rectum latus recta D, datæ, & applicatæ sint parallellæ NZ. punctum I. erit ad parabolem hanc positione datam. Ex constructione rectangulum sub D, in NP, æquabitur quadrato PI, hoc est, si PI, intelligatur esse A, & NP, intelligatur esse E, D, in E, æquabitur A^2.

Ad hanc æquationem facillimè reducentur omnes in quibus A^2, miscetur homogeneis sub datis in E, aut E^2, homogeneis sub datis in A, idemque continget, licèt homogenea omnino data æquationibus misceantur.

Sit E^2, æquale D in A.

$E^2 \infty DA$. In præcedenti figura vertice N, circa diametrum NZ, describatur parabole, cujus rectum latus sit D, & applicatæ rectæ NP, parallela, præstabit propositum, ut patet,

$B^2 - A^2 \infty DE$ $B^2 - DE \infty A^2$. Ponatur $B^2 - A^2$ æqu. D in E. Ergo $B^2 - D$ in E æquabitur A^2.



Applicetur B^2 ad D, & sit æquale D. in R.

Ergo D in $R - D$ in E, æquabitur A^2 Ideoque D in $R - E$ æquabitur A^2.

Ideoque hæc æquatio reducetur ad præcedentem. Recta quippe $R - E$, succedet ipsi E.

Fiat quippe NM, parallela ZI, & æqualis R, & per punctum M ducatur MO, parallela NZ, datur punctum M, & recta MO, positione, in hac constructione OI, æquatur $R - E$. ergo D. in OI, æquabitur NE quad. sive MO quad. vertice M. circa diametrum MN, descripta parabole, cujus dextrum latus D, & applicatæ ipsi

NZ, parallelæ, præstabit propositum, ut patet ex constructione.

Si $B^2 + A^2$ æqu. D in E.

D in $E - B^2$ æquabitur A^2 &c. vt supr. similiter omnes æquationes affectæ construentur.

Sed A^2 miscetur sæpe E^2 & homogeneis omnino datis.

$B^2 - A^2$ æquetur E^2. $B^2 - A^2 \infty E^2$.

Punctum I est ad circulum positione datum, quando angulus NZI. est rectus.

Fiat NM, æqualis B, circulus centro N. intervallo NM, descriptus præstabit propositum, hoc est quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia ut I, quadratum ZI, æquabitur quadr. NM, sive B^2 quad. NZ, sive A^2 ut patet.

Ad hanc æquationem reducentur omnes affectæ ab A^2 & E^2, & ab A, vel E, in datas ductis, modo angulus NZI, sit rectus, & præterea coefficientes A^2 æquentur coefficientibus E^2.

Sit $B^2 - {}^2D$ in $A - A^2$, æquale $E^2 + {}^2R$ in E. Addatur utrimque R^2, ut E, $+ R$, succedat E, fiet $R^2 + B^2 - {}^2D$ in $A - A^2$ æqu. $E^2 + R^2 + {}^2R$, in E. ipsis R^2 & B^2, addatur D^2, ut $D + A$ succedat ipsi A, & summa quadratorum R^2, B^2: & D^2 æquetur P^2. $B^2 - {}^2DA - A^2 \infty E^2 + {}^2RE$.

Ergo auferendo scilicet D^2, quod utrimque fuerat additum, $P^2 - D^2 - {}^2D$ in $A - A^2$.

Æquabitur $R^2 + B^2 - {}^2D$ in $A - A^2$.

Nam ex constructione $P^2 - D^2$ æquatur $R^2 + B^2$, si igitur loco ipsius $A + D$, sumpseris A, & loco $E \mp R$ sumpseris E.

Fiet $P^2 - A^2$: æq. E^2.

Et reducetur æquatio ad præcedentem.

Simili ratiocinatione similes æquationes reducentur & hac viâ omnes propositiones secundi libri Appollonii de locis planis construximus, & sex priores in quibuslibet punctis habere locum demonstravimus; quod sanè mirabile est, & ab Appollonio fortasse ignorabatur.

Sed $B^2 - A^2$ ad E^2, habeat rationem datam.

Punctum I. erit ad Ellipsim. $B^2 - A^2$. ad E^2 rati.

Fiat MN. æqualis B, & per verticem M. diametrum NM, centrum Z. describatur Ellipsis cujus applicatæ sint rectæ ZI, parallelæ, & quadrata.

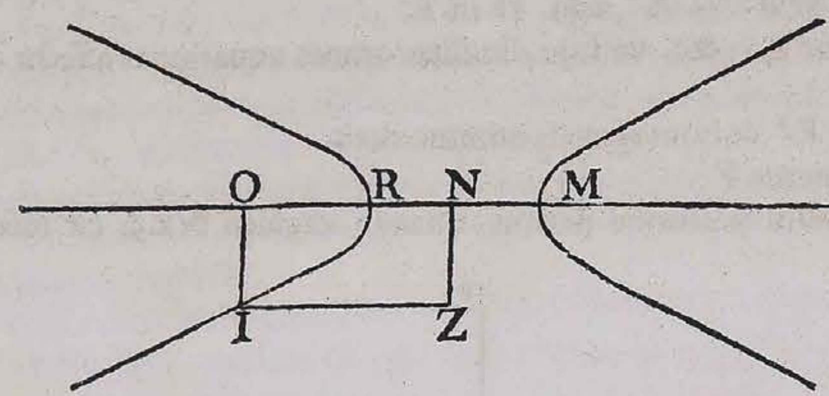
Applicatarum ad rectangulum subsegmentis diametri habeant rationem datam, punctum I, erit ad hujusmodi Ellipsim. Etenim quadratum $NM -$ quad NZ, æquatur rectangulo sub diametri segmentis.

Ad hanc reducentur similes in quibus A^2 ex una parte opponetur E^2 sub contraria affectionis nota, & sub coefficientibus diversis. Nam si coefficientes sint eædem, & angulus sit rectus, locus erit ad circulum, ut jam diximus. Licèt igitur coefficientes sint eædem, modò angulus non sit rectus, locus erit ad Ellipsim.

Et licet commisceantur æquationibus homogenea sub datis & A vel E, fiet reductio eo quod jam usurpavimus artificio.

$A^2 + B^2$ ad E^2 ratio hyperbol.

Si $A^2 + B^2$, eſt ad E^2 in data ratione punctum I, eſt ad hyperbolem.



OI, ſit A. ON, ſeu ZI. ſit E.

Fiat NO, parallela ZI, data ratio ſit eadem quæ B^2. ad quad. NR. Dabitur ergo punctum R, circa diametrum RO. per verticem R, centrum N deſcribatur hyperbolæ cujus applicatæ ſint parallelæ NZ, & rectangulum ſub tota diametro & RO, ad quadratum OI. ſit in data ratione NR, quadrati ad B^2. Ergo componendo rectangulum ſub MOR, poſita MN, æquali NR, erit ad quadratum OI, una cum B^2 in ratione data, NR, quadrati ad B^2, ſed rectang. MOR, unà cum NR quad æquatur NO quadrat. ſive ZI, quad. ſive E^2, & quadrat. OI, una cum B^2 æquatur quadrato NZ, ſive A^2 una cum B^2. Ergo eſt ut E^2 ad $B^2 + A^2$ ita NR, quad. ad B^2 & convertendo $B^2. + A^2$ eſt ad E^2, in ratione data. Punctum igitur Z, eſt ad hyperbolem poſitione datam.

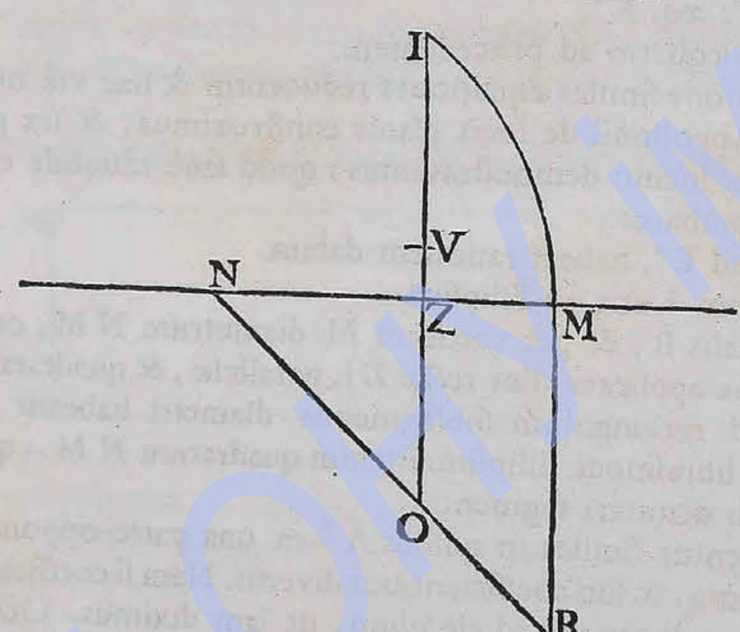
Eodem quo jam uſi ſumus artificio ad hanc æquationem, reducentur omnes quæ ab A^2 & E^2 afficiuntur unà cum datis, ſive ſimpliciter, ſive miſceantur ipſis homogenea ſub A vel E, in datas, modò A^2 habeat eamdem ex altera parte affectionis notam, quàm E^2 Nam ſi ſint diverſæ, propoſitio concludetur per circulos vel Ellipſes.

Difficillima omnium æqualitatum eſt quando ita miſcentur A^2 & E^2 ut nihilominus homogenea quædam ab A in E afficiantur una cum datis, &c.

$B^2 - 2A^2$ ∞ $2A$ E $+ {}^2$.

$B^2 - 2A^2$ æquatur $2A$ in $E + E^2$ addatur utrimque A^2, ut $A + E$. ſit latus alterius ex homogeneis, ergo.

$$B^2 - A^2. \text{ æquabitur } A^2 + 2A \text{ in } E.$$



Pro $A + E$, ſumatur E, ſi placet, & ex præcedentibus circulus MI, præſtet pro poſitum, hoc eſt MN, quad. (ſivè B^2) − NZ, quad. (ſive A^2) æquetur quadrato ZI, ſive quad. abs $A + E$, fiat VI, æqualis NZ, ſive A, ergo ZV, æquatur E. in

hac autem quæſtione punctum V, ſive extremum rectæ E, tantùm inquirimus. Videndum ergo & demonſtrandum ad quam lineam ſit punctum V. Fiat MR, parallella ZI, & æqualis MN, & jungatur NR, ad quam producta IZ, incidat ad punctum O. Cùm MN. æquetur MR, ergo NZ æquabitur ZO. Sed NZ, æquatur VI. Ergo toti VO, toti ZI, eſt æqualis: ideoque quad. MN − quad. NZ æquatur quadrato VO. Datur autem triangulum NMR. ſpecie. Ergo quadrati NM, ad quadratum NR, datur ratio; ideoque & quadrati NZ ad quadratum NO, dabitur ratio. Ratio igitur quadrati MN − quadrato NZ, ad quadratum NR − quadrato RO datur. Probavimus autem quadratum OV, æquari quadrato MN − quad. NZ. Ergo ratio quadrati NR − NO. quad. ad quad. OV, datur. Dantur autem puncta N & R, & angulus NOZ. Ergo punctum V, ex ſuperioribus demonſtratis eſt ad Ellipſim.

Non abſimili methodo ad ſuperiores caſus reducentur reliqui, in quibus homogenea ſub A in E, homogeneis partim datis, partim ſub A^2 aut E^2 immiſcebuntur; aut etiam ſub A & E, in datas ductis, cujus rei diſquiſitio facillima. Semper enim beneficio trianguli ſpecie noti conſtruetur quæſtio.

Breviter igitur & dilucidè complexi ſumus quidquid de locis planis & ſolidis inexplicatum veteres reliquere.

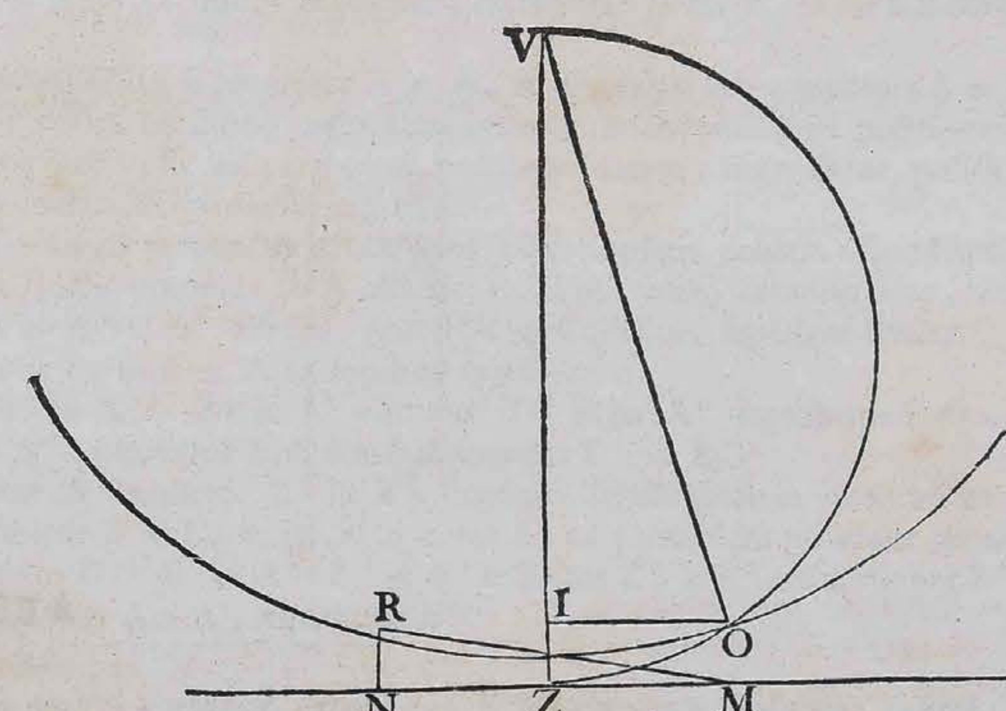
Conſtabitque deinceps ad quem locum pertinebunt caſus omnes propoſ. ultimæ lib. 1. Appoll. de locis planis, & omnia omnino ad hanc materiam ſpectantia nullo negotio detegentur.

Sed libet coronidis loco pulcherrimam hanc propoſitionem adjungere, cujus facilitas ſtatim innoteſcet.

Si poſitione datis quotcumque lineis, ab uno & eodem puncto ad ſingulas ducantur rectæ in datis angulis, & ſint ſpecies ab omnibus ductis dato ſpatio æquales, punctum contingit poſitione datum ſolidum locum. Unico exemplo fit via ad praxim.

Datis duobus punctis N, M, inveniendus locus à quo ſi jungas rectas IN, IM, quadrata rectarum IN, IM, ad triangulum INM, datam habeant rationem, recta NM, æquetur B, & recta ZI ad angulos rectos, dicatur E, terminus NZ, dicatur A, ergo ex artis præceptis $2A^2 + B^2 - 2B$, in $A + 2E^2$, ad rectangulum B in E habebit rationem datam.

Et reſolvendo hypoſtaſes ex jam traditis præceptis, ita procedet conſtructio.



N M, bifariam fecetur in Z, à puncto Z, excitetur perpend. Z V, & fiat datæ ratio eadem quæ Z V. quadruplæ ad Z M, defcripto femicirculo V O Z, fuper V Z, applicetur Z O, æqualis ipfi Z M, & junctâ V O, centro V, intervallo VO, defcribatur circulus O I R, in quo fumatur quodlibet punctum, ut R, & jungantur rectæ R N, R M: aio quadrata R N, R M, ad triangulum R N M, effe in data ratione.

Hæc inventio fi libros duos de locis planis à nobis dudum reftitutos præceffiffet, elegantiores fanè evafiffent localium theorematum conftructiones: nec tamen præcocis licèt & immaturi partûs nos adhuc pœnitet, & informes ingenii fœtus pofteris non invidere fcientiæ ipfius quadamtenus intereft, cujus opera primò rudia & fimplicia novis inventis & roborantur & augefcunt. Imò & ftudioforum intereft latentes ingenii progreffus, & artem fefe ipfam promoventem penitus habere perfpectam.

APPENDIX

APPENDIX
AD ISAGOGEM TOPICAM
Continens folutionem problematum folidorum per locos.

RATUIT methodus qua lineæ locales deteguntur, inquirendum reftat qua ratione problematum folidorum folutio poffit ex fupradictis elegantiffimè derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites fuos evagandi licentia. Infinita enim funt puncta quibus quæftioni propofitæ fatisfit in locis.

Commodiffimè igitur per duas æqualitates locales quæftio determinatur: fecant quippe fe invicem duæ lineæ locales pofitione datæ, & punctum fectionis pofitione datum, quæftionem ex infinito ad terminos præfcriptos adigit.

Exemplis breviter & dilucidè res explicatur proponatur $A^3 + B$ in A^2 æquari Z^p in B.

Commodè utraque æqualitatis pars poteft æquari folido B in A in E, ut per divifionem iftius folidi, illinc per A, hinc per B, res deducatur ad locos. Cum igitur

$A^3 + B$ in A^2 æquetur B in A in E.

Ergo $A^2 + B$ in A, æquabitur B in E.

Et erit, ut patet ex noftra methodo, extremitas ipfius E, ad parabolem pofitione datam.

Deinde cùm Z^p in B, æquetur B in A, in E, ergo Z^p æquabitur A in E.

Et erit ex noftra methodo extremitas ipfius E, ad hyperbolem pofitione datam: fed jam probavimus effe ad parabolem pofitione datam, Ergo datur pofitione, & eft facilis ab analyfi ad fynthefim regreffus.

Nec diffimilis eft methodus in omnibus æquationibus cubicis. Conftitutis enim ex una parte folidis omnibus ab A affectis, ex alterâ folido omnino dato, vel etiam cum folidis ab A vel A^2 affectis, poterit fingi æqualitas fuperiori fimilis.

Proponatur exempl. in æquationibus quad. quad.

$A^4 + B^5$ in $A + Z^p$ in A^2 æquetur D^{pp} Ergo A^4 æquabitur $D^{pp} - B^s$ in $A - Z^2$ in A^2, æquentur hæc duo homogenea Z^2. in E^2.

Cum igitur A^4. æquetur Z^2 in E^2. Ergo per fubdivifionem quadraticam.

A^2 æquabitur Z in E, & erit extremitas E, ad parabolem pofitione datam.

Deinde cum D^{pp} B^s in $A - Z^2$ in A^2 æquetur Z^2 in E^2 omnibus per Z^2 divifis

$$\frac{D^{pp} - B^s \text{ in } A - A^2}{Z^2} \text{. æquabitur } E^2.$$

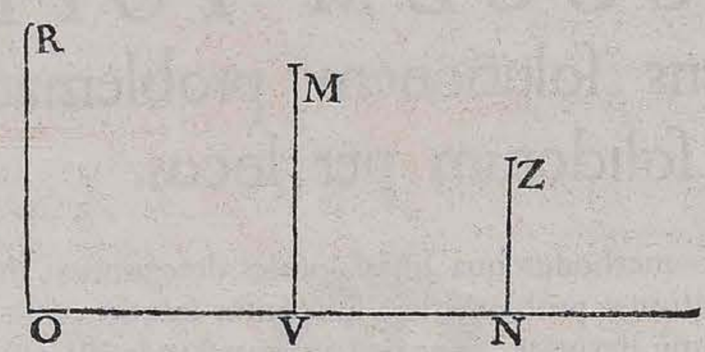
Et erit ex noftra methodo extremitas E, ad circulum pofitione datum. Sed eft

& ad parabolem poſitione datam. Ergo datur. Non diſſimili methodo ſolventur quæſtiones omnes quadrato quadraticæ : expurgabuntur enim methodo Vietæ cap. 1. de emend. ab affectione ſub cubo , & quadrato quadrato ignoto ab una parte , reliquis homogeneis ab altera conſtitutis per parabolem, circulum , vel hyperbolem ſolvetur quæſtio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportione.

Sint duæ rectæ, B major, D minor, inter quas duæ mediæ proport. ſunt inveniendæ, fiet A^3 æqualis B^2 in D.

Si major mediarum ponatur A. Æquentur ſingula homogenea B in A in E. Illinc fiet A^2 æquale B in D E, iſtinc A in E æquale B in D. Ideoque quæſtio per hyperboles & paraboles ſectionem perficietur.



Exponatur enim recta quævis poſitione data, O V N, in qua detur punctum O, ſint rectæ datæ B & D, inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta O V æquari A, & recta V M ipſi O V ad rectos angulos æquari E, ex priori æqualitate quâ A^2 æq. B in E, conſtat per punctum O, tamquam verticem deſcribendam parabolem, cujus rectum latus ſit B, diameter ipſi V M, parallela & A O, applicatæ ipſi O V, tranſibit igitur hæc parabole per punctum M ex 2. æqualitate, qua B in D æquatur A in E, ſumatur punctum ubilibet in rectâ O V, ut N, à quo excitetur perpendicularis N Z, & fiat rectang. O V Z, æquale rectangulo B in D, excitetur etiam perpendicularis O R, circa aſymptotos R O, O V deſcribenda hyperbole per punctum Z, ex noſtra methodo locali dabitur poſitione, & tranſibit per punctum M, ſed parabole etiam quam ſupra deſcripſimus dabitur poſitione & per idem punctum M, tranſit, datur igitur punctum M, poſitione, à quo ſi demittatur perpendicularis M V, dabitur punctum V, & recta O V, major duarum continuè proportion. quas quærimus.

Inventæ igitur ſunt duæ mediæ per interſectionem paraboles & hyperboles.

Si ad quadrat. quad. lubeat quæſtionem extendere omnia ducantur in A, A^4 æquab. B^2. in D in A. æquentur ſingula homogenea juxta ſuperiorem methodum B^2 in E^2.

Fient duæ æqualitates, nempe A^2 & B^2 in E, & D in A & E^2.

Quæ ſingulæ dabunt parabolem poſitione datam, fiet igitur conſtructio meſolabii per interſectionem duarum parabolarum hoc caſu.

Prior conſtructio & poſterior ſunt apud Eutocium in Archimedem, & huic methodo facillimè redduntur obnoxiæ.

Abeant igitur illæ parapleroſes Vietæ, quibus æquationes quadrato quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice planâ, pari enim elegantiâ, facilitate, & brevitate ſolvuntur, ut jam patuit, perinde quadrato quadraticæ ac cubicæ quæſtiones, nec poſſunt, opinor elegantiùs.

Ut pateat elegantia hujus methodi, En conſtructionem omnium problematum cubicorum, & quadrato quadraticorum per parabolem & circulum.

Ponatur $A^4 + Z^s$ in A æquari D^{pp}.

Ergo A^4 æquabitur Z^s in A + D^{pp}, fingatur quadratum abs $A^2 - B^2$ aut alio quovis quadrato, fiet quadratum $A^4 + B^4 + {}^2B^2$ in A^2. Addatur ad ſupplementum ſingulis æqualitatis partibus $B^4 - {}^2B^2$ in A^2 fiet $A^4 + B^4 - {}^2B^2$ in A^2 æquale $B^4 - B^2$ in A^2 æquale $B^4 - B^2$ in $A^2 - Z^s$ in A + D^{pp} ſit ${}^2B^2$ — æquale N^2.

Et ſingulis homogeneis ſive partibus æqualitatis æquetur N^2 in E^2. Fiet illinc per ſubdiviſionem quadraticam $A^2 - B^2$. æquale N in E, ideoque punctum extremum E, erit ad parabolem, ex noſtra methodo, iſtinc fiet $\frac{B^4}{N^2} - \frac{A^2 - Z^s \text{ in } A}{N} + \frac{D^{pp}}{N^2}$ æquale E^2.

Ideoque ex noſtra methodo punctum extremum E, erit ad circulum. Deſcriptione igitur paraboles & circuli ſolvitur quæſtio.

Hæc methodus facillimè ad omnes caſus tam cubicos quàm quadrato quad. extenditur. Curandum enim tantùm ut ex una parte ſit A^4 ex altera quælibet homogenea, modò non afficiantur ab A^3. at per expurgationem Vietæam omnes æquationes quad. quadratæ ab affectione ſub cubo liberantur, ergo eadem in omnibus methodus, cùm autem æquationes cubicæ liberentur ab affectione ſub quadrato per methodum Vietæam, homogeneis omnibus in A, ductis, fiet æquatio quadrato quadrata cujus nullum ex homogeneis afficietur ſub cubo, ideóque ſolvetur per ſuperiorem methodum.

Id ſolùm in ſecunda æqualitate curandum eſt, ut A^2 ex una parte, ex altera E^2. ſub contrariâ affectionis notâ reperiantur, quod eſt ſemper facillimum.

Sit enim in alio caſu, ut omnia percurramus, A^4 æquale Z^{pl} in $A^2 - Z^s$ in D.

Fingatur quodvis quadratum abs A^2 — quovis quadrato dato, ut B^2, fiet $A^4 + B^4 - {}^2A^2$ in B^2. adjiciatur utrique æqualitatis parti ad ſupplementum B^4, $- {}^2B^2$ in B^2 fiet. $A^4 + B^4 - {}^2A^2$ in B^2 æquale $B^4 - {}^2B^2$ in $A^2 + Z^p$ in $A^2 - Z^s$ in D.

Ut igitur commoda fiat diviſio, in 2. A æqualitate ſumenda differentia inter ${}^2B^2$, & Z^p quæ ſit V G. N^2, & utraque æqualitatis pars æquanda N^2 in E^2.

Ut illinc fiat $A^2 - B^2$ æquale N in E. Iſtinc $\frac{B^4}{N^2} - A^2 - \frac{Z \text{ in } D}{N^2}$ æquale E^2.

Advertendum deinde ${}^2B^2$ debere præſtare Z^p alioquin A^2 non afficeretur ſigno defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolem, cui promptum remedium. B^2 enim ad libitum ſumimus, ideoque ipſius duplum majus Z^p nullius eſt negotii ſumere. Conſtat autem ex methodo locali circulum creari ſemper ex æqualitate, in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur ſigno + in alterâ, aliud quadratum ignotum ſigno —.

Si ſumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit A^3 æqu. B^2 in D. Et A^4 æq B^2 in D in A.

Adjiciatur utrimque $B^4 - {}^2B^2$ in A^2. $A^4 + B^4 - {}^2B^2$ in A^2 æquabitur $B^4 +$ B^2 in D in A $- {}^2A^2$ in B^2 ſit ${}^2B^2$, æquale N^2.

Et ſingulæ æqualitatis partes æquentur N^2 in E^2.

Fiet illinc $A^2 - B^2$ æquale N in E. Ideoque extremum E, erit ad parabolem.

Fiet iſtinc $B^2 \frac{1}{2} + D \frac{1}{2}$ in $A - A^2$ æquale E^2.

Ideoque extremum E erit ad circulum. Qui hæc adverterit, fruſtra quæſtionem meſolabii, triſectionis angularis, & ſimiles tentabit deducere ex planis, hoc eſt per rectas & circulos expedire.

APOLLONII PERGÆI
LIBRI DUO
DE LOCIS PLANIS
RESTITUTI.

LOCI plani quid ſint notum eſt ſatis ſuperque: hac de re ſcripſiſſe libros duos Appollonium teſtatur Pappus, eorumque propoſitiones ſingulas initio libri ſeptimi tradit, verbis tamen aut obſcuris, aut ſanè interpreti minùs perſpectis. (Græcum enim codicem videre non licuit) hanc ſcientiam totius, ut videtur, Geometriæ pulcherrimam ab oblivione vindicamus, & Appollonium de locis planis differentem, Appolloniis Gallis, Batavis, & Illyricis audacter opponimus; certam gerentes fiduciam, non aubi præclariùs, quàm hoc in opere Geometriæ miracula elucere: quod ut ſtatim fatearis, hîc exordior.

Propoſitiones libri primi hæ ſunt.

PROPOSITIO I.

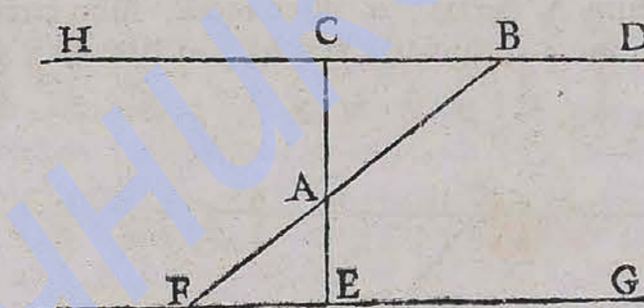
SI duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam lineam, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter ſe datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes ſpatium: contingat autem terminus unius locum planum poſitione datum; & alterius terminus locum planum poſitione datum continget, interdùm quidem ejuſdem generis, interdùm verò diverſum, & interdùm ſimiliter poſitum ad rectam lineam, interdùm contrario modo.

Hæc propoſitio in propoſitiones octo dividi commodè poteſt, & quævis ex iis in multiplices caſus: obſcuritatem interpreti præbuiſſe videtur interpunctionum defectus; imo & Pappus ipſe hoc loco propter nimiam brevitatem videtur non vacaviſſe obſcuritate. Singula dum ſecamus in octantes, ita revelamus.

PROPOSITIO I.

SI à dato puncto in rectam lineam duæ lineæ agantur datam habentes proportionem; & terminus unius contingat locum poſitione datum, hoc eſt, aut rectam, aut circumferentiam circuli poſitione datam; alterius terminus continget rectam, aut circuli circumferentiam poſitione datam.

Eſto datum punctum. A. per quod agantur in directum rectæ. A B, A F, in proportione datâ, & ſit verbi gratia punctum B, in rectâ linea H C B D, poſitione



datâ; aio punctum F, eſſe quoque ad rectam poſitione datam. à puncto A, demiſsâ in rectam H D, perpendiculari A C, dabitur punctum C, producatur C A, ad E, & fiat ratio C A, ad A E, æqualis datæ, dabitur igitur recta A E, & punctum E. per punctum E, parallela rectæ H D, ducatur G E F, dabitur poſitione, & in ea erit punctum F, quia omnes rectæ per datum punctum parallelas ſecantes in eamdem rationem dividuntur; patet ergò quamcunque rectam per punctum A, tranſeuntem, & datis poſitione parallelis terminatam in datam ſecari proportionem.

Eſto deinde datum punctum B, & circulus poſitione I C N, cujus centrum A, jungatur B A, in puncto I, circumferentiam ſecans, & producatur

I B, ad B E, ut ſit ratio I B, ad B E, æqualis datæ, continuetur in F, & fiat A I, ad E F, ut I B, ad B E, & centro F intervallo F E, deſcribatur circumferentia circuli E D Z, quam patet ex conſtructione poſitione dari, aio rectas omnes per punctum datum B tranſeuntes, & utrimque circumferentiis datorum poſitione circulorum terminatas in datam ſecari rationem.

Ducta enim verbi gratia C B D iungantur C A, D F, eſt ut I B, ad B E, ita A I, ad E F, ergò ut tota B A, ad B F, ita A I, ſive A C, ad E F, ſive F D, & ſunt æquales anguli A B C, F B D, ad verticem; patet itaque triangula eſſe ſimilia atque ideò, ut C B, ad B D, ita B A, ad B F, hoc eſt in ratione data, cum igitur à dato puncto B ducantur in directum duæ rectæ B C, B D, verbi gratia in data ratione quarum B C, tangit circumferentiam poſitione datam tanget quoque B D, aliam circumferentiam poſitione datam.

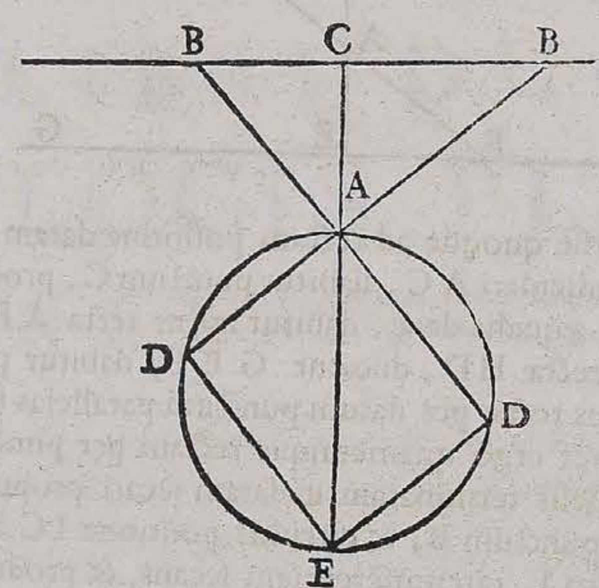
Si producantur rectæ donec ad concavas circulorum circumferentias pertingant, idem eveniet.

Monemus porrò nos minima quæque in demonſtrationibus non docere, cum ſtatim pateant, imò & caſus diverſos non perſequi cum ex adductis minimo poſſint negotio derivari.

II. PROPOSITIO.

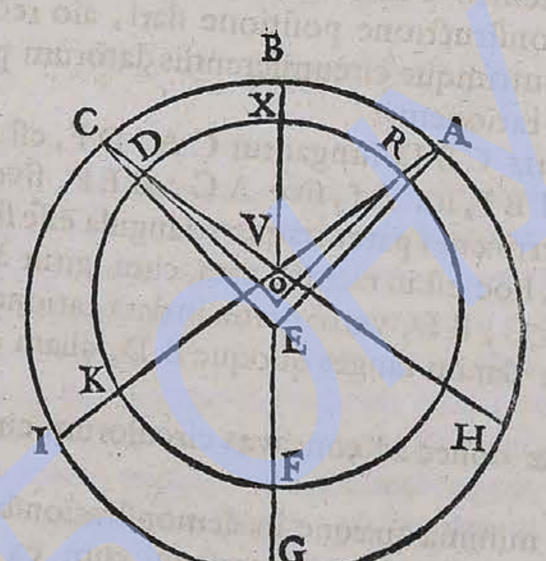
SI à dato puncto ducantur in directum duæ rectæ, datum continentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione, tanget pariter & terminus alterius.

Esto datum punctum A, data primum recta B C, positione in quam demittatur perpendicularis, A C, dabitur ergo & punctum C, producatur & fiat spatio dato æquale rectangulum C A E, super diametro A E, descripto circulo A D E, aio rectas omnes per punctum A ductas, & illinc rectâ, hinc circumferentiâ circuli (quem patet dari positione) terminatas ita ad punctum A, secari ut rectang.



sub partibus æquetur spatio dato, nam sit verbi gratia recta D A B, juncta D E, cum sit angulus A D E, in semicirculo rectus, & Anguli B A C, D A E, ad verticem æquales, erunt triangula D A E, A C B, similia, atque ideò rectangulum B A D, rectangulo C A E, dato æquale; cum igitur per punctum A, ducantur duæ rectæ A B, A D, in directum & terminus unius nempe A B, tangat rectam B C, positione datam, tanget & terminus alterius locum planum, hoc est circulum A D E, positione datum.

Sed detur punctum V, & circulus B I G H, positione cujus centrum E jungatur E V, & producatur in B, dabitur V B, producatur in F, ut sit rectangulum B V F,

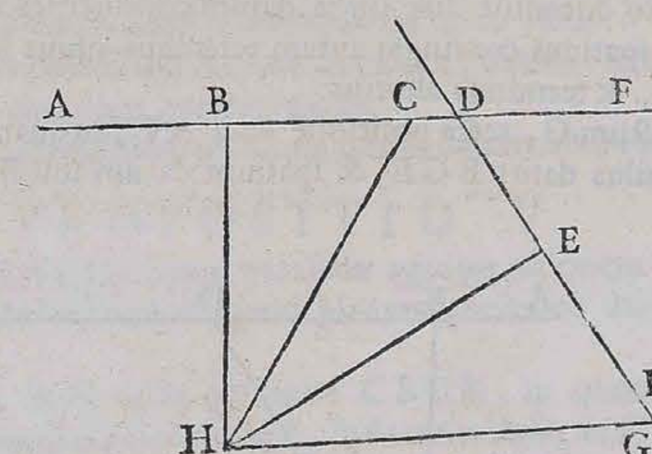


æquale dato cui etiam æquetur rectangulum G V X, super diametro X, F, circulus describatur X K F, quem quidem dari positione patet, Aio rectas per punctum V, transeuntes & duobus circulis, terminatas ita secari in V, ut rectangulum sub segmentis dato æquale efficiant. Ducatur enim verbi gratia A V, K I, Aio rectangulum A V K, æquari dato, sumatur centrum circuli minoris O, recta autem A V K I, secet eundem circulum in R, jungantur rectæ R O, A E, posuimus rectangulum G V X, æquari B V F, erit ergò G V, ad V B, ut F V, ad V X, & componendo, & sumendo antecedentium dimidia, & per conversionem rationis, ut E B, sive E A, ad E V, ita O X, sive O R, ad O V, & habent duo triangula O V R, V E A, commvnem angulum E V A, erunt ergò similia & ut A V, ad R V, ita A E, ad R O, sive E B, ad O X, V E, ad V O, cum ergò ut E B, ad O X, ita V E, ad V O, ergò ut E B, ad O X, ita reliqua V B, ad reliquam V X, atque ideò ut A V, ad R V, ita B V, ad X V, similiter probabimus ut G V, ad V F, ita I V, ad K V, erit igitur vicissim ut G V, ad V I, ita F V, ad V K, ut autem F V, ad V K, ita V I, ad V X, (quia rectangula K V R, F V X, in circulo sunt æqualia) & ut V R, ad V X, ita probavimus esse V A, ad V B, erit igitur ut F V, ad V K, ex una parte, ita V A, ad V B, rectangulum igitur K V A, rectangulo F V B, dato æquale, ex alia verò parte erit ut G V, ad I V, ita V R, ad V X, atque ideo rectangulum I V R, rectangulo G V X, dato æquale; cum igitur per punctum V, ducantur duæ lineæ in directum A V, & V K, comprehendentes spatium datum, & terminus unius nempe V A, contingat circulum positione datum, tanget & terminus alterius locum planum hoc est circulum X K F, positione datum.

III. PROPOSITIO

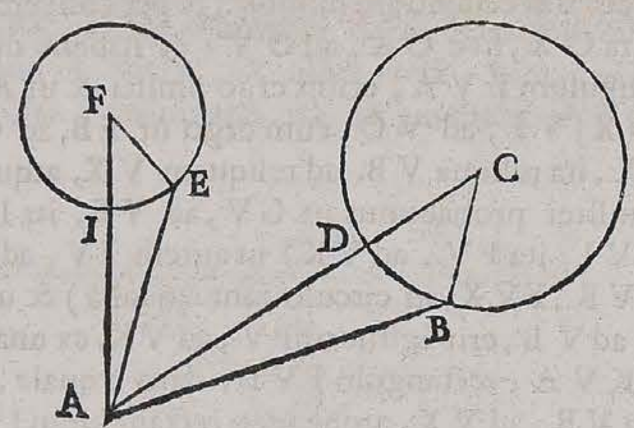
SI à dato ducantur duæ lineæ datum continentes angulum, & datam proportionem habentes, contingat autem terminus unius locum planum positione, continget & terminus alterius.

Esto primò datum punctum H, & recta linea A F, positione, in quam demissa perpendicularis H B, dabitur. Fiat angulo dato æqualis angulus B H E, & sit B H, ad



H E, in ratione data dabitur recta H E, positione & punctum E. à puncto E, ad rectam H E, excitata perpendicularis infinita D E G, dabitur positione, sumatur quodlibet punctum in recta A F, ut C, & juncta H C, fiat angulo dato æqualis C H I, aio rectam H C, ad H I, esse in ratione data, nam cum sint æquales anguli B H E, C H I, dempto communi C H E, erunt æqua les B H C, E H I, & sunt anguli ad B, & E, recti, sunt igitur similia triangula H B C, H E I, & ut H B, ad H C, ita H E, ad H I, & vicissim ut H B, ad H E, ita H C, ad H I, habet rationem datam. Cum igitur à dato puncto H, ductæ fuerint duæ lineæ H C, H I, in dato angulo C H I, & in data ratione, & altera nempe H C, ad punctum C, contingat rectam poſitione continget & terminus alterius locum planum, nempe rectam D G, quam dari poſitione probatum eſt.

Sed tangatur circulus, eſto punctum A, datus circulus poſitione I E, cujus centrum F, jungatur F A, ſecans circulum in I, & fiat angulus æqualis dato, & ratio I A,

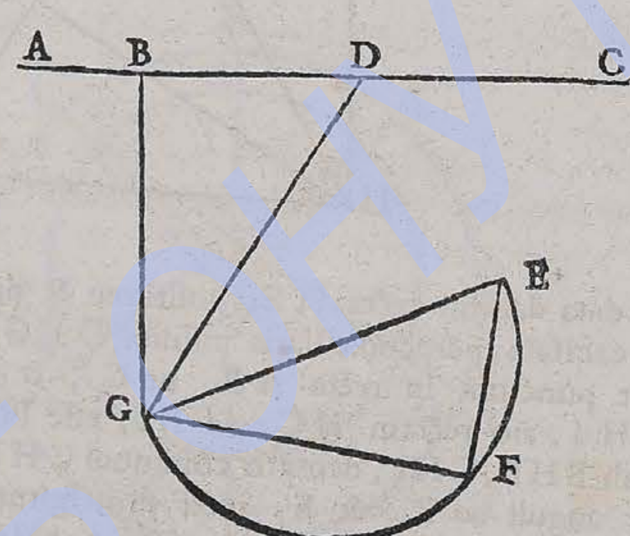


A D, data, dabitur A D, poſitione & punctum D, producatur, & fiat ut I A, ad A D: ita I F: ad D C, centro C, deſcripto circulo D B, quem patet dari poſitione ſumatur quodvis punctum in priore circulo ut, E, & iuncta E A, fiat angulo dato æqualis E A B, & ſit punctum B in ſecundo circulo, aio eſſe A E ad B A in ratione datâ jungantur F E, B C, probabimus ut ſupra æquales angulos F A E, C A B, & ſimilitudinem triangulorum F A E, C A B, iiſdem rationibus quibus jam in priore propoſitione, ejuſque 2. figura uſi ſumus, arguemus, eritque A F, ad E A, ut A C, ad A B, & viciſſim ut A F, ad A C, hoc eſt ut A I, ad A D, ita A E, ad A B, dabitur ergo ratio A E ad A B, & patet tum ſenſus, tam conſequentia propoſitionis.

IV. PROPOSITIO.

SI à dato puncto ducantur duæ lineæ datum continentes angulum & datum comprehendentes ſpatium contingat autem terminus unius locum planum poſitione datum, continget, & terminus alterius.

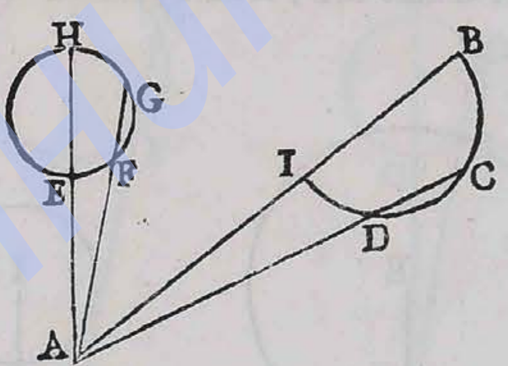
Sit datum punctum G, recta poſitione data A C, in quam ducatur perpendicularis G B, eſto angulus datus B G E, & ſpatium datum ſub B G, in G E, ſuper G E,



deſcribatur

deſcribatur ſemicirculus G E F, & ſumpto in recta poſitione data quovis puncto ut D, junctaque D, G, fiat angulo dato æqualis D G F, aio rectangulum ſub D G, in G F, æquari dato, jungatur F E, probabimus ut in propoſitione præcedente æqualitatem angulorum B G D, E G F, ſed recti ad B, & F, ſunt æquales, non latebit igitur triangulorum B G D, E G F, ſimilitudo neque rectangulorum B G, in G D, & G D, in G F, æqualitas, neque veritas poſitionis, ſi igitur, &c.

Sed ſit datum punctum A, & circulus poſitione H G E, ducatur per ipſius centrum A E H.



Secans circumferentiam in punctis E H, ſit angulus datus H A B, & ſpatium datum rectangulum ſub H A, in A I, vel E A, ſub A B, ſuper recta I B deſcripto ſemicirculo (quem quidem patet dari poſitione) ſatisfiet quæſtioni, nam ducta G F A verbi gratia & facto angulo G A D C, dato æquali; aio rectangulum G A D, vel F A C, æquari dato, nam cum rectangula H A I, E A B, æquentur, erit ut H A, ad A E, ita A B, ad A I, Ex propoſitionis verò ſuperioris ratiocinio patet æqualitas angulorum H A G, B A C, & ex prima propoſitione facilè deducetur eſſe ut H A, ad G A, ita B A, ad A C, ſed ut H A, ad G A, ita F A, ad A E, ergò ut F A, ad A E, ita B A, ad A C, rectangulumque F A C, rectangulo B A E, dato eſt æquale. Deinde eſt ut B A, ad A C, ita A D, ad A I, rectangulumque G A D,, rectangulo H A I, dato æquale. conſtat itaque ex omni parte propoſitum, ſi igitur, &c.

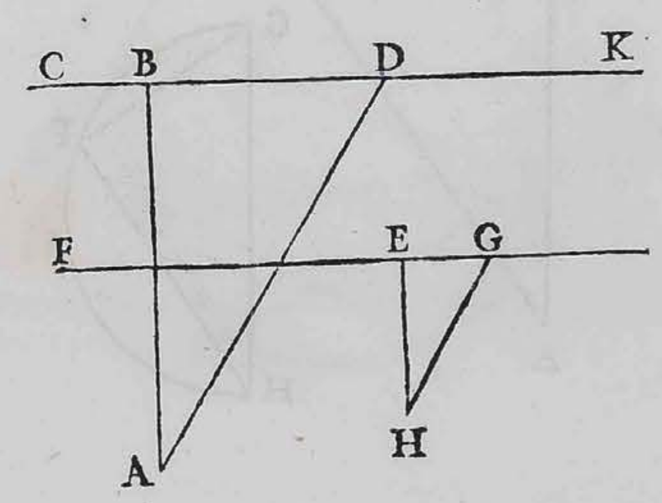
Hoc in caſu ſumpſimus punctum A extra circulum poſitione datum, in 2. verò caſu 2. propoſitionis intra circulum perſeveramus.

Quatuor propoſitiones præcedentes punctum unum datum aſſumunt, ſequentes duo.

PROPOSITIO V.

SI à duobus punctis datis duæ lineæ parallelæ agantur rationem habentes datam, contingat autem terminus unius locum planum poſitione datum, continget & terminus alterius.

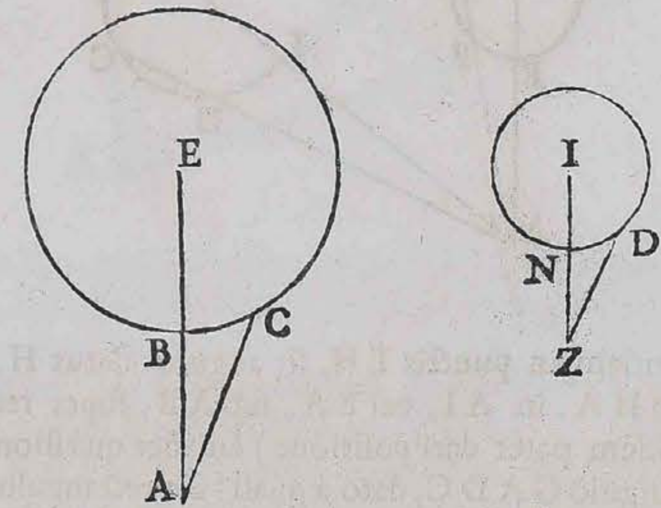
Sunto duo puncta A & H recta poſitione C B D K, in quam demittatur perpendicularis A B, cui parallela ducatur H E, & ſit ratio A B, ad H E, data, dabitur



c.

punctum E, per quod ductâ E F G , perpendiculari ad H E, & rectæ positione datæ parallela; aio omnes parallelas à punctis A H, ductas , & rectis C D, F G, positione datis terminatas , esse in proportione data A B , ad H E ; erunt enim anguli B A D, EHG , æquales , & recti ad B, & E , similes ergo trianguli B A D , E H G , & reliqua facilia. Cum igitur à datis duobus punctis A , & H , ductæ fuerint parallelæ A D, H G , in ratione data , quarum A D , est ad datam rectam positione erit & H G , ad rectam positione datam , ideoque ad locum planum.

In hac figura sint data puncta A , & Z , & circulus positione B C , cujus centrum E , jungatur A E , occurrente circulo in B , & huic parallela ducatur Z N , fiatque ratio

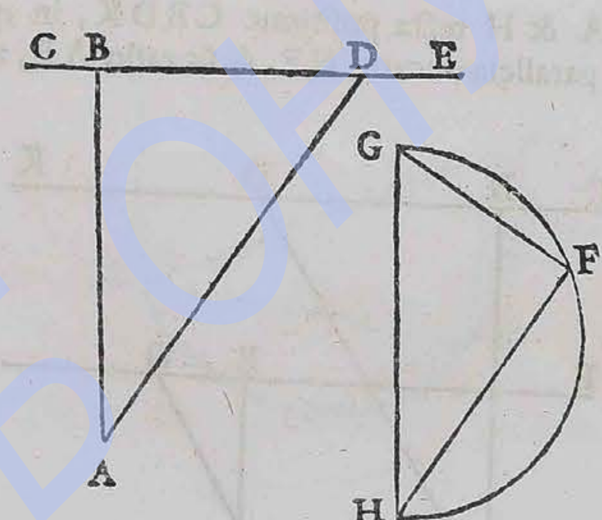


A B, ad Z N , æqualis datæ producatur Z N , in I , & fiat ratio B E , ad N I , æqualis etiam datæ , centro I , intervallo I N, descriptus circulus dabitur positione , & quæstioni satisfaciet , nam ductis parallelis A C, Z D, circulis ad puncta C, D , occurrentibus erit ratio A C, ad Z D , æqualis datæ, esse enim angulos B A C , N Z D, æquales, jam primùs hujus propositionis casus evicit , reliquum præstabit secundum propositionis epitagma.

PROPOSITIO VI.

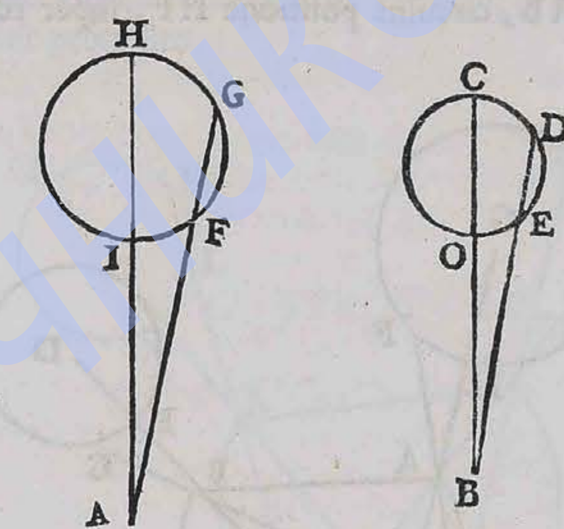
SI à duobus punctis datis duæ parallelæ agantur datum comprehendentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione datum continget & terminus alterius.

Sint data duo puncta A , & H , recta positione C E, in quam perpendicularis A B



cui parallela ducatur H G, & rectangulo dato sit æquale rectangulum sub A B,HG, dabitur recta H G , super qua descriptus semicirculus H F G, quæstionem perficiet , ductis enim ubicumque parallelis A D, H F, & juncta G F, patebit demonstrationes superiores retractanti triangulorum B A D , G H F, similitudo, ideoque rectangulum sub A D , in H F , æquale dato sub B A , in H G, concludetur ; cum igitur à duobus punctis, &c.

In 2. casu sint data puncta A & B, & circulus positione I F G H , per cujus centrum transeat A I H , cui parallela ducatur B C , & sit rectangulum sub A I , B C , æquale

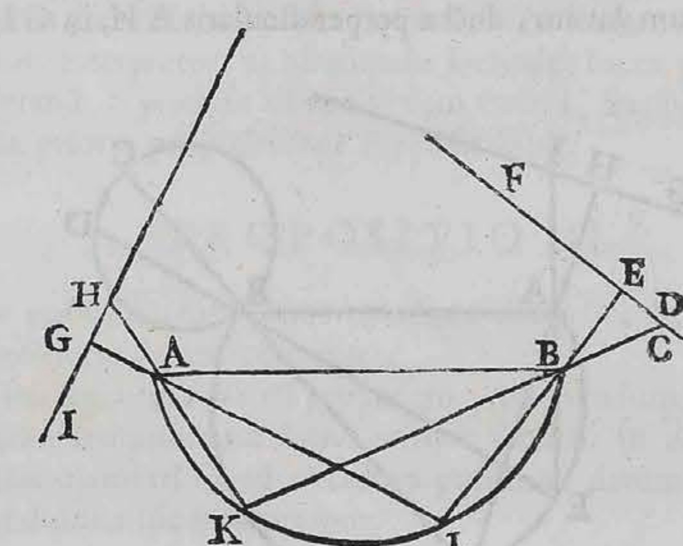


dato , eidemque æquale rectangulum sub A H , in B O, super recta O C , descriptus semicirculus præstat propositum , nam ductis parallelis A F G , B E D , eruntanguli H A G, C B D , æquales & rectangulum sub A G , in B E, æquale dato eidemque rectangulum sub A F , in B D, nec , absimilis est ei, quæ in 2. epitagmate propositionis quartæ prodita est demonstratio.

VII. PROPOSITIO.

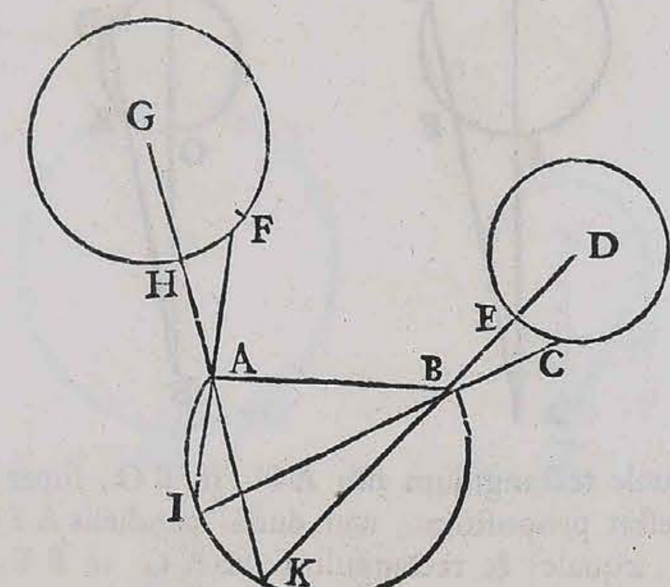
SI duæ lineæ agantur à datis duobus punctis datum continentes Angulum & datam habentes proportionem contingat autem terminus unius locum planum positione datum continget , & terminus alterius.

Sunto duo puncta A , & B , recta positione I G H , super B A , describatur portio circuli A L B , capiens angulum æqualem dato à puncto A , ducatur in rectam I H, perpendicularis A G, quâ productâ donec circumferentiæ occurrat in L , producatur L B E , & fiat A G , ad B E, in ratione data perpendicularis ad B E, agatur F E , D C, & sumatur quodlibet punctum in portionis circumferentia ut K , à quo ducantur per puncta A & B, rectæ K A H , K B D, occurrentes rectis I H, F C, in punctis H & D,



aio A H, ad B D, eſſe in ratione data A G, ad B E, cum enim hoc ita ſe habeat erunt triangula A G H, B E D, ſimilia, ideoque anguli G A H, E B D, eiſque ad verticem K A L, K B L, æquales, quod quidem ita ſe habet cum eidem circuli portioni inſiſtant, & proclivis eſt ab analyſi ad ſyntheſim regreſſus. Cum igitur à datis duobus punctis A, & B, ductæ fuerint duæ rectæ A H, B D, datum continentes angulum H K D, & terminus ipſius A H, contingat rectam I H, poſitione datam, continget & terminus B D, rectam F C, quam dari poſitione evicit conſtructio.

Sed ſint data puncta A B, circulus poſitione H F, ſuper recta A B, deſcribatur portio

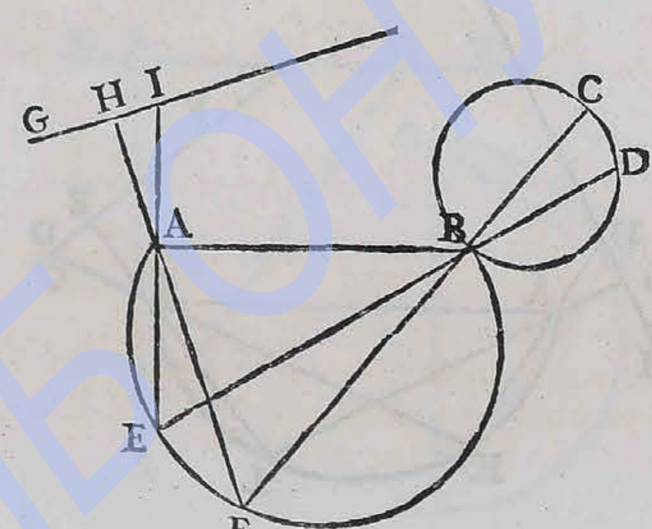


circuli A K B, capiens angulum dato æqualem, centrum circuli H F, eſto G, jungatur A H G, producatur donec portioni occurrat in K, & ducatur K, B, E, & ſit ratio A H, ad B E, data procucatur B E, in D, donec H G ad D E, ſit pariter in ratione data, centro D, deſcriptus circulus dabitur poſitione, & dabit ſolutionem quæſtionis: ductis quippe I A F, I B C, erunt anguli ad A, & B, æquales, & reliquum propoſiti non eſt laborioſum; ſtatimque patet A F, ad B C, eſſe in ratione datâ, imò & ad circumferentias concavas productas idem præſtare: cum igitur, &c.

VIII. PROPOSITIO.

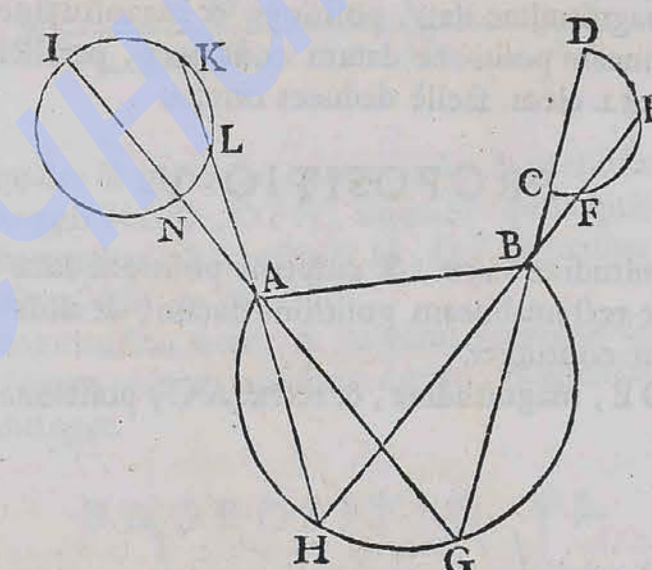
SI à duobus punctis datis ducantur duæ lineæ, datum continentes angulum, & datum comprehendentes ſpatium, contingat autem terminus unius locum planum poſitione datum, continget & terminus alterius.

Sint data duo puncta A, & B, recta poſitione G I, ſuper A B, deſcribatur portio circuli capiens angulum datum, ductæ perpendicularis A H, in G I, continuetur in F,



& juncta F B, producatur in C, ſitque ſpatium datum A H, in B C, ſuper recta B C, deſcriptus circulus faciet quod proponitur, erit quippe ſumpto quovis puncto in portione, E, & junctis E A I, E B D, rectangulum ſub A I, B D, æquale dato nec differt ab expoſitis aliis caſibus demonſtratis.

Sed ſint data duo puncta A & B, datus poſitione circulus I K L, & ſuper A B, deſcripta portio circuli capiens angulum dato æqualem: ducatur per centrum recta A N I, & producatur in G, junctaque G B, producatur & fiat rectangulum ſub A I, in B C, æquale dato eidemque æquale rectangulum ſub A N, in B D, ſuper C D, deſcriptus ſemicirculus ſatisfaciet propoſito.



Hoc eſt ſumpto quolibet puncto in H, & reliquis ut ſupra conſtructis, ut in figura, erit rectangulum ſub A K, in B F, æquale dato, eidemque rectangulum ſub A L, in B E, nec eſt diverſa demonſtratio à precedentibus conſtat itaque propoſitum.

Eaque ratione prior Appollonii ſeu Pappi propoſitio redditur manifeſta.

Obſervandum autem caſus quos in ſemicirculis tantùm expreſſimus in circulis integris locum habere; ſed & caſus multiplices ex variâ datorum poſitione oriri, quos otioſiores ex præcedentibus facili operâ & proclivi ratiocinio deducent.

Subjicit Pappus locum planum quem 2^{us}. ex rectis contingit interdum eſſe ejuſdem generis; interdum verò diverſum. Hoc patet quia in 1. propoſitione verbi gratiâ eſt ejuſdem generis, nam ſi prior ſit ad rectam eſt quoque ad rectam poſterior, ſi ad circulum ſimiliter ad circulum, in ſecundæ verò priore parte, & aliis quibuſdam caſibus eſt diverſi generis.

Addit deinde aliquando ſimiliter poni ad rectam lineam, interdum contrario modo: quo loco verba (ad rectam lineam) quæ nullum ſenſum admittunt, cenſeo delenda, & ita locum interpretor, ut aliquando ſecundus locus priori contrario modo ponatur, verbi gratiâ, ſi prior ſit ad convexum circuli, ſecundus ad concavum, &c. cujus rei exempla priores propoſitiones ſuppeditabunt.

PROPOSITIO II.

SI rectæ lineæ poſitione datæ unus terminus datus ſit, & alter circumferentiam concavam poſitione datam continget.

Hæc verba ſi ita legantur falſa eſt propoſitio, reponendum igitur loco, verbi gratiâ (poſitione datæ) magnitudine datæ; eritque ſenſus: ut datâ circuli diametro & centro, extremitas diametri ſit ad circulum poſitione datum cujus rei veritas cum per ſe pateat cur diutius hîc immoremur.

PROPOSITIO. III.

SI à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ datum angulum continentes, commune ipſorum punctum continget circumferentiam concavam poſitione datam.

Hæc propoſitio per ſe patet, dari enim ſuper rectâ lineâ duo puncta jungente portionem circuli capientem angulum datum docuit Euclides in elementis.

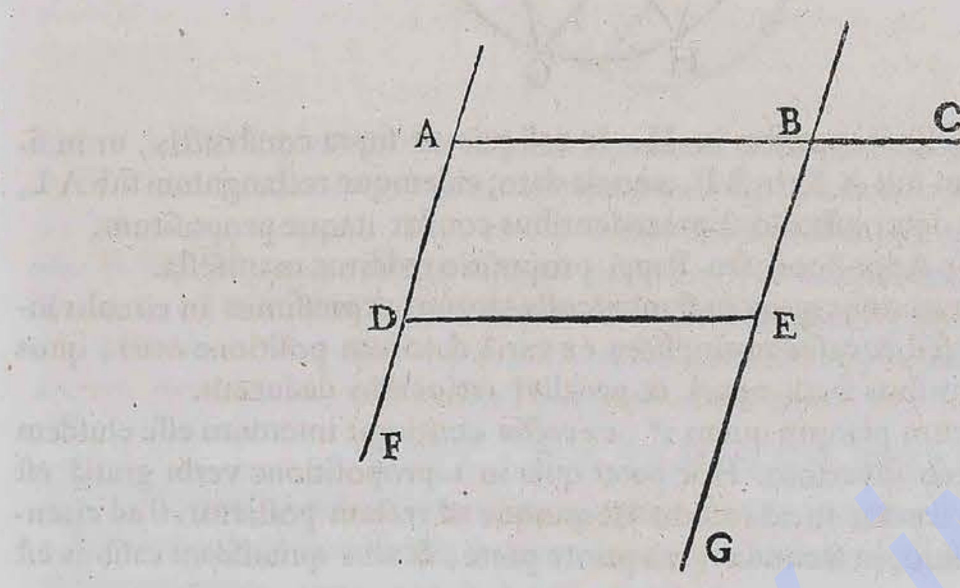
PROPOSITIO IV.

SI trianguli ſpatii magnitudine dati, poſitione & magnitudine baſis data ſit, vertex ipſius rectam lineam poſitione datam continget, parallelam nempe baſi datæ, cujus inventione ex 1. elem. facilè deduces omnia.

PROPOSITIO V.

SI rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuipiam poſitioni datæ æquidiſtantis unus terminus contingat rectam lineam poſitione datam, & alius terminus rectam lineam poſitione datam continget.

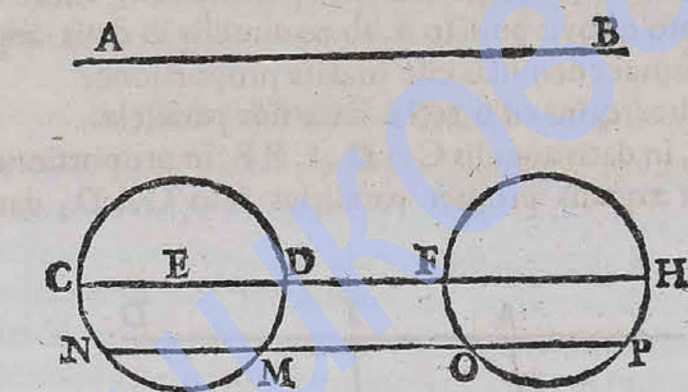
Datæ rectæ lineæ DE, magnitudine, & rectæ AC, poſitione datæ æquidiſtantis



unus terminus ut D, contingat rectam AF, poſitione datam ſi per punctum E, duxeris BEG, ipſi AF, parallelam conſtabit propoſitum. Erunt quippe rectæ omnes inter has duas parallelas interceptæ & rectæ AC, poſitione datæ æquidiſtantes, inter ſe æquales: quod ipſa conſtructio manifeſtat. Si igitur alter terminus cujuſlibet ſit ad rectam AF, erit alius ad BG, ut vult propoſitio, quam etiam licet porrigere levi negotio ad circulos.

Sit enim data AB, poſitione cui æquidiſtet recta NO, magnitudine data, cujus punctum N, ſit ad circumferentiam circuli CNM, poſitione dati; Aio punctum O, eſſe ad circulum poſitione datum. Eſto E, centrum circuli CNM, & ducta diameter ipſi NO, parallela continuetur in F, donec recta CF, æquetur NO, datæ, dabitur recta CF, poſitione, & magnitudine, producatur, & fiat FH, æqualis CD, ſu-

per FH, deſcriptus circulus præſtabit propoſitum, erit quippe punctum O, ad ipſius circumferentiam cum enim punctum O, ſit ad circumferentiam circuli FOP, erunt



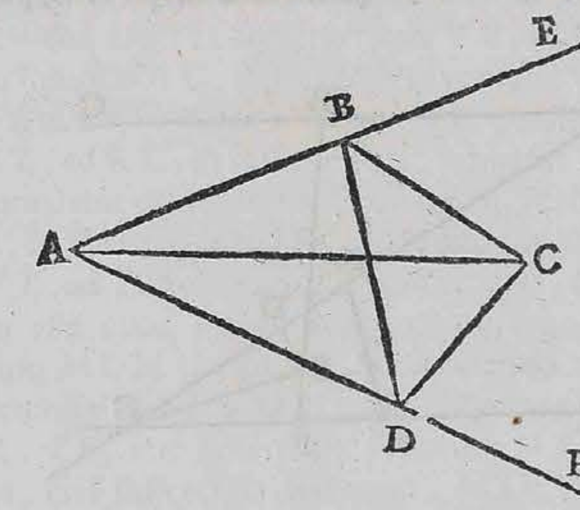
rectæ CN, FO, æquales & parallelæ, cum æquales & parallelas CF, NO, conjungant; erunt igitur anguli NCD, OFH, æquales; quod quidem ita ſe habet cum rectæ CD, FH, ſint æquales, & à rectis NM, OP, æqualiter diſtent. poterit igitur propoſitio Pappi univerſaliùs ita concipi.

Si rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuipiam poſitione datæ æquidiſtantis, unus terminus contingat locum planum poſitione datum, & alius terminus locum planum poſitione datum continget.

PROPOSITIO VI.

SI à Puncto ad poſitione datas duas rectas lineas parallelas vel inter ſe convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo vel datam habentes proportionem vel quarum una ſimul cum ea ad quam altera proportionem habet datam, data fuerit continget punctum rectam lineam poſitione datam.

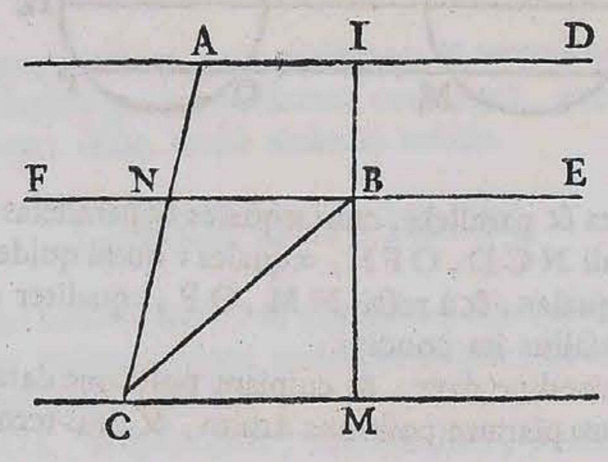
Hujus propoſitionis duæ ſunt partes, quarum prior hæc eſt. Sint duæ rectæ poſitione datæ AE, AF, in puncto A, concurrentes, & à puncto C, demittantur rectæ CB



CD, in datis angulis CBA, CDA, & ſint rectæ BC, CD, in data proportione Aio punctum C, eſſe ad rectam lineam poſitione datam. Jungantur AC, BD, in quadrangulo ABCD, dantur tres anguli ABC, ADC, BAD, datur igitur angulus BCD, datur etiam ratio BC, ad CD, ex hypotheſi ergo datur ſpecie triangulum BDC, & anguli CBD, CDB, reliqui igitur ABD, ADB, dantur, ideoque ſpe cie triangulum A B D, datur, igitur ratio A B, ad B D, ſed ex demonſtratis datur ratio B D, ad B C, (cum probatum ſit triangulum B D C, ſpecie dari) ergo datur ratio A B, ad B C, datur autem B A, poſitione & punctum A, datur igitur poſitione recta A C, & in ea ſumpto quovis puncto & ab eo dimiſſis in datis angulis rectis in rectas datas, probabitur ſemper demiſſas eſſe in data proportione.

Alter caſus eſt ſi rectæ datæ ſint parallelæ.

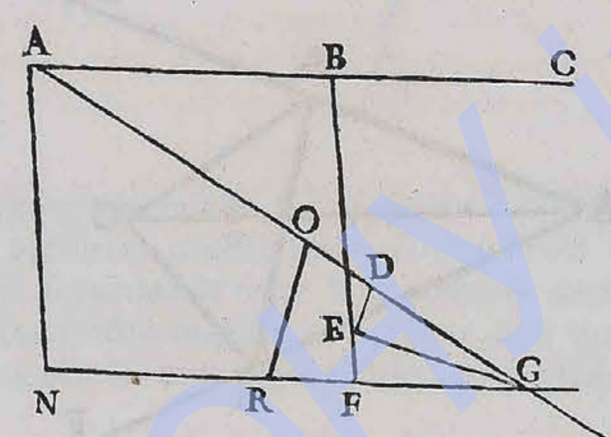
Sint rectæ C A, C B, in datis angulis C A D, C B F, in proportione datâ, angulus C N B, datur, eſt enim æqualis propter parallelas dato C A D, datur igitur ſpecie



triangulum C N B, & ratio C N, ad C B, datur autem ex hypotheſi ratio C B, ad C A, ergo ratio C N, ad C A, data eſt; ideoque probatur facile punctum C, eſſe in recta datâ poſitione. Constructio, per punctum quodvis ut B, trajiciatur perpendicularis I B M, dabitur I B, fiat ut A N, ad N C, ita I B, ad B M, per punctum M, ducta duabus datis parallela, ſatisfaciet quæſtioni, nec eſt operoſa demonſtratio; ſi igitur à puncto quodam ad poſitione datas duas rectas lineas parallelas vel inter ſe convenientes ducantur rectæ lineæ, datis angulis habentes datam proportionem continget punctum rectam lineam poſitione datam.

Secunda pars ita ſe habet.

Dentur rectæ A C, A G, in puncto A concurrentes, ponatur A N, ſuper rectam A C, in dato angulo C A N, fiat A N, æqualis datæ & ipſi A C, parallela ducatur N G,



angulus alius datus ſit R O G, per primam partem hujus ducatur recta G E, in qua ſumpto quovis puncto ut E, rectæ E D, E F, ipſis R O, A N, parallelæ, ſint in ratione datâ, dabitur G E, poſitione ex ſuperius demonſtratis. Producatur F E, in B, dabitur F B, magnitudine eſt enim æqualis datæ A N, propter parallelas. Quodcumque igitur punctum ſumpſeris in recta G E, ut E, à quo in rectas A C, A G, demiſeris rectas E D, E B, in angulis datis recta B E, unà cum E F, ad quam E D, habet rationem

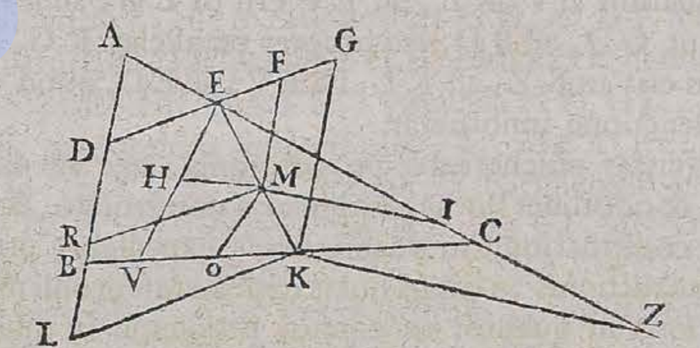
tionem datam data erit, quod vult propoſitio. Si igitur à puncto quodam ad poſitione duas rectas lineas inter ſe convenientes ducantur rectæ lineæ in datis angulis quarum una ſimul cum ea ad quam altera habet proportionem datam, data fuerit continget punctum rectam lineam poſitione datam.

PROPOSITIO VII.

SI ſint quotcumque rectæ lineæ poſitione datæ atque ad ipſas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, ſit autem quod datâ lineâ & ducta continetur, una cum contento datâ lineâ, & alterâ ductâ æquale ei, quod datâ, & aliâ ductâ & reliquâ continetur punctum rectam lineam poſitione datam, continget.

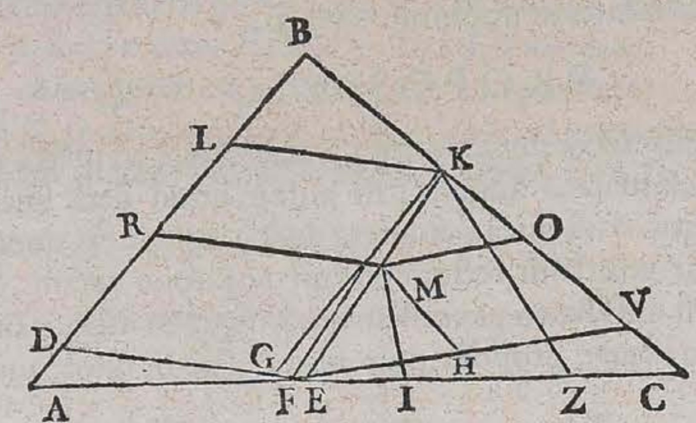
Hæc propoſitio eſt ampliatio præcedentis, & quod de duabus lineis eſt ſuperiùs demonſtratum in prima parte propoſitionis ſextæ, hîc in quotcumque locum habere proponitur.

Exponantur tres rectæ poſitione datæ & triangulum conſtituentes A B, BC, C A, eſt invenienda recta E K, verbi gratia in qua ſumendo quodlibet punctum vt M, & ab eo



ducendo rectas M R, M O, M I, in angulis datis. M R A, M O B, M I A, ſumma duarum O M, & M I, ſit ad M R, in ratione data, per primam partem propoſitionis præcedentis inveniatur recta in qua ſumendo quodlibet punctum & ab eo ducendo rectas ad rectas A B, B C, ductæ ſint in ratione datâ, dabitur poſitione recta quæſita, punctum igitur in quo concurret cum A C, dabitur, eſto E, à quo ducantur E V, E D, ipſis M O, M R, parallelæ, ergo ex conſtructione V E, ad E D, habebit rationem datam, eâdem methodo ſumptis A C, A B, rectis inveniatur punctum K, à quo ductæ K L, K Z, in datis angulis ipſis nempe M R, M I, parallelæ, ſint in ratione data Erit igitur ſimiliter K Z, ad K L, in ratione datâ, iungatur E K, quodcumque punctum in ea ſumpſeris præſtabit propoſitum. Sumatur M, verbi gratia ex jam conſtructis fiat M F, parallela B A, & M H, parallela B C, probandum eſt ſummam duarum O M, M I, eſſe ad M R ut V E, ad E D, in ratione nempe data, fiat adhuc K G, parallela B A, ponatur verum eſſe quod intendimus probare, ergo viciſſim erit ut M R, ad E D, ita ſumma duarum M I, M O, ad E V, & dividendo erit ut differentia M R, & D E, ad D E, ita differentia qua duæ O M, M I, ſuperant E V, ad E V, cum autem M F, ſit parallela B A, E F, erit differentia rectarum M R, & D E, & cum M H, ſit parallela B C, E H, erit differentia rectarum, M O, V E, ideoque differentia rectarum I M, & E H, æquabitur exceſſui quo duæ M O, M I, ſuperant rectam V E. Ex demonſtratis igitur erit E F, ad D E, ut differentia rectarum I M, E H, ad E V, & viciſſim E F, erit ad differentiam rectarum I M, E H, ut E D, ad E V, erit igitur convertendo differentia rectarum I M, E H, ad E F, in ratione data E V, ad E D, ex conſtructione autem (expoſitis tribus E H, E F, M I, eſt V E, ad E H, ut K E, ad E M, eſt etiam K Z, ad M I, in eadem ratione K E, ad E M, eſt etiam (cum K G, ſit parallela B A,) G E, ad E F in eadem ratione K E, ad E M, igitur tres rectæ

V E, K Z, E G, sunt in ratione trium H E, M I, E F, est igitùr ut differentia duarum E V, K Z, ad E G, ità differentia duarum M I, E H, ad E F, sed probavimus



differentiam duarum M I, E H, ad E F, habere rationem datam E V, ad E D, igitur differentia duarum E V, K Z, ad E G habebit rationem datam E V, ad E D, & vicissim differentia duarum E V, K Z, ad E V erit ut E G, ad E D, & componendo K Z, erit ad E V, ut G D, ad E D, sed propter perallelas K G, B A, K L, æquatur D G, igitur vicissim erit ut K Z, ad K L, ita E V, ad E D, quod quidem ita se habere jam ex ipsa constructione innotuerat.

Constat itaquè veritas pulcherrimæ propositionis, nec est difficilis aut absimilis ad ulteriores casus, & quotlibet lineas porrigendas constructio, & demonstratio, semper enim beneficio constructionis in duabus lineis expedietur problema in tribus lineis: beneficio constructionis in tribus lineis expedietur problema in quatuor lineis: beneficio constructionis in quatuor expedietur problema in quinque, & simili omninò ac uniformi in infinitum methodo.

PROPOSITIO VIII. & Ultima.

SI ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas vel proportionem habentes vel spatium continentes datum, vel ita ut species ab ipsis ductis, vel excessus specierum sit æqualis spatio dato punctum continget positione datas rectas lineas.

Hujus propositionis (si vera esset) quatuor essent partes, sed eam in ratione datâ, veram duntaxat deprehendimus; valeant igitur reliqua de spatio contento sub duabus, & de summa, aut differentiâ quadratorum ab ipsis, & tanquam commentitia, aut huc aliundè translata rejiciantur.

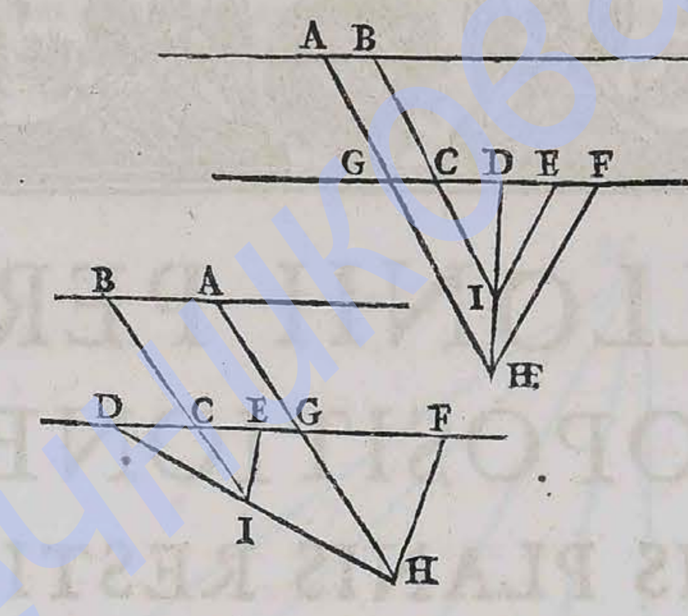
Proponatur itaque sic emendatum Theorema.

Si ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas proportionem habentes datam, punctum continget positione datam rectam lineam.

Constructio sic procedet.

Sint datæ parallelæ A B, G C, puncta in ipsis data A, & F, angulus unus ex datis B A H, alter G F H, cùm puncta A, & F, dentur, & anguli ad ipsa dabuntur, rectæ A H, F H, positione; ideóque punctum concursus H, dabitur etiam punctum G, in quo A H, secat parallelam G C, recta G F, in puncto D, ita secetur ut G D, ad D F, sit in ratione datâ, dabitur punctum D, jungatur D H, dabitur igitur positione D H. Aio rectam D H, præstare propositum; Hoc est sumpto in eâ quolibet puncto ut I,

& ab eo ductis I B, I E, in angulis datis abscissam A B, ad datum punctum A, ad abscissam E F, ad datum punctum F, esse in ratione data G D, ad D F, secet B I, parallelam G F, in C, erit ex constructione I B, parallela H A, cùm fuerit demissa in angulo dato; hoc est ipsi H A B, æquali; erit etiam I E, parallela H F, G C, igitur propter parallelas æquatur A B, probandum superest, ut G C, ad E F, ita G D, ad D F, & vicissim ut G C, ad G D, ita E F, ad D F, hoc autem perspicuum est, ut enim H I, ad H D, ita G C, ad G D, & ut eadem H I, ad H D, ita E F, ad F D, esse igitur G C, ad E F, in ratione datâ sit perspicuum.



Sunt plures casus tam istius quàm præcedentium propositionum, quos invenire & addere cùm sit facile, cur in his diutiùs immoremur?

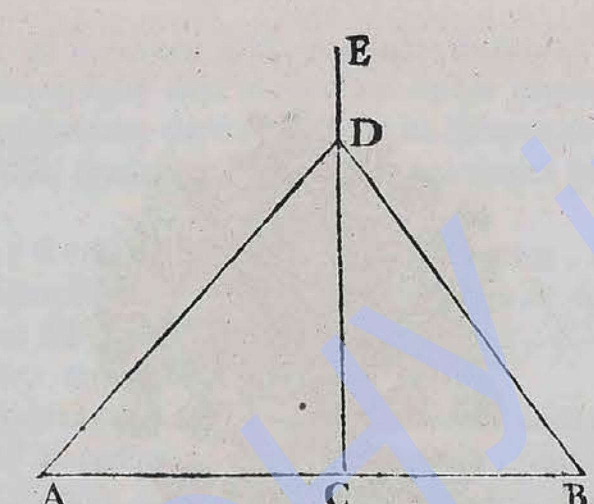
APOLLONII PERGÆI PROPOSITIONES DE LOCIS PLANIS RESTITUTÆ.

LIBER II.

PROPOSITIO I.

SI à datis punctis rectæ lineæ inflectantur, & ſint quæ ab ipſis fiunt dato ſpatio differentia punctum poſitione datas rectas lineas continget.

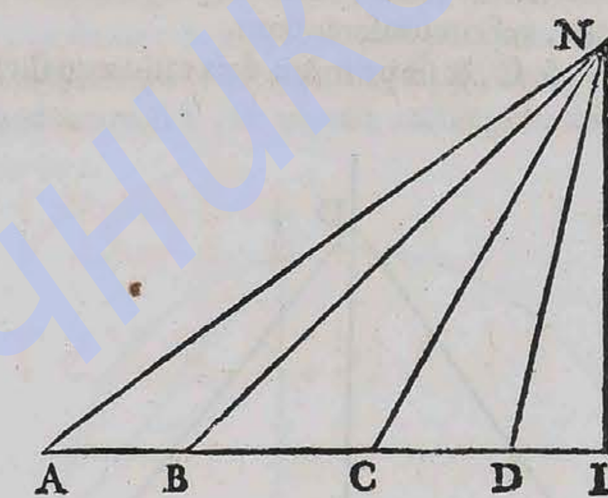
Sint data duo puncta A, & B; & ſit datum quodlibet ſpatium quadrato A B, minus: dividatur A B, in C, ita ut quadratum A C, quadratum C B, ſuperet dato ſpatio; & educatur perpendicularis infinita C E, in qua ſumatur quodlibet punctum D, & jungantur D A, B D, Aio quadratum A D, ſuperare quadratum D B, dato. Quod quidèm patet, cùm quadratum A D, eodem ſuperet quadratum D B, quo quadratum A C, ſuperat quadratum C B.



Si ſpatium datum ſit majus quadrato A B, punctum C, extra lineam A B, cadet. Ad hanc propoſitionem pertinere poſſunt duæ ſequentes.

Sint data quatuor puncta A B C D, in rectâ lineâ, & ſit A B, æqualis C D, ſumatur aliud quodcumque punctum ut N, & jungantur quatuor rectæ N A, N B, N C, N D, Aio duo quadrata A N, N D, ſuperare duo quadrata B N, N C, rectangulo ſub A B, in B D, bis.

Nam ducatur perpendicularis N I, & primum punctum I, extra rectam lineam A D, cadat: patet igitur exceſſum quadratorum A N, N D, ſuper duo quadrata B N, N C, propter omnibus commune quadratum N I, eſſe id, quo duo quadrata A I, I D, ſuperant duo quadrata B I, C I, ſed quadrata duo A I, D I, per quartam ſecundi æquantur quadrato D I, bis, quadrato A D, & rectangulo A D I, bis; quadrata verò B I, C I, per eamdem propoſitionem æquantur quadrato D I, bis quadratis B D,

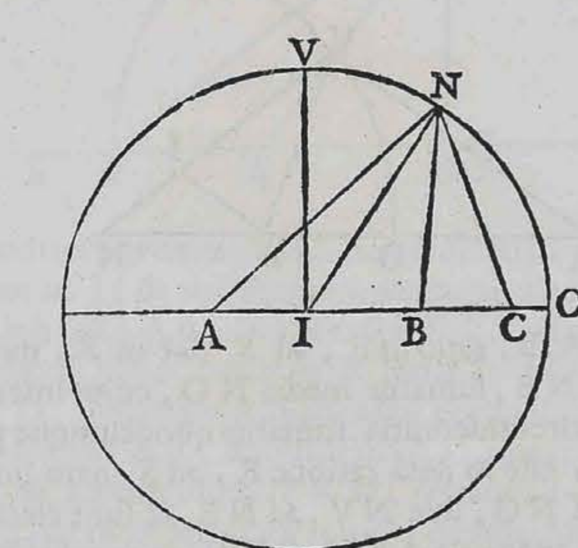


C D, & rectangulis ſub B D, in D I, bis, & C D, in D I, bis, ſive loco horum duorum rectangulorum uni rectangulo A D, in D I, bis, propterea quod A B, eſt æqualis C D, exceſſus igitur quadratorum A I, I D, ſuper B I, C I, eſt idem qui A D, quadrat. ſuper quadrata B D, C D, ſive A B. Sed per quartam propoſitionem 2ª. quadratum A D, duo quadrata A B, B D, ſuperat rectangulo ſub A B, in B D, bis; conſtat ergo propoſitum.

Reliquos caſus non adjungo neque in hac propoſitione neque in ſequentibus, nam licèt ſit facile, eſſet tædioſum.

Si à tribus punctis in rectâ lineâ conſtitutis inflectantur rectæ, & ſint duo quadrata tertio majora, ſpatio dato, punctum poſitione datum circumferentiam continget.

Sint data tria puncta A B C, in rectâ lineâ, & datum quodlibet ſpatium rectangu-

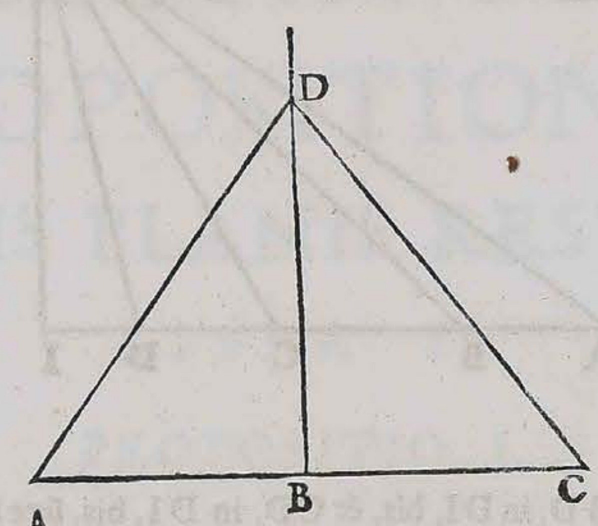


lo A B C, bis majus; fiat A I, æqualis B C, & ſpatium datum ſit æquale rectangulo A B C, bis, & quadrato I V, centro I, intervallo I V, circulus V N O, deſcribatur in cujus circumferentia punctum quodlibet ſumatur ut N, junganturque N A, N B, N C, ad data puncta, aio duo quadrata A N, N C, quadratum N B, dato ſpatio ſuperare; nam jungatur I N, ergò ex ſuperiore propoſitione patet duo quadrata A N, N C, æquari duobus quadratis I N, B N, & rectangulo A B C, bis, ergo duo quadrata A N, N C, superant quadratum N B, quadrato I N, & rectangulo A B C, bis, & constat propositum.

PROPOSITIO II.

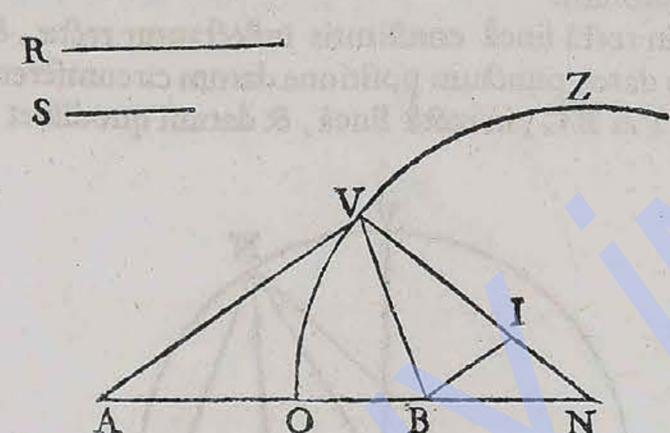
Si à duobus punctis inflectantur rectæ, & sint in proportione datâ, punctum continget vel rectam lineam, vel circumferentiam.

Sint data duo puncta A, & C, & sit primùm data ratio æqualitatis: dividatur A C



bifariam in B, & excitetur perpendicularis B D, patet quodcumque punctum in ipsa sumatur ut D, fore rectos A D, D C, æquales.

Sed sit data ratio inæqualitatis.

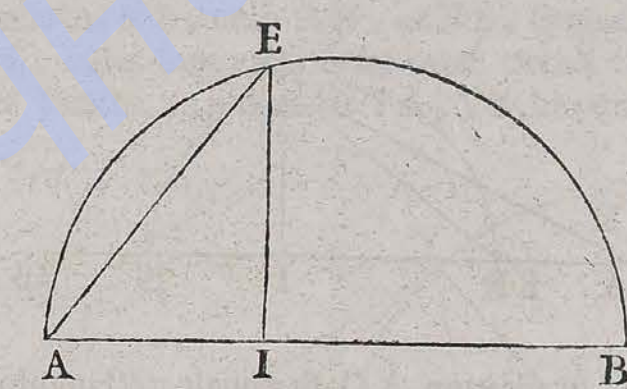


Et sint duo data puncta A, B, ratio ut R, ad S, fiat ut R, quadratum ad S, & ita A N, ad N B, inter A N, N B, sumatur media N O, cujus intervallo describatur circulus N O Z, & in ipsius circumferentia sumatur quodcumque punctum ut V, junganturque V A, V B, Aio esse in datâ ratione R, ad S, nam iuncta V N, ipsi V A, parallela sit B I, ut A N, ad N O, sive N V, ad N B, & sunt circà eumdem angulum A N V,, similia igitùr duo triangula A N V, B V N, & angulus V A B, angulo B V I, æqualis, Sed & A V B, V B I, propter parallelas æquales sunt, ergò similia triangula A V B, V B I, & est A V, ad V B, ut V B, ad B I, & ut V B, ad B I, id est A N, ad N B. id est R, quadratum ad S. quadratum, ita A N, quad. ad V B, Quad. est ergò A V, ad V B, ut R, ad S, & patet propositum.

PROPOSITIO III.

Si sit positione data recta linea, & in ipsa datum punctum à quo ducatur quædam linea terminata, à termino autem ipsius ducatur, & ad positionem, & sit quod fit à ductâ æquale ei quod à datâ, & abscissâ, vel ad datum punctum, vel ad alterum datum in linea datâ positione, terminus ipsius positione datam circumferentiam continget.

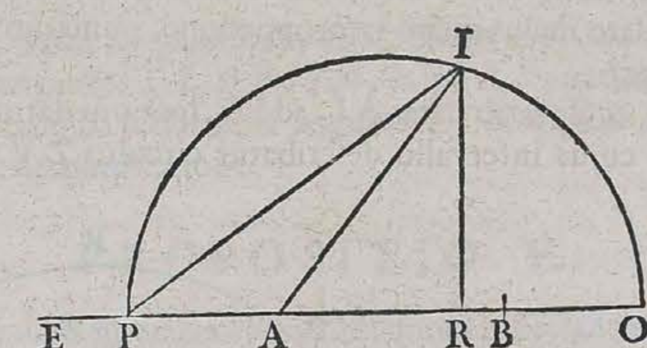
Sit data recta A B, positione & in ipsa datum punctum A, oportet invenire circuli circumferentiam in quâ sumendo quodlibet puuctum ut E, & demittendo perpendicularem E I, quadratum A E, sit æquale rectangulo sub datâ qualibet rectâ &



A I. (per quam debemus intelligere in hâc propositione abscissam ad datum punctum) sit recta data A B, super A B, describatur semicirculus; patet ex constructione A B, in A I, æquari quadrato A E.

Sed alius casus est difficilior quandò videlicet recta abscinditur ad aliud punctum quàm A, ut in hoc exemplo.

Sint data duo puncta A B, & præterea punctum E, in eâdem recta lineâ; recta

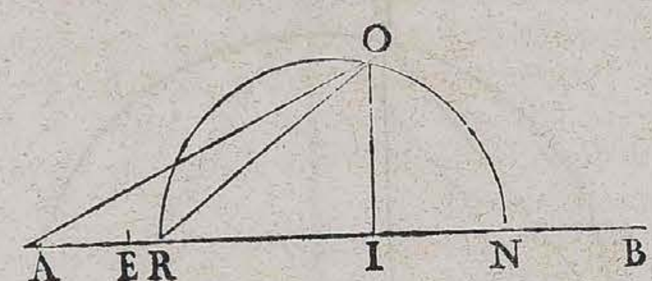


verò data sit A B, oportet invenire circuli circumferentiam ut P I O, in quâ sumendo quodlibet punctum ut I, & demittendo perpendicularem I R, quadratum A I, æquetur rectangulo sub rectâ A B, datâ & rectâ, E R, rectangulum B A E; ad rectam B A, applicetur excedens figura quadrata & faciat latitudinem rectam A P, cui fiat æqualis B O, super P O, descriptus semicirculus præstabit propositum, nam quadratum A I, æquatur quadrato A R, & quadrato R I, quadratum verò R I, æquatur rectangulo, P R O, & rectangulum P R O, rectangulis A R B, O A P, hoc est B P A, hoc est B A E, ut mox demonstrabitur, quadratum ergo A I, æquatur quadrato A R, rectangulo A R B, & rectangulo B A E, sive quadratum A I, æquatur rectangulo B A R, (nam huic rectangulo æquantur quadratum A R, & rectangulum A R B,) & rectangulo B A E, & adhuc hæc duo rectangula faciunt unum rectangulum sub B A, in E R, quod proindè quadrato A I, est æquale; probandum superest

rectangulum P R O, duobus rectangulis ARB, & P B O, æquale esse, nam ducendo in-
ter se partes rectangulum PRO, est æquale singulis rectangulis PA, in RB, PA, in B O,
hoc est B O, quadrato A R, in R B, A R, in B O, id est P A, in A R, sed duo P A,
in A R, & P A, in R B, æquantur P A, in A B, sivè AB, in A O, una cum BO,
quadrato æquatur A O B, hoc est P B O, ergò rectangulum A R B, una cum re-
ctangulo P B O, facit rectangulum P R O, quòd erat demonstrandum.

Diversos casus non prosequor, sed ex jam dictis facillimum erit: videtur tamen alius hujus propositionis casus non omittendus quando videlicet punctum E, ultra A, ut superiùs non invenitur.

Sint data duo puncta A, & E, & recta data A B, & sit invenienda circuli circumferentia ut N O R, ita ut sumendo quodlibet in ipsa punctum ut O, & demittendo

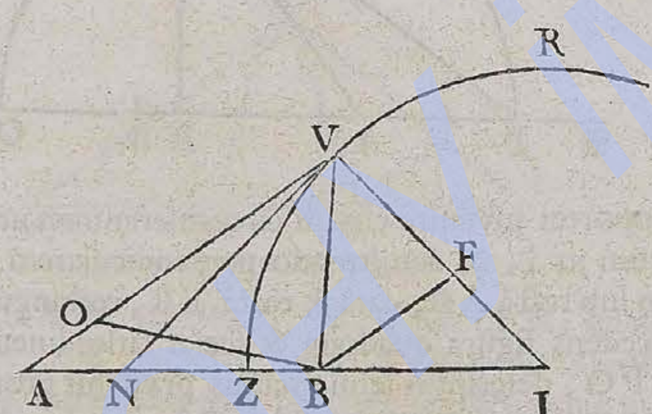


O I, perpendicularem, quadratum A O, sit æquale rectangulo sub B A, in E I, re-rectangulum B A E, ad rectam B A, applicetur deficiens in figura quadrata in R, & ipsi A R, fiat æqualis B N super R N, descriptus semicirculus præstabit propositum. Demonstratio verò non est absimilis ei quam in priore casu attulimus.

PROPOSITIO IV.

SI à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, & sit quod ab una efficitur eo quod ab altera dato majus quàm in proportione, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint duo puncta A, & B, ratio data A I, ad I B, spatium datum B A N, inter N I, & I B, media sit I Z, cujus intervallo describatur circulus Z V R, in quo sumatur



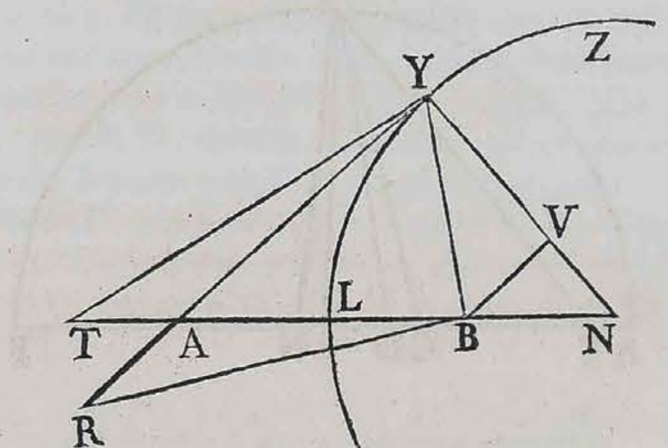
quodlibet punctum ut V, & jungantur V A, V B, Aio quadratum A V, quadrato V B, Majus esse quam in proportione data I A, ad B I, spatio dato B A N, nam fiat ipsi æquale rectangulum V A O, & jungantur O B, N V, V I, & ipsi A V, parallela B F, probandum est rectangulum A V O, ad quadratum V B, esse ut A I, ad I B, est ut N I, ad I Z, id est V I, ut V I, ad I B, & sunt circa eumdem angulum, ergò duo triangula N I V, V B I, sunt similia, & angulus N V B, angulo B V F, æqualis sed

sed angulus V N B, angulo V O B, est æqualis in eadem sectione, cum quatuor puncta N, B, V, O, sint in circulo propter æqualia rectangula B A N, V A O, ergò angulus V O B, angulo B V F, est æqualis, sed & angulus O V B, angulo V B F, propter parallelas, ergò duo triangula O B V, B V F, sint similia & ut O V, ad V B, ita V B, ad B F, addatur utrinque communis ratio A V, ad V B, ergò ratio composita ex A V, ad V B, & ex V B, ad B F, hoc est ratio A V, ad B F, id est A I, ad I B, erit eadem rationi A V, ad V B, & O V, ad V B, hoc est rectanguli A V O, ad quadratum V B, quod demonstrare oportebat.

Videtur Pappus omisisse hoc loco propositionem huic similem quæ ita se habet.

Si à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur & sit quod ab una efficitur eo quod ab altera, dato minùs quam in proportione, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint data duo puncta A, & B, ratio A N, ad N B, spatium B A T, inter T N, N B, esto media N L, cujus intervallo describatur circuli circumferentia L Y Z, in qua sumpto quolibet puncto Y, jungantur Y A, Y B, aio quadratum Y A, unà cum

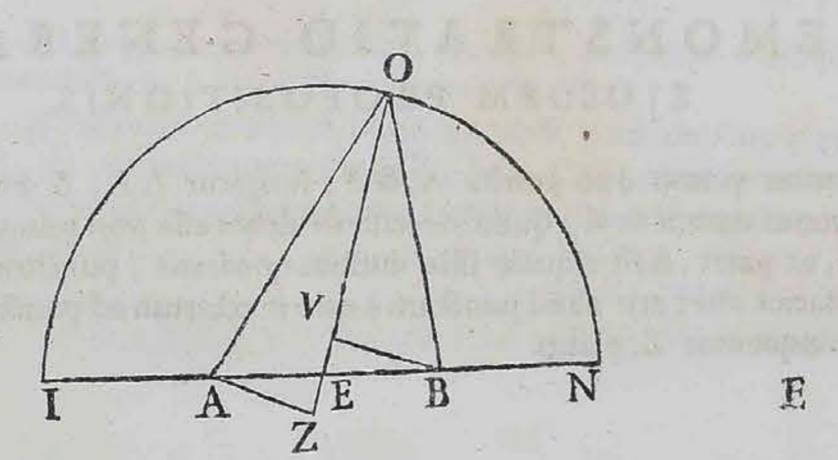


rectangulo B A T, dato, ad quadratum Y B, esse ut A N, ad N B, nam fiat Y A R, æquale B A T, & jungantur T Y, R B, Y N, & ipsi A Y, parallela B V, propter B A T, Y A R, æqualia rectangula probabitur angulus Y T B, angulo Y R B, æqualis & reliqua ut in superiore demonstratione.

PROPOSITIO V.

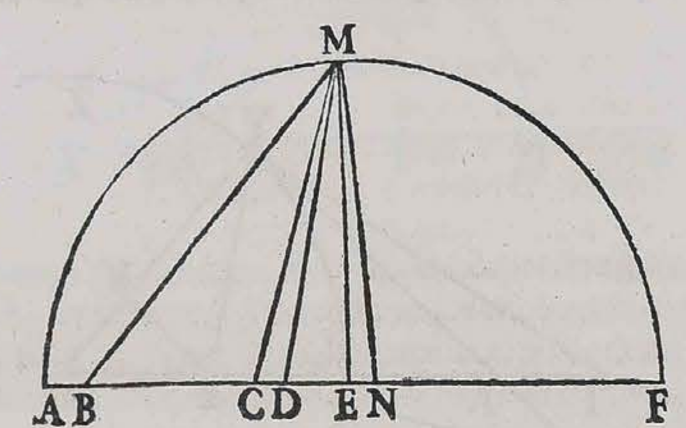
SI à quotcunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & sint species, quæ ab omnibus fiunt, dato spatio æquales, punctum continget positione datam circumferentiam.

Sint data duo primùm puncta AB, quæ per rectam A B, conjungantur, bifariam scindatur in E, centro E, interuallo quocumque ut E I, circulus describatur ut I O N.



dico quodcumque punctum in ipsius circumferentia sumpseris ut O, evenire ut quadrata A O, O B, simul quadratorum I E, A E, sint dupla. Nam junctâ rectâ E O, in ipsam B V, A Z, perpendiculares demittantur, in triangulo A E O, quadratum A O, æquatur quadratis A E, E O, & rectangulo O E Z, bis, in triangulo O E B, quadrata O E, E B, æquantur quadrato O B, & rectangulo O E V, bis, sive O E Z, bis cum E V, sit æqualis E Z, propter æquales A E, E B, ergò jungendo æqualia æqualibus, quadrata A O, O B, & rectangulum O E Z, bis, æquantur quadratis A E, E B, sive quadrato E A, bis & quadrato E O, bis, id est quadrato I E, bis, unà cum rectangulo O E Z, bis, auferatur utrinque O E Z, bis, supererit verum quod asserebamus, & constat propositum in primo casu.

Sint data tria puncta B, D, E, in recta linea & sit recta B D, recta D E, major, differentiæ inter B D, & D E, sit tertia pars C D, centro E, intervallo quocumque vt E A, describatur semicirculus A M F, aio quodcumque punctum in ipsius circumferentia

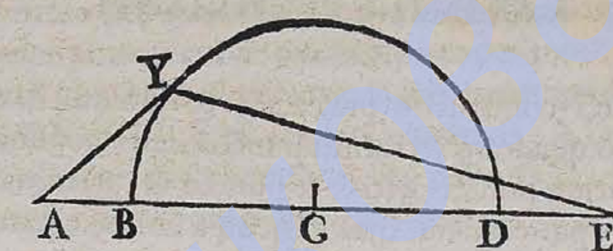


sumpseris ut M, eandem semper fore summam trium quadratorum M B, M D, M E, nam jungantur M B, M C, M D, M E, ipsi vero C D, fiat æqualis E N, & jungatur M N, cum B D, superet D E, triplâ C D, sive triplâ E N, ergo D N, unà cum duplâ C D, æquabitur B D, & C N, unà cum C D, æquabitur B D, auferatur utrinque C D, ergo C N, æquabitur B C, cum C D, sit æqualis E N, per secundam hujus libelli propositionem, idem erit semper excessus quadratorum C M, M N, super duo quadrata D M, M E, sed C M, quadratum est semper idem: ergò duo quadrata D M, M E, semper vel quadrato M N, æqualia erunt vel in idem excedent, vel in idem deficient. Addatur utrinque quadratum M B, ergò tria quadrata M B, M D, M E, duobus quadratis B M, M N, vel semper æqualia erunt, vel in idem excedent, vel in idem deficient, sed B M, M N, quadrata idem semper conflant spatium ex superiori propositione propter æqualitatem rectarum B C, C N, ergò quadrata B M, D M, E M, idem semper spatium conficiunt, quod erat demonstrandum.

DEMONSTRATIO GENERALIS
EJUSDEM PROPOSITIONIS.

Exponantur primò duo puncta A, & E, jungatur A E, & bifariam dividatur in C, planum datum sit Z, quod necessariò debet esse non minùs quadratis duobus A C, A E, ut patet, si sit æquale illis duobus quadratis, punctum C, tantùm proposito satisfaciet; nec erit aliud punctum à quo junctarum ad puncta A E, quadrata simul sumpta æquentur Z, plano.

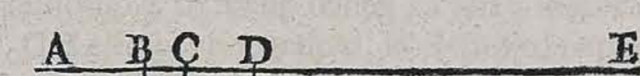
Si sit majus duobus quadratis A C, C E, excessus dimidium æquetur quadrato



C B, centro C, intervallo C B, descriptus circulus satisfaciet proposito, quod tanquam à Pappo demonstratum & ab aliis, & proclive nimis omittemus ne in facilibus diutiùs immoremur.

Lemma ad generalem methodum.

Exponantur in 1. 2. & 3. figura quotlibet puncta data A B C E, & pro numero punctorum sumatur rectarum puncto A, & reliquis datis terminatarum pars conditionaria A D, quadrans nempe in hoc exemplo; sit igitur A D, pars quarta rectarum A B, A C, A E, puncti D, diversa est positio prout variant casus. Aio rectas punctis datis & puncto D, à parte puncti A terminatas æquari rectis, punctis datis, & puncto D, à parte puncti E, terminatis, in 1. nempe figura rectam E D, æquari rectis A D, B D, C D, in 2. figura rectas E D, C D, æquari rectis B D, A D, & in 3. figura rectas E D, C D, B D, æquari A D, in 1. & in 3. figura ex hypothesi quater A D,



1. Figura.

2. Figura.

3. Figura.

æquatur rectis A B, A C, A E, dematur utrinque A D, ter, remanebit illi A D, semel, sed auferre A D, ter, ab ipsis A B, A C, A E, idem est atque auferre A D, semel ab unaquaque ipsarum A B, A C, A E, quo peracto remanebunt istinc B D, C D, E D, æquales A D, quod erat demonstrandum.

Si darentur quinque puncta A D, quinquies esset conferenda cum quatuor rectis punctis datis & puncto A, terminatis: denique uniformi procederetur in infinitum methodo.

In 2. figura A D, quater, æquatur rectis A B, A C, A E, auferatur utrinque A D, ter, & addatur B D, remanebunt A D, B D, æquales E D, C D.

In 1. figura A D, quater æquatur rectis A B, A C, A E, addatur utrinque B D, C D, & dematur A D, ter, remanebunt rectæ A D, B D, C D, æquales rectæ D E.

Nec dissimilis est in quotlibet in infinitum punctis methodus, idemque concludetur quacunque ratione varient casus.

Lemma Alterum.

EXponatur in 1. figura constructio præcedens & sumatur in eadem recta punctum N, utcumque. Aio quadrata rectarum punctis datis & puncto N, terminatarum superare quadrata rectarum punctis datis, & puncto D, terminatarum quadrato D N, toties sumpto quot sunt puncta data, quater nempe in hoc exemplo.

Secunda & tertia figura vatios casus repræsentant.

1. *Figura.*

2. *Figura.*

3. *Figura.*

In 1. figura quadrata A N, B N, E N, superant quadrata A D, B D, C D, si unumquodque unicuique conferas. quadrato D N, ter & rectangulis A D, in DN, bis, B D, in D N bis C D, in D N, bis, quadrata igitur A N, B N, C N, æquantur quadratis, A B, B D, C D, quadrato D N, ter, & rectangulis A D, in D N, bis, D B, in D N, bis, & C D, in D N, bis: illud autem patet ex genesi quadrati à binomia radice affirmatâ effecti. Ex alia autem parte quadratum E N, æquatur quadratis E D, N D, minùs E D, in D N, bis, illudque patet ex genesi quadrati à binomia radice negata effecti. Ergò quadrata quatuor A N, B N, C N, E N, æquantur quadratis quatuor A D, B D, C D, E D, quadrato D N, quater, rectangulis A D, in D N, bis, B D, in D N, bis, C D, in D N, bis, minus E D, in D N, bis, si igitur probaverimus rectangula negata æquivalere affirmatis manebit veritas propositionis stabilita, nempe quadrata A N, B N, C N, E N, superare quadrata A D, B D, C D, E D, quadrato D N, quater.

Probandum igitur rectangulum E D, in D N, bis, æquari rectangulis A D, in D N. bis, B D, in D N, bis, C D, in D N, bis; & omnibus ad D N, applicatis rectam E D, æquari rectis A D, B D, C D, quod quidem ita se habere superius lemma demonstravit.

Varios casus non moramur, si sint quinque puncta quadrata punctis datis, & puncto N, terminata, superabunt quadrata punctis datis & puncto D, terminata, quintuplo quadrati D N, nec differt à tradito casu ulterior demonstratio.

Inde patet summam quadratorum puncto D, terminatorum esse minimam.

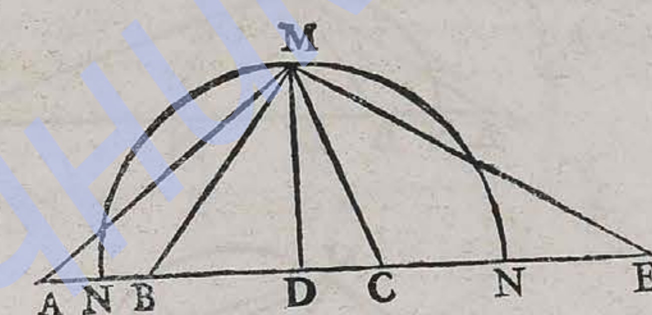
Dum tibi loquimur, scrupulosam nimis casuum observationem non adjungimus. Conclusio secundi Lemmatis semper eò deducetur ut probentur rectangula omnia ex una parte affirmata æquari negatis ex alterâ, ideoque res ad primum Lemma deducetur.

PROPOSITIO I. Generalis.

EXponatur superior figura & sint data quatuor puncta in recta A E, A, B, C, E, esto A D, quarta pars (conditionaria nempe) rectarum A B, A C, A E, & sit datum Z, planum. Proponitur invenire circulum in quo sumendo quodlibet punctum, & ab eo jungendo rectas ad puncta data quadrata junctarum simul sumpta æquentur spatio dato, Z, planum debet esse majus quatuor quadratis A D, E D, C D, E D, ut locum habeat propositio ex superius demonstratis.

Arguetur igitur quatuor illis quadratis, & præterea quadruplo quadrati D N, centro D, intervallo D N, descriptus circulus præstabit propositum.

Nam sumatur primo punctum N, ex utravis parte, demonstratum est secundo Lemmate quadrata A N, B N, C N, E N, æquari quadratis, A D, B D, C D, E D, & præterea quadrato D N, quater, at quadrata A D, B D, C D, E D, unâ cum quadrato D N, quater æquantur Z, plano, ergo quadrata quatuor A N, B N, C N, E N, æquan-



tur Z, plano, hoc est spatio dato quod erat demonstrandum.

Excitetur deinde perpendicularis D M, & jungantur A M, B M, C M, E M. Aio quatuor illa quadrata æquari spatio dato Z, plano, nam quadratum A M, æquatur quadrato A D, & quadrato D M.

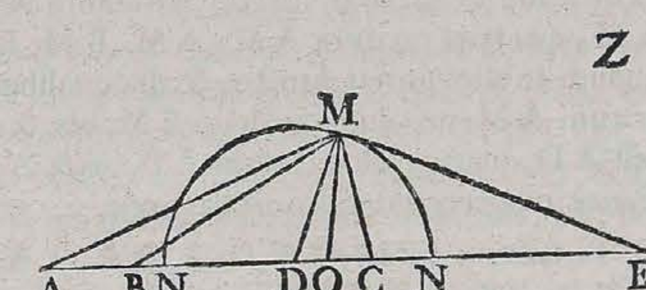
Quadratum B M, æquatur quadrato B D, & quadrato D M.

Quadratum C M, æquatur quadrato C D, & quadrato D M.

Quadratum E M, æquatur quadrato E D, & quadrato, D M.

Ergò quatuor quadrata A M, B M, C M, E M, æquantur quadratis quatuor A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D M, sivè D N, quater, ut quadrata A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D N, quater æquantur Z. plano seu spatio dato, ergo quadrata quatuor A M, B M, C M, E M, æquantur spatio dato, quod erat demonstrandum.

Sed sumatur ubicumque punctum M, à quo demittatur perpendicularis M O, Similiter probabitur quadrata A M, B M, C M, E M, æquari quadratis A O, B O,



C O, E O, quæ ex secundo lemmate æquantur quadratis A D, B D, C D, E D, & præterea quadrato O D, quater, ergo quadrata quatuor A M, B M, C M, E M, æquantur quadratis A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato O D, quater, & præterea quadrato O M, quater, sed quadratum O D, quater, unà cum quadrato O M, quater æquatur quadrato D M, quater sive quadrato D N, quater, sunt enim D M, D N, ex centro æquales inter se, igitur quadrata A M, B M, C M, E M, æquantur quadratis A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D N, quater, ideoque spatio dato Z, plano sunt æqualia, quod erat demonstrandum.

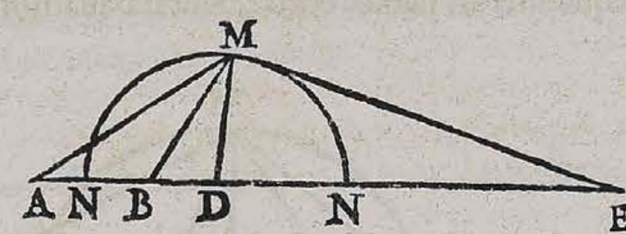
Si compleantur circuli, eadem demonstratio in aliis semicirculis locum habebit, &

ad quotlibet puncta eadem facilitate & argumentatione extendetur, ſemper enim toties ſumentur quadrata D M, D N, D O, quot erunt puncta nec fallet ratiocinatio.

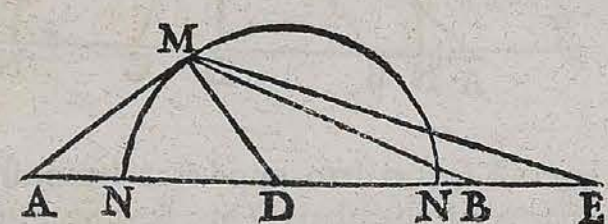
Inde ſequitur corollarium cujus uſus in ſequenti propoſitione.

Exponantur quotlibet puncta data, verbi gratia, tria A, B, E, & inveniendus circulus D N M, in quo ſumendo quodlibet punctum ut M, & jungendo rectas A M,

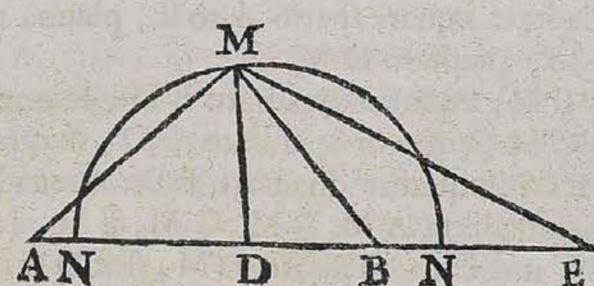
A D 4. pars A B 2. + E.



A D 4. pars A B + E.



A D 4. pars A B + A E.



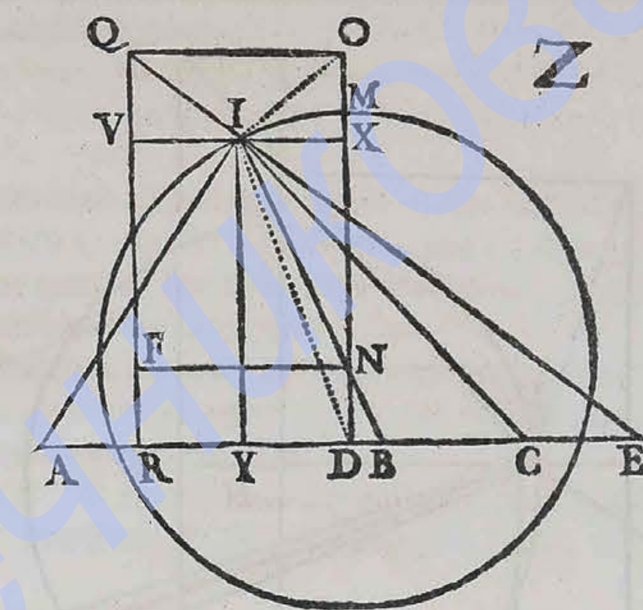
B M, E M, quadrati A M, duplum (verbi gratia) una cum quadratis B M, E M, æquentur ſpatio dato, eo caſu ſumenda eſt ad constructionem recta A D, pars quarta rectarum A B, A E, quia hoc caſu punctum A, gerit vicem duorum punctorum & idem eſt ac ſi diceretur datis punctis quatuor A, A, B, E, invenire circulum N M, in quo ſumendo quodlibet punctum ut M, quadrata quatuor A M, A M, B M, E M, æquentur ſpatio dato, idem eſt intelligendum in alio quovis puncto, & alia qualibet ratione multiplici, nam proponatur quadratum A M, una cum quadrato E M, bis, & quadrato E M, æquari ſpatio dato, ſumenda eſt A D, quarta pars rectarum A B, bis & A E, quod advertiſſe & monuiſſe fuit neceſſe, nec indiget res majori explicatione.

PROPOSITIO ALTERA.

EXPONANTUR quotlibet puncta data in recta A E, quatuor (verbi gratia) A, B, C, E, & punctum Z. extra rectam A E, quæritur circulus ut M I, in quo ſumendo quodlibet punctum ut I. quadrata A I, B I, C I, E I, Z I, æquentur ſpatio dato.

Demittatur in rectam A E, perpendicularis Z R, & rectarum A R, A B, A C, A E, ſumatur pars conditionaria (quintans nempe in hac ſpecie in qua dantur quinque puncta) A D, & excitata perpendiculari D O, demittatur in ipſam perpendicularis Z O, rectæ Z R, ſumatur pars conditionaria (quintans nempe) R F, ſive D N, & ſit ſpatium datum æquale quinque quadratis A D, R D, B D, C D, E D, & præterea Z,

plano Z, planum æquetur D N, quater (pro numero nempe punctorum in recta A E, datorum) quadrato N O, & præterea quadrato N M, quinquies, (pro numero omnium punctorum datorum) aio circulum centro N, intervallo N M, deſcriptum præſtare propoſitum: ſumatur in eo quodlibet punctum ut I, & junctis A I, B I, C I, E I, Q I, ducatur V I X, parallela A E, & I Y, parallela O D, patet quadratum D I, quater unà cum quadrato O I, æquari Z, plano ex corollario præcedentis propoſitionis, punctum enim D, gerit vicem quatuor punctorum, cum igitur D N, ſit quintans O D, patet quadratum D I, quater unà cum quadrato O I, æquari quadrato D N, quater, quadrato O N, & quintuplo quadrati N M, ſed per constructionem quadratum D N, quater una cum quadrato O N, & quintuplo quadrati N M, æquatur Z, plano. Ergo quadratum D I, quater unà cum quadrato O I, æquatur Z, plano.

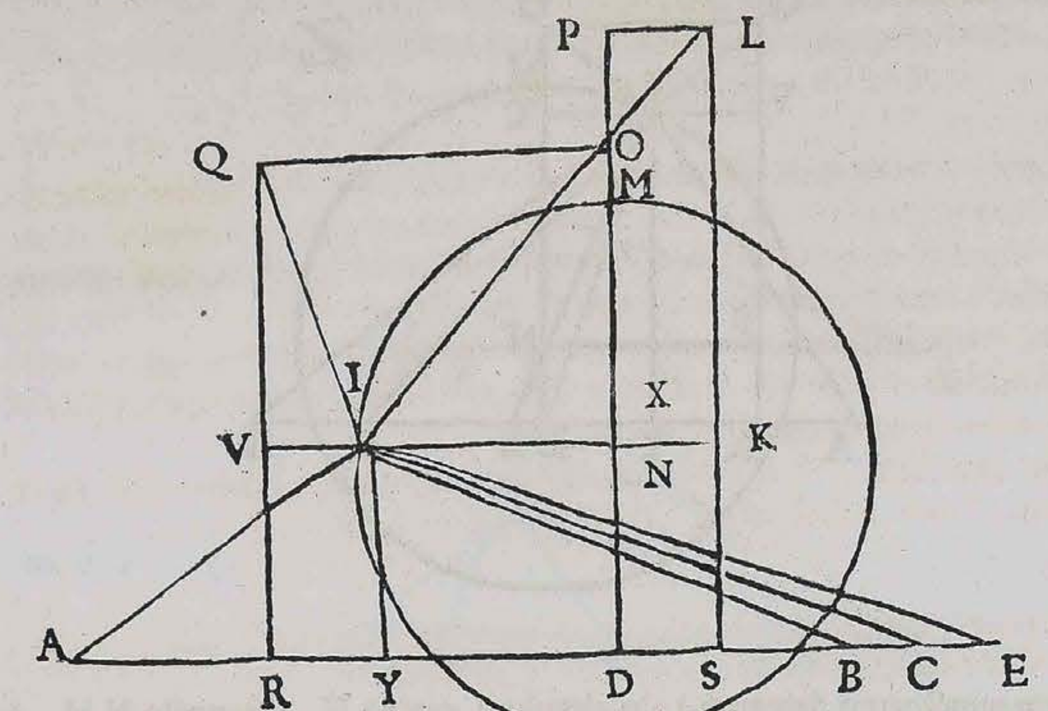


Sed quadratum D I, quater æquatur quadrato D X, quater, & quadrato X I, quater, & quadratum O I, æquatur quadrato O X, & quadrato X I, ergo Z, planum æquatur quadrato D X, ſive I Y, quater quadrato X O, ſive V Q. ſemel & quadrato X I, quinquies, addantur utrinque quadrata quinque A D, R D, B D, C D, E D, fiet inde ſpatium datum, hæc enim quinque quadrata, cum Z, plano, ex hypotheſi æquantur ſpatio dato, inde verò quinque, quadratis A I, B I, C I, E I, Q I, quæ proinde æquabuntur ſpatio dato; hoc ut conſtet ex 2. lemmate quadrata A D, R D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D Y, quinquies, æquabuntur quadratis A Y, R Y, B Y, C Y, E Y, igitur quadrata A D, R D, B D, C D, E D, addita quadrato I Y, quater, V Q, ſemel, & D I, quinquies æquabuntur quadratis A Y, R Y, B Y, C Y, E Y, unà cum I Y, quater, & V Q, ſemel ſingulis quadratis A Y, B Y, C Y, E Y, addatur quadratum I Y, fient quadrata ta A I, B I, C I, E I, æqualia quadratis A Y, B Y, C Y, E Y, & præterea quadrato I Y, quater, igitur quadrata A D, R D, B D, C D, E D, addita quadrato I Y, quater V Q. ſemel & D Y, quinquies æquabuntur quadratis A I, B I, C I, I E, & præterea quadrato R Y, & quadrato V Q. ſemel. Sed quadratum R Y, ſive Q I, unà cum quadrato Q V, æquatur quadrato Q I, igitur quadrata A R, R D, B D, C D, addita quadrato I Y, quater, V Q, ſemel, & D Y, quinquies æquabuntur quadratis A I, B I, C I, E I, & Q I, at probandum eſt quadrata illa o mnia æquari ſpatio dato. Ergò quadrata quinque A I, B I, C I, E I, & Q I, æquantur ſpatio dato, quod erat demonſtrandum.

Inde facillimè deducitur ſpatium datum æquari quadratis A N, B N, C N, E N, Q N,

& quintuplo quadrati N M, quod tanquam facile prætermittimus.

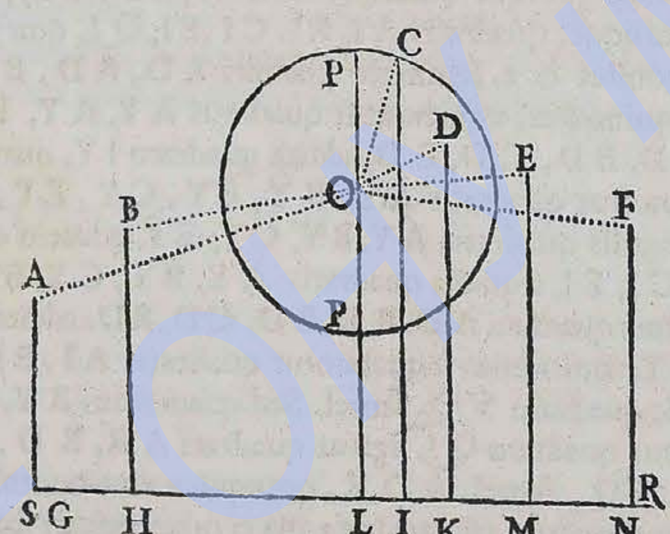
Imò & ad quotlibet puncta producetur artificium eadem ratione, si enim dentur duo puncta Q, & L, extra lineam, perfectâ constructione, ut vides, sumetur A D,



sextans rectarum A R, A S, A B, A C, A E, rectarum Q R, & L S, sextans D N, sumetur, spatium datum fiet æquale quadratis A D, R D, S D, B D, C D, E D, & præterea quadraro D N, quater, N O, semel, N P, semel & N M, sexties, & reliqua perficientur eadem ratione, semperque punctum B, vicem geret omnium punctorum in rectâ A E, datorum, & puncta P O, vicem gerent datorum punctorum Q, & L, & cætera in infinitum uniformi methodo conserventur, & demonstrabuntur.

Sed quoniam multiplices casus oriuntur ex diversa rectæ assumptæ duo vel plura puncta contingentis positione, dum puncta reliqua diversas ex parte qualibet rectâ assignata sortiuntur positiones. (licèt unicuique casui sua competant compendia) placet in artis specimen generaliùs ostendere & construere.

Dentur quotlibet puncta A, B, C, D, E, F, sive in eadem recta sive in diversis, sumatur in eodem plano recta quævis S R, ita ut omnia puncta data sint ex una



parte rectæ S R, demissis perpendicularibus A G, B H, C I, D K, E M, F N, sumatur rectarum G H, G I, G K, G M, & G N, pars conditionata sextans nempe in hoc casu, excitetur perpendicularis L O, à qua resecetur L O, pars conditionaria sex-

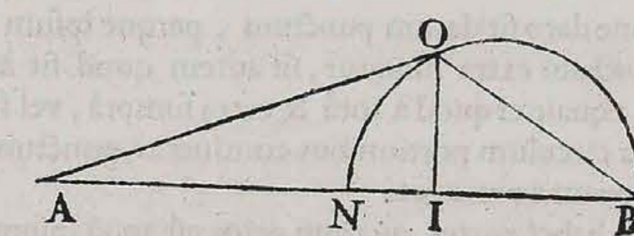
sextans nempe rectarum A G, B H, C I, K D, E M, F N, & sit spatium datum æquale quadratis A O, B O, C O, D O, E O, F O, & sextuplo quadrati O P, circulus centro, O, intervallò O P, descriptus satisfaciet propositioni, nec difficilis est inventio ei qui superiores noverit.

PROPOSITIO VI.

SI à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, à puncto autem ad positione dictam lineam abscissa à recta positione data ad datum punctum, & sint species ab inflexis æquales ei quod à data & abscissâ continetur, punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam continget.

Descripsi propositionem quemadmodum reperitur apud Pappum ex versione Federici Commandini, sed vel in textu græco vel in interpretatione mendum esse non dubito. Sensum propositionis exponam.

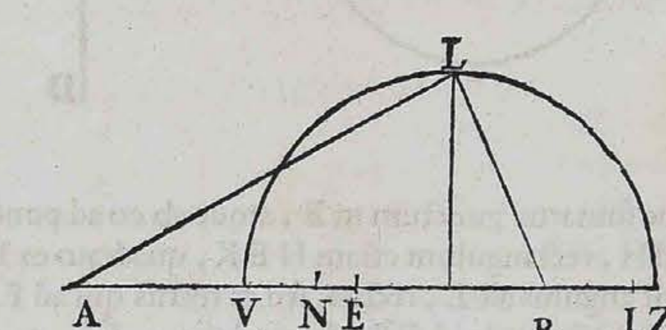
Sint duo puncta A, & B, oportet invenire circumferentiam ut N, O, B, in qua sumendo quodlibet punctum ut O, & jungendo rectas O A, O B, & demittendo



perpendicularem O I, rectangulum sub recta data in A I, æquetur duobus quadratis A O, O B, sit primum A, B, recta data, qui casus satis est facilis, sumatur ipsius A B, dimidium B N, superque B N, semicirculus describatur, aio satisfacere proposito, hoc est si sumatur, verbi gratia, punctum O, rectangulum B A I, duobus quadratis A O, O B, æquale esse; nam A O, quadratum æquatur A I, quadrato & I O, quadrato si à rectangulo B A I, auferatur quadratum A I, & quadratum I O, sivè rectangulum B I, in I N, superest rectangulum sub B I, in A N, sive in N B, quod probandum est esse æquale quadrato B O, & patet ex constructione ita se habere.

Secundus casus est quando recta data major est rectâ A B, cujus constructionem dabimus modo recta data sit minor duplâ A B.

Sint data duo puncta A, & B, & recta A I, duplâ A B, minor ex hypotesi; oportet



facere quod proponitur. Recta A B, bifariam secetur in N, & fiat N E, ipsius B I, dimidia quod ex constructione licet, rectangulum I B N, ad rectam B E, applicetur, excedens figurâ quadratâ, & faciat latitudinem rectam E V, cui fiat æqualis recta B Z, & super V Z, describatur semicirculus V L Z, aio satisfacere proposito, nam junctis

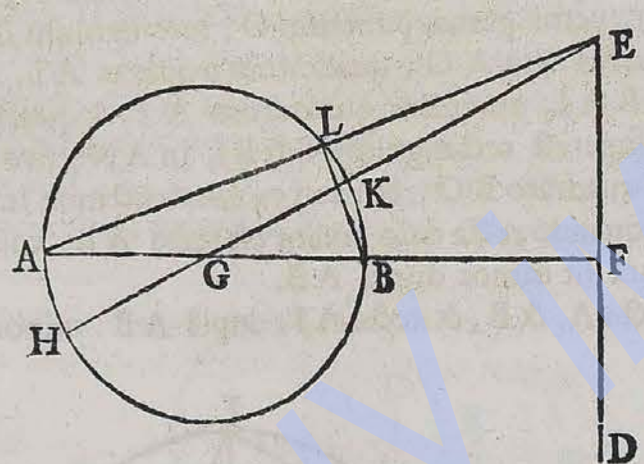
L A , L B , & demissa perpendiculari L O , cujus primus casus sit inter , E , & B , pa-
tet ex demonstratis ad propositionem tertiam Appollonij triangulum E O B , unà cum
rectangulo V E Z , sive N B I , æquari quadrato, O L, addatur utrinque quadratum O B ,
rectangulum E B O , unà cum N BI , æquabitur quadrato L O , & quadrato O B , dupli-
cetur rectangulum E B O, bis , unà cum rectangulo N B I, bis, sive solo A B I, æqua-
buntur quadratis L O, O B, bis, sive A B, in B O, semel unâ cum A B, in B I, æquabun-
tur quadratis L O , O B , bis , una cum rectangulo sub N E , in O B , bis , sive I B O ,
semel, ex constructione utrinque auferetur quadratum O B , supererit A O B, unà cum
A B I , æquale quadrato L O, bis, quadrato O B , semel , & rectangulo I B O , utrinque
I B , in B O , auferatur nempe illinc ex rectangulo A B I , supererit A O , in O B , unà
cum A O , in B I , sine solum rectangulum I O A , æquale quadrato L O , bis & qua-
drato O B , semel , Addatur utrinq; quadratum A O , erit rectangulum I O A , quadra-
to A O , O B , unà cum L O , quadrato bis , æquale , id est duobus tantùm quadratis ,
A L , & L B , quod erat faciendum. Ccasus alios prætermitto.

PROPOSITIO VII.

Si in circulo positione dato sit datum punctum , perque ipsum agatur quædam recta linea , & in ipsa punctum extra sumatur , sit autem quod fit à linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei quod à totâ & extra sumptâ , vel soli vel unà cum eo , quod duabus quæ intra circulum portionibus continetur, punctum extra sumptum positione datam rectam lineam continget.

Hæc propositio duas habet partes, quarum prior est apud ipsum Pappum propos. 157. libri septimi, secunda per additionem æqualium ex priore derivari facilè potest. Pappi igitur demonstrationem tantum adducemus.

Sit circulus circa diametrum A B , & A B , producatur sitque ad quamlibet rectam lineam D E , perpendicularis ; rectangulo autem A F B , æquale ponatur quadratum ex



F G, dico si quodcunque sumatur punctum ut E , atque ab eo ad punctum G , recta linea ducta producatur ad H , rectangulum etiam H E K , quadrato ex E G , æquale esse , jungantur A E , B L , erit angulus ad L , rectus , sed & rectus qui ad F , rectangulum igitur A E L , est æquale , & rectangulo A F B , & quadrato ex F E , quoniam enim angulus A L B , rectus est , æqualis recto A F E , sunt quatuor puncta L , B , F , E , in circulo ac propterea rectangulum F A B , æquale rectangulo E A L , quadratum autem ex A E , est æquale duobus quadratis A F , F E , sed quadrato ex A E , æqualia sunt utraque rectangnla A E L , E A L , & similiter quadrato ex A F , æqualia utraque rectangula A F B, F A B, ergo rectangula A E L , E A L , æqualia sunt rectangulis A F B , F A B , & qua-

drato ex F E , quorum rectangulum F A B , est æquale rectangulo E A L , reliquum igitur rectangulum A E L , rectangulo A F B , & quadrato ex F E , æquale erit , rectangulum autem A E L , æquale est rectangulo H E K , & rectangulum A F B , quadrato ex F G , ergo rectangulum H E K , quadratis ex E F , E G , hoc est quadrato ex E G , est æquale.

PROPOSITIO VIII. & Ultima.

Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam circulus autem non ponatur , quæ sunt ad utrasque partes dati puncti contingent positione eandem datam circumferentiam.

Hæc propositio est conversa præcedentis & ex ea facile elici potest hujus demonstratio si contraria viâ utamur.

Determinationes & casus non adjungimus quia ex constructione & demonstratione satis patent.

DE ÆQUATIONUM LOCALIUM TRANSmutatione, & emendatione, ad multimodam curvilineorum inter ſe, vel cum rectilineis comparationem.

CVI ANNECTITVR

PROPORTIONIS GEOMETRICÆ *in quadrandis infinitis parabolis & hyperbolis uſus.*

IN unica paraboles quadraturâ proportionem geometricam uſurpavit Archimedes. In reliquis quantitatum heterogenearum comparationibus, arithmeticæ dumtaxat proportioni ſeſe adſtrinxit. An ideo quia proportionem geometricam minùs τετραγωνίζεται eſt expertus? An verò quia peculiare ab illa proportione petitum artificium ad quadrandam primariam parabolam, ad ulteriores derivari vix poteſt? Nos certe hujuſmodi proportionem quadrationum feraciſſimam & agnoſcimus, & experti ſumus, & inventionem noſtram quæ eadem omnino methodo & parabolas & hyperbolas quadrat, recentioribus geometris haud illibenter impertimur.

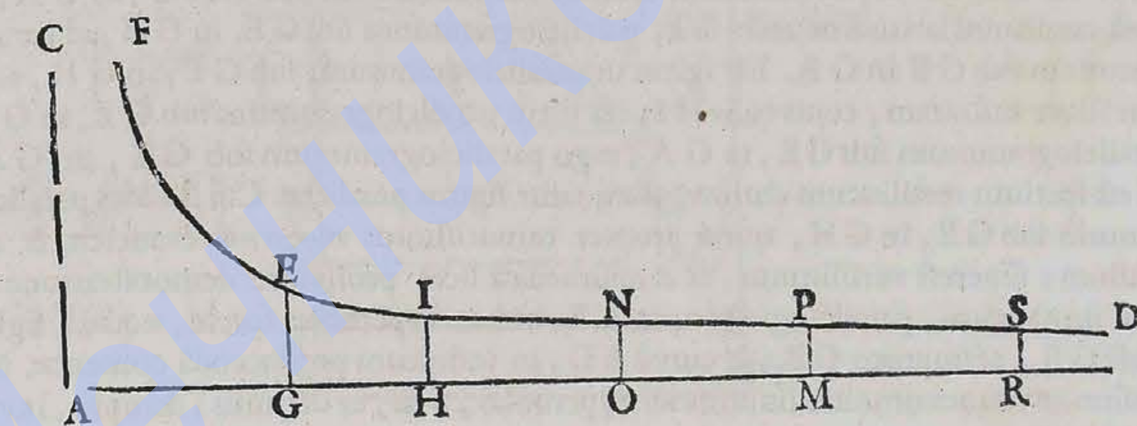
Unico quod notiſſimum eſt proportionis geometricæ attributo, tota hæc methodus innititur.

Theorema hoc eſt: Datâ quavis proportione geometricâ cujus termini decreſcant in infinitum, eſt ut differentia terminorum progreſſionem conſtituentium, ad minorem terminum, ita maximus progreſſionis terminus ad reliquos omnes in infinitum ſumptos.

Hoc poſito, proponantur primo hyperbolæ quadrandæ. Hyperbolas autem definimus infinitas diverſæ ſpeciei curvas, ut D S E F, quarum hæc eſt proprietas, ut poſitis in quolibet angulo dato R A C, ipſarum aſymptotis rectis A R, A C, in infinitum, ſi placet, non ſecùs ac ipſa curva extendendis, & ductis uni aſymptotωn parallelis rectis quibuſlibet G E, H I, O N, M P, R S, &c. ſit ut poteſtas quædam rectæ A H, ad poteſtatem ſimilem rectæ A G, ita poteſtas rectæ G E, vel ſimilis vel diverſa à præcedente, ad poteſtatem ipſi homogeneam rectæ H I, poteſtates autem intelligimus, non ſo-

lùm quadrata, cubos, quadratoquadrata, &c. quarum exponentes ſunt. 2. 3. & 4. &c. ſed etiam latera ſimplicia, quorum exponens eſt unitas. Aio itaque omnes in infinitum hujuſmodi hyperbolas, unicâ demptâ, quæ Apolloniana eſt, ſive primaria, beneficio proportionis geometricæ uniformi & perpetua methodo quadrari poſſe.

Exponatur, ſi placet, hyperbola, cujus ea ſit proprietas, ut ſit ſemper ut quadratum rectæ H A, ad quadratum rectæ A G, ita recta G E, ad rectam H I, & ut quadratum



O A, ad quadratum A H, ita recta H I, ad rectam O N, &c. Aio ſpatium infinitum, cujus baſis G E, & curva E S, ex uno latere, ex alio vero aſymptotos infinita G O R, æquari ſpatio rectilineo dato. Fingantur termini progreſſionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus ſit A G, ſecundus A H, tertius A O, &c. in infinitum, & ad ſe ſe per approximationem tantum accedant quantum ſatis ſit ut juxta Methodum Archimedæam, parallelogrammum rectilineum ſub GE, in G H, quadrilineo mixto G H F, adæquetur, ut loquitur Diophantus, aut ferè æquetur.

G E, in G H.

Item ut priora ex intervallis rectis proportionalium G H, H O, O M, & ſimilia ſint ferè inter ſe æqualia, ut commodè per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumſcriptiones & inſcriptiones Archimedæa demonſtrandi ratio inſtitui poſſit, quod ſemel monuiſſe ſufficiat, ne artificium quibuſlibet geometris jam ſatis notum inculcare ſæpius & iterare cogamur.

His poſitis, cum ſit ut A G, ad A H, ita A H, A O, & ita A O ad A M, erit pariter ut A G, ad A H: ita intervallum G H, ad H O, & ita intervallum H O, ad O M, &c. Parallelogrammum autem ſub E G, in G H, erit ad parallelogrammum ſub H I, in H O, ut parallelogrammum ſub H I, in H O, ad parallelogrammum ſub N O, in O M, cùm enim ratio parallelogralemi ſub G E, in G H, ad parallogrammum ſub H I, in H O, componatur ex ratione rectæ G E, ad rectam H I, & ex ratione rectæ G H, ad rectam H O: ſit autem ut G H, ad H O, ita A G, ad A H, ut præmonuimus. Ergo ratio parallelogrammi ſub E G, & G H, ad parallelogrammum ſub H I, in H O, componitur ex ratione G E, ad H I, & ex ratione A G, ad A H, ſed ut G E, ad H I, ita ex conſtructione H A, quadratum, ad quadratum G A, ſive propter proportionales: ita recta A O, ad rectam G A. Ergo ratio parallelogrammi ſub E G, in G H, ad parallelogrammum ſub H I, in H O, componitur ex ratione A O, ad A G, & A G, ad A H, ſed ratio A O ad A H, componitur ex illis duabus. Ergo parallelogrammum ſub G E, in G H, eſt ad parallelogrammum ſub H I, in H O, ut O A, ad H A; ſive ut H A, ad A G.

Similiter probabitur parallelogrammum ſub H I, in H O, eſſe ad parallelogrammum ſub O N, in O M, ut A O, ad H A, ſed tres rectæ quæ conſtituunt rationes parallelogrammorum, rectæ nempe A O, H A. G A, ſunt proportionales ex conſtructione.

Ergo parallelogramma in infinitum ſumpta ſub G E, in G H, ſub H I, in H O, ſub O N, in O M, &c. erunt ſemper continuè proportionalia in ratione rectæ H A, ad G A. Eſt igitur ex theoremate hujus methodi conſtitutivo ut G H, differentia terminorum rationis ad minorem terminum G A, ita primus parallelogrammorum progreſſionis terminus, hoc eſt parallelogrammum ſub E G, in G H, ad reliquos in infinitum parallelogrammos, hoc eſt ex adæquatione Archimedæa ad figuram ſub H I, aſymptoto H R, & curvâ in I N D, in infinitum extendendâ contentam. Sed ut H G, ad G A, ita ſumptâ communi latitudine recta G E, parallelogrammum ſub G E, in G H, ad parallelogrammum ſub G E in G A. Eſt igitur ut parallelogrammum ſub G E, in G H, ad figuram illam infinitam, cujus baſis H I, ita idem parallelogrammum ſub G E, in G H, ad parallelogrammum ſub G E, in G A, ergo parallelogrammum ſub G E, in G A, quod eſt ſpatium rectilineum datum, adæquatur figuræ prædictæ. Cui ſi addas parallelogrammum ſub G E, in G H, quod propter minutiſſimos τμηματισμοὺς evaneſcit & abit in nihilum, ſupereſt veriſſimum, & Archimedæâ licet prolixiore demonſtratione facillimè firmandum, parallelogrammum A E, in hac hyperbolæ ſpecie, æquari figuræ ſub baſe G E, aſymptoto G R, & curvâ E D, in infinitum producendâ contentæ. Nec operoſum ad omnes omnino hujuſmodi hyperbolas, unâ, ut diximus, demptâ, inventionem extendere.

Sit enim ea alterius, ſi placet, hyperbolæ proprietas, ut ſit G E, ad H I, ut cubus rectæ H A, ad cubum rectæ G A, & ſic de reliquis. Expoſitâ ex more infinitâ proportionalium, ut ſupra ſerie fient proportionalia parallelogramma E H, I O, M N, ut ſuprà in infinitum. In hoc verò caſu parallelogrammum primum erit ad ſecundum, ſecundum ad tertium, &c. ut recta A O, ad G A, quod ſtatim compoſitio proportionum manifeſtabit. Erit igitur ut parallelogrammum E H, ad figuram, ita recta O G, ad G A, & ſumptâ communi latitudine G E, ita parallelogrammum ſub O G, in G E, ad parallelogrammum ſub G E, in G A, eſt igitur ut parallelogrammum ſub O G, in G E, ad parallelogrammum ſub G E, in G H, ita parallelogrammum ſub G E, in G E, ad parallelogrammum ſub G E, in G H, ita parallelogrammum ſub G E, in G H, ad figuram & viciſſim ut parallelogrammum ſub O G, in G E, ad parallelogrammum ſub G E, in G H, ita parallelogrammum ſub G E, in G A, ad figuram. Ut autem parallelogrammum ſub O G, in G E, ad parallelogrammum ſub H G, in G E; ita O G, ad G H, ſive 2. ad 1. ea adæquatione, intervalla enim baſi proxima facta ſunt ex conſtructione ferè æqualia. Inter ſe ergo in hac hyperbola parallelogrammum E G A, quod eſt æquale ſpatio rectilineo dato, eſt duplum figuræ ſub baſe G E, aſymptoto G R, curva E S D, in infinitum producenda contentæ.

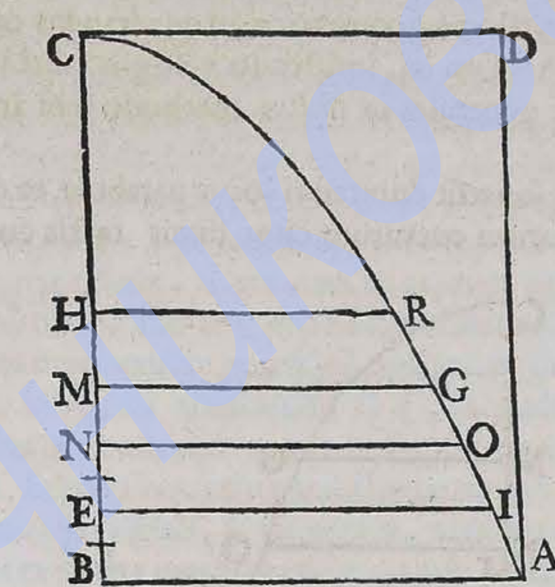
Similis in quibuſlibet aliis caſibus habebit locum demonſtratio, niſi quod in primaria, ſive Apolloniana & ſimplici hyperbola deficit eâ ſolâ ratione methodus; quia in hac parallelogramma E H, I O, N M, ſunt ſemper inter ſe æqualia; atque ideo cum termini progreſſionis conſtitutivi, ſint inter ſe æquales, nulla inter eos eſt differentia, quæ totum in hoc negotio conficit myſterium.

Demonſtrationem quâ probatur ſpatia in hyperbola communi parallelogrammis contenta, eſſe ſemper inter ſe æqualia, non adjungimus, cùm ſtatim per ſe ipſa ſe prodat; & ex hac unica proprietate quæ aſſerit in ea ſpecie eſſe ut G E, ad H I, ita H A, ad G A, facillimè derivetur.

Eadem ratione parabolæ omnes omnino quadrantur, nec eſt ulla quæ ab artificio noſtræ methodi, ut fit in hyperbolis, poſſit eſſe immunis.

Unicum in parabola, ſi lubet, primariâ & Apollonianâ adjiciemus exemplum, cujus exemplo reliquæ omnes in quibuſlibet in infinitum parabolis demonſtrationes expedientur.

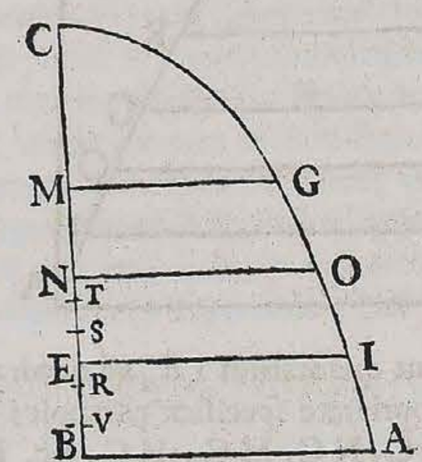
Sit ſemiparabole primaria A G R E, cujus diameter C B, ſemibaſis A B, ſumptis autem applicatis I E, O N, G M, &c. ſit ſemper ut quadratum A B, ad quadratum



I E, ita recta B C, ad C E, & ut quadratum I E, ad quadratum O N, ita recta E C, ad C N, & ſic in infinitum ex proprietate ſpecificæ paraboles Apollonianæ. Intelligantur ex more methodi rectæ B C, E C, N C, M C, H C, &c. in infinitum continuè proportionales. Erunt etiam, ut ſuperius probatum eſt, proportionalia parallelogramma, A E, I N, O M, G H, &c. in infinitum. Ut cognoſcatur ratio parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, recurrendum ex methodo ad compoſitionem proportionum, componitur autem ratio parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, ex ratione A B, ad I E, & ex ratione B E, ad E N. Cum autem ſit ut A B, quadratum, ad I E, quadratum, ita B C, ad C E, ſi inter B C, & C E ſumatur media proportionalis C V, item inter E C, & N C, media proportionalis Y C, erunt continuè proportionales rectæ B C, V C, E C, Y C, N C, & ut B C, ad E C, ita erit B C, quadratum ad V C, quadratum, ſed ut B C, ad E C; ita quadratum A B, ad quadratum E I, Ergo ut A B, quadratum ad E I, quadratum, ita erit B C, quadratum ad V C, quadratum: & ut A B, ad I E, ita erit B C, ad V C, ratio igitur parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, componetur ex ratione B C, ad V C, ſive V C, ad C E, ſive E C ad Y C; & ex ratione B E, ad E V, ſive ex ſuperius demonſtratis B C, ad C E, Ratio autem quæ componitur ex his duabus rationibus, B C, nempe ad C E, & C E, ad C Y, eſt eadem quæ ratio B C, ad C Y, igitur parallelogrammum A E, eſt ad parallelogrammum I N, ut B C, ad Y C, ideoque ex theoremate methodi conſtitutivo, parallelogrammum A E, erit ad figuram I R C H E, ut recta B Y, ad rectam B C, ideoque ut idem parallelogrammum A E, ad totam figuram A I G R C B, ita recta B Y, ad totam diametrum B C, ut autem recta B Y, ad totam diametrum B C, ita ſumptâ communi latitudine A B, parallelogrammum ſub A B in B Y, ad parallelogrammum ſub A B, in B C, ſive parallelogrammum B D, ductâ A D, diametro parallelâ occurrente tangenti C D, in D, ergo ut parallelogrammum A E, ad totam figuram ſemiparabolicam A R C B; ita parallelogrammum ſub A B, in B Y, ad parallelogrammum B D, & viciſſim ut parallelogrammum A E, ad parallelogrammum ſub A B, in B Y; ita figura ad parallelogrammum B D, ut autem parallelogrammum A E, ad parallelogrammum ſub A B, in B Y, ita propter communem latitudinem recta B E, ad B Y, ergo ut B E, ad B Y, ita figura ad parallelogrammum; & convertendo ut B Y, ad B E, ita parallelogrammum B D, ad figuram A R O B; eſt autem B Y, ad B E, propter adæqualitatem & ſectiones minutiſſimas, quæ rectas B V, V E, E Y, intervalla proportionalium repræſentates, ferè inter ſe ſupponit æquales, ut 3. ad

2. Ergoparallelogrammum B D, ad figuram eſt ut 3. ad 2. quæ ratio congruit τετραγωνισμῷ parabolcs Archimedæo, licet ab eo geometrica proportio aliâ ratione fuerit uſurpata; Methodum autem variare, & diverſam ab Archimede viam ſectari neceſſum habuimus, quia ſterilem proportionis geometricæ ad quadrandas cæteras in infinitum parabolas applicationem deprehenſam iri, inſiſtendo veſtigiis tanti viri non dubitamus. Demonſtratio autem & regulæ generales ex noſtra methodo ferè in omnibus omnino parabolis ſtatim patebunt.

Sit enim, ut nullus ampliùs ſuperſit dubitandi locus parabole ea de qua mentionem fecit diſſertatio noſtra de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, curva



A I C B, cujus baſis A B, diameter B C, & ſit ut cubus applicatæ A B, ad cubum applicatæ I E, ita quadratum rectæ B C, ad quadratum rectæ E C, & reliqua ponantur ut ſupra; ſeries nempe proportionalium rectarum B C, E C, N C, M C, &c. item ſeries proportionalium parallelogrammorum A E, I N, O M, &c. in infinitum. Inter B C, & E C, ſumantur duæ mediæ proportionales V C, R C, item inter E C, & C N, ſumantur etiam duæ mediæ proportionales S C, T C, conſtat ex conſtructione, cum ratio B C, ad E C, ſit eadem rationi E C, ad N C, fore quoque continuè proportionales rectas B C, V C, R C, E C S C, T C, N C. Eſt autem ut A B, cubus ad cubum I E, ita B C, quadratum ad E C, quadratum, ſive recta B C, ad rectam N C. Cum autem ſint, ut ſupra probavimus, ſeptem continuè proportionales, B C, V C, R C, E C, S C, T C, N C, ergo prima, tertia, quinta & ſeptima erunt etiam continuè proportionales, ideoque erit B C, ad R C, ut R C ad S C, & ut S C, ad N C. Ut igitur prima B C, ad quartam N C, ita cubus primæ B C, ad cubum ſecundæ R C, ſed ut B C, ad N C, ita probavimus eſſe cubum A B, ad cubum I E. Ergo ut cubus A B, ad cubum I E, ita cubus B C, ad cubum R C; ideoque ut A B, ad I E, ita B C, ad R C. Cum igitur ratio parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, componatur ex ratione A B, ad I E, & ex ratione B E, ad E N, ſive B C, ad E C, ergo eadem parallelogrammorum ratio componetur ex ratione B C, ad R C, & B C, ad E C. Ut autem B C, prima proportionalium ad E C, quartam, ita R C, tertia ad T C, ſextam. Ergo parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, ratio componitur ex ratione B C, ad R C, & R C, ad T C: hoc eſt parallelogrammum A E, eſt ad parallelogrammum I N, ut B C, ad T C, parallelogrammum igitur A E, ex prædemonſtratis, eſt ad figuram I G C E, ut recta B T, ad T C; ideoque ut parallelogrammum A E, ad totam figuram A I C B, ita recta B T, ad rectam B C, ſive ſumpta communi latitudine A B, ita parallelogrammum ſub A B, in B T, ad parallelogrammum ſub A B, in B C. Et viciſſim & convertendo, ut parallelogrammum B D, eſt ad figuram A I C B, ut parallelogrammum ſub A B, in B T, ad parallelogrammum ſub A B, in B E, ſive propter communem latitudinem A B, ut recta B T, ad rectam B E, recta autem B T, continet quinque intervalla T S, S E, E R, R V, V B, quæ inter ſe propter noſtram methodum logarithmicam cenſentur æqualia. Recta autem B E, continet tria ex iis intervallis, nempe

nempe ER, RV, V B. Ergo paralellogrammum BD, eſt ad totam figuram in hoc caſu ut 5. ad 3.

Canon verò univerſalis inde nullo negotio elicietur. Patet nempe fore ſemper parallelogrammum B D. ad figuram AICB, ut aggregatum exponentium poteſtatum applicatæ & Diametri ad exponentem poteſtatis applicatæ, ut in hoc exemplo videre eſt, in quo poteſtas applicatæ AB, eſt cubus, cujus exponens B. poteſtas autem diametri eſt quadratum, cujus exponens 3. Ergo debet eſſe, ut jam demonſtravimus, & perpetuò conſtabit, ut ſumma 3. & 2. hoc eſt 5. ad 3. exponentem applicatæ.

In hyperbolis autem canon non minori facilitate invenietur univerſalis. Erit enim ſemper in quacunque hyperbola, ſi recurras ad primam figuram, parallelogrammum BG, ad figuram in infinitum protenſam, RGED, ut differentia exponentium poteſtatum applicatæ & diametri ad exponentem poteſtatis applicatæ. Sit enim, exempli gratiâ, ut cubus HA ad cubum G A, ita quadratum. G E, ad quadratum H I, differentia exponentium cubi & quadrati hæc eſt, 3. & 2. erit 1. Exponens autem quantitatis applicatæ, hoc eſt quadrati, eſt 2. Ergo in hoc caſu parallelogrammum erit ad figuram, ut 1. ad 2.

Quod attinet ad centra gravitatis, & tangentes, tam hyperbolarum, quàm parabolarum, inventio dudùm ex noſtra methodo de maximis & minimis derivata, Geometris recentioribus innotuit, hoc eſt ante viginti, plus minus annos. Quod celebriores totius Galliæ Mathematici non gravabuntur fortaſſe exteris indicare, ne hac de re in poſterum dubitent.

Ex ſupradictis mirum, quantam opus tetragoniſmicum conſequatur acceſſionem. Infinitæ enim exinde figuræ curvis contentæ de quibus nihil adhuc, nec veteribus, nec novis Geometris in mentem venit, facillimam ſortiuntur quadraturam. Quod in quaſdam regulas breviter contrahemus.

Sit curva, cujus proprietas det æquationem ſequentem B, quad. – A, quad, æquale E, quad. (apparet autem ſtatim hanc curvam eſſe circulum.) Certum eſt poteſtatem ignotam E, quad. poſſe reduci per applicationem ſeu paraboliſmum ad latus. Poſſumus enim ſupponere E, quad. æquari B, in V, cùm ſit liberum quantitatem ignotam V, in notam B, ductam æquare quadrato E, etiam ignotæ. Hoc poſito B, quad. A, – quad. æquabitur B, in V. Homogeneum autem B in V, ex tot quantitatibus homogeneis componi poteſt, quot ſunt in parte æquationis correlativâ, iiſdemque ſignis hujuſmodi homogenea debent notari. Supponatur igitur B in V, æquari B in I B, in Y. Ex more enim Vietæo, vocales ſemper pro quantitatibus ignotis ſumimus. Ergo B, quad. – A, quad. æquatur B in I, – B in Y, æquentur ſingula membra partis unius ſingulis membris partis alterius Sit nempe B, quad. æquale B, in I, Ergò dabitur I, æqualis B, æquetur deinde – AG, – B, in Y, hoc eſt A quad. B in Y, erit extremum punctum rectæ Y ad parabolen primariam. Omnia igitur in hoc caſu ad quadratum reduci poſſunt: ideoque ſi omnia E, quad. ad rectam lineam datam applices, fiet ſolidum rectilineum datum & cognitum.

Proponatur deinde curva, cujus, hæc ſit æquatio A cub. + B, in A, quad. æquale E, cub. E, cub. applicetur ad planum datum, & ſit, verbi gratiâ, æquale B, quad. in V. Quia autem recta V, ex pluribus quantitatibus ignotis componi poteſt. Sit A, cub. + B in A, quad. æquale B, quad. in I + B. quad. in Y. æquentur ſingula inter ſe membra, hoc eſt A cub. æquetur B. quad. in I, orietur inde parabole ſub cubo & latere. æquetur deinde B in A, quad. ſecundo membro, B, quad. in Y, orietur inde parabole ſub quad. & latere, hoc eſt primaria, quadrantur autem ſingulæ ex his parabolis. Ergo aggregatum E, cuborum ad rectam datam applicatorum producit plano-planum quantitatibus ejuſdem gradus rectilineis commodè æquandum.

Si ſint plura in æquationibus membra, imò & ſub pleriſque utriuſque quantitatis ignotæ gradibus involuta, ad eamdem ut plurimum methodum reductionum legitimarum ope poterunt aptari.

Ex his patet, ſi in priori æquatione in qua B, quad. – A quad. æquavimus E, quad

loco ipſius E, quad. ponamus B in V, poſſe nos aggregatum omnium V, ad rectam da-
tam applicataru m conſiderare tanquam planum, & quadrare. Omnes enim V, nihil aliud
ſunt quàm omni a E quad. diviſa per B rectam datam. Item in ſecunda æquatione omnes
V, nihil aliud ſunt quàm omnes E cubi diviſi per B, quadratum datum. Igitur tam in pri-
ma quàm in ſecunda figura omnes V, faciunt figuram æqualem ſpatio rectilineo dato.

Hoc autem opus fit per ſynæreſim, & expeditur, ut patet, per parabolas.

Sed non minus quadrationum ferax eſt opus per diæreſim quod per hyperbolas, aut ſo-
las, aut parabolis mixtas, commodè pariter expeditur.

Proponatur, ſi placet, curva ab æquatione ſequenti oriunda.

$$\frac{\text{B, cub. cub.} + \text{BQC in A,} + \text{A cub. cub.}}{\text{A quad. quadr.}} \infty \text{ E quad.}$$

Ex jam ſuppoſitis E quad. poteſt fingi æquale B in V, ſive ut tria hinc & inde mem-
bra ſint in utraque parte æquationis. B in V, poteſt æquari B in O, + B in I, + B in Y

Quo peracto.

$$\frac{\text{B cub. cub.} + \text{BQV cub. in A} + \text{A cub. cub.}}{\text{A quad. quadr.}} \text{ æquabitur.}$$

B in O. | B in I + B in Y. Et æquando ſingula membra ſingulis $\frac{\text{B cub. cub.}}{\text{A Q Q.}}$ æquabitur B in O.

Et omnibus in A, qu. qu. ductis B, cub. cub. æquabitur A qu. qu. in B in O. Et omnibus abs B diviſis B. quad. cub. æquabitur A qu. qua. in O. quæ eſt æquatio ad unam ex hyperbolis, ut patet. Æquationes enim hyperbolarum conſtitutivæ continent ex una parte quantitatem datam; ex aliâ verò id quod fit ſub poteſtatibus duarum quantitatum ignotarum.

Secundum membrum æquationis dat $\frac{\text{BQC in A.}}{\text{A qu. qu.}}$ Sive $\frac{\text{B, qu. cub.}}{\text{A cub.}}$ æquale B in I.

Et omnibus in A cub. ductis & abs B diviſis, fit B qu. qu. æquale A cub, in I, quæ eſt æquatio alterius hyperbolæ à priore diverſæ. Denique tertium membrum eſt $\frac{\text{A cub. cub.}}{\text{A qua. qua.}}$

Hoc eſt A, qu. æquale B, in Y, quæ eſt æquatio ad parabolen.

Patet itaque in præcedente æquatione omnes V, ad rectam datam applicatas æquari ſpatio rectilineo dato. Summa enim duarum hyperbolarum quadrationi obnoxiarum, & unius parabolæ dant ſpatium æquale rectilineo vel quadrato dato.

Nihil autem vetat quominus ſingula membra numeratoris ſeparatim denominatori applicemus,, ut jam factum eſt. Eodem enim res recidit, quò ſi integrum numeratorem ex tribus membris compoſitum eidem denominatori ſemel applicemus. Ita enim ſingula æquationis membra ſingulis homogenei correlatis poſſunt commodè comparari.

Proponatur etiam $\frac{\text{B, qu. cub. in A,} - \text{B, cub. cub.}}{\text{A cub.}}$ Æquari E cub.

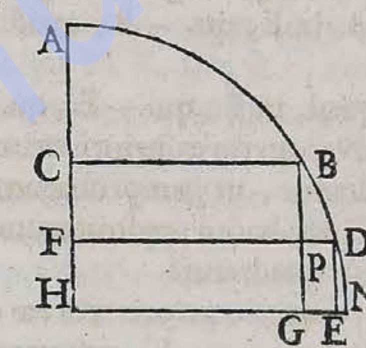
Fingatur E cub. æquari B, qu. in V, ſive propter duo membra homogenei correlati B, qua. in I, + B, qu. in Y. Fiet $\frac{\text{B qu. cub. in A,}}{\text{A cub.}}$ ſive $\frac{\text{B qu. cu.}}{\text{A Q.}}$ æquale B qu. in I.

& omnibus in A qu. ductis, & abs B, qu. diviſis, fiet B, cub. æquale A, qu. in I. quæ eſt æquatio ad unam de hyperbolis quadrandis.

Ponatur deinde ſecundam homogenei membrum $\frac{\text{B, cub}}{\text{Acub.}}$ æquari B qu. in Y.

Igitur omnibus in A, cub. ductis & abs, B, qu. diviſis fiet B, qu. qu. æquale A, cub. in Y, quæ eſt æquatio unius ex hyperbolis quadrationi obnoxiis conſtitutiva. Datur igitur recurrendo ad primam æquationem in rectilineis ſumma omnium E, cuborum in hac ſpecie ad certam rectam datam applicatorum.

Sed & ulteriùs progredi, & opus tetragoniſmicum promovere nihil vetat.



Sit in quartâ figurâ curva quælibet, A B D N, cujus baſis H N, diameter H A, applicatæ ad diametrum, C B, F D, & applicatæ ad baſim, B G, D E, & decreſcant ſemper applicatæ à baſe ad verticem, ut hic, H N, eſt major F D, & F D, major eſt C B, & ſic ſemper. Figura compoſita ex quadratis H N, F D, C B, ad rectam A H, applicatis, hoc eſt ſolidum ſub C B, quadrato in C A, & ſub F D, quadrato in F C, & ſub N H, quadrato in H F, æqualis eſt ſemper figuræ ſub rectangulis B G, in G H, D E, in E H, bis ſumptis, & ad baſim H N, applicatis; hoc eſt ſolido ſub B G, in G H, bis in G H, & ſub D E, in E H, bis in E G, &c. utrimque in infinitum. In reliquis autem in infinitum præſtantibus, eadem facilitate fit reductio homogeneorum ad diametrum, ad homogenea ad baſim. Quæ obſervatio curvarum infinitarum hactenus ignoratum, detegit quadrationem.

Omnes enim cubi H N, F D, C B, ad rectam A H, ſimiliter applicati, æquales ſunt aggregato productorum ex B G, in G H, quadratum, & ex D E, in E H, quadratum ad rectam H N, ſimiliter ut ſupra applicatorum, & ter ſumptorum; hoc eſt planoplanum ſub C B, cubo in C A, & ſub D F, cubo in F G, & ſub H N, cubo in H F, æquatur ſummæ planoplanorum ex B G, in G H, quadratum in H G, & ex D E, in E H, quadratum in E G, ter ſumptæ.

Aggregatum verò quadrato quadratorum H N, F D, C B, ad rectam A H, applicatorum æquatur quadruplo ſummæ plano planorum ſub B G, in G H, cubum, & ſub D E, in E H, cubum ad rectam H N, ſimiliter ut ſupra applicatorum.
Inde emananr infinitæ, ut ſtatum patebit, quadraturæ.

Eſto enim, ſi placet, curva illa A B D N, ejus naturæ, ut data baſe H N, & diametro H A, diameter data A H, vocetur in terminis analyticis B. Ipſa verò H N, baſis data vocetur D. Quælibet applicato F D, vocetur E, & quælibet H F, vocetur A; & ſit, verbi gratiâ, æquatio curvæ conſtitutiva B, quad. − A qu. æquale E, quad. (quod in circulo ita ſe habet:) Cùm ergo ex prædicto theoremate univerſali omnia E, quadrata, ad rectam B, applicata ad baſim H N, ſive ad D, applicatis, ſint æqualia omnibus productis ex H G, in G B, ſint autem omnia E, quadrata æqualia ad B, applicata ſpatio rectilineo curvo, ut ſuperiùs probatum eſt. Ergo omnia producta ex H G, in G B, bis ſumpta, & ad baſim D, applicata, continent ſpatium rectilineum datum. Ergo ſumendo dimidium, omnia producta ex H G, in G B, ad baſim D, applicata, erunt æqualia ſpatio rectilineo dato. Ut autem facillima, & nullis aſymmetriis involuta fiat tranſlatio prioris curvæ ad novam; ita conſtanti artificio, quæ eſt noſtra methodus, operari debemus.

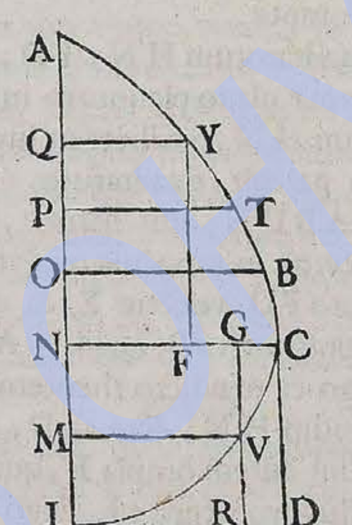
Sit quodlibet ex productis ad baſim applicandis, H E, in E D, cum igitur F D, ſive H E, ipſi parallela vocetur in analyſi E, & F H, ſivè D E, ipſi parallela vocetur A. Ergo productum ſub H E, in E D, vocabitur E in A. Ponatur illud productum E in A, quod ſub duabus ignotis & indefinitis rectis comprehenditur æquari B in V, ſivè producto ex B, data in V, ignotam, & intelligatur E P, in directum ipſi D E, poſita æquari V, Ergo $\frac{B \text{ in } V}{E}$, æquabitur A. Cum ergò B, qu. – A, quad. æquetur ex proprietate ſpecifica prioris curvæ ipſi E, qu. Ergo ſubrogando in locum A, ipſius novum valorem $\frac{B, \text{ in } V}{E}$, fiet B, quad. in E, qu. – B, quad. in V, quad. æquale E, quad. quad. ſive per antitheſim B, quad. in E, qu. – E, qu. qu. æquale B, qu. in V, quad. quæ eſt æquatio novæ H O P N, curvæ ex priori oriundæ conſtitutiva, in qua cum omnia producta ex B, in V, dentur, ut jam probatum eſt, ſi omnia ad B, applicentur dabitur ſumma omnium V, ad baſim applicatarum. hoc eſt dabitur planum H O P N, rectilineis; ideoque ipſius quadratura.

Sit, ſecundi exempli gratiâ, æquatio prioris curvæ conſtitutiva B, in A, quad. – A cub. æquale E, cub. ſumma omnnium E, cuborum ad diametrum B, applicatorum dabitur: ideoque ſumma omnium productorum ex quadratis H E, in E D, ad baſim applicatorum. Productum autem ex H E, quadrato in E D, fit in terminis analyticis E, quad, in A, quod fingatur æquari B, quad. in V, & recta. E P, ut ſupra, æqualis V, Ergò $\frac{B, \text{ quad. in } V}{E \text{ quad.}}$, æquabitur A.

Si igitur in locum A, ſubrogemus jam agnitum illius valorem $\frac{B, \text{ quad. in } V.}{E \text{ quad.}}$

Et omnia juxta analyſeos præcepta ſequamur, fiet B, quad. cub. in V. quad. in E. quad. – E, cub. cub æquale B, cub. cub. in V, cub. quæ eſt æquatio novæ H O P N, curvæ ex priore oriundæ conſtitutiva, in quâ cùm omnia producta B, qu. in V, ad baſim D, applicata dentur, omnibus per B, quadratum datum diviſis, dabitur ſumma omnium V, ad baſim D, applicatarum ideoque quadratura figuræ H O P N, & eſt generalis ad omnes omnino caſus extendenda in infinitum methodus.

Notandum porro, & accuratè advertendum in tranſlationibus curvarum, quarum applicatæ ad diametrum verſus baſim decreſcunt, aliam omnino viam analyſtis ineundam, à præcedenti diverſam.



Sit enim in quinta figura prior curva I V C B T Y A, cujus diameter A I, applicatæ M V, N C, O B, P T, Q Y, & ejus curvæ ea ſit natura, ut applicatæ verſus baſim M V, ſemper decreſcant, donec ad baſim perveniant, ita ut M V, ſit minor quàm N C. Rurſus autem ita curva verſus A, per tramitem C B Y A, inflectatur, ut C N, ſit major quam B O, B O, major quàm P T, P T, major quàm Q Y, &c. ita ut omnium applicatarum maxima ſit C N, ſi in hoc caſu quæramus tranſlationem quadratorum M V, N C, ad baſim, ea non comparabimus productis ſub I R, in R V, ut ſupra: quia jam ex theoremate generali ſuppoſitum eſt omnia quadrata M V, N C, æquari productis ſub V G, in G N, cum C N, maxima applicatarum poſſit & debeat conſiderari ut baſis reſpectu curvæ, cujus vertex I Quadrata igitur M N, N C, in curva quarum applicatæ decreſcunt verſus baſim, comparabuntur in hoc caſu productis G V, in G N, hoc eſt, ut ad terminos analyticos æquatio in hac figura perveniat, ſi M I, vel R V, vocetur A, & ipſa M V, ſive R I, vocetur E, ipſaque C D, ſive G R, quæ ductæ per terminum maximæ applicatarum, ipſi diametro parallelæ, eſt æqualis: ideoque facilè ex noſtris methodis invenienda; rectæ datæ Z, æqualis ſupponatur, fiet productum ex G V, in G N, æquale producto ex Z, in E, – A in E: ideoque omnia quadrata M V, N C, uſque ad maximam applicatam comparabuntur productis Z, in E – A in E, ad baſim I D, applicandis. Reliqua verò quadrata C N, B O, P T, comparabuntur productis ex Y F, in F N, quæ in terminis analyticis æquivalebunt A in E, – Z in E. Quibus ita ſtabilitis facillimè ex priore curva nova verſus baſim derivabitur; idemque in aliis omnino applicatarum poteſtatibus erit obſervandum.

Ut autem pateat novas ex noſtra hac methodo emergere quadraturas, de quibus nondum recentiorum quiſquam eſt aliquid ſubodoratus.

Proponatur præcedens curva, cujus æquatio $\frac{B, \text{ quad. cub. in } A - B, \text{ cub. cub}}{A \text{ cub.}}$ æquale E, cubo.

Dantur omnes E, cubi in rectilineis, ut jam probatum eſt. Quibus ad baſim tranſlatis, fiet ex ſuperiori methodo $\frac{B, \text{ qu. in } V}{E \text{ qu.}}$, æquale A, & omnibus ſecundum artem novo ipſius A, valore accommodatis, evadet tandem nova æquatio quæ dabit curvam ex parte baſis, cujus æquatio dabit E, cub. + V, cub. æquale B in E, in V, quæ eſt curva Schotenii, cujus conſtructionem tradit in ſectione 25. miſcellanearum, pag. 493. Figura itaque curva A K O G D C H, quæ apud illum authorem delineatur ex ſuperioribus præceptis quadrationem ſuam commodè nanciſcetur.

Notandum autem de curvis in quibus aggregatum poteſtatum applicatarum datur, formari non ſolum curvas ad baſim quadrationi obnoxias, ſed etiam alias curvas ad diametrum facilè quadrandas. Si enim in 4. figura ſupponatur æquatio curvæ conſtitutiva, ut ſuperiùs diximus B, quad. – A, qu. æquale E, quad. non ſolum ex ea derivabitur nova curva ad baſim, cujus æquatio eſt B, qu. in E, qu. – E qu. quad. æquale B, qu. in V, quad. Sed etiam nova curva ad diametrum æquando poteſtatem applicatæ quæ eſt E, qu. producto B, in V. Dabuntur enim omnia producta B, in V, ad diametrum applicata. Et omnibus per B, diviſis, dabuntur omnes V, diametro applicatæ; ideoque quadraturæ curvæ novæ ex priori verſus diametrum oriundæ, cujus æquatio erit B, qu. – A qu. æquale B in V. Unde ſtatim apparet novam illam curvam versùs diametrum eſſe parabolen. Hujuſmodi autem tranſmutationum beneficio non ſolum ex prioribus curvis oriuntur nouæ; ſed itur nullo negotio a parabolis ad hyperbolas, & ab hyperbolis ad parabolas, ut experientiâ conſtabit.

Sicut autem à curvis in quibus dantur poteſtates applicatarum, fit præcedentis ope analyſeos tranſlatio ad curvas, in quibus latera applicatarum in rectilineis dantur; Ita de curvis in quibus dantur latera applicatarum, devenitur facilè ad curvas, in quibus poteſtates applicatarum dantur. Cujus rei exemplum eſto curva, cujus æquatio B, qui in E, qu. – E, qu. qu. æquale B, qu. in V, qu. in hac enim æquatione, ut jam probatum eſt, dantur omnes V, Ponatur V, æqualis eſſe $\frac{A, \text{ in } E}{B}$, & ſubrogando in locum ipſius V, novum ipſi aſſignatum valorem, $\frac{A \text{ in } E}{B}$, fiet B, qu. in E, qu. – E, quad. quad. æquale A qu. in E, qu. & omnibus ab E, qu. diviſis, remanebit B, qu. – E, qu. æquale A, qu. ſive B, qu. – A, qu. æquale E, qu. Dabuntur igitur in hac novâ curvâ, quam apparet eſſe circulum, omnia E, quadrata.

Quod ſi ex primâ curvâ in quâ dantur latera applicatarum, quæratur nova in quâ dentur cubi applicatarum, eadem methodo utendum, modò poteſtates ignotarum conditionarias uſurpemus. Proponatur enim curva quam ſuperiùs ex alia deduximus, & ſit illius æquatio B, qu. cub. in V, quad. in E, qu. – E, cub. cub. cub. æquale B, cub. cub. in V, cub.

Probatum eſt in illa dari aggregatum omnium V, hoc eſt latera applicatarum.

Ut itaque ex eâ nova curva derivetur in qua omnes cubi applicatarum dentur, ponatur V, æquari $\frac{E, \text{ qu. in } A,}{B \text{ qu.}}$ & in locum V, ſubſtituatur novus iſte quem ipſi aſſignavimus valor, fiet tandem operando ſecundùm præcepta artis, æquatio in B, in A, qu. – A cub. & E, cub. quæ dabit curvam in qua omnes E, cub. cubos applicatarum repræſentantes dabuntur.

Ex hac autem methodo non ſolùm dantur & inveniuntur quadrationes infinitæ, nondum Geometris cognitæ, ſed multæ etiam pariter infinitæ deteguntur curvæ, quarum quadraturæ ſupponendo ſimpliciores quadraturas, ut circuli, ut hyperbolæ, ut aliarum expediuntur. Exempli gratiâ, in æquatione circuli, in qua B, qu. – A, qu. æquatur E, qu. dantur quidem in rectilineis omnes applicatarum poteſtates, quarum exponentes ſignantur numero pari, ut omnia quadrata, omnia quadrato quadrata, omnes cubo cubi, &c. Sed poteſtates applicatarum, quarum exponentes ſignantur numero impari, ut omnes E, cubi, omnes E, quad. cubi, dantur tantùm in rectilineis ſupponendo ipſam circuli quadraturam, quod non eſt operoſum demonſtrare, & in praxim redigere, tam quam corollarium methodi precedentes.

Plerumque autem uſuvenit ut iterandæ, vel bis, vel etiam ſæpius ſint operationes ad inquirendam curæ propoſitæ dimenſionem.

Proponatur, exempli gratiâ, curva, ejus æquatio ſequens ſpeciem determinet B, cub. æqualis A, quad. in E, + B, qua in E.

Si dantur omnes E, ergo dantur omnia ſub rectâ datâ, (B, videlicet) in E, rectangula Rectangulum B, in E, invertendo ſuperiorem, de qua egimus in principio diſſertationis methodum, æquetur quadrato O, qu. Ergo $\frac{O, \text{ quad.}}{B}$ æquabitur E. Et ſubſtituendo in locum E, novum hunc ipſi aſſignatum valorem, fiet B, qu. qu. æquale A, Qu. in O, qu. + B, qu. in O, qu. Et hæc ſit prima operatio, quæ eſt inverſa ejus quam initio hujus diſſertationis præmiſimus, & quæ novam curvam exprimit, in quâ inquirendum reſtat an dentur omnia O, quad. Recurrendum igitur ad ſecundam methodum, cujus beneficio ex quadratis applicatarum latera novæ curvæ inquirimus.

Ponatur $\frac{B, \text{ in } V}{O}$, ex ſuperiore quam ſecundo loco exhibuimus methodo æquari A, & ſubſtituendo in locum A, ipſi jam aſſignatum ex noſtra methodo valorem fiet B, q, qu – B, qu. in O, qu. æquale B, qu. in V, quad. Et omnibus per B, quad. diviſis evadet tandem B, qu. – O, qu. æquale A, quad. quæ æquatio dat circulum. Et in eâ omnes V, dantur, ſupponendo quadraturam circuli. Recurrendo igitur ad priorem curvam, in quâ B, cub. ponitur æquari A, qu. in E, + B, qu. in E, patet ſpatium ab ea curva oriundum per quadraturam circuli poſſe quadrari, id quæ per duas curvas à priore diverſas analyſis noſtra breviter & facilè expedivit.

Hæc verò omnia, & ad inventionem rectarum curvis æqualium, & ad pleraque alia non ſatis hactenus indagata problemata inſervire ſtatim experiendo ἀγχίνυς analyſta deprehendet.

Sit in ſextâ figura parabole primaria A, B, C, cujus axis C B, applicata C D, æqualis axi C B, & recto lateri B V, fiantque B P, P L, L G, ſingulæ æquales axi C B, & ipſi ſic directum ſumatur in curva quodvis punctum, ut F, & datis infinitis B X, P S, L O, ipſi C D, parallelis, ducatur F X S O K, parallela axi occurrens rectis P S, L O, in punctis S, & O, & fiat ut ſumma rectarum F X, X S, ſivè ut tota F S, ad S O, ita S O, ad O K. Et ſumptis ſimiliter punctis D E, fiat ut D R, ad R N, ita R N, ad N I, & ut E Q, ad Q M, ita Q M, ad M H. Et intelligatur curva infinita per puncta G H I K, &c. incedens, cujus aſymptotos erit recta infinita L O. Curva hæc G H I K eſt ea cujus ſpecies à ſuperiori æquatione determinatur, in qua B, cub. æquatur A, qu. in E, + B, quad. in E, Aio itaque ex jam traditâ operationum analytica iteratione, ſpatium K I H G L M N O, in infinitum versùs puncta K O, extendendum, æquale eſſe circulo, cujus diameter eſt axis B C, Hanc verò quæſtionem ab erudito Geometra nobis propoſitam, ita ſtatim expedivimus.

Eâdem methodo ſpatium à Dioclæa comprehenſum quadravimus, vel ad circuli quadraturam reduximus.

Sed elegans inprimis operationum iteratio evadit, cum ab altioribus applicatarum poteſtatibus, ad depreſſiores, vel contra à depreſſioribus ad altiores analyſis ipſa tranſcurrit; cui methodo præſertim debeatur inquiſitio ſummæ applicatarum in quacumque curva propoſita, & multa alia problemata tetragoniſmica. Proponatur, verbi gratiâ, curva, cujus æquatio B, qu. – A, qu. æquale E, qu. quam ſtatim apparet eſſe circulum. Quæritur ſumma cuborum applicatarum, hoc eſt ſumma E, cuborum. Si dantur omnes E, cubi. Ergo per præcedentes, ſecundùm poteſtatis conditionem, methodos, ex ea curva poteſt alia ad baſim derivari, in quâ dabitur ſumma applicatarum. Ponatur igitur ex methodo $\frac{B, \text{ qu. in } O,}{E, \text{ qu.}}$ æquari A. Ergo ſubſtituendo in locum A, jam aſſignatum ipſi valorem, fiet ex methodo B, qu. in E, qu. qu. – E, cub.

cub. æquale B, qu. qu. in O, qu. quæ eſt æquatio curvæ, in qua omnes O, dantur ex ſuppoſitione quam fecimus in primâ curvâ, dari omnes E, cubos. Cum igitur in hac nova curva omnes O, dentur, ex ea derivetur tertia, in qua quærantur quadrata applicatarum, non verò cubi, ut in priore curvâ jam ſuppoſitum eſt. Fingatur igitur ex noſtra quæ in quadratis, ut jam ſupra diximus, uſurpatur methodo $\frac{E,\ in\ V,}{B}$ æquari O. Ergo B, qu. in E, qu. qu. – E, cub. cub. æquabitur B, qu. in E, qu. in V, quad. Et omnibus abs E, qu. diviſis fiet B, qu. in E, q. – E, qu. qu. æquale B, qu. in V, quad. Et in hac curva omnes E, quadrati dantur. Si igitur ex hac curva quæramus aliam in qua omnes applicatæ dentur, ponatur, ſi placet, E, quad. æquale B, in Y. Ergo in ultima hac æquatione B, in Y – Y quad. æquabitur V, qu. Et cùm in ſuperiore dentur omnes E, qu. dabuntur in iſta omnia rectangula B, in Y, ideoque omnes Y. Cum ergo omnes Y, dentur in hac ultima curva, quæ eſt circulus ut patet. Igitur eâ tantùm conditione dantur, ſi ſupponas dari circuli quadraturam. Regrediendo igitur ab hac ultimâ, in qua deſinit noſtra analyſis, curva, ad priorem, patet omnes applicatarum ad circulum cubos dari, ſupponendo circuli quadraturam. Idem de quadratocubis, de quadratoquadratocubis, & cæteris in infinitum gradus imparis poteſtatibus demonſtrare eſt in promptu. Sed multiplicatur numerus curvarum, prout altior eſt, de quâ inquirimus, poteſtas. Nec eſt difficilis ab analyſi ad ſyntheſim, & ad verum quadrandæ figuræ calculum regreſſus.

Sæpiùs autem contingit, & miraculi inſtar eſt per plurimas numero curvas incedendum & expatiandum eſſe analyſtæ, ut ad ſimplicem æquationis localis propoſitæ dimenſionem perveniatur.

Proponatur, exempli causâ $\frac{B^7\ in\ A - B^8}{A^6}$ æquari E, qu.

Cùm ſupponatur dari quadratura figuræ ex hac æquatione oriundæ; dabuntur omnes A. Ergo omnes B, in A, quæ ſi æques quadrato ignoto O, qu. dabuntur omnes O, qu. & A, æquabitur $\frac{O\,q}{B}$ ideoque fiet æqu. inter $\frac{B^{12}\ in\ O\ qu. - B^{14}}{O^{12}}$ & E, q. ex hac novâ curvâ, aliâ methodo, de quâ toties egimus, deducetur tertia, in quâ quia dantur omnes O, quadrati, ponatur $\frac{B\ in\ V,}{O}$ æquari E, ergo fiet æquatio inter $\frac{B^{10}\ in\ O\,q - B^{12}}{O^{10}}$ Et V, quadr. unde deducetur quarta curva, in qua dabuntur omnes O, ideoque omnes V. Si dantur omnes V. Ergo ex prima methodo dantur omnia ſub B, in V, rectangula. ſit B, in V, æquale Y, quadrato: ideoque $\frac{Y\ quad.}{B.}$ æquabitur V, fiet æquatio inter $\frac{B^{12}\ in\ O\ qu. - B^{14}}{O^{10}}$ & Y^4 unde orietur quinta curva in quâ dabuntur omnes Y, quadr. Ex illo ſolita methodo deducatur alia curva, & fiat $\frac{B\ in\ I,}{Y}$ æqualis O.

Omnibus ſecundùm præcepta analyſeos peractis fiet B^4 in Y^4 in I, quad. – B^4 in Y^6 æquale I^{10} unde orietur ſexta curva, in quâ dabuntur omnes I, ideoque omnes I. Ex eâ contrariâ quam jam ſæpius inculcavimus methodo quæratur alia curva in qua dentur quadrata applicatarum, & ſit $\frac{I\ in\ A,}{B}$ æqualis Y, (nihil enim vetat defectu vocalium, ad priores ſupra uſurpatas recurrere,) fiet B, qu. in $A^4 - A^6$ æquale

le B, qu. in I^4, unde orietur curva ſeptima, in qua omnia I, quadrata dabuntur. Reducantur ad latera, notâ & ſæpius iteratâ ſuperiùs methodo, & fiat I, quadratum æquale B, in E. Ergò omnia B, in E, dabuntur Et inde deducetur octava curva, in qua B qu. in $A^4 - A^6$ æquabitur B^4 in E qu. in eâque dabuntur omnes E; ideoque omnes A. Ex ea deducatur alia curva, in qua dentur quadrata applicatarum, & ex methodo ponatur $\frac{A\ in\ O,}{B}$ æquari E. Ergo B. qu. in $A^4 - A^6$ æquabitur B, qu. in A qu. in O qu. Et omnibus abs A qu. diviſis, fiet æquatio inter B qu. in A q. – A^4. Et B q. in O q. in qua omnia A, qu. dabuntur, Et erit nona curva ab ea æquatione determinata. Cum igitur in eâ omnia A quadrata dentur, deducatur ex eâ alia tandem curva, in qua dentur latera, & ſit A qu. æquale B in V, fiet B in V – V quad. æquale O, qu. quæ ultima æqualitas dabit decimam curvam, in qua omnes V dabuntur. At hæc ultima curva, eſt circulus, ut patet, & in ea omnes V, non dantur, niſi ſuppoſitâ circuli quadraturâ. Ergo recurrendo ad primam curuæ propoſitæ conſtitutionem, dabitur illius quadratura, ſupponendo ipſam ultimæ iſtius curvæ, ſive circuli quadraturam. Beneficio igitur decem curvarum inter ſe diverſarum ad notitiam prioris pervenimus.

NOVVS SECVNDARVM ET VLTERIORIS ORDINIS RADICVM IN ANALYTICIS USUS.

REDUCTIO ſecundarum, & ulterioris ordinis radicum, ad primas, quæ maximi eſt in Algebricis momenti, unicam pro fundamento agnoſcit duplicatæ æqualitatis analogiam, eamque, quoties opus fuerit, iterandam progreſſus ipſe quæſtionis oſtendit.

Proponatur A, cubus + E, cubo æquari Z, ſolido. Item B, in A, + E q. + D, in E, æquari N, quad. ut ſecunda radix devolvatur ad primam. Hæc ſunto præcepta.

Quæcumque à ſecunda radice adficientur homogenea in unam æquationis partem tranſeunto, ut in ſuperiori exemplo, cum A c. + E c. æquetur Z, ſol. Ergò Z, S. – A c. æquabitur E c.

Similiter cum B in A, + E q. + D, in E, æquetur N q. Ergo N q. – B, in A, æquabitur E q. + D, in E.

In utraque igitur æquatione homogenea ab E, ſive ab ſecunda radice adfecta, unam æquationis partem conſtituunt.

Si igitur duplicata ejuſmodi æqualitas ad analogiam revocetur, erit ut

Z, S, – A c. ad E c.

Ita N q. – B, in A, ad E q. + D, in E.

Cum itaque factum ſub extremis comparabitur facto ſub mediis, tanquam ipſi æquale, omnia homogenea diviſionem admittent per E, ſive per ſecundam radicem, ut patet: quia ſecundus & quartus terminus ab E, adficiuntur.

Erit nempe + Z S, in E q, – A c, in E q, + Z S, in D in E, – A c, in D in E, æquale N q, in E c, – B in A, in E c.

Omnia dividantur toties per E, donec aliquod ex homogeneis adfectione ſub E, omnino liberetur.

Erit Z S, in E, – A c, in E, + Z S, in D, – A c, in D.

æquale N q, in E q, – B in A, in E q.

Quo peracto, nova hæc æquatio, uno ad minus gradu depreſſior erit (quoad ſecundam radicem) quàm elatior ex duabus primùm propoſitis.

Patet nempe elatiorem ex duabus primùm propoſitis affici ſub cubo E, Iſtius verò nullam abs E, adfectionem excedere E q.

Nec tamen ſic quieſcendum, ſed iteranda duplicatæ æqualitatis analogia, donec adfectio ſecundæ radicis fiat tantùm ſub latere, ut aſymmetria omnis evaneſcat.

Præparetur itaque ultima hæc æquatio juxta modum præſcriptum, & homogenea ſub E, quomodocumque affecta unam æquationis partem faciant.

Erit itaque Z S, in D – A c in D, æquale N q, in E q, – B, in A, in E q, – Z S, in E + A c, in E.

Sed ex duabus primùm propoſitis, quæ depreſſior eſt, exhibet æquationem ſequentem ut diximus.

N q, – B, in A.

æquale E q, + D, in E.

Revocetur rurſum ad analogiam duplicata iſta æqualitas.

Erit itaque

Z S, in D, – A c, in D, ad

N q, in E q, – B, in A, in E q, – Z S, in E + A c, in E.

ut N q, – B, in A, ad

E q, + D, in E.

Cum itaque factum ſub extremis æquabitur facto ſub mediis, tamquam ipſi æquale, omnia homogenea poterunt dividi per E, ut ſupra demonſtratum eſt. Erit nempe

Z S, in D, in E q, + Z S, in D q, in E, – A c, in D, in E q, – A c, in D q, in E.

æquale

N qq, in E q, – N q, – in B, in A, in E q, – N q, in Z S, in E + N q, in A c, in E, – B, in A, in N q, in E q, + B q, in A q, in E q, + B, in Z S, in A, in E, – B, in A q q, in E.

Et omnibus abs E, diviſis, fiet tandem Z S, in D, in E, + Z S, in D q, – A c, in D, in E – A c in D q.

æquale

N qq, in E – N q, in B, in A – in E – N q, in Z S, + N q, in A c. – B, in A, in N q, in E, + B q, in A q, in E, + B, in Z S, in A – B in A qq.

Quo peracto, nova hæc æquatio unius adhuc gradus depreſſionem (quoad ſecundam radicem) lucrata eſt, ut hic patet. Cum enim homogenea ſub E, adfecta in unam æquationis partem tranſierint.

Fiet Z S, in D q, – A c in D q + N q, in Z S – N q, in A c – B in Z S, in A + B in A qq.

æquale N qq, in E – N q, in B, in A, in E – B, in A, in N q, in E, + B q, in A q, in E – Z S, in D, in E, + A c, in D, in E.

Neque ùlteriùs progrediendum, cum jam ſecunda radix ſub latere tantùm appareat; ideoque ſolo applicationis beneficio ipſius E, relatio ad primam radicem manifeſtabitur. Vt hic,

Z S, in D q, – A c in D q, + N q, in Z S, – N q, in A c – B, in Z S, in A + B, in A qq.

N qq – N q, in B, in A – N q, in B, in A + B q, in A q, – Z S, in D + A c, in D.

æquabitur E, quò tendendum erat.

Ut igitur duæ primùm propoſitæ radices in unam tranſeant, reſumatur ex duabus prioribus æquationibus quam volueris: depreſſior tamen idonea magis, ne altiùs aſcendat æquatio.

Cum itaque in una ex æquationibus primùm propoſitis B, in A + E q + D, in E, æquetur N q, loco ipſius E, ſubrogetur jam agnitus ejus valor per relationem, vel ad terminos cognitos vel ad priorem radicem, quæ in exemplo propoſito eſt A. Et rurſum ſub hac nova ſpecie ordinetur æquatio; manifeſtum eſt evanuiſſe omnino ſecundam radicem, & in æquationem ab omni aſymmetria liberam itum eſſe, methodumque eſſe generalem. Si enim plures duobus terminis proponantur incogniti, methodus iterata tertias. Si opus fuerit, radices ad primas & ſecundas; deinde ſecundas ad primas, &c. eodem prorſus artificio reducet.

APPENDIX

Ad ſuperiorem methodum.

SUPERIORI methodo debetur perfecta & abſoluta aſymmetriarum in Algebricis expurgatio. Neque enim ſymmetrica climatiſmus Vietæa, quæ unicum hactenus ad aſymmetrias fuit remedium, efficax ſatis & ſufficiens inventa eſt.

Proponatur quippe latus cubicum (B, in A qu. – A cub. + lat. quad. (A q, + 2. in A) + latus quad. quad. D, cub. in A – A, qu. qu.) + latus quad. (G, in A, – A q,) æquari rectæ N.

Qua ratione ab aſymmetriis hujuſmodi extricabit ſe & quæſtionem ſuam Analyſta Vietæus? An non potiùs dum creſcet labor, creſcet difficultas? Et tandem fatigatus & deluſus novum ab analytice lumen expoſcet?

Hoc ſanè luculenter ſuperior methodus ſubminiſtrat: Vnicum exemplum, idque breviſſimum, adjungimus. Recluſo enim ſemel fundamento, cætera apertiſſimè manifeſtantur.

Proponatur lat. cub. (2. in A qu. – A, cub.) – L, cub. (Ac + B q, in A) æquari D.

Ita primum ordinetur æquatio, ut unica ex aſymmetriis unam illius partem faciat.

Fiat nempe D – lat. cub. (Ac + B q, in A) æqualis lat. cub. (2. in A q – A cub.)

Hoc peracto omnes termini aſymmetri à ſecundis & ulterioribus, ſi opus fuerit, radicibus denominentur, excepto eo, quem unicum in unam æquationis partem rejecimus.

Fingatur, verbi gratiâ, lat. cub. (A cub. + B q, in A) eſſe E.

Hac enim viâ ad eam quam injungit ſuperior methodus, duplicatæ æqualitatis analogiam deveniemus.

Erit nempe D – E, æqualis lat. cub. (2. in A q, – Ac,) & omnibus in cubum ductis. D, cubus + D, in E qu. ter – D q, in E, ter – E c. æquabitur 2. in A q – Ac.

Sed ex hypotheſi E, cubus æquatur A, cubò + B, qu. in A.

Ergo oritur duplicata æqualitas, & in utraque (juxta methodum) termini abs ſecunda radice adfecti, in unam æquationis partem ſunt conjiciendi. Erit nempe.

2. in A q – Ac – D c, æqualis D, in E q, ter – D q, in E, ter – Ec.

Item A, cub. + B^2 in A, æqualis E, cub.

Iteretur toties operatio, donec ſecunda radiæ ad primam revocetur. Quo peracto, loco ipſius E, novus ipſius valor uſurpetur, & ſub hac nova ſpecie quævis ex prioribus æqualitatibus ordinetur, omnia conſtabunt.

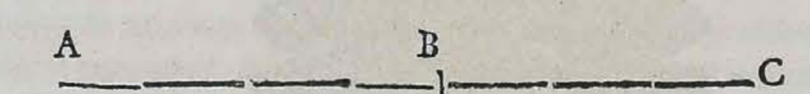
Nec inutilia adjungo, aut moror in ſuperfluis. Quis enim non videt ſingulos terminos aſymmetros poſſe eadem ratione, ſi non ſufficiant ſecudæ radices, tertiis, quartis, &c. in infinitum inſigniri? Quo caſu quartam, ſive ultimam radicem tamquam ſecundam conſiderabis. Reliquas verò tantiſper, vel pro primis, vel pro terminis cognitis habebis, donec ultima illa omnino evanuerit, ſive ad primas, ſecundas & tertias reducta fuerint. Simili prorſus artificio tertias reduces ad ſecundas & primas, ac denique ſecundas ad primas, ut jam ſæpius inculcavimus.

Nulla eſt ergo aſymmetria quam non cogat exulare hæc methodus, cujus uſus præſertim eximius, imò & neceſſarius innumeroſa poteſtatum reſolutione. Statim enim nempe atque aſymmetriæ evanuerint, non deerit Vietæum in arithmeticis quæſtionibus artificium: & ſi veris explicari numeris quæſtio non poſſit, proximæ, quantumvis libuerit, ſuppetent ſolutiones. Cum tamen proximas veris ſolutiones, nullo pacto, quandiu duraverint aſymmetriæ, conſequi poſſis.

Sed & ulteriùs inquirenti obtulit ſe mira ad locorum ſuperficialium plenam & perfectam notitiam exinde derivanda methodus, quæ & ijs problematis inſervit, in quibus dantur ab initio plura quam requirat ipſa problematis conſtruendi determinatio.

Quod ut clariùs intelligas, ſunt quædam problemata quæ unicam tantùm agnoſcunt poſitionem ignotam, quæ vocari poſſunt determinata, ad differentiam inter ipſa & problemata localia conſtituendam. Sunt alia quædam quæ duas poſitiones ignotas habent, & ad unicam tantùm numquam poſſunt reduci; ea problemata ſunt localia. In prioribus illis unicum tantum punctum inquirimus; in iſtis lineam. Sed ſi problema propoſitum tres ignotas poſitiones admittat, problema hujuſmodi non jam punctum dumtaxat, aut lineam tantùm, ſed integram ſuperficiem quæſtioni idoneam inveſtigat. indeque oriuntur loci ad ſuperficiem, &c. in reliquis.

Sicut autem in prioribus data ipſa ſufficiunt ad determinationem quæſtionis, ita in ſecundis unum datum deeſt ad determinationem; in tertiis verò duo tantùm data determinationem poſſunt complere. At contrà poteſt fieri ut quemadmodum in his caſibus data aut ſufficiant aut deſint: ita in pleriſque aliis data ipſa ſuperflua ſint & abundent. Exemplo res fiet evidens.



In recta A C, datâ, datur rectangulum A B C. Datur etiam differentia quadratorum A B, & B C.

In hoc caſu plura patet offerri data quàm determinatio, ideoque ſolutio ipſius quæſtionis expoſcat.

Frequentiſſimus tamen horum problematum, in phyſicis præſertim & apud artifices eſt uſus, eaque omnia per applicationem ſimplicem beneficio noſtræ methodi expediuntur; neque recurrendum ad extractionem radicum, licèt æquationes ad quaſvis poteſtates aſcendant.

Proponatur, verbi gratiâ in quadam quæſtione A, cub. + B, qu. in A, æquari 2. qu. in D.

Item etiam (cum ex hypotheſi quæſtio ſupponatur eſſe abundans: has enim quæſtiones abundantes, ſicut locales deficientes appellare conſuevimus) G, ſol. in A – A q q, æquari B, qu. in N, pl. Duplicata hæc æqualitas ad analogiam revocetur, & ex præſcripta methodo conſideretur unica noſtra radix ignota, quæ in hoc exemplo eſt A, ſicut in præcedentibus ſecundam, aut ulterioris ordinis radicem conſideravimus, & toties juxta methodum iteretur operatio, donec adfectio ſub A, per ſimplicem applicationem poſſit expediri, ſive non tam ad primas radices, quàm ad terminos omnino notos reduci. Patebit ſolutio problematis ſimpliciſſima, nec analyſtam deinceps æquationes quadraticæ, &c. remorabuntur.

Lubet & coronidis loco, famoſi illius problematis:

Datis ellipſi & puncto extra ipſius planum, ſuperficiem conicam, cujus vertex ſit punctum datum, & baſis ellipſis data, ita plano ſecare, ut ſectio ſit circulus.

Solutionem quæ huic methodo debetur, indicare, eamque ſimpliciſſimam.

Eò deducunt quæſtionem Geometræ, ut ſumptis quinque punctis ad libitum in ellipſi, & junctis rectis à vertice conicæ ſuperficiei ad puncta illa per junctas quinque rectas circulum deſcribant. Inveniuntque problema hoc pacto eſſe ſolidum. Sed cum puncta in ellipſi ſint infinita, ſi loco quinque punctorum ſumantur ſex, fiet problema abundans, & orietur neceſſariò duplicata æqualitas, quæ tandem ignotam quantitatem per ſimplicem applicationem patefaciet.

Eadem ratione ſi detur quæcumque linea curva in plano, aut etiam ſuperficies localis, cujuſcumque tandem gradus ſint, invenientur diametri & axes figurarum; imo & in ſuperficie locali exhibebuntur omnes omnino curvæ loci ſuperfieialis conſtitutivæ, &c.

Exponatur, verbi gratiâ, ſuperficies conica, cujus vertex ſit punctum datum, baſis verò, parabole aut ellipſis cubica, aut quadratoquadratica, aut ulterioris in infinitum gradus.

Poteſt hujuſmodi ſuperficies conica, beneficio iſtius methodi ita ſecari, ut in ea exhibeatur quælibet curva, quæ ex conſtitutione figuræ in ea ſuperficie poteſt deſcribi, & problematis ſolutio ſemper evadet ſimpliciſſima.

Nihil addimus de tangentibus curvarum, & pleriſque aliis hujus methodi uſibus: fient quippe obvii, nec ſedulam indagatoris analytici meditationem effugient.

METHODUS

Ad diſquirendam maximam & minimam.

OMNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina, duabus poſitionibus ignotis innititur, & hac unica præceptione; ſtatuatur quilibet quæſtionis terminus eſſe A, ſive planum, ſive ſolidum, aut longitudo; prout propoſito ſatisfieri par eſt, & inventa maxima aut minima in terminis ſub A, gradu ut libet inuolutis; Ponatur rurſus idem qui prius eſſe terminus A, + E, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis ſub A & E, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra ab E, vel ipſius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elatiorem ipſius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis affectione ſub E, omnino liberetur.

Elidantur deinde utrimque homogenea ſub E, aut ipſius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquentur. Aut ſi ex unâ parte nihil ſupereſt æquentur ſane, quod eodem recidit, negata adfirmatis. Reſolutio ultimæ iſtius æqualitatis dabit valorem A, quâ cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris reſolutionis veſtigiis innoteſcet.

Exemplum ſubijcimus

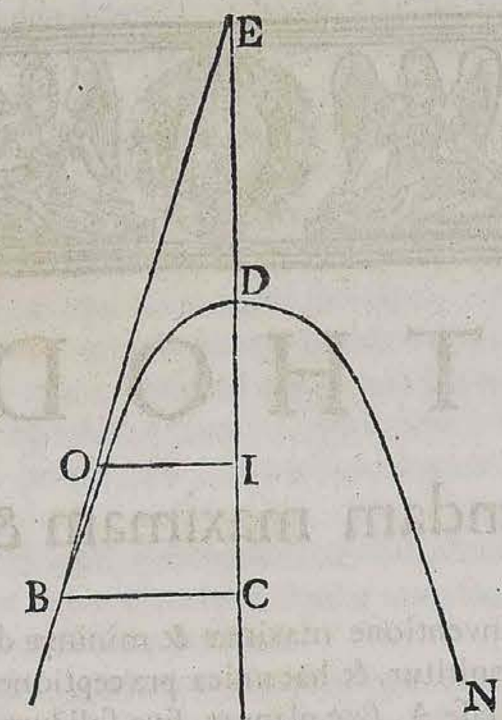
Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang A E C, ſit maximum; Recta A C, dicatur B.

A E C

ponatur par altera B, eſſe A, ergo reliqua erit B − A, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A − A^2 quod debet inueniri maximum. Ponatur rurſus pars altera ipſius B, eſſe A, + E, ergò reliqua erit B − A − E, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A, − A^2 + B, in E, ^{2}E in A, − E, quod debet adæquari ſuperiori rectang. B, in A, − A^2, demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E'' + E^2, & omnibus per E, diviſis B, adæquabitur ^{2}A + E, elidatur E, B, æquabitur ^{2}A, igitur B, biſariam eſt dividenda, ad ſolutionem propoſiti, nec poteſt generalior dari methodus.

De Tangentibus linearum curvarum.

AD ſuperiorem methodum inventionem Tangentium ad data puncta in lineis quibuſcumque curvis reducimus.

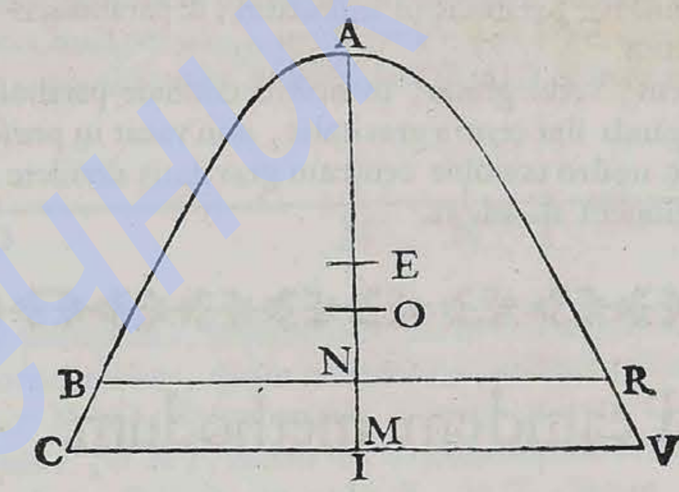


Sit data, verbi gratià, Parabole B D N, cujus vertex D, diameter D C, & punctum in ea datum B, ad quod ducenda eſt recta B E, tangens parabolen, & in puncto E, cum diametro concurrens, ergo ſumendo quodlibet punctum O I, in recta B E, & ab eo ducendo ordinatam O I, à puncto autem B, ordinatam B C major erit proportio C D, ad D I, quàm quadrati B C, ad quadratum O I, quia punctum O, eſt extra parabolen, ſed propter ſimilitudinem triangulorum, ut B C, quad. ad O I, quad. ita C E, quad. ad I E, quad. Major igitur erit proportio C D ad D I, quàm quadrati C E ad quad. I E, Cum autem punctum B detur, datur applicata B C, ergo punctum C datur etiam C D, Sit igitur C D, æqualis D, datæ. Ponatur C E, eſſe A, ponatur C I eſſe E, ergo D, aut D − E habebit majorem rationem, quàm A^2 ad $A^2 + E^2 - A$, in E. Et ducendo inter ſe medias & extremas D in A^2 + D in E^2 − D in A in E, majus erit quàm D, in A^2 − A^2 in E, Adæquentur igitur juxta ſuperiorem methodum, demptis itaque communibus D, in E^2 − D, in A in E adæquabitur − A^2 in E, aut quod idem eſt, D in E^2, + A^2 in E, adæquabitur D in A in E, Omnia dividantur per E, ergo D in E + A^2 adæquabitur D in A, elidatur D in E, ergo A^2 æquabitur D in A^2, ideoque A æquabitur D, ergo C E, probavimus duplam ipſius C D, quod quidem ita ſe habet.

Nec unquam fallit methodus, imò ad pleraſque quæſtiones pulcherrimas poteſt extendi, ejus enim beneficio centra gravitatis in figuris lineis curvis & rectis comprehenſis, & in ſolidis invenimus, & multa alia, de quibus fortaſſe aliàs, ſi otium ſuppetat. De quadraturis ſpatiorum ſub lineis curvis & rectis contentorum, imò & de proportione ſolidorum ab eis ortorum ad conos ejuſdem baſis & altitudinis, fusè cum Domino de Roberval egimus.

Centrum

Centrum gravitatis, parabolici conoidis, ex eadem methodo.



ESTO parabolicus Conois C B A V, cujus axis I A, baſis, circulus circa diametrum C I V, quæritur centrum gravitatis perpetuâ & conſtanti, quâ maximam, & minimam & tangentes linearum curvarum inveſtigavimus methodo, ut novis exemplis & novo uſu, eoque illuſtri, pateat falli eos qui fallere methodum exiſtimant.

Ut poſſit parari analyſis, axis I A, dicatur B, ponatur centrum gravitatis eſſe O, & rectam A O, ignotam, dici A, ſecetur axis I A, quovis plano ut B N, & ponatur I N, eſſe E, ergò N A, erit B − E, conſtat in hac figura & ſimilibus (parabolis aut parabolicis) centra gravitatum in portionibus abſciſſis, per parallelas baſi in eadem proportione dividere axes (quod in parabola ab Archimede demonſtratum porrigitur, non diſſimili ratiocinio ad parabolas omnes, & parabolicos conoides, ut patet) ergo centrum gravitatis portionis cujus axis N A, baſis ſemidiameter B N, ita dividet A N, in puncto, verbi gratia, E, ut ratio N A, ad A E, ſit eadem rationi I A, ad A O, erit igitur in notis ut B, ad A, ita B − E, ad portionem axis A E, quæ idcirco æquabitur $\frac{B \text{ in } A - A \text{ in } E}{B}$, & ipſa O E, quæ eſt intervallum inter duo centra gravitatis æquabitur $\frac{A \text{ in } E}{B}$, ponatur portionis reliquæ C B R V, centrum gravitatis eſſe M, quod neceſſariò debet eſſe inter puncta N, & intra figuram per pet. 9. Archimed. de æquipond. cum figura C B R V, ſit in eaſdem partes cavas, ſed ut portio C B R V, ad portionem B A R, ita eſt E O, ad O M, cum O, ſit centrum gravitatis totius figuræ C A V, & puncta E, & M, ſint centra gravitatis partium, Portio autem C A V, ad portionem B A R, eſt in noſtro conoide Archimedæo ut quadratum I A, ad quadratum N A, hoc eſt in notis ut b^2 ad $B^2 + E^2 - B$ in E″, ergo dividendo portio C B R V, eſt ad portionem B A R, ut B in E″ − E^2 B in E″, demonſtrauimus autem ut portio C B R V, ad portionem B A R, ita eſſe O E, ad O M, erit igitur in notis ut B in E^2 − ad $B^2 + E^2 + E^2$ E B, in E″ ita O E, ſive $\frac{A \text{ in } E}{B}$, ad O M, quæ proinde applicabitur $\frac{B^2 \text{ in } A \text{ in } E'' + A \text{ in } E^3 - B \text{ in } A, \text{ in } {}^2E^2}{B^2 \text{ in } E'' - B \text{ in } {}^2B}$

Cum autem punctum M, ex demonſtratis, ſit inter puncta N, & I, ergo recta

I

O M, erit minor rectâ OI recta autem O I, in notis est B − A, deducta est igitur quæstio ad methodum, & adæquanda B − A cum $\frac{B^2 \text{ in } A, \text{ in } E, + A \text{ in } E^3 - B \text{ in } A \text{ in } {}^2E^2}{B^2 \text{ in } E - B \text{ in } E^2}$.

Et omnibus ductis in denominatorem & abs E divisis adæquabuntur $^2B^3 - B^2$ in $^2A - B^2$ in E − B in A in E, & B^2 in A + E^3 − B in A in ^2E, quandoquidem nihil est utrimque commune elidantur homogenea omnia ab E, adfecta, & æquentur reliqua, fiet $^2B^3 - B^2$ in ^2A æqualis B^2 in A, ideoque ^3A æquabitur ^2B. Erit igitur I A, ad A O, ut 3. ad 2. & A O, ad O I, ut 2, ad 1, quod erat inveniendum. Non dissimili methodo in quibuslibet parabolis in infinitum, & parabolicis conoidibus inveniuntur centra gravitatum.

Quemadmodum autem, verbi gratia, in nostro conoide parabolico circa applicatam axi converso indaganda sint centra gravitatis, non vacat in præsens judicare, sufficit aperuisse me in hoc nostro conoide centrum gravitatis dividere axem in portiones quæ servant proportionem 11. ad. 51.

Ad eamdem methodum.

VOLO mea methodo secare lineam A C datam ad punctum B, ita ut solidum contentum sub quadrato A B, & linea B C sit maximum omnium solidorum eodem modo descriptorum secando lineam A C, in quovis alio puncto.

Ponamus in notis Algebricis lineam A C, vocari B, & lineam A B, incognitam A, B C, erit B − A; oportet igitur solidum A^2 in B − A, satisfacere quæstioni.

Sumamus iterum loco A, A + E, solidum quod fiet ex quad. A + E, & ex B E A, erit B in A^2, + B in E^2 + B in A in $^2E - A^3$ − A in $^3E^2 - A^2$ in ^3E.

Id comparo primò solido A^2 in B − A^3, tamquam essent æqualia, licèt reverà æqualia non sint, & hujusmodi comparationem vocavi adæqualitatem, ut loquitur Diophantus, sic enim interpretari possum græcam vocem παρισότης qua ille utitur, deinde è duobus solidis demo quod iis est commune scilicet B^2, in A − A^3, quo peracto nihil ex unâ parte superest, & superest ex alia B in E^2 + B in A in $^2E - A^2$ in $^3E^2 - A^2$ in $^3E - E^3$, Comparanda sunt ergo homogenea notata signo + cum ijs quæ notantur signo −, & iterare comparationem adæqualitatem oportet inter B in E + B, in A, in ^2E, ex unâ parte, & A, in $^3E^2 + A^2$ in $^3E + E^3$ ex altera totum dividamus per E. Comparatio adæqualitas, erit inter B, in E + B, in ^2A, & A, in $^3E + {}^3A^2 + E^2$.

Hac divisione peracta si omnia homogenea dividi possunt per E, iteranda erit divisio per E, donec reperiatur aliquod ex homogeneis quod hujusmodi divisionem non admittat, id est, ut Vietæis verbis utar, quod non afficiatur ab E, sed quia in exemplo proposito comperimus divisionem iterari non posse, hîc standum est. Deinde utrimque deleo homogenea, quæ afficiuntur ab E, superest ex unâ parte B, in ^2A, & ex alia $^3A^2$, inter quæ non amplius facere oportet æquationes, ut antea, comparationes fictas & adæqualitates, sed veram æquationem. Dividamus totum per A, ergo ^2B, erit æquale ^3A, & B, erit ad A, ut 3 ad 2. Redeamus ad nostram quæstionem, & dividamus A C, in puncto B, ita ut A C, sit ad A B, ut 3 ad 2 dico solidum quadrati A B, in B C, esse maximum omnium quæ describi possunt in eadem linea C, in qualibet alia sectione.

Ut pateat hujus methodi certitudo, desumam exemplum è libro Apollonij de determinata sectione, qui ut reffert Pappus initio septimi libri, difficiles determinationes habebat, & eam quæ sequitur difficillimam esse existimo, quam ut ut inventam supponit Pappus septimo libro, nec enim illam veram esse demonstrat, sed ut veram supponens, alias inde consequentias deducit. Hoc loco Pappus vocat minimam proportionem μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον minimam & singularem, ideò scilicèt, quia si proponatur quæstio circa magnitudines datas duobus semper locis satisfit quæstioni; sed in minimo aut maximo termino unicus est qui satisfaciat locus, idcirco Pappus vocat minimam & singularem, id est unicam quæstionem omnium quæ proponi possunt minimam. Commandinus hoc loco dubitat, quid per μοναχὸς intelligat Pappus, & veritatem quam modo explicui ignoravit; sed ecce propositionem. Sit recta data O MID, & in ea quatuor puncta O MID,

data, dividenda est portio M I, in puncto N, Ita ut rectanguli O N D, sit ad rectangulum M N I, proportio minor, quàm proportio cujuslibet rectanguli paris O N D, ad quodvis aliud par M N I, supponamus in notis lineam O M, datam vocari B, lineam D M, datam Z, & M I, datam G, fingamus nunc M N, quod quærimus vocari A, ergo rectangulum O N D, in notis B, in Z − B, in A + Z, in A − A^2 & rectangulum M N I, erit G, in A − A^2, oportet igitur proportionem B, in Z − B + Z, in A − A^2 ad G, in A − A^2 esse minimam omnium quæ fieri possunt qualibet alia divisione lineæ M I, sumamus iterùm loco A, A + E, & habebimus proportionem B, in Z − B, in A − B, in E + Z, in A + Z in E − $A^2 - E^2$ − A, in ^2E, ad G, in A + G, in E − $A^2 - E^2$ − A, in ^2E, quam primæ comparare per adæqualitatem oportebit, id est multiplicare primum terminum per quartum ex una parte, & secundum per tertium ex alia, & simul hæc duo producta comparare, productum B, in Z − B, in A + Z, in A − A^2 qui prior est terminus per G, in A, + G, in E − $A^2 - E^2$ − A, in ^2E, qui est ultimus terminus, facit B, in Z, in G, in A − G, in B, in A^2 + G, in Z, in A^2 − G, in A^3 + B in Z in G in E − B in A in G in E + Z in A in G in E − A^2 in G in E − B in Z in A^2 + B in A^3 − Z in A^3 + A^4 − B in Z, in E^2 + B in A in E^2 − Z in A in E^2 + A^2 in E^2 − B in Z in A in ^2E + B in A^2 in ^2E − Z in A^2 in ^2E − Z in A^2 in ^2E + A^3 in ^2E.

Productum autem G in A − A^2 secundi termini per B in Z − B in A − B in E + Z in A + Z in E − $A^2 - E^2$ − A in ^2E tertium terminum facit B in Z in G in A − G in B in A^2 − G in B in A in E + G in Z in A^2 + G in Z in A in E − G in A^3 − G in A in E^2 − G in A^2 in ^2E − B in Z in A^2 + B in A^3 + B in A^2 in E − Z in A^3 − Z in A^2 in E + A^4 + A^2 in E^2 + A^3 in ^2E.

Comparo hæc duo producta per adæqualitatem, demamus quod ipsis commune est & residuum dividamus per E, supererit ex una parte B in Z in G − A^2 in G − B in Z in E + B in A in E − Z in A in E − B in Z in ^2A − Z in $^2A^2$ − B in $^2A^2$, & ex alia G in A in E − G in $^2A^2$ + B in A^2 − Z in A^2.

Deleamus omnia homogenea inter quæ iterum reperitur E, supererit,

B in Z in G − A^2 in G − B in Z in ^2A − Z in $^2A^2$ + B in $^2A^2$ æquale.

− G in $^2A^2$ + B in A^2 − Z in A^2.

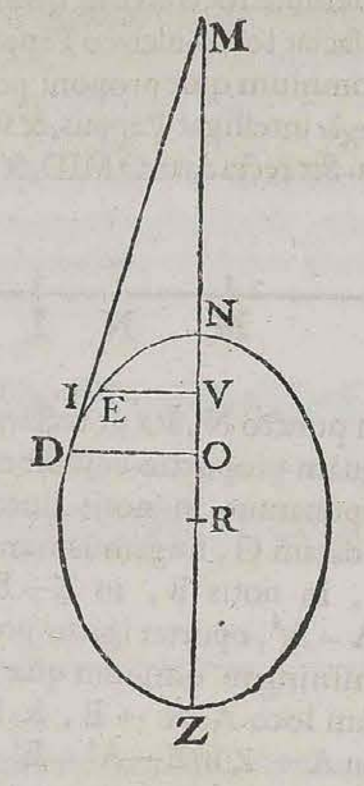
Et transponendo.

− B in A^2 + Z in A^2 − G in A^2 + B in Z in ^2A erit æquale B in Z in G.

Istius æquationis resolutione reperiemus valorem lineæ A, id est valorem M N, & consequenter punct. N & inveniemus veritatem propositionis Pappi qui docet ad reperiendum punctum N, oportere facere ut rectangulum O N D ad rectangulum O I D, ita quadratum M N ad quadratum N I, æquationis enim resolutio nos ad eamdem constructionem deducit.

Ut tandem tangentibus applicetur hæc methodus ſic procedere poſſum.

Sit, verbi gratiâ, Ellipſis Z D N, cujus axis ſit Z N, & centrum R, ſumamus punctum ut D, in ejus circumferentia à quo ducamus lineam D M quæ tangat Ellipſim, ducamus præterea applicatam D O, & ſupponamus notis Algebricis O Z datam vocari B & O N datam vocari G, fingamus O M quam quærimus incognitam vocari A, intel-



ligimus autem per O M portionem Axis contentam inter punctum V ſumptum ad libitum, inter punctum O & concurſum tangentis.

Quoniam D M tangit Ellipſim ſi ducamus lineam I E V parallelam D O per punctum V ſumptùm ad libitum inter O & N, certum eſt lineâ I E V ſecari tangentem D N, & Ellipſim quoque ut in punctis E & I, & quia linea D M tangit Ellipſim omnia puncta præter D erunt extra Ellipſim, ergo linea I V, erit major lineâ E V. Erit igitur major proportio quadrati D O ad quadratum E V quàm quad. D O ad quad. I V, ſed ut quad. D O ad quad. E V ita proprietate Ellipſis rectang. Z O N eſt ad rectang. Z V N, & ut quad. D O ad quad. I V ita quad. O M ad quad. V M, major eſt igitur proportio rectang. Z O N ad rectang. Z V N quam quad. O M ad quad. V M. Fingamus ſumptam ad libitum æqualem E, rectang. Z O N erit B in G, rectang. Z V N erit B in G $-$ B in E $+$ G in E $-$ E^2 quad. O M erit A^2 quad. V M $A^2 + E^2 -$ A in ${}^2E$.

Erit igitur major proportio B in G ad B in G $-$ B in E $+$ G in E $-$ E^2 quam A^2 ad $A^2 - E^2 -$ A in ${}^2E$. Et conſequenter ſi multiplicetur prior terminus per ultimum & ſecundus per tertium B in G in A^2 $+$ B in G in E^2 $-$ B in G in A in ${}^2E$, productum ſcilicet prioris termini per ultimum, erit majus B in G in A^2 $-$ B in E in A^2 $+$ G in E in $A^2 - A^2$ in E^2.

Oportet igitur juxta meam methodum comparare hæc duo producta per adæqualitatem; demamus quod iis commune eſt & dividamus reſiduum per E, ſupererit ex unâ parte,

B in G in E $-$ B in G in ${}^2A$, & ex alia,

$-$ B in A^2 $+$ G in A^2 $-$ A^2 in E Deleamus homog, quæ aliquid habent lineæ E, ſupererit ex una parte,

$-$ B in ${}^2A$, & ex alia $-$ B in A^2 $+$ G in A^2.

Quos duos terminos juxta methodum æquare oportet & tranſponendo terminos ut par eſt, inveniemus B in A $-$ G in A, æquale B in ${}^2G$. Vides hanc reſolutionem eam-

dem eſſe cum Apolloniana, nam meâ conſtructione ad reperiendam tangentem oportet facere ut B $-$ G ad G ita ${}^2B$ ad A, id eſt ut Z O $-$ O N ad O. N, ita ${}^2Z$ O ad O N, ſed Apollonianâ oportet facere ut Z O ad O N, ita Z M ad M N. Duæ autem illæ conſtructiones ut patet in idem recidunt; plura poſſem alia exempla addere, tum primi tum ſecundi caſus meæ methodi, ſed hæc ſufficiunt, & eam eſſe generalem ac numquam fallere ſatis probant. Demonſtrationem regulæ non adjicio nec pleroſque alios uſus qui illius perfectionem confirmare poſſent, nec inventionem centrorum gravitatis aſymptotωn quorum exemplum miſi doctiſſimo D. de Roberval.

Ad eamdem Methodum.

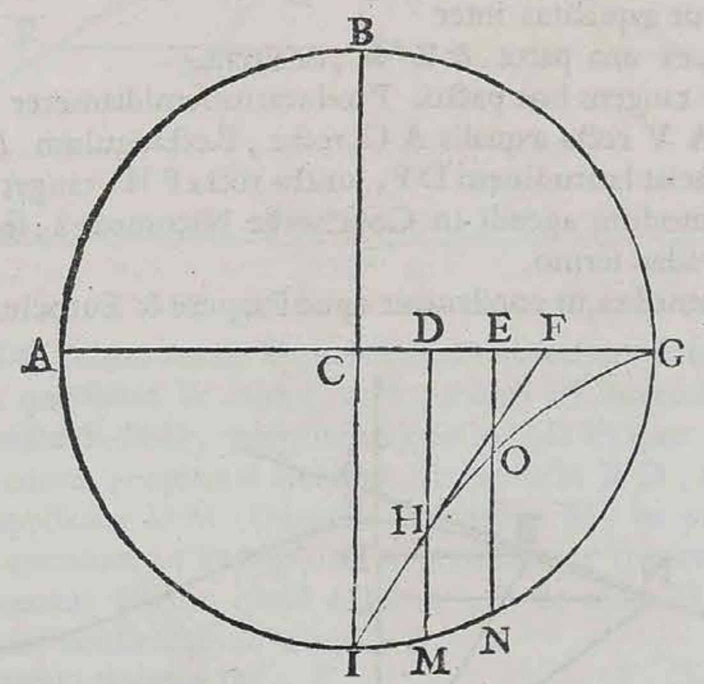
DOctrinam tangentium antecedit jamdudum tradita Methodus de inventione maximæ & minimæ, cujus beneficio terminantur quæſtiones omnes dioriſticæ, & famoſa illa problemata quæ apud Pappum in Præf. lib. 7. difficiles determinationes habere dicuntur, facillimè determinantur.

Lineæ curvæ, in quibus tangentes, inquirimus, proprietates ſuas ſpecificas vel per lineas rectas tantùm abſolvunt, vel per curvas, rectis aut alijs curvis quomodolibet implicatas.

Priori caſui jam ſatisfactum eſt præcepto, quod quia conciſum nimis, difficile ſanè, ſed tamen ſufficiens tandem repertum eſt.

Conſideramus nempe in plano cujuſlibet curvæ rectas duas poſitione datas, quarum altera diameter, ſi libeat, altera applicata nuncupetur. Deinde jam inventam tangentem ſupponentes ad datum in curva punctum, proprietatem ſpecificam curvæ, non in curva ampliùs, ſed in invenienda tangente, per æqualitatem conſideramus, & eliſis, quæ monet doctrina de maxima & minima, homogeneis fit demum æqualitas, quæ punctum concurſus tangentis cum diametro determinat, ideóque ipſam tangentem.

Exemplis, quæ olim multiplicia dedimus, addatur, ſi placet, tangens ciſſoidis, cujus Diocles traditur inventor.



Esto circulus duabus diametris A G, B I, normaliter sectis, & sit cissois I H G, in qua sumpto quolibet puncto, ut H, ducenda est à puncto H, tangens ad cissoidem, sit factum, & ducta tangens H F, secet rectam C G, in F, ponatur recta D F, esse A, & sumpto quolibet puncto inter D, & F, ut E, ponatur recta D E esse E. Cum igitur ex proprietate specifica cissoïdis recta M D, sit ad D G, ut D G, ad D H, fiat jam in terminis analyticis per adæqualitatem, ut N E, ad E G, ita E G, ad portionem rectæ E N, quæ intercipitur inter punctum E, & tangentem, & est E O,

Vocetur A D, data Z.
D G, data N.
D H, data R.
D F, quæsita, ut diximus, A,
D E, sumpta ad libitum E.
Ergo E G, vocabitur N − E.
E O, vocabitur $\frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}$.

E N, vocabitur latus Z in N − Z in E + N in E − E².

Cùm igitur ex præcepto proprietas specifica debeat considerari, non amplius in curva, sed in tangente, ideoque faciendum sit ut N E, ad E G, ita E G, ad E O, quæ applicatur tangenti: ergo in terminis analyticis faciendum ut

Latus Z in N − Z in E + N in E − E²,
Ad N − E.
Ita N − E.
Ad $\frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}$.

Et quadratis singulis terminis ad vitandam asymmetriam fiet ut

Z in N − Z in E + N in E − E².
Ad N², + E². − N in ²E.
Ita N² + E².
Ad $\frac{R^2 A^2 + R^2 E^2 - R^2 A\, {}^2E}{A^2}$.

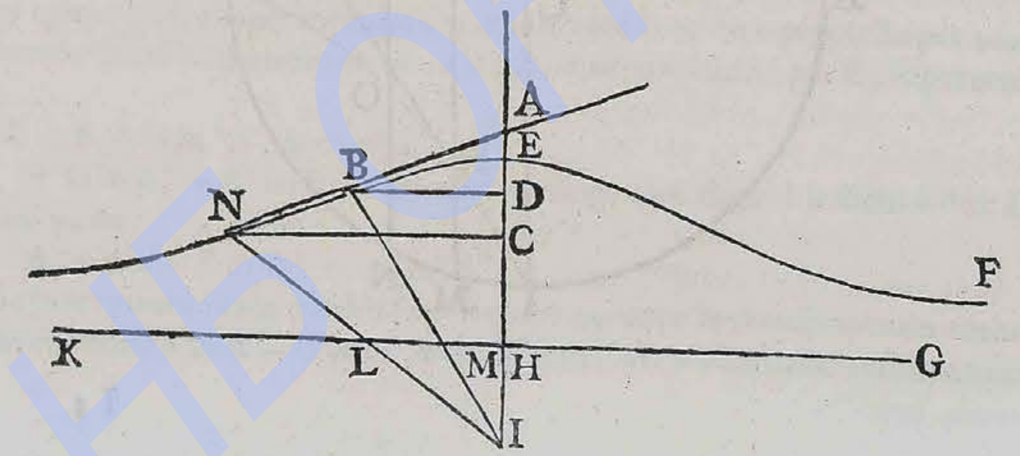
Ducantur singula homogenea in A², & deinde quod fit sub extremis, adæquetur ex præceptis artis, ei quod fit a medio, elisis deinde superfluis, ut monet methodus, tandem orietur æqualitas inter

Z³ A + N A, ex una parte, & Z² N, ex altera.

Construetur igitur tangens hoc pacto. Producatur semidiameter circuli dati A ad punctum V, & fiat A V recta æqualis A C, rectæ, Rectangulum A D G ad rectam V D, applicetur, & faciat latitudinem D F, juncta recta F H, tanget cissoïdem.

Indicemus etiam modum agendi in Conchoide Nicomedæâ; sed indicemus tantum, ne proclivior evadat sermo.

Esto conchois Nicomedæa, ut construitur apud Pappum & Eutocium figura sequens.



Polus est punctum I, recta K G, est asymptotos curva, recta I H E, perpendicularis ad asymptoton. Punctum N datum in curva, ad quam ab eo puncto ducenda tangens B A concurrens cum I E in puncto A, sit factum ut supra, ducatur N C, parallela K G, ex proprietate specifica curvæ, recta L N est æqualis rectæ H E. Sumatur quodlibet punctum inter C & E, ut D, à quo rectæ C N parallela ducatur D B, occurrens tangenti in puncto B. Quia igitur proprietas specifica debet considerari in tangente, jungatur B G, occurrens rectæ K G, in M, & ex præceptis artis recta M B adæquetur rectæ H E, orietur tandem quæsita æqualitas, quod ut prodeat,

C A, ut supra vocetur A
C D, sit E
E N data sit Z

Et reliquæ datæ suis nominibus designentur.

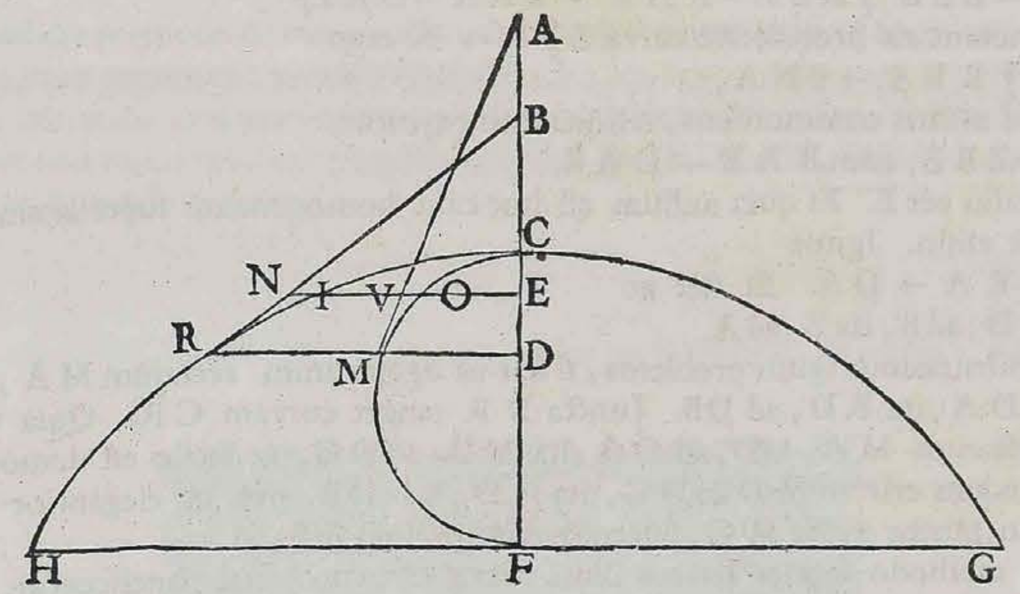
Invenietur facillimè recta M B, in terminis analyticis, quæ si adæquetur, ut dictum rectæ H E, solvetur quæstio.

Hæc de priore casu videntur sufficere. Licet enim praxes infinitæ suppetant, quæ prolixitates evitant; ex his tamen nullo negotio deduci possunt.

Secundo casui, quem difficilem judicabat D. DesCartes, cui nihil difficile, elegantissima, & non insubtili methodo sit satis.

Quamdiu rectis tantùm lineis homogenea implicabuntur, quærantur ipsa & designentur per præcedentem formulam, Imò & vitandæ asymmetriæ causâ aliquando, si libuerit, applicatæ ad tangentes ex superiore methodo inventas, pro applicatis ad ipsas curvas sumantur, & demùm, quod operæ pretium est, portiones tangentium jam inventarum pro portionibus curvæ ipsis subjacentis sumantur, & procedat æqualitas, ut supra monuimus, proposito nullo negotio satisfiet.

Exemplum in curva Cycloide D. De Roberval assignamus.



Sit curva H R I C, cujus vertex C, axis E F, & descripto semicirculo C O M F, sumatur punctum quodlibet in curva, ut R, a quo est ducenda tangens R B, ducatur à puncto R recta R M D, perpendicularis in C D F, quæ secet semicirculum in M. Ea igitur curvæ proprietas specifica est, ut recta R D, sit æqualis portioni circuli A M, & applicatæ D M: Ducatur in puncto M, ex præcedente methodo tangens M A, ad circulum, (eadem nempe procederent si curva C O M esset alterius naturæ) Ponatur factum quod quæritur, & sit recta D B quæsita, æqualis A, D A inventa ex constructione æqualis B.

M A itidem inventa vocetur D,
M D data vocetur R,

RD vocetur Z
CM portio circumferentiæ data ſit N
DE recta utcumque aſſumpta ſit E,
Et a puncto E ducatur EOVIN parallela rectæ RMD,

Fiat ut A ad A − E, ita Z ad $\frac{ZA - ZE}{A}$ quæ idcirco æquabitur rectæ NIOVE;

Igitur recta $\frac{ZA - ZE}{A}$ debet æquari propter proprietatem ſpecificam curvæ quæ in tangente conſideranda eſt, rectæ OE, unà cum curva CO. Curva autem CO æquatur curvæ CM − curvâ MO. Ergo recta $\frac{ZA - ZE}{A}$ debet æquari rectæ OE, & curvæ CM − curvâ MO. Ut autem hi termini ad terminos analyticos reducantur, pro rectâ OE, ad vitandam aſymmetriam, ex ſuperiore cautione ſumatur recta EV, applicata tangenti; & pro curva MO, ſumatur portio tangentis MV, cui ipſa MO adjacet: ad inveniendam autem EV, in terminis analyticis fiet ut B ad B − E, ita R ad $\frac{RB - RE}{B}$ quæ idcirco æquabitur ipſi EV.

Ad inveniendam deinde MV, fiet ut B, ad D, ita E ad $\frac{DE}{B}$, quæ idcirco propter triangulorum ſimilitudinem, ut ſupra, æquabitur MV: Curva autem CM, vocata eſt N, igitur in terminis analyticis fiet æqualitas inter $\frac{ZA - ZE}{A}$ ex una parte

Et $\frac{RB - RE}{B} + N - \frac{DE}{B}$, ex altera;

Ducantur omnia in BA,
$ZBA - ZBE \backsim RBE - RAE + BNA - DAE$,
Cum autem ex proprietate curvæ $Z \backsim R + N$ ergo
$ZBA \backsim RBA + BNA$,
Ideoque ablatis communibus, reliqua comparentur,
Nempe ZBE, cum RAE + DAE,

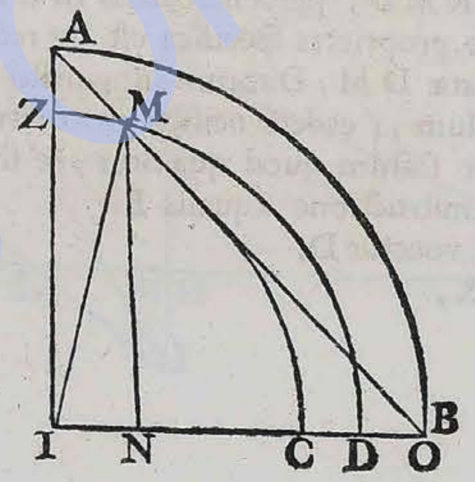
Fiat diviſio per E. Et quia nullum eſt hoc caſu homogeneum ſuperfluum, nulla fieri debet eliſio. Igitur
$ZB \backsim RA + DA$. Et fiet ut
R + D, ad B, ita Z, ad A.

Ad conſtruendum igitur problema, ſi fiat ut aggregatum rectarum MA, MD, ad rectam DA, ita RD, ad DB. Juncta BR tanget curvam CR. Quia verò ut ſumma rectarum MA, MD, ad DA, ita MD, ad DC, ut facile eſt demonſtrare. Ideo faciendum erit ut MD ad DC, ita RD, ad DB, ſive ut elegantior evadat conſtructio junctæ rectæ MC, ducenda erit parallela RB.

Eadem methodo ſpecies omnes illius curvæ tangentes ſuas nanciſcentur.

Conſtructionem generalem olim dedimus.

Quoniam verò quæſitum eſt de tangente quadratariæ, ſive quadratricis Dinoſtrati, ita conſtruimus ex præceptis præcedentibus.



Sit quadrans circuli AIB, quadrataria AMC, in qua ad datum punctum M, ducenda eſt tangens. Juncta MI, centro I, intervallo IM quadrans ZMD, deſcribatur, & ducta perpendiculari MN, fiat ut IM ad MN, ita portio quadrantis MD, ad rectam NO, juncta MO, tanget quadratariam; hæc ſufficiant.

Quia tamen ſæpiùs curvatura mutatur, ut in Conchoïde Nicomedæa, quæ pertinet ad priorem caſum, & in omnibus ſpeciebus curvæ Domini De Roberval, primâ exceptâ quæ pertinet ad ſecundum, ut perfectè curva poſſit delineari, inveſtiganda ſunt ex arte puncta inflexionum, in quibus curvatura ex convexâ fit concava, vel contra. Cui negotio eleganter inſervit doctrina de maximis & minimis.
Hoc præmiſſo lemmate generali.

Eſto in ſequenti figura curva AHFG, cujus curvatura in puncto H, verbi gratiâ, mutetur; Ducatur tangens HB, applicata HC, angulus HBC, erit minimus omnium quos tangentes cum axe ACD, ſive infra, ſive ſupra punctum H, efficiunt, ut facile eſt demonſtrare. Sumatur enim ſupra H, punctum, punctum M, tangens occurret axi inter A & B, ut in N, igitur angulus ad N major erit angulo ad B. Similiter ſi infra punctum H, ſumatur punctum F punctum D, in quo concurrit tangens FD, cum axe erit inferius puncto B, & tangens DF, occurret tangenti BH, ad partes F & H. Igitur angulus ad D, erit major angulo ad B. Caſus omnes non perſequimur, ſed modum tantùm inveſtigandi indicamus, cum curvarum formarum infinitas ſpecies exhibeant. Ut igitur verbi gratiâ, in expoſito diagrammate punctum H, inveniatur, quæratur primùm ex ſuperiore methodo ad punctum quodlibet curuæ utcumque ſumptum proprietas tangentis. Hâc inventâ quæratur per doctrinam de maximis & minimis punctum H, à quo ducendo perpendicularem HC, & tangentem HB, recta HC, ad CB, habeat minimam proportionem. Eâ enim ratione angulus ad B erit minimus. Dico punctum H, ita inventum eſſe initium mutationis in curvatura.

Ex prædicta methodo de maximis & minimis derivantur artificio ſingulari inventiones centrorum gravitatis, ut aliàs indicavi.

Sed & coronidis loco poſſunt etiam & datâ curvâ inveniri ipſius aſymptoti quæ in curvis infinitis miras exhibent proprietates. Sed hæc ſi libuerit, fuſiùs aliquando explicabimus & demonſtrabimus.

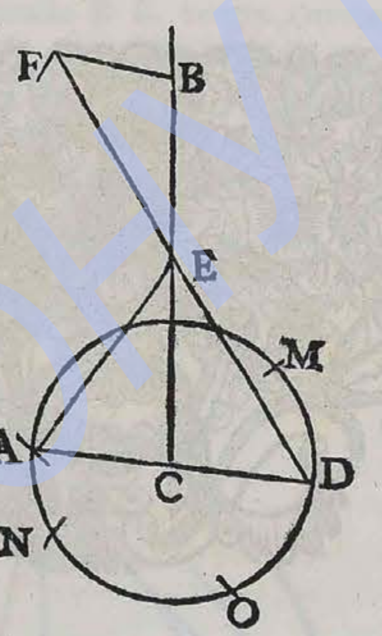
DE CONTACTIBUS SPHÆRICIS.

APOLLONII Pergæi doctrinam περὶ ἐπαφῶν restituit eleganter Apollonius Gallus aut sub illius nominis larvâ Franciscus ille Vieta Fontenæensis cujus miræ in Mathematicis lucubrationes veteri geometriæ felices præstitere suppetias. Verùm qui materiam hanc contactuum quæ hactenus substitit in planis, ulteriùs promoverit, & ad sphærica problemata evehere sit ausus, adhuc, quod sciam, extitit nemo; præclara tamen inde problemata deduci & ad elegantem sublimiorum problematum constructionem facillimè derivari patebit statim. Quærenda itaque sphæra qua per data puncta transeat aut sphæras & data plana contingat. Quindecim problematis totum negotium absolvetur.

PROBLEMA I.

Datis quatuor punctis sphæram invenire quæ per data transeat.

DEntur quatuor puncta N O M F, per quæ Sphæra describenda est sumptis ad libitum tribus N O M, circa triangulum N O M, quod in uno esse plano constat ex elementis; describatur circulus N A O M, quem & magnitudine & positione dari pers-

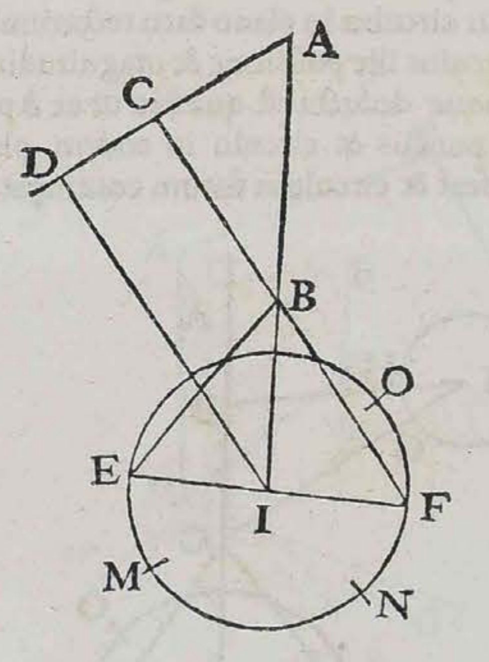


picuum est, esse autem circulum N A O M, in superficie inveniendæ Sphæræ patet, ex eo quod si Sphæra plano secetur sectionem datò circulum, at per tria puncta N M O, Unicus tantùm circulus describi potest, quem jam construximus, cum igitur tria puncta N O M sint in superficie Sphæræ quæsitæ, ergo planum trianguli N O M, Sphæram quæsitam secat secundum circulum N A O M, quem ideo in superficie Sphæræ esse concludimus. Sit ipsius centrum C, à quo ad planum circuli excitetur perpendicularis C E B, patet in recta C B, esse centrum Sphæræ quæsitæ, à puncto F, in rectam C B, demittatur perpendicularis F B, quam & positione & magnitudine dari perspicuum est, à puncto C, ducatur C A D, ipsi F B, parallela, erit igitur angulus B C A rectus, sed & recta B C, est perpendicularis ad planum circuli. Ergo recta A C D, est in plano circuli, & datur positione, dantur itaque puncta A D, in quibus cum circulo concurrit, ponatur jam factum esse, & centrum inveniendæ Sphæræ esse E, quod quidem in rectâ C B, reperiri jam diximus ex Theodosio junctæ rectæ F E, A E, E D, erunt æquales, cum tria puncta nempe F, ex hypothesi & A, & D, ex demonstratis sint in superficie sphærica, at tres rectæ F E, A E, E D, sunt in eodem plano, cum enim rectæ F B, A C D, sint parallelæ, erunt in eodem plano, sed & recta C B, ideoque tres F E, A E, D E; si igitur circa tria puncta data A F D, describatur circulus, ejus centrum E, erit in recta C B, ac proinde & Sphæræ quæsitæ centrum & Sphæra ipsa non latebunt.

PROBLEMA II.

Datis tribus punctis & plano invenire sphæram quæ per data puncta transeat, & planum datum contingat.

DEntur tria puncta N O M, per quæ circulus descriptus M E O N, erit ad superficiem Sphæricam quæsitam ex jam demonstratis, & in excitatâ ad planum circuli rectâ I B A, invenietur centrum Sphæræ quam quærimus; concurrat recta I B A, cum

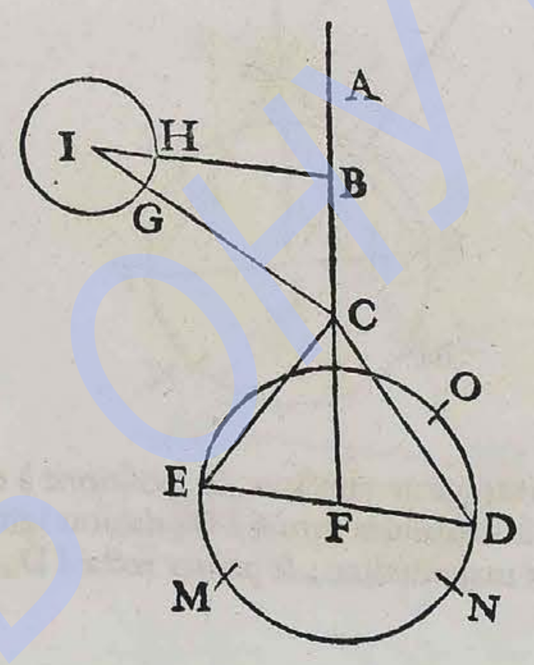


plano dato in puncto A, dabitur igitur punctum A, positione à centro circuli N E O M, demittatur perpendicularis in planum datum I D, dabitur igitur punctum D, ideoque & recta A D, positione & magnitudine, & pariter rectæ I D, & I A, dabitur igitur planum trianguli A D I poſitione, datur autem & planum circuli M O N, poſitione, ergo communis illorum planorum ſectio F I E, dabitur poſitione, ideóque dabuntur puncta E & F, in circulo. Sit factum & centrum ſphæræ quæſitæ punctum B. Jungantur rectæ B E, B F, & rectæ I D, parallela ducatur B C, cum triangulum A D I, & recta E I F, ſint in eodem plano, ergo rectæ E B, B F, B C, erunt in eodem plano, ſed recta I D, eſt perpendicularis ad planum datum, ergo recta B C, ipſi parallela, eſt etiam perpendicularis ad planum datum; cum igitur ſphæra deſcribenda planum A D, datum contingere debeat, ergo ab ipſius centro demiſſa in planum perpendicularis B C, dabit punctum contactus C, rectæ igitur B C, B E, B F, erunt æquales & probatum eſt eas eſſe in eodem plano poſitione dato, in quo & recta A D. Eò itaque deducta eſt quæſtio ut datis duobus punctis E & F, & rectâ A D, in eodem plano, quæratur circulus qui per data duo puncta tranſeat & rectam datam contingat, cui problemati ſatisfecit Apollonius Gallus, dabitur igitur centrum ſphæræ B, & omnia conſtabunt.

PROBLEMA III.

Datis tribus punctis & ſphærâ invenire Sphæram quæ per data puncta tranſeat & ſphæram datam contingat.

DEntur tria puncta M, N, O, & ſphæra I G, datur circulus M O N, in ſphæra quæſitâ, ad planum circuli erecta perpendicularis F C B, ut ſupra continebit centrum ſphæræ quam quærimus, à centro I, ſphæræ datæ demittatur in rectam F B, perpendicularis I B, quæ dabitur poſitione & magnitudine, à centro F, ipſi parallela ducatur E D, quæ erit ex jam demonſtratis in plano circuli, & dabuntur puncta E & D, ſit factum, & centrum ſphæræ quæſitæ C, ergo rectæ I C, C E, C D, erunt in eodem plano quod & datum eſt, cum dentur puncta I, E, D. Contactus autem duarum ſphærarum eſt in rectâ ipſarum centra connectente, ergo tanget ſphæra quæſita ſphæram datam in puncto G, recta igitur I C, ſuperabit rectas C E, C D, radio I G, centro I, intervallo radij ſphærici dati deſcribatur circulus in plano dato rectarum I C, C E, E D, tranſibit igitur per punctum G, & circulus ille poſitione & magnitudine dabitur ſed & puncta E & D in eodem plano. Eò itaque deducta eſt quæſtio ut ex Apollonio Gallo quæratur methodus quâ datis duobus punctis & circulo in eodem plano, inveniatur circulus qui per data duo puncta tranſeat & circulum datum contingat.

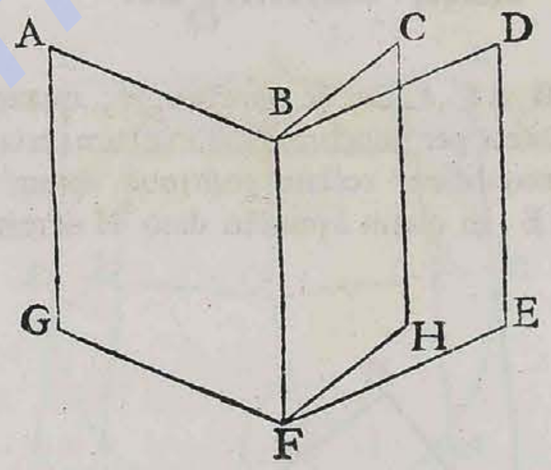


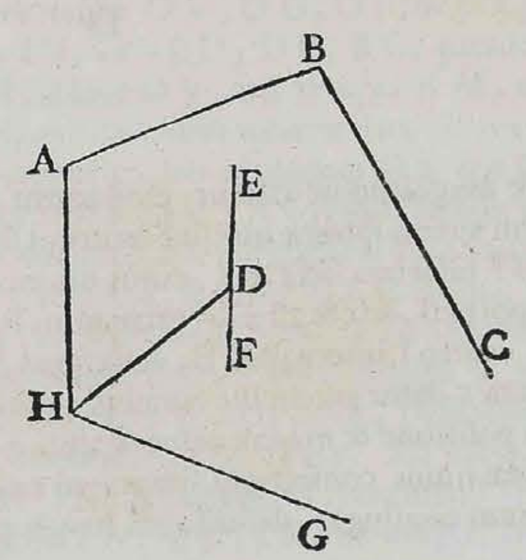
PROBLEMA IV.

Datis quatuor planis invenire ſphæram quæ data quatuor plana contingat.

DEntur quatuor plana A H, A B, B C, H G quæ à ſphærâ quæſitâ contingi oporteat.

Sint duo plana A F, F D quæ ab eadem ſphærâ contingantur, biſecetur ipſorum inclinatio per planum B F H C, patet centrum ſphæræ quæ duo plana A F, F D contingit eſſe in plano biſecante, ut videatur inutile in re tam proclivi diutiùs immorari, ſi plana A F, F D, eſſent parallela ſphæræ, centrum eſſet in plano ipſis parallelo, & intervallum ipſorum biſecante, hoc poſito propter plana C B, B A, poſitione data quod nempe datorum C B, B A, planorum inclinationem datam biſecat. Sed propter duo plana B A, A H, eſt idem centrum ſphæræ quæſitæ ad aliud planum poſitione datum; ergo communis ſectio duorum planorum poſitione datorum, quorum alterum incli-



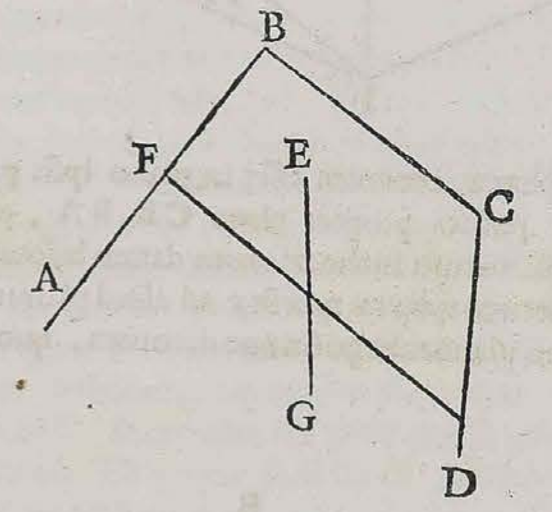


nationem planorum C B, B A, alterum inclinationem planorum B A, A H, biſecat, dabit rectam poſitione datam, in quâ inveniendæ ſphæræ centrum erit. Sit illa recta F E, ſed propter duo plana A H, H G, eſt etiam centrum ſphæræ quæſitæ ad aliud planum poſitione datum cujus concurſus cum recta F E, poſitione datâ dabit punctum D, quod patet eſſe ſphæræ quæſitæ centrum, & reliqua conſtabunt.

PROBLEMA V.

Datis tribus planis & puncto invenire ſphæram quæ per punctum datum tranſeat & plana data contingat.

SInt data tria plana A B, B C, C D, & punctum H, quærenda ſphæra quæ data tria plana contingens tranſeat per punctum H. Sit factum; tria plana data ex præcedentis propoſitionis ratiocinio dabunt rectam poſitione datam quæ ſedes erit centri ſphærici quæſiti. Sit illa G E, in quam à puncto dato H demittatur perpendicularis

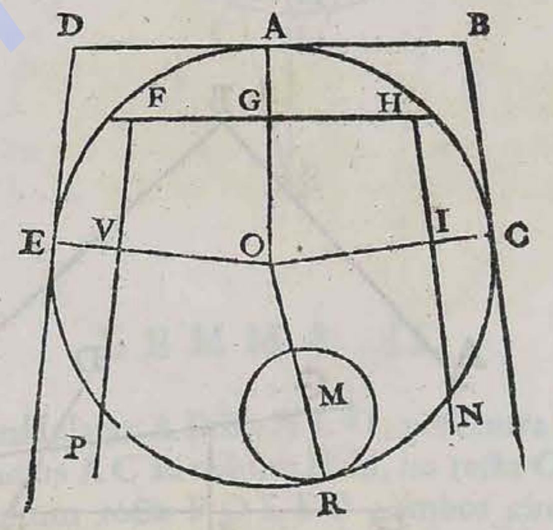


H I, quæ & poſitione & magnitudine dabitur, producatur ad F, ut ſit I F, æqualis I H, dabitur punctum F, cum autem ſphæræ quæſitæ centrum ſit in recta G E, ad quam ducta eſt perpendicularis H F bifariam ſecta in I, cujus unum ex extremis H eſt ad ſuperficiem ſphæricam ex hypotheſi, erit & alterius extremum F, etiam ad ſphæricam ſuperficiem. Imò & circulus centro I, interuallo I H, deſcriptus in plano recto ad rectam G E erit ad ſuperficiem ſphæræ; datur autem ille circulus poſitione & magnitudine, dato autem circulo ſphærico poſitione & magnitudine & aliquo plano ut A B. Datur ex facili propoſitionis ſecundæ hujus conſectario ſphæra ad cujus ſuperficiem ſit circulus datus & quæ planum datum contingat, deducta eſt itaque quæſtio ad ſecundam hujus, nec reliqua latebunt.

PROBLEMA VI.

Datis tribus planis, & ſphærâ, invenire ſphæram quæ datam ſphæram & plana data contingat.

DEntur tria plana E D, D B, B C, & ſphæra R M, conſtruenda eſt ſphæra quæ datam ſphæram & tria pariter plana contingat. Sit factum & ſphæra E R C H, ſatisfaciat propoſito ſphæram nempe in puncto R.

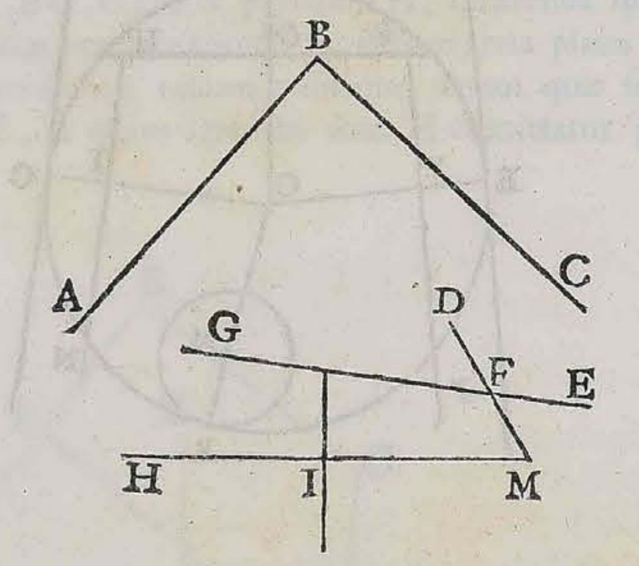


Et plana in punctis E, A, C, contingens, ſphæræ, E R C H, centrum ſit O, junctæ R O, E O, A O, C O, erunt æquales, ſed & recta O R, tranſibit per datæ ſphæræ centrum M, & rectæ E O, O A, O C, erunt perpendiculares ad plana data D E, D B, B C. Fiant rectæ O M, æquales rectæ O V, O G, O I, & per puncta V G I intelligantur duci plana V P, G H, I N, datis E D, D B, B C, parallela, cum recta O R, æqualis ſit O E, & ablata O M, ablatæ O V, erit reliqua R M, reliquæ V E, æqualis, datur autem magnitudine R M, cum ſit radius ſphæræ datæ; datur igitur & V E magnitudine; cum autem OE, ſit perpendicularis ad planum D E, erit etiam perpend. ad planum PV, plano D E, parallelum, recta igitur VE, erit intervallum planorum D E, & PV, ſed datur V E magnitudine ex demonſtratis, ergo datur planorum D E, P V, intervallum; ſunt autem parallela hæc duo plana, & datur D E poſitione ex hypotheſi; datur igitur & P V, poſitione. Similiter probabitur plana G H, I N, dari poſitione & rectas O V, O G, O I, ad ipſa eſſe perpendiculares & æquales rectæ O M, ſphæra igitur centro O, intervallo O M, deſcripta plana P V, G H, I N, poſitione data contingit. Datur autem punctum M, cum ſit centrum ſphæræ datæ. Eò itaque deducta eſt quæſtio ut datis tribus planis P V, G H, I N, & puncto M. inveniatur ſphæra quæ per datum punctum M, tranſeat & data plana P V, G H, I N, contingat, hoc eſt deducitur quæſtio ad præcedentem, nec abſimili in ſequentibus artificio cum nulla in datis puncta reperientur, ſed ſphæræ tantùm aut plana, in locum unius ex ſphæris punctum datum ſubſtituetur.

PROBLEMA VII.

Datis duobus punctis & duobus planis invenire Sphæram quæ per data puncta transeat & plana data contingat.

DEntur duo plana A B, B C, & duo puncta H M. quærenda sphæra quæ per puncta H & M transeat & plana A B, B C, contingat. Jungatur recta H M, & bisecetur



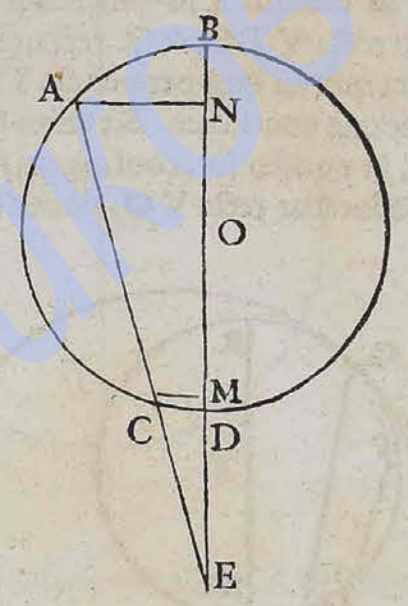
in I, punctum I, dabitur, per punctum I, trajiciatur planum ad rectam HM, rectum, cum Sphærica superficies puncta H, M, contineat, certum est centrum Sphæræ esse in plano ad rectam H M, normali, & per punctum I, transeunte, datur autem hoc planum positione cum recta HM, & punctum I. Sint data positione, ergo centrum sphæræ propter puncta H & M, est ad planum datum. Sed & propter plana A B, B C, ut jam superiùs demonstravimus, est ad aliud planum datum, ergo est ad rectam positione datam, sit illa G E, in quam demissa ab uno ex punctis datis M, recta M F, dabitur positione & magnitudine & continuata in D, ut sit F D, æqualis M F, erit punctum D, datum & ex superius demonstratis erit etiam ad sphæricam superficiem, dantur itaque tria puncta H M D, per quæ sphæra quæsita transit, datur etiam planum A B, quod ab eadem sphærâ contingi debet; deducta est itaque quæstio ad problema secundum hujus.

Priusquam progrediamur ulterius, præmittenda lemmata quædam facillima.

LEMMA I.

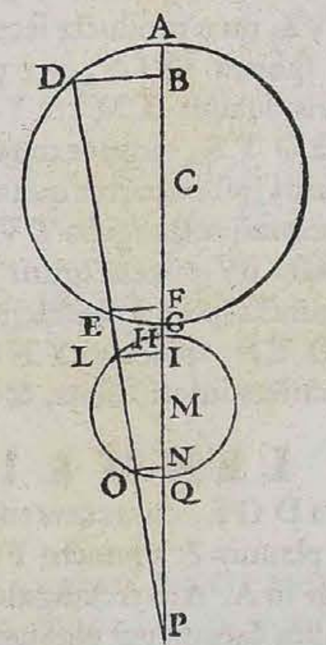
SIT circulus B C D, extra quem sumpto quolibet puncto E, trajiciatur per centrum recta E D, O B, ducatur quælibet E C B, patet ex elementis rectangulum A E C, æquari rectangulo B E D. Sit jam sphæra circa centrum O, cujus maximus circulus sit A C D B, si ab eodem puncto E per quodlibet punctum superficiei sphæricæ trajiciatur recta E C A, donec sphæræ ex altera parte occurrat, rectangulum A E C, erit similiter æquale rectangulo B E D, si enim intelligatur circa rectam immobilem B D E, conuerti

converti, & circulus & recta E C A, simul non immutabuntur rectæ E C, & E A, cum puncta C, & A, circulos describant ad axem rectos, nec idcirco rectangulum A E C, erit itaque in quocumque plano æquale rectangulo B E D.



LEMMA II.

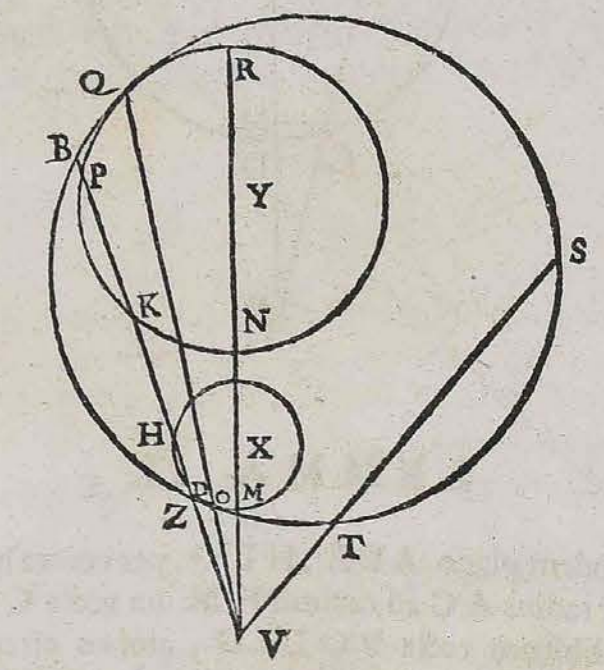
SInt duo circuli in eodem plano A D E, H L O, per centra ipsorum trajiciatur recta A C M P, & fiat ut radius A C ad radium H M, ita recta C P, ad rectam M P, & à puncto P, ducatur ad libitum recta P O L E D, ambos circulos secans in punctis O E L D; demonstravit Apollonius Gallus rectangula A P Q, G P H esse æqualia & ipsorum cuilibet æquari rectangula D P O, E P L. In sphæricis idem quoque verum esse sequentium problematum interest, patet autem ex eo quod si circa axem A P immobilem tam circuli duo quàm recta P O L E D, eodem tempore convertantur, non immutabuntur rectæ P O, P L, P E, P D, propter allatam in superiori lemmate rationem nec idcirco rectangula, & in quocumque plano constabit propositum.



L.

LEMMA III.

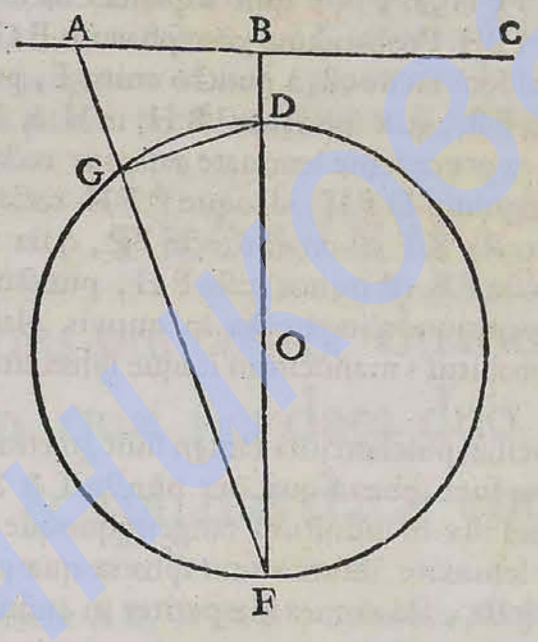
Sint duæ ſphæræ datæ YN, XM per quarum centra trajiciatur recta R Y N X M V, & fiat ut radius Y N ad radium X M, ita recta Y V, ad rectam V X, à puncto V ducatur in quolibet plano recta V T S, & ſit rectangulum S V T æquale rectangulo R V M, ſi deſcribatur ſphæra quævis quæ per puncta T S, tranſeat & unam ex duabus datis contingat, alteram quoque continget. Sit enim ſphæra O T S, per puncta T & S deſcripta & ſphæram M X, in puncto O, contingens, aio ſphæram Y N, etiam à ſphæra O T S contactam iri, producatur recta V O, donec ſphæræ O T S, occurrat in Q, re-



ctangulum igitur Q V O ex primo lemmate eſt æquale S V T, ſed rectangulum S V T ex conſtructione eſt æquale rectangulo R V M, cui ex ſecundo lemmate eſt æquale rectangulum ſub V O, & rectâ per puncta V & O ad ſuperficiem ſphæricam ſphæræ Y N, productâ, ergo punctum Q eſt ad ſuperficiem ſphæræ Y N, commune igitur eſt & ſuperficiei ſphæræ Y N, & ſuperficiei ſphæræ O T S. Aio has duas ſphæras in puncto eodem Q, ſe contingere, ducatur enim à puncto V, quælibet recta in quolibet plano ſphæræ OTS, & ſit verbi gratia VZ, quæ producta ſecet ſphæras tres in punctis ZDHK P B, rectangulum Z V B in ſphæra O T S, per primum & ſecundum lemma eſt æquale D V P rectangulo, ſphæris duabus X M, & Y N, terminato. Sed D V, eſt major recta V Z, cum enim ſphærâ O T S, tangat exteriùs ſphæram X M in puncto O, recta ſecans ſphæram O T S, prius ipſi occurret quàm ſphæræ X M. Cum ergo probatum ſit rectangulum D V P, æquari rectangulo Z V B, & recta Z V, ſit minor recta D V, ergo recta PV erit minor rectâ BV, punctũ igitur B extra ſphæram Y N cadet. Simili ratiocinio concludetur omnia puncta ſphæræ ambientis exteriùs cadere, præter punctum Q, tangit igitur ſphæra O T S, ſphæram Y N quod erat demonſtrandum, nec abſimilis aut difficilior in contactibus interioribus, & in omnibus caſibus demonſtratio.

LEMMA IV.

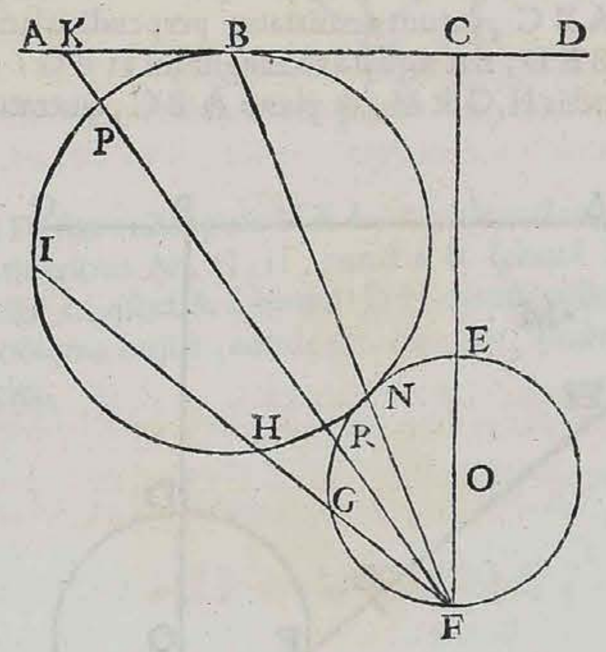
Sit planum A C, & ſphæra D G F, cujus centrum O, per centrum O, ducatur F O D B perpendicularis ad planum & à puncto F ducatur recta quævis ad planum ſphæram ſecans in G, & planum in A. Aio rectangulum A F G, æquari rectangulo B F D, nam ſecetur ſphæra ad planum datum, per planum trianguli A B F, & fiat circulus G F D in ſphærâ, in plano autem recta A B C, cum recta F B, ſit perpendicularis ad



planum A C, erit etiam perpendicularis ad rectam A C, habens igitur circulum DGF, & rectam A C in eodem plano, & rectam F D B per centrum circuli tranſeuntem ad A C perpendicularem jungatur G D, anguli ad G, & ad B, ſunt recti, ergo quadrilaterum A B D G, eſt in circulo, ideoque rectangulum A F G æquale eſt rectangulo BFD, quod etiam in quavis alia ſphæræ ſectione ſimiliter demonſtrabitur.

LEMMA V.

Sit planum A B D, & ſphæra E G F, cujus centrum O, per centrum O trajiciatur recta F O E C perpendicularis ad planum, & in quovis alio puncto ducatur recta F H I, ſitque rectangulum I F H æquale rectangulo C F E. Si per puncta I H, deſcribatur



ſphæra quæ planum A C contingat, eadem ſphæra tanget ſphæram E G F, intelligatur conſtrui ſphæra I H B, quæ per puncta I & H, tranſiens tangat planum A C, in puncto B I, aio ſphæram E G F contingi à ſphæra I H B, jungatur recta F B & rectangulo C F E, fiat æquale rectangulum B F N, punctum N, per præcedentem erit ad ſuperfi-

ciem ſphæræ E G F, ſed & rectangulum C F E, ex conſtructione eſt æquale rectangu-
lo I F H, rectangula igitur I F H, B F N, ſunt æqualia; ideoque punctum N, eſt
etiam ad ſuperficiem ſphæræ I BH. Probandum jam ſphæram E G F, à ſphæra I BH, in
puncto N contingi, quod quidem facile eſt, à puncto enim F, per quodlibet punctum
ſphæræ E G F, ducatur recta F R, quæ ſphæram I B H, in H & P, & planum A C in
K ſecet, rectangulum K F R ex præcedente lemmate æquatur rectangulo C F E, cui ex
conſtructione æquatur rectangulum D F H, ideoque P F H rectangula, igitur K F R,
& P F H ſunt æqualia, ſed recta K F eſt major recta F P, quia ſphæra I B H, tangit
planum A C in B, ergo recta F R eſt minor recta F H, punctum igitur R eſt extra
ſphæram I B H. Idem de quocumque alio puncto in quovis plano ſphæræ E G F, ex
utraque puncti N parte probabitur; manifeſtum itaque ſphæram E G F, à ſphærâ I B
H, in puncto N contingi.

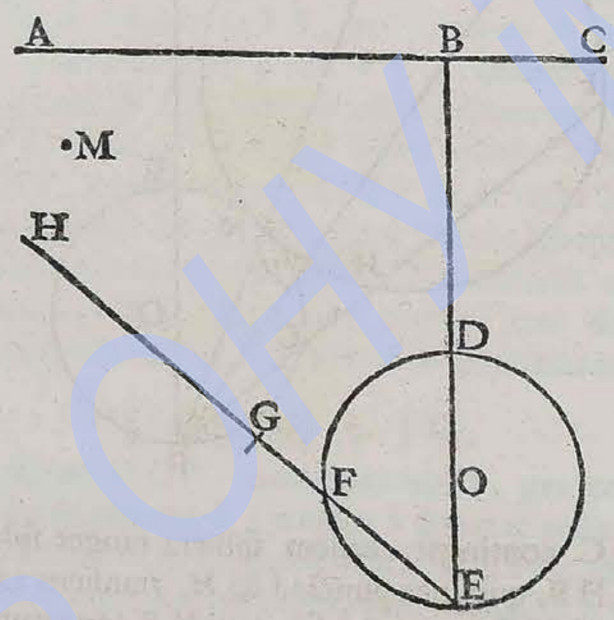
Hæc lemmata licet ſint facilia, pulcherrima tamen ſunt, tertium præſertim & quin-
tum, in tertio quippe infinitæ ſunt ſphæræ quæ per puncta T & S tranſeuntes ſphæram
X M, contingunt, ſed omnes illæ in infinitum tangent quoque ex demonſtratis ſphæ-
ram Y N, in quinto autem lemmate infinitæ ſunt ſphæræ quæ per puncta I & H tran-
ſeuntes planum A C contingunt, ſed omnes illæ pariter in infinitum ſphæram E G F,
ex demonſtratis contingent.

His ſuppoſitis reliqua problemata facilè exequemur.

PROBLEMA VIII.

Datis duobus punctis plano & ſphærâ invenire ſphæram quæ per data puncta tranſeat & ſphæram ac planum datum contingat.

SIT datum planum A B C, ſphæra D F E, & puncta H M, per centrum ſphæræ
datæ O in planum A B C, datum demittatur perpendicularis E O D B, junga-
tur H E, & rectangulo B E D, fiat æquale rectangulum H E G; dabitur itaque pun-
ctum G, datis tribus punctis H, G & M, & plano A B C, quæratur ſphæra per 2. pro-

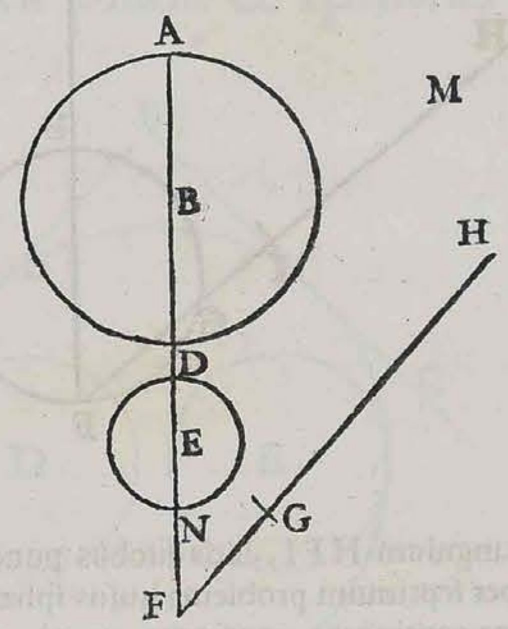


blema hujus, quæ per data tria puncta tranſeat & planum A B C datum contingat.
Sphæra illa ſatisfaciet propoſito, tranſit quippe per data duo puncta H & M, & pla-
num A B C tangit ex conſtructione, ſed & ſphæram D F E contingit, ex quinto lem-
mate; nam cum rectangulum H E G, æquetur rectangulo B E D, omnis ſphæra quæ
per data duo H & G puncta tranſiens planum A B C tangit, ſphæram quoque D E F
contingit.

PROBLEMA IX.

Datis duobus punctis & duabus ſphæris invenire ſphæram quæ per data duo puncta tranſeat & ſphæras datas contingat.

SInt datæ duæ ſphæræ A B, D E, & puncta data, H & M, trajiciatur recta A F, per
centra ſphærarum datarum, & ut radius A B ad radium D E. ita fiat recta B F, ad FE,

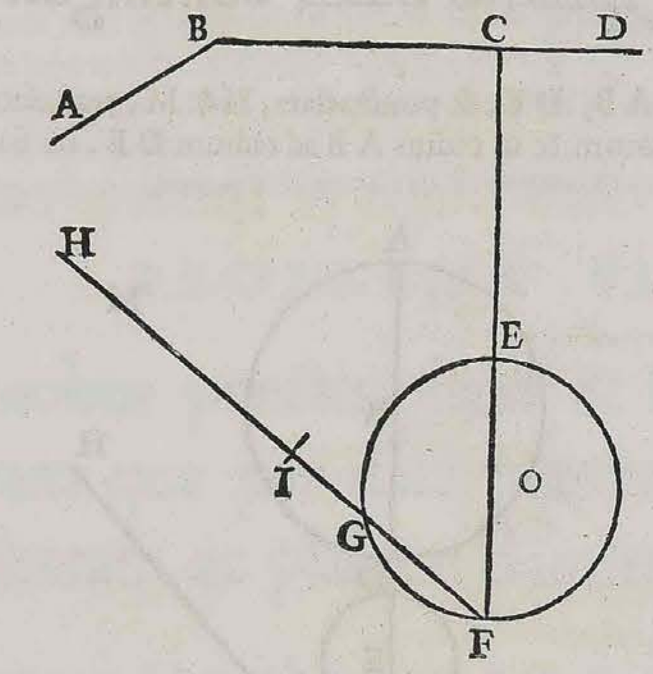


dabitur punctum F, fiat rectangulo N F A, æquale rectangulum H F G, dabitur pun-
ctum G. Jam datis tribus M, G, H, punctis & ſphærâ D N, quæratur ſphæra quæ
per data tria puncta tranſeat & ſphæram D N datam contingat, cui problemati ſatiſ-
faciet tertium problema hujus, continget quoque ſphæram ex 3. lemmate ideoque
propoſito ſatisfaciet.

PROBLEMA X.

Dato puncto, duobus planis, & ſphærâ invenire ſphæram, quæ per datum punctum tranſeat & ſphæram, ac data duo plana contingat.

SInt duo plana A B, B D, ſphæra E G F, punctum H, per punctum O centrum ſphæræ datæ in quodlibet ex planis demittatur perpendicularis CEOF, & rectangulo



C F E, fiet æquale rectangulum H F I, datis duobus punctis H, & I, & duobus planis A B, B D. Quæratur per ſeptimum problema hujus ſphæra quæ per data duo puncta tranſeat & duo plana data contingat, continget quoque ex quinto lemmate ſphæram, & propoſito ſatisfaciet.

PROBLEMA XI.

Dato puncto, plano, & duabus ſphæris invenire ſphæram quæ per datum punctum tranſeat & planum, ac ſphæras duas datas contingat.

DEducetur ſtatim quæſtio ſimili præcedentibus ratiocinio ad problema octavum, datis duobus punctis, plano & ſphærâ, idque beneficio lemmatis quinti. Quod ſi libeat uti lemmate tertio deducetur quæſtio pariter ad idem problema alio medio & aliâ conſtructione.

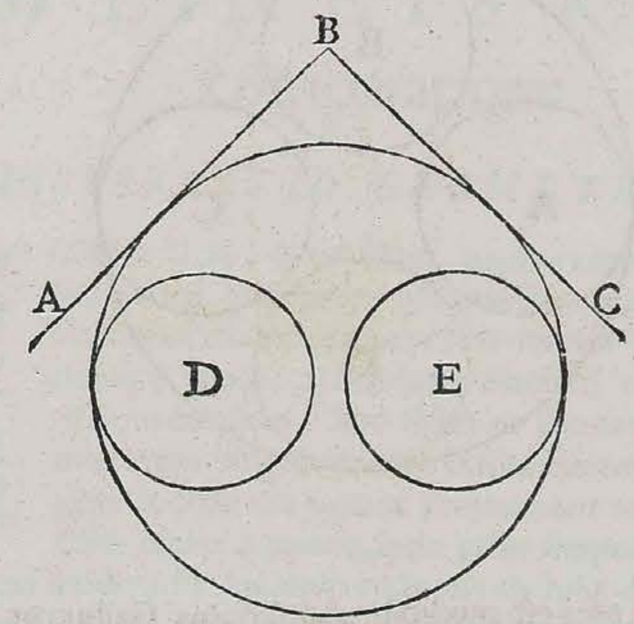
PROBLEMA XII.

Dato puncto & tribus ſphæris, invenire ſphæram quæ per datum punctum tranſeat & ſphæras datas contingat.

HUic quoque figuram non aſſignamus, ſtatim quippe beneficio lemmatis 3. deducetur quæſtio ad problema IX. datis duobus punctis, duabus ſphæris, &c.

PROBLEMA XIII.

Datis duobus planis & duabus ſphæris, invenire ſphæram quæ data plana & ſphæras contingat.



SIT factum. Si ergo ſphæricæ ſuperficiei inventæ imaginemur aliam ejuſdem centri ſuperficiem parallelam quæ à quæſitâ diſtet per radium minoris ex ſphæris, tanget hæc nova ſuperficies ſphærica plana quæ à datis diſtabunt per intervallum ejuſdem radij minoris ex ſphæris, tanget quoque ſphæram cujus radius diſtabit à radio majoris ſphæræ datæ per idem radij minoris intervallum, quæque erit majori ſphæræ concentrica, dabitur ergo, dabuntur & duo plana datis parallela & per radium minoris ex ſphæris ab ipſis diſtantia, tranſibit & hæc nova ſuperficies ſphærica per centrum minoris ex ſphæris datis, quod quidem datum eſt, pari igitur quo uſi jam ſumus in Problemate VI. artificio deducetur quæſtio ad problema X. dato puncto, duobus planis & ſphæra invenire &c.

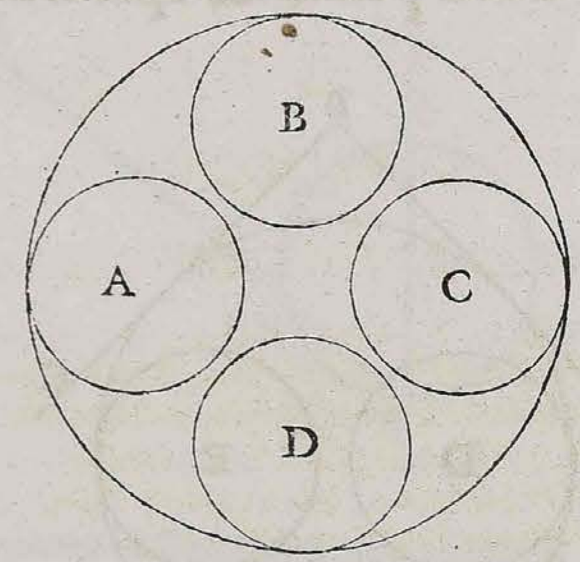
PROBLEMA XIV.

Datis tribus ſphæris & plano invenire ſphæram quæ ſphæras & planum datum contingat.

SImili quâ uſi ſumus viâ in præcedente & VI. Problemate deducetur quæſtio ad Problema XI. dato puncto, plano & duabus ſphæris &c.

PROBLEMA XV.

Datis quatuor ſphæris invenire ſphæram quæ datas contingat.



SIT factum, & quâ uſus eſt methodo Apollonius Gallus ut problema de tribus circulis ad problema de puncto & duobus circulis deduceret, eâdem & ſimili præcedentibus famoſum hoc & nobile problema ad XII. datis tribus ſphæris & puncto deducemus. Conſtabit ex omni parte propoſitum, & illuſtre accedet Apollonio Gallo complementum.

Caſus varios, determinationes, & minuta neglximus, ne in immenſum excreſceret ſphæricus de contactibus tractatus.

DE LINEARUM CURVARUM CUM LINEIS RECTIS comparatione

DISSERTATIO GEOMETRICA.

NONDUM, quod ſciam, lineam curvam purè Geometricam rectæ datæ Geometræ adæquarunt. Quod enim à ſubtili illo Mathematico Anglo nuper inventum & demonſtratum eſt cycloidem nempe primariam diametri circuli ipſam generantis eſſe quadruplam, hoc ſuam ex ſententiâ doctiſſimorum Geometrarum videtur habere limitationem, ij quippe hanc eſſe legem & ordinem naturæ pronuntiant ut non ſinat inveniri rectam curvæ æqualem, quin priùs ſuppoſita fuerit alia recta alteri curvæ æqualis. Quod quidem in exemplo cycloidis ab ipſis allato ita ſe habere deprehendunt, nec nos diffitemur, cum conſtet deſcriptionem cycloidis indigere æqualitate alterius curvæ cum rectâ, hoc eſt circumferentiæ circuli cycloidem generantis cum rectâ quæ eſt baſis ipſius cycloidis. Sed quàm vera ſit hæc, quam ſtatuunt, lex naturæ, & quàm periculoſum ab uno aut altero experimento ſtatim ad axioma properare, infrà patebit. Nos enim curvam verè Geometricam & ad cujus conſtructionem nulla talis alterius curvæ cum rectâ æqualitas præceſſiſſe ſupponatur, rectæ datæ æqualem eſſe demonſtrabimus; & paucis, quantùm fieri poterit, totum negotium abſolvemus.

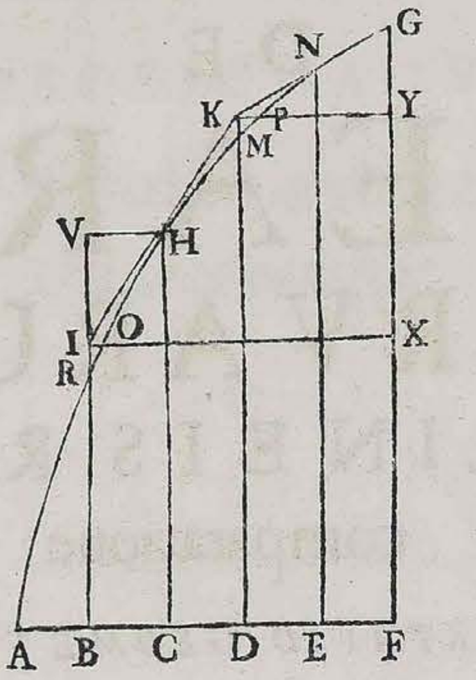
Hæc Diſſertatio typis edita fuit anno 1660. occultato Autoris nomine.

PROPOSITIO PRIMA.

SIT in Figura prima curva quævis A H M G in eaſdem partes curva, exempli causâ, una ex parabolis infinitis in quâ tangentes extra curvam cum baſe A F & axe F G concurrant, & ſumatur in hujuſmodi curvâ quodvis punctum H per quod ducatur tangens I H K, in qua ſumptis ex utraque parte punctis K & I demittantur perpendiculares I B, K D in baſim A F quæ ſecent curvam in punctis R & M. Aio portio

nem tangentis H I portione curvæ R H esse minorem, portionem autem ejusdem tan-
gentis H K portione curvæ H M esse majorem ; Cum enim ex hypothesi tangens K I
occurrat basi A F extra curvam, ergo angulus C H I qui fit ab intersectione perpendi-
cularis in basem H C, & tangentis H I erit minor recto, ideoque à puncto H demissa
perpendicularis in rectam K I cadet in punctum V supra puncta B R I. Patet itaque re-
ctam H V minorem esse rectâ H I, item rectam H I minorem esse rectâ quæ puncta
H & R conjungit; ergo à fortiori recta H I minor erit portione curvæ H R quæ rectam
ab H R ad R ductam subtendit; quod primo loco fuit demonstrandum. Aio jam por-
tionem K H portione curvæ H M esse majorem; à puncto K ducatur ad eandem curvam

Figura 1.



tangens K N & demittatur perpendicularis N E. Ex prædemonstratis probatum est rectam K N esse minorem portione curvæ N M : Sed ex Archimede summa tangentium H K, K N est major totâ portione curvæ H N. Ergo portio tangentis H K portione curvæ H M, major erit. Quod secundo loco fuit ostendendum. Nec moveat tangentem à puncto K ultra punctum G, aliquando occurrere curvæ. Hoc enim casu aliud punctum inter K & M sumi poterit, & omnia ad præcedentem demonstrationem aptari. Inde sequitur si à punctis K & I ducantur perpendiculares ad axem curvam in punctis O & P secantes, hoc casu tangentem H I curvâ H O esse majorem, tangentem verò H K curvâ H P esse minorem. Si enim imaginemur inverti figuram ita ut axis in locum baseos, basis in locum axis transferatur, non solum similis in hoc casu, sed eadem omninò erit demonstratio.

Patet autem ex ipsâ constructione, si rectæ B C & C D sint æquales portiones tangentis H I & H K esse item inter se æquales, quod tamen summopere notandum.

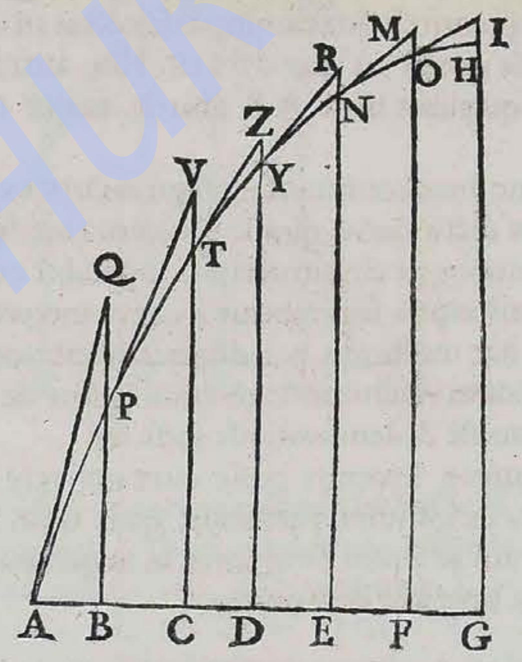
PROPOSITIO II.

AD dimensionem linearum curvarum non utimur inscriptis & circumscriptis more Archimedeo, sed circumscriptis tantùm ex portionibus tangentium compositis, duas enim series tangentium exhibemus quarum una major est curvâ, altera minor : demonstrationem autem multò faciliorem & elegantiorem per circumscriptas solas evadere Analystæ experientur.

Possibile igitur, ut vult methodus Archimedea, pronuntiamus cuilibet ex curvis jam prædictis circumscribere duas figuras ex rectis constantes quarum una superet curvam intervallo quovis dato minore, altera autem superetur à curva intervallo etiam dato minore.

Exponatur curva aliqua ex prædictis in 2. Figura. Secetur basis A F in quodlibet portiones æquales, A B, B C, C D, D E, E F, F G, & à punctis B, C, D, E, F, erigantur perpendiculares B Q, C V, D Z, E R, F M, quæ occurrant curvæ in punctis P, T, Y, N, O, Ducantur item tangentes A Q, P V, T Z, Y R, N M, O I. Ex primâ propositione patet tangentem A Q, portione curvæ A P esse majorem : item tangentem P V, portione curvæ P T esse majorem & sic de reliquis, tandemque etiam ultimam O I portione curvæ O H esse majorem. Ergo figura constans ex omnibus istis tangentium A Q, P V, T Z, Y R, N M, O I, portionibus curva ipsa major erit.

Figura 2.



At exponatur eadem curva in 3. Figura cujus basis A G in eundem portionum æqualium numerum dividatur in punctis B, C, D, E, F. à punctis B, C, D, E, F ut suprà erigantur perpendiculares B R, C Q, D O, E L, F I quæ occurrant curvæ in punctis S, P, N, M, K, à puncto autem S in hac tertia figura, ducatur tangens S T, occurrens perpendiculari A T, deinde à punctis P N, M, K, H ducantut tangentes P R, N Q, M O, K L, H I occurrentes perpendicularibus B S, C P, D N, E M, F K, in punctis R, Q, O, L, I. Ex prima propositione patet tangentem S T portione curvæ A S esse minorem, item tangentem P R portione curvæ P S esse minorem & sic deinceps, tandemque ultimam I H quæ parallela est basi, portione curvæ K H esse minorem. Ergo figura constans ex omnibus istis tangentium S T, P R, N Q, M O, K L, H I portionibus curva ipsa minor erit.

Deest hoc loco figura 3. quam ad calcem libri lector inveniet.

Cum autem ex corollario propositionis primæ partes tangentium ab eodem puncto curvæ utrinque productarum & portionibus basis hinc inde æqualibus oppositarum sint inter se æquales : patet, cum 2. & 3. Figuræ curvæ supponantur æquales aut eadem potius, licet vitandæ confusionis causâ duas figuras descripserimus, tangentem S T tertiæ figuræ æqualem esse tangenti P V secundæ figuræ, cum enim punctum S in tertia figura idem omninò sit cum puncto P secūdæ figuræ & portiones basis AB, BC in utraq; figura sint inter se æquales ; portiones tangentium ex utraque parte ipsis oppositarum nempe recta S T in 3. figura & recta P V in 2. inter se æquales erunt. Probabitur similiter tangentem P R 3. figuræ æqualem esse tangenti T Z 2 & sic de cæteris. Quo peracto constabit primam tantùm 2. figuræ & ultimam 3. nulli ex portionibus figuræ contrariæ æquales esse. Excessus igitur quo figura secunda superat tertiam est idem quo tangens A Q 2. figuræ superat tangentem I H 3. figuræ. Sed recta I H propter parallelas æquatur portioni basis F G sive A B, supponuntur enim omnes basis portiones æquales in utraque figura, ergo figura secunda ex tangentibus curva majoribus composita superat figuram tertiam ex tangentibus curva minoribus compositam eo ipso quo in 2. figura tangens A Q superat portionem basis A B, ipsi oppositam intervallo.

Si igitur velimus duas figuras curvæ circumscribere, alteram majorem curva, alteram verò minorem, quæ se invicem excedant intervallo minore quocumque dato, facillima erit constructio: Cum enim ex methodo tangentium jam cognita detur tangens ad punctum A, dabitur angulus Q A B, sed angulus Q B A est rectus, ergo datur triangulum Q A B, specie, datur itaque ratio rectæ A Q ad A B. Cavendum itaque est ut divisio basis ita instituatur ut differentia rectarum A Q & A B sit minor quacumque recta data, Quod ita assequemur si quæramus duas rectas in data ratione quæ se invicem excedant recta data quæ sit minor eâ quæ data est. Hoc autem problema est facile, & curandum deinde ut portio qualibet basi, A B non sit major minore duarum quæ dicto problemati satisfaciunt.

Cum igitur hac ratione invenerimus duas figuras curvæ circumscriptas, alteram majorem, alteram minorem dictâ curvâ quæ se invicem excedunt intervallo minore quocumque dato, à fortiori major ex circumscriptis superabit curvam intervallo adhuc minore, & minor ex circumscriptis superabitur à curva intervallo adhuc minore.

Patet itaque ex nostra hac methodo per duplicem circumscriptionem commodum præberi aditum ad methodum Archimedeam cum agitur de dimensione linearum curvarum. Quod semel monuisse & demonstrasse sufficiet.

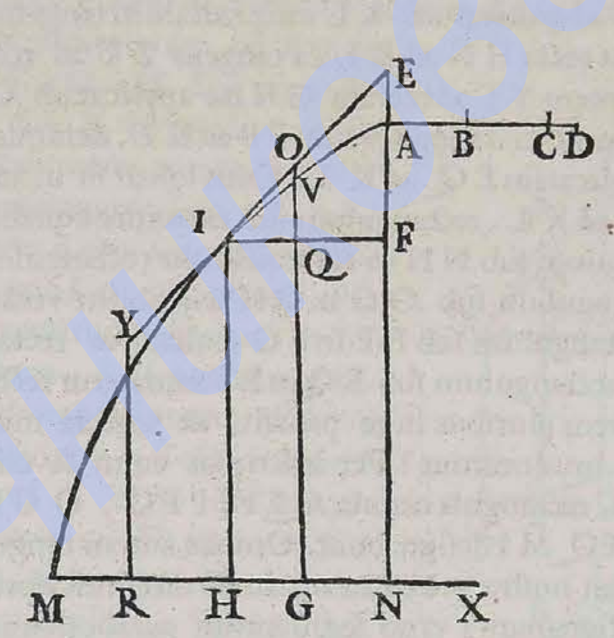
His positis securè pronuntio inveniri posse curvam verè Geometricam datæ rectæ æqualem. Ea verò est una ex infinitis parabolis, quas olim speculati sumus; illa nempe in qua cubi applicatarum ad axem sunt inter se ut quadrata portionum axis, de quo ne dubitent Geometræ ita breviter demonstro.

PROPOSITIO III.

SIT in 4. Figura parabole quam jam indicavimus M I V A cujus vertex A, axis A N, & in qua sumpto quovis puncto I & ductis perpendicularibus seu applicatis ad axem rectis M N, I F, cubus rectæ M N sit ad cubum rectæ I F, ut quadratum rectæ N A ad quadratum rectæ F A, idque semper contingat: probandum est curvam M I A rectæ datæ æqualem esse. Fiat ut quadratum axis A N; ad quadratum applicatæ N M, ita recta N M ad rectam A D ipsi A N perpendicularem. Patet rectam A D esse rectum dictæ parabolæ latus: hoc est solidum sub AD in quadratum rectæ A N æquari cubo applicatæ N M, item sumpto quovis alio puncto ut I, solidum sub A D in quadratum A F æquari cubo applicatæ I F, quod non eget demonstratione, in facilibus enim non immoramur: ducatur tangens ad punctum I, & sit illa IOE quæ cum axe AN in puncto E concurrat. Ex methodo tangentium constat rectam F A, rectæ A E esse duplam, ideóque rectam F E ad rectam A F esse ut 3. ad 2. quadratum verò rectæ E F esse ad quadratum rectæ A F ut 9. ad 4. à recta A D abscindatur nona ipsius pars C D & reliqua CA bisecetur in B, erit igitur D A ad A B ut 9. ad 4. sive ut quadratum E F ad quadratum A F. Solidum itaque sub A D in quadratum A F æquale erit solido sub quadrato F E in rectam A B. Sed solidum sub A D in quadratum A F est æquale cubo rectæ I F, ergo solidum sub rectâ A B in quadratum E F est æquale eidem cubo rectæ I F; est ergo ut quadratum E F ad quadratum I F ita recta I F ad rectam A B, & componendo summa quadratorum E F & F I, hoc est unicum quadratum tangentis I E est ad quadratum I F, ut summa rectarum I F & A B ad A B.

Si autem ducatur à puncto I perpendicularis ad basim recta I H & alia quævis perpendicularis G Q V O occurrens applicatæ I F in Q: curvæ in V & tangenti in O, propter similitudinem triangulorum erit ut I O ad I Q sive ipsi æqualem H G, ita tangens I E ad applicatam I F, & ut quadratum I O ad quadratum H G ita quadratum I E ad quadratum I F.

Ut autem quadratum I E ad quadratum I F, ita summa rectæ I F & A B ad rectam A B Ergo quadratum I O ad quadratum H G erit semper ut summa rectarum I E & A B ad rectam A B: Quod demonstrare oportuit.



Inde sequitur si rectæ M N ponatur in directum recta N X rectæ A B æqualis, esse semper ut quadratum tangentis I O ad quadratum rectæ H G, vel ut quadratum tangentis I Y ex altera parte ad quadratum rectæ oppositæ R H, utrobique enim propter parallelas eadem est ratio, ita rectam H X ad rectam N X. Recta enim H X æqualis est summæ rectarum I F, & A B, & recta N X est æqualis A B. Hoc autem patet ex constructione, recta enim H N propter parallelas æqualis est rectæ I F, & reliqua N X, facta est æqualis rectæ A B.

PROPOSITIO IV.

EXponatur in 5. Figura nostra hæc parabola A X E cuius sit ea, ut diximus, natura ut cubi applicatarum sint inter se in ratione quadratorum portionum axis: Sit ejus axis A I, basis aut semibasis E I ex datis axe A I & applicata I E invenitur, ut superius diximus, rectum latus A D, à quo abscissa nonâ ipsius parte C D, & reliqua A C bifariam divisa in B, secetur basis E I in quotlibet libuerit portiones æquales E F, F G, G H, H I & à punctis F, G, H excitentur perpendiculares F X, G Y, H Z curvæ occurrentes in punctis X, Y, Z. Ad puncta autem E X Y, Z, ducantur tangentes ER, XS, YT, ZV, occurrentes perpendicularibus FX, GY, HZ, IA productis, in punctis R, S, T, V. Ponatur rectæ EI in directu recta IK æqualis rectæ AB, Patet ex præcedente propositione & ipsius corollario quadratum tangentis Z V ad quadratum recta H I esse ut rectam H K, ad rectam KI. Similiter ut quadratum tangentis Y T ad quadratum rectæ G H ita rectam G K ad rectam K I; item quadratum tangentis X S ad quadratum rectæ F G ut rectam F K ad rectam K I; denique ut quadratum tangentis E R ad quadratum rectæ E F ita rectam E K ad rectam I K: His positis à puncto K excitetur K L perpendicularis ad rectam E K, & fiat recta K L æqualis rectæ K I sive A B: Intelligatur jam per punctum K tanquam verticem, axem autem K E, describi parabole simplex sive Archimedea cujus rectum latus sit K L, & sit illa parabola K M Q ad quam excitentur perpendiculares F Q, F P, G O, H N, I M quæ erunt, ut patet applicatæ parabolæ & in directum positæ perpendicularibus F X, G Y &c. Quadratum tangentis Z V ut jam diximus est ad quadratum rectæ H I ut recta H K ad rectam I K.

Sed ut recta H K ad rectam I K ita ſingulis in rectam K L ductis rectangulum ſub H K in K L ad rectangulum ſub I K in K L s rectangulum verò ſub H K in K L ex natura parabolæ Archimedeæ æquatur quadrato applicatæ H N, & rectangulum ſub I K, in K L æquatur quadrato rectæ K L, cum rectæ I K, K L factæ fuerint æquales: Erit igitur ut quadratum H N ad quadratum K L ita quadratum tangentis Z U ad quadratum rectæ H I, ideòque ut recta H N ad K L ita tangens Z U ad rectam H I. Similiter probabimus eſſe ut tangentem Y T ad rectam G H ita applicatam G O ad K L: Item ut tangentem X S ad rectam F G ita applicatam F P ad K L, denique ut tangentem ER, ad rectam E F ita eſſe applicatam E Q ad K L. Cum igitur ſit ut tangens Z U ad rectam H I ita applicata HN ad K L, rectangulum ſub extremis æquabitur rectangulo ſub medijs, ideòque rectangulum ſub N H in HI æquabitur rectangulo ſub K L in tangentem Z U. Similiter rectangulum ſub O G in G H æquabitur rectangulo ſub K L in tangentem Y T, item rectangulum ſub P F in F G æquabitur rectangulo ſub K L in tangentem X S, denique rectangulum ſub E Q in E F æquabitur rectangulo ſub K L in tangentem E R: Quid autem pluribus in re proclivi & jam ad methodum Archimedeam ſponte ſua vergente immoramur? Per inſcriptas enim & circumſcriptas in ſegmento parabolico figuras, rectangula omnia QEF, PFG, OGH, NHI ſegmentum ipſum parabolicum EQMI deſignabunt. Omnes autem tangentes ER, X S Y T, Z U per iteratam ſecundùm noſtræ præcepta methodi circumſcriptionem curvam ipſam E X Y Z A etiam deſignabunt; ergo ſegmentum parabolicum E Q M I æquatur rectangulo ſub K L in curvam E X A. Datur autem in rectilineis ſegmentum parabolicum E Q M I, quadravit enim parabolam Archimedes ideòque ipſius ſegmenta. Ergo rectangulum ſub KL in curvam E X A etiam datùr: datur autem recta K L. Ergo datur curva E X A & ipſi alia recta poteſt conſtitui æqualis, quod erat demonſtrandum.

Si quibuſdam tamen hæc demonſtratio brevitate nimiâ laborare videatur, eam integram inſiſtendo veſtigiis Archimedeis non gravamur ſeparatim adjungere, ut eam legant & examinent qui ſuperiora non ſufficere exiſtimabunt. Probandum eſt ſegmentum parabolicum E Q M I rectangulo ſub datâ K L in curvam E X A æquale eſſe. Fiat ex Archimede ſegmentum illud parabolicum E Q M I æquale rectangulo ſub datâ rectâ K L in datam rectam B. Si probaverimus rectam B æqualem eſſe curvæ E X A conſtabit propoſitum. Aio itaque rectam B curvæ E X A eſſe æqualem. Si enim æqualis non eſt, erit vel major vel minor. Sit primò recta B major quàm curva E X A & ſit earum exceſſus, ſi fieri poſſit recta Δ. Ex propoſitione ſecundâ hujus poſſumus curuæ E X A circumſcribere figuram ex portionibus tangentium compoſitam quæ ſuperet curvam intervallo minore rectâ Δ. Fiat igitur illa circumſcriptio & in figura ſeparatâ, quam etiam quintam Romano charâctere notauimus, circumſcripta illa conſtet ex portionibus tangentium ER, X S, Y T, Z V, circumſcripta illa ex prædemonſtratis eſt major curvâ E X A. Sed & recta B poſita eſt major eâdem curva. Cum ergo circumſcripta ſuperet curvam minori intervallo quàm recta B ſuperat eandem curvam: Ergo circumſcripta minor eſt recta B. Rectangulum itaque ſub rectâ K L in circumſcriptam eſt minus rectangulo ſub K L in rectam B. At rectangulum ſub K L in B factum eſt æquale ſegmento parabolico E Q M I: Ergo rectangulum ſub K L, in circumſcriptam eſt minus dicto ſegmento parabolico E Q M I. Probavimus autem rectangulum ſub K L in portionem tangentis E R æquari rectangulo ſub Q E in E F, item rectangulum ſub K L in X S æquari rectangulo ſub P F in F G, item rectangulum ſub K L in Y T æquari rectangulo ſub O G in G H, denique rectangulum ſub K L in Z V æquari rectangulo ſub N H in H I, ergo rectangulum ſub K L in totam circumſcriptam eſt æquale ſummæ rectangulorum ſub Q E in E F, ſub P F in F G. ſub O G in G H & ſub N H, in H I. Si autem in rectas F P, G O, H N, I M, quæ ſenſim decreſcunt quò propiùs accedunt ad verticem parabolæ, continuatas demittantur

perpendiculares ſeu parallelæ baſi, à punctis Q, P, O, N rectæ Q Γ, P Θ, O Λ, N Φ. Patet rectangulum Q E F Γ æquale eſſe rectangulo ſub Q E in E F, item rectangulum Θ F, æquari rectangulo ſub P F in F G, rectangulum Λ G æquari rectangulo ſub O G in G H, denique rectangulum Φ H æquari rectangulo ſub N H in H I. Ergo rectangulum ſub K L in circumſcriptam eſt æquale rectangulis Θ E, Θ F, Λ G, Φ H. Sed probavimus rectangulum ſub K L in circumſcriptam eſſe minus ſegmento parabolico E Q M I, ergo ſumma rectangulorum Γ E, Θ F, Λ G, Φ H erit minor dicto ſegmento parabolico E Q M I, quod eſt abſurdum, illa enim rectangula conſtituunt figuram ex rectangulis compoſitam, & ſegmento parabolico, ut patet, circumſcriptam, ideóque ipſo ſegmento majorem. Recta itaque B non eſt major curvâ E X A. Sed neque minorem eſſe probabimus. Sit enim recta B minor curvâ E X A, ſi fieri poteſt, & curva ſuperet rectam B intervallo Δ. Circumſcribatur in figurâ ſeparatâ (quam etiam quintam charactere græco notavimus) figura conſtans ex portionibus tangentium curvâ E X A minorum; ſed quam tamen ipſa curva ſuperet intervallo minore ipſo Δ. Et ſit illa figura conſtans ex portionibus tangentium X R, Y S, Z T, A V; Cum itaque curva ſit major B intervallo Δ, & eadem curva ſuperet circumſcriptam intervallo minore ipſo Δ, ergo circumſcripta erit major rectâ B, ideoque rectangulum ſub K L in circumſcriptam erit majus ſegmento parabolico E Q M I. Sed rectangulum ſub K L in circumſcriptam æquatur, ex prædemonſtratis, rectangulis ſub P F, in F E, ſub O G, in G F, ſub N H in H G & ſub M I in I H. Eſt enim ut X R ad F E ita F P ad K L, ideòque rectangulum ſub K L in X R æquatur rectangulo ſub P F in F E & ſic de reliquis. Cum igitur rectangulum ſub K L in circumſcriptam ſit majus ſegmento parabolico E Q M I, ergo ſumma rectangulorum ſub P F in F E, ſub O G in G F, ſub N H in G H & ſub M I in H I eſt major dicto ſegmento parabolico, ſed omnia illa rectangula ductis perpendicularibus ſeu baſi parallelis rectis P Γ, O Θ, N Λ, M Φ quæ omnes cadent in applicatas intra parabolam, prout enim applicatæ magis diſtant à vertice eò magis ſemper augentur, erunt æqualia rectangulis P E, O F, N G, M H. Ergo ſumma omnium illorum rectangulorum P E, O F, N G, M H, erit major ſegmento parabolico. Quod eſt abſurdum. Rectangula enim illa P E, O F, N G, M H componunt figuram ex rectangulis compoſitam & ipſi ſegmento parabolico inſcriptam, ideóque ipſo minorem. Recta itaque B non eſt minor curvà E X A. Cum igitur nec ſit major, nec minor, erit ipſi curvæ æqualis. Quod prolixiùs, ut omnis removeatur ſcrupulus, fuit demonſtrandum.

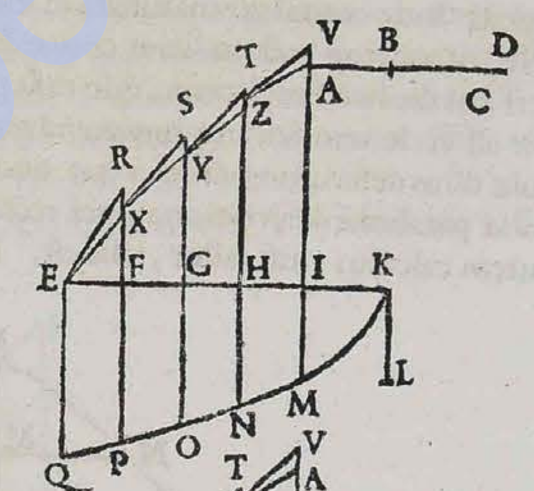
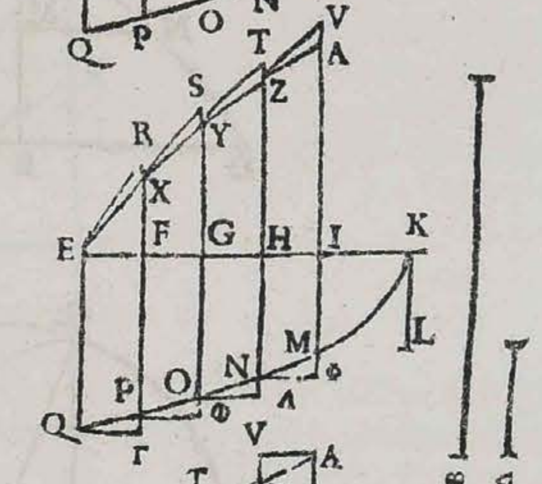
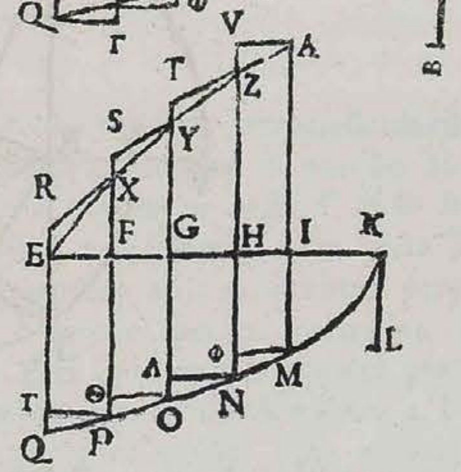


Figura 5.



σχῆμα ε.



Ex jam demonſtratis patet eâdem facilitate demonſtrari poſſe ſegmentum parabolicum quodvis E Q P F à priore abſciſſum, rectangulo ſub datâ K L in curvam E X æquale esse ; Ideóque si detur in basi quodvis punctum ut F, cum ex Archimede segmentum parabolicum E Q P F in rectilineis detur, dari etiam & rectangulum sub K L datâ in portionem curvæ E X; datur autem recta K L, ergo & curva E X. Dato itaque quovis puncto inba se ut F, dari portionem curvæ ipsi oppositam & rectam posse assignari huic æqualem manifestum est.

Nec moveat ad rectam illam curvæ E X A æqualem inveniendam, construendam videri parabolam simplicem, quo casu problema solidum evaderet. Cùm enim supponatur ad veritatem tantum inquirendam & demonstrationem ritè conficiendam parabolæ illius descriptio; nihil vetat quominus calculum ipsum dissimulatâ illa imaginaria parabolæ descriptione, per rectas & circulos & expediamus & exhibeamus. Is autem calculus, nisi fallor, talis est. Esto in figurâ sexta, curva parabolica D A C

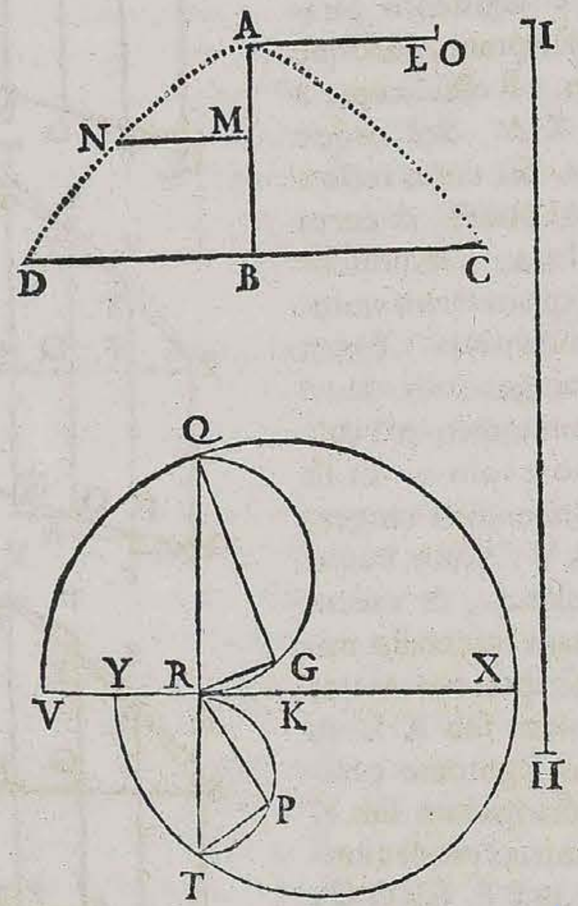


Figura 6.

ejus naturæ ut cubi applicatarum D B & N M sint inter se ut quadrata portionum axis B A & A M, dentur autem altitudo A B & semibasis B D, aut tota D B C. Aio dari rectam curvæ D A C æqualem (quod jam probatum est) in calculo verè Geometrico. Sit rectum istius parabolæ latus recta A O, quam datam esse ex datis axe & applicata ex suprà dictis constat, à recta A O auferatur nona ipsius pars E O, reliqua verò A E fiat æqualis rectæ Y K, cui in directum ponatur K X æqualis seu applicatæ semibasi D B. Super recta Y X tanquam diametro describatur semicirculus Y T X & rectâ Y K bisectâ in puncto R excitetur perpendicularis R T semicirculum secans in T, Rectæ R T fiat æqualis recta R V & super recta V X tanquam diametro describatur semicirculus V Q X ad cujus circumferentiam à puncto R excitetur perpendicularis R Q. Super rectis T R, R Q describantur semicirculi T P R, R G Q & ipsis applicentur rectæ T P, R G quæ singulæ sint ipsi R Y æquales. Junctis autem rectis R P, Q G: Aio rationem curvæ parabolicæ D A C ad basim D B C esse eamdem quæ est dupli quadrati rectæ Q G ad triplum quadratum rectæ R P ideoque esse datam. Fiat itaque ut triplum quadratum rectæ R P ad duplum quadratum rectæ Q G ita recta D C ad

ad rectam I H. Recta illa I H quæ data est ex constructione, æqualis erit curvæ parabolicæ D A C. Quod si cum præcedente demonstratione non conveniat, ab ipsa erit emendandum.

Si hæc non sufficiant ad obtinendum à Geometris ut nostra hæc curva parabolica inter admiranda Geometriæ collocetur, illud fortasse ab ipsis quæ mox sequentur impetrabunt. Quid enim mirabilius quàm ex unâ hâc curvâ derivari & formari alias numero infinitas non solum ab ipsâ sed inter se specie differentes quæ tamen singulæ rectis datis æquales esse demonstrentur? Propositio generalis hæc est.

Sit in 7. Figurâ, curva nostra parabolica C M A cujus altitudo A B, semibasis C B

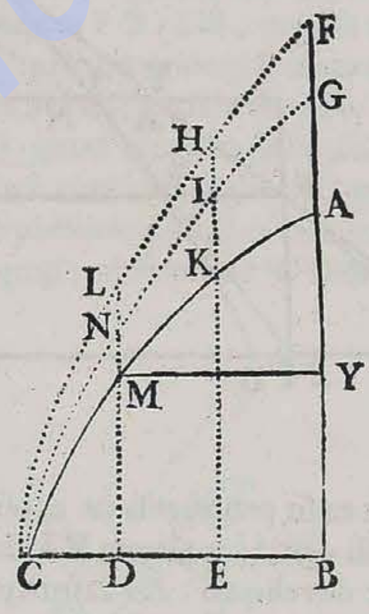


Figura 7.

& ab eâ curvâ formentur aliæ in infinitum hac ratione ut ductis perpendicularibus ad basim rectis D M, N L, E K, I H utcumque, secantibus curvam in punctis M, K, nova curva C N I G ex hac priore formanda sit ejus naturæ ut recta D N sit semper æqualis portioni prioris curvæ nempe C M ipsam respicienti; item recta E I sit æqualis portioni prioris curvæ C M K, & sic in omnibus alijs quibuslibet perpendicularibus. Hæc nova curva C N I G erit diversæ à priore speciei. Formetur pariter ab ipsâ, tertia curva C L H F in qua rectæ D L, E H sint semper æquales portionibus curvis C N & C N I secundæ curvæ. Et à tertiâ pari ratione formetur 4. à quarta quinta, à quinta sexta & eo progrediamur in infinitum ordine. Aio omnes istas curvas C N I G, C L H F & reliquas in infinitum perinde ac primam parabolicam C M K A rectis datis æquales esse.

Notandum autem istas omnes in infinitum curvas esse purè Geometricas, nec in illis itaque ad legem illam & ordinem naturæ de quibus initio hujus dissertationis locuti sumus recurrendum. Licet enim rectæ D N & E I curvis C M & C M K supponantur æquales, eædem tamen ipsæ non tam suppositæ sunt quàm ex prædictis demonstratæ esse pariter rectis æquales. Dato quippe quolibet puncto D, cum ex præcedentibus detur recta æqualis portioni curvæ C M; ergo recta D N quæ curvæ C M ex constructione ponitur æqualis, ut recta verè data non ut æqualis curvæ considerari debet, & sic de reliquis. Curva igitur suprà descripta C N I G verè Geometrica est, quam postquam æqualem esse rectæ datæ demonstraverimus sequetur tertiam curvam ab eâ formandam nempe C L H F esse quoque purè Geometricam & sic omnes alias in infinitum.

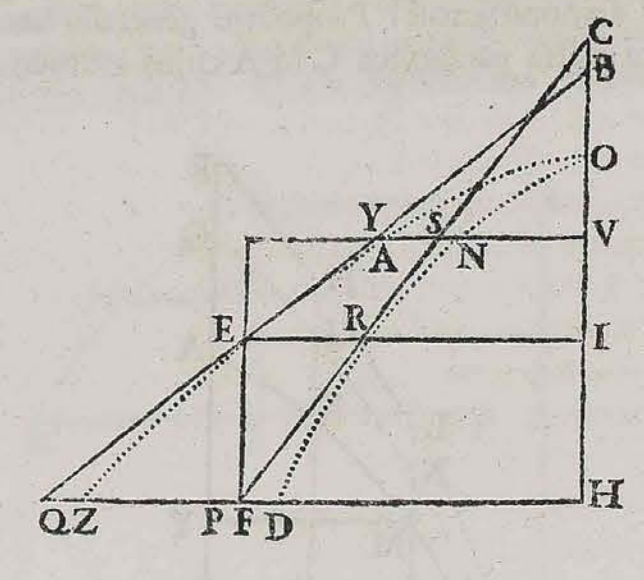
Demonstratio difficilis non erit si prius præmiserimus generalem quæ huic operi omninò inservit propositionem.

N

PROPOSITIO VI.

Esto in Fig. 8. quælibet curva ejuſdem cum præcedentibus naturæ ONR, cujus vertex O, axis vel applicata O V I, eadem enim ſemper eſt demonſtratio, & ab eâ

Figura 8.



formetur alia curva OAE cujus ea ſit proprietas ut applicatæ ſint æquales portionibus abſciſſis à priore curvâ, exempli gratiâ, applicata VA ſit æqualis curvæ O N, applicata I E ſit æqualis curvæ O R, & ſic de reliquis: Ad datum punctum in novâ hâc curvâ ducetur tangens hoc pacto: Sit datum punctum E, ducatur applicata E I, ſecans priorem curvam in R, ducatur recta RC tangens in dicto puncto R priorem curvam & occurrens axi in puncto C, fiat ut R C ad C I, ita recta I E ad rectam I B, & jungatur E B. Aio rectam E B tangere novam curvam E AO in puncto E. Sumpto enim quovis puncto in axe ut V, & ducta applicata V N A quæ ſecet priorem curvam in N, tangentem R C in S, ſecundam curvam in A, rectam verò E B in Y, ſi probaverimus rectam V Y ſemper eſſe majorem applicatâ VA, recta E B non ſecabit novam curvam à parte verticis. Hoc autem facillimè probamus. Recta VA eſt æqualis curvæ O N ſive differentiæ inter curvas O R, N R: At recta R S eſt minor curvâ R N per conſectarium primæ propoſitionis, ergo differentia inter curvam O R & rectam RS eſt major differentia inter eamdem curuam O R, & curvam R N; ſed curva V Y eſt æqualis differentiæ inter curvam O R & rectam R S ut mox probabimus ergo recta V Y occurrens rectæ E B, erit major rectâ V A occurrente curvæ O A E, unde patet omnia puncta rectæ E B verſùs verticem eſſe extra curuam; ideóque recta E B curvam ab eâ parte non ſecabit. Imò nec inferiùs. Sumatur enim quodvis punctum ut H à quo ducatur applicata H Z ſecans priorem curvam in D, tangentem R C productam in F, ſecundam curvam in Z, & rectam E B productam in Q. Si probemus rectam H Q in quocumque caſu majorem eſſe rectâ H Z, patebit omnia puncta rectæ E B etiam inferiùs ſumpta extra curvam jacere, unde patebit dictam rectam E B tangere ſecundam curvam in dicto puncto E. Recta H Z eſt æqualis ex conſtructione curvæ O D, hoc eſt ſummæ curvarum O R, R D. Cum autem recta R F ſit portio tangentis R E inferiùs ſumpta erit ex conſectario primæ hujus recta R F major curva R D, ideóque ſumma curvæ O R & rectæ R F erit major ſumma, ejuſdem curvæ O R & curuæ R D; ſumma autem curvæ O R & rectæ R F eſt æqualis, ut mox probabimus, rectæ H Q; ſumma verò curvarum O R, R D eſt æqualis rectæ H Z ex conſtructione, ergo recta H Q ſemper & in omni caſu major erit applicatâ H Z. Ideóque recta E B in dicto puncto E tanget ſecundam curvam. Probandum

autem reliquimus differentiam curvæ OR & rectæ R S æquari rectæ V Y, ducatur recta E M parallela axi & occurrat rectæ V Y productæ in M. Ex conſtructione eſt ut E I ad I B, ita R C ad C I, ſed ut E I ad I B, ita Y V ad V B, & ita Y M, ad M E, ut autem R C ad C I, ita R S ad V I, ergo ut Y M ad M E, ita R S ad V I, Sunt autem rectæ M E, V I æquales propter parallelas,. ergo rectæ Y M, R S erunt æquales. Sunt autem æquales etiam rectæ E I, V M, ergo differentia inter rectas E I, & M Y erit recta V Y. Sed recta E I ex conſtructione æquatur curvæ O R, ergo differentia inter curvam O R & rectam M Y ſive ipſi æqualem R S æquabitur rectæ Y V. Quod primò erat probandum. Nec diſſimili ratiocinio procedet demonſtratio infrà applicatam E I, ductâ enim rectâ E P parallelâ axi, probabimus rectam Q P æqualem eſſe rectæ R F. Eſt enim ut E I ad I B hoc eſt Q H ad H B, hoc eſt, Q P ad P E, ita recta R C ad C I, hoc eſt, R F ad I H. Sunt autem æquales P E, I H, ergo & rectæ Q P, R F. Recta autem H Q æquatur rectis H P, P Q, quarum prior H P æquatur rectæ I E ſive curvæ O R, poſterior autem Q P æquatur ex demonſtratis rectæ R F. Ergo ſumma curuæ O R & rectæ R F eſt æqualis rectæ H Q quod ſecundo loco fuit probandum. Patet itaque rectam E B in puncto E ſecundam curvam tangere. Quod erat demonſtrandum.

Sit jam in 9. Fig. curva noſtra parabolica G K A cujus altitudo A E, ſemibaſis G E, rectum latus A D, cujus nona pars, ut ſuprà ſit C D & recta A G bifariam ſecetur in

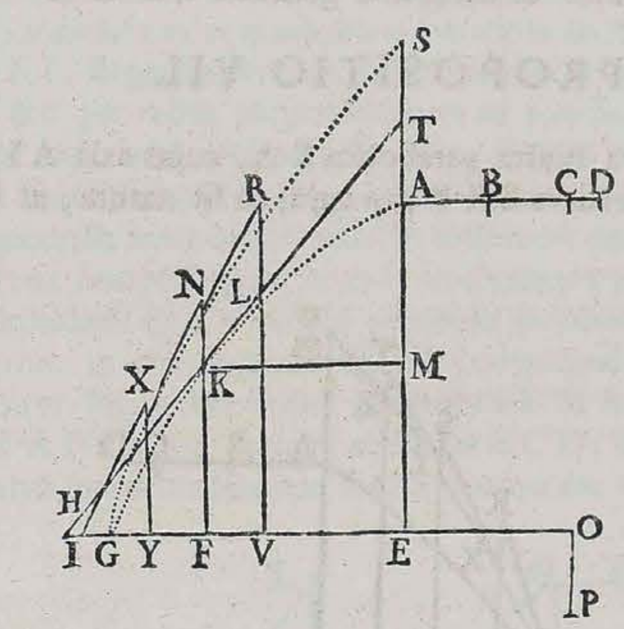


Figura 9.

B: A priori hac curvâ formetur alia verſùs punctum G quæ ſit G N S occurrens axi prioris in S, & novæ hujus curvæ proprietas hæc ſit, ut ſumpto quovis puncto ut F, & erectâ perpendiculari F K N occurrente duabus curvis in K & N, recta F N ſit ſemper æqualis curvæ prioris portioni G K. Ducatur parallela baſi K M, & ad idem punctum K ducatur recta T K H tangens priorem & occurrens axi in T & baſi in H. Per punctum verò N in ſecundâ curvâ ducatur tangens R N X I occurrens baſi in I, & à punctis quibuſlibet in eâ ex utraque parte ſumptis ut R & X demittantur in baſim perpendiculares X Y & R V. Ex præcedentibus patet quadratum tangentis K T in priore curva ad quadratum FE, ſive quadratum KL ad quadratum F V, eſſe ſemper ut rectam FE unâ cùm recta AB ad ipſam AB. Sed ut quadratum K T ad quadratum F E ſive ad quadratum K M, ita quadratum KH ad quadratum H F propter parallelas, ergo quadratum K H eſt ad quadratum H F ut recta F E unâ cum A B ad A B. Ut autem quadratum K H, ad quadratum H F, ita ex præcedente propoſitione quadratum rectæ F N ad quadratum rectæ F I. (Cum enim cætera latera ex vi illius propoſitionis ſint proportionalia, erunt proportionalia & quadrata.) Ergo quadratum N F ad quadratum

N 2

FI eſt ut recta FE unâ cum AB ad AB, & componendo quadrata duo NF & FI ſive unicum quadratum NI erit ad quadratum FI ut FE unà cum AB bis ad AB. Sed ut quadratum NI ad quadratum FI, ita quadratum RN ad quadratum rectæ FV ex una parte, & ita quadratum rectæ NX ad quadratum rectæ FY ex altera. Ergo ſumpto quovis puncto in ſecunda hac curva ut N, eſt ſemper ut quadratum portionis tangentis ad illud punctum ductæ ex alterutra parte ad quadratum portionis baſis ipſi oppoſitæ, ita ſumma rectæ FE unà cum AB bis ad AB. Si igitur baſi GE ponatur in directum recta EO rectæ AB dupla, & ad punctum O erigatur perpendicularis OP ipſi AB æqualis, erit ſemper ut quadratum portionis NR in hâc ſecundâ curvâ ad quadratum portionis baſis FV, vel ut quadratum portionis tangentis NX ad quadratum portionis baſis FY, ita recta FO ad rectam OP.

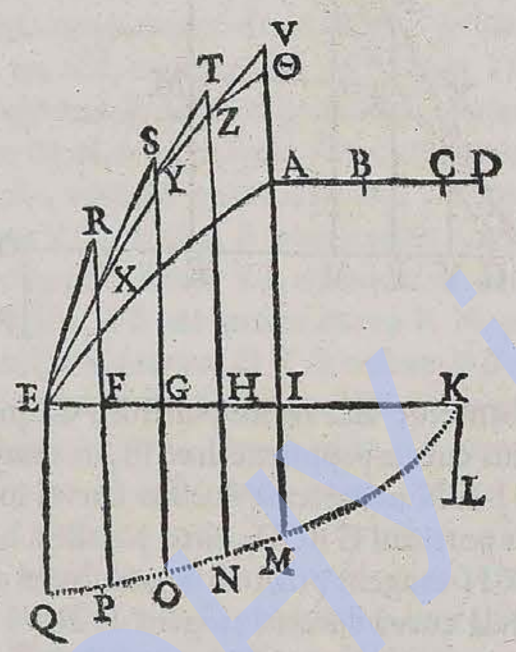
His ita ſe habentibus, patet cæteras in infinitum curvas modo quem ſupra indicavimus deſcribendas ejus eſſe naturæ, ut in 3. v. g. quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis baſis ipſi oppoſitæ, ſit ut portio baſis FE initium ſumens à puncto F in quod cadit perpendicularis à puncto contactus in baſim demiſſa, unâ cum rectâ AB ter ſumptâ ad ipſam AB. In quartâ curvâ erit ut quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis baſis ipſi oppoſitæ ut recta FE unà cum AB quater ſumpta ad ipſam AB. Et ſic de reliquis in infinitum. Eadem enim ſemper demonſtratio, ut evidens eſt, in omnibus caſibus locum habet.

Nec difficilis hoc ſuppoſito ad theorema generale erit aditus.

PROPOSITIO VII.

Esto in Fig. 10. curva noſtra parabolica EA, cujus axis AI, ſemibaſis IE. ab eâ formetur ſecunda curva EXYZ ⊖ cujus ea ſit natura, ut ſuprà diximus, ut

Figura 10.



quævis applicata FX ſit æqualis portioni prioris curvæ ab applicata illa, ſeu mavis vocare perdendicularem, abſciſſæ. Dividatur baſis in quotlibet partes æquales EF, FG, GH, HI & ducantur à punctis F, G, H, perpendiculares ſecantes novam hanc ſecundam curvam in punctis X, Y, Z. Sit prioris curvæ rectum latus AD, à quo abſcindatur nona pars CD, & reliqua AC biſecetur in B. Rectæ AB bis ſumptæ fiat æqualis recta IK quæ ſit in directum baſi, & ad punctum K erigatur perpendicularis KL æqualis rectæ AB. Per punctum K & axem KE intelligatur deſcribi parabola ſim-

plex ſivè Archimedea cujus rectum latus KL & ſit illa parabola KMOQ. A punctis E, F, G, H, I ducantur perpendiculares ad axem & occurrentes huic parabolæ in punctis Q, P, O, N, M, Ex corollario præcedentis cum curva EX ⊖ ſit ſecunda curva à priore derivata ſeu formata eà ratione quam jam ſæpiùs explicuimus; ſequitur ſumpto in ea quolibet puncto ut Y, & ducta portione tangentis YT eſſe ut quadratum YT ad quadratum GH, ita rectam KG ad rectam KL: ſed ut recta GK ad rectam KL, ita ſingulis in rectam KL ductis rectangulum CKL ad quadratum KL. Ex natura autem parabolæ ſimplicis rectangulum GKL æquatur quadrato applicatæ GO; ergo quadratum YT eſt ad quadratum GH ut quadratum GO ad quadratum KL, ideóque ut recta YT ad rectam GH ita recta GO ad rectam KL: rectangulum itaque ſub extremis æquatur rectangulo ſub mediis, rectangulum ergo ſub GO, in GH æquatur rectangulo ſub KL in YT, Si igitur ducantur aliæ tangentes ER, XS & ZV occurrentes perpendicularibus in punctis R, S, V probabitur ſimiliter rectangulum ſub QE in EF æquari rectangulo ſub KL in ER, item rectangulum ſub PF in FG æquari rectangulo ſub KL in XS & ſic de reliquis in infinitum, unde tandem per abductionem ad methodum Archimedeam pari quod in 4. propoſitione hujus indicavimus artificio, conficietur & concludetur ſegmentum parabolicum EQMI æquari rectangulo ſub KL in ſecundam curvam EX⊖ ſicut & ſingula ſegmenta parabolica, EQPF, verbi gratiâ, rectangulo ſub KL in portionem curvæ EX, vel ſegmentum EQOG rectangulo ſub KL in portionem curvæ EXY & ſic in infinitum. Dantur autem in rectilineis hæc omnia ſegmenta parabolica ex vi quadraturæ parabolæ ab Archimede demonſtratæ; & datur etiam recta KL. Ergo dantur tam tota ſecunda curva EX⊖, quàm ipſius portiones EX, EY &c. per rectas perpendiculares ad puncta FG data abſciſſæ.

Ad tertiæ curvæ cum rectâ datâ æqualitatem, ſimilis fiet conſtructio, niſi quod recta IK ponetur tripla rectæ AB. In 4. curvâ eadem IK ponetur quadrupla rectæ AB. Et tandem generalis inter omnes iſtas in infinitum curvas a priore derivandas ita ſtatuetur ratio: erunt nempe ſingulæ inter ſe ut ſegmenta parabolica ejuſdem parabolæ, & ejuſdem altitudinis quæ à vertice parabolæ diſtabunt per rectum latus toties ſumptum quot erunt in ordine curvæ inter ſe comparandæ.

Exempli g. ſit in 11. Fig. curva noſtra parabolica EMA. Cujus axis AF, ſemibaſis EF, rectum latus AD, à quo dempta nona parte CD, reliqua AC biſecetur in B Et à prima illa curvâ formetur ſecunda EOS ejus naturæ ut ſumpto quolibet puncto

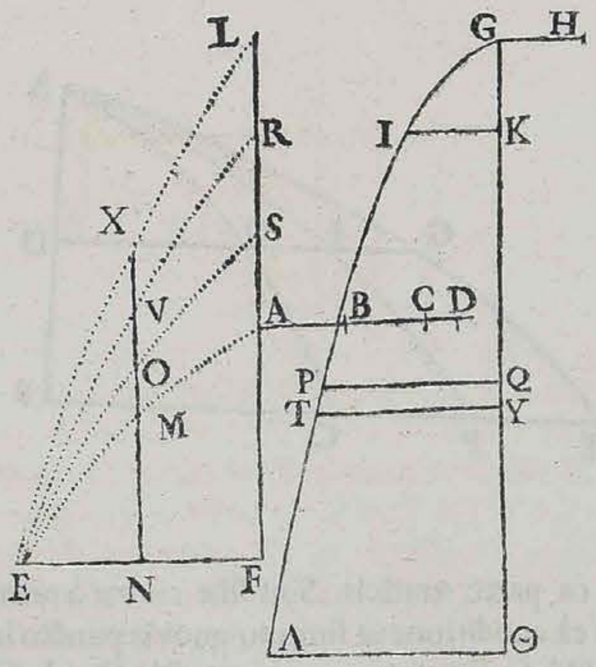


Figura 11.

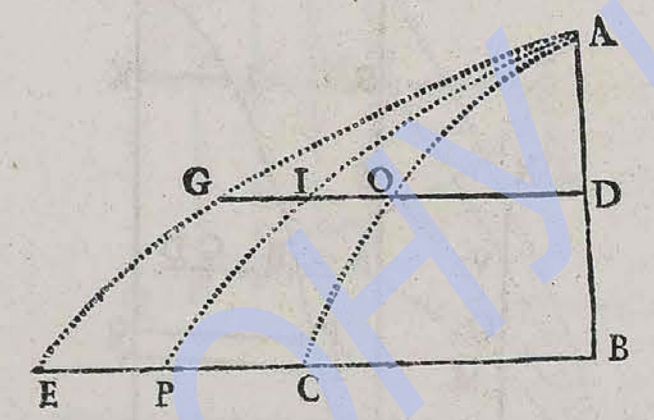
in base N recta N O perpendicularis ad basim & occurrens curvis in M & O, sit æqualis portioni prioris curvæ E M. à secunda formetur tertia E V R in qua recta N V sit æqualis portioni secundæ curvæ E O. Item à tertia E V R formetur quarta E X L, in qua recta N X sit æqualis portioni tertiæ curvæ E V. Exponatur separatim parabola simplex sive Archimedea cujus axis infinitus G K Q Y, vertex G, rectum latus G H æquale rectæ A B. Quæritur ratio verbi gratiâ 4. curvæ E X L ad primam E M A. Quia prior ex istis est 4. ordine, ab axe abscindenda est G Y quadrupla recti lateris G H, deinde ponenda ipsi in directum recta Y Θ æqualis semibasi E F & ducendæ applicatæ rectæ Y T, Θ Λ. Quia verò posterior ex duabus comparandis est prima ordine, abscindenda est ab axe recta G K recto lateri semel tantùm æqualis, deinde ipsi ponenda in directum recta K Q semibasi etiam E F æqualis & ducendæ applicatæ K I, Q P. Erit ex demonstratis & canone generali ab illis deducto, ut segmentum parabolicum Y T Λ Θ ad segmentum parabolicum K I P Q, ita quarta curva E X L ad primam E M A. Sed ratio segmentorum parabolicorum inter se data est ex Archimede, ergo & ratio curvarum inter se data erit; data est autem prima ex demonstratis, datur igitur & quarta, & ipsi rectæ datæ æqualis assignari potest & perpetua illa ratio remota, si libeat, parabola ad phrasim Geometricam ope regulæ tantùm & circini accommodari. Quod autem de totis jam probatum & in canonem deductum est, idem de portionibus illarum curvarum inter se comparandis contingere beneficio segmentorum parabolicorum portiones semibasis ipsis curvarum portionibus oppositas pro altitudine habentium quis non videt?

Nihil autem nec de solidis ex dictis in infinitum curvis, conficiendis, nec de superficiebus ipsorum curvis, nèc de centris gravitatum aut linearum istarum, aut dictorum solidorum, aut superficierum curvarum adjungimus, cum methodi hac de re generales â summis & insignibus Geometris jam vulgatæ ista omnia post cognitam specificam curvæ datæ proprietatem ignorari non sinant, licet in multis casibus propriam ab unoquoque adjungi operi industriam non inutile futurum existimemus.

Sed antequam manum de tabula tollam succurrit examinanda sequens propositio.

Sit in Figura 12. curva nostra parabolica C O A, cujus vertex A, axis A B, semibasis C B. Ab ea formentur aliæ curvæ infinitæ modo quem jam explicuimus, non ex

Figura 12.



parte basis ut suprà, sed ex parte verticis. Sint illæ curvæ à prima effingendæ A I F, A G E &c. in infinitum eâ conditione ut sumpto quovis puncto in axe D & ducta ad axem perpendiculari D O I G secante curvas in punctis O, I, G, recta D I sit in

secunda curva semper æqualis portioni primæ curvæ A O, item recta D G in tertia curva sit semper æqualis portioni secundæ curvæ A I, & sic in infinitum. Hujusmodi omnes curvæ non solùm specie inter se & à prima A O C, different sed etiam ab ijs quas ex parte basis suprà effinximus. Quæritur ergo an curvæ illæ omnes A I F, A G E &c. sic in infinitum effingendæ, datis rectis, an verò alijs curvis sint æquales? Inquirant illud Geometræ, & miraculum augeri experientur.

Sanè si methodi quibus utuntur ad dimensionem curvarum, sint generales & sufficientes, quod ipsis affirmantibus in dubium revocare non ausim, primo statim obtutu rem factam habebunt, & a labore superfluo Geometram jam fatigatum liberabunt.

Si quid autem in superioribus demonstrationibus concisum nimis invenerint, id aut suppleant, rogo, aut condonent.

APPENDIX AD DISSERTATIONEM DE LINEARUM CURVARUM cum lineis rectis comparatione.

Vt ultimæ quam in Diſſertatione propoſuimus quæſtioni ſatisfiat, præmittendæ videntur propoſitiones ſequentes.

PROPOSITIO PRIMA.

SINT in figurâ primâ duæ curvæ A I F, 3 Z 8 quarum axes A E, 37 ſint inter ſe æquales. Ducantur autem ad axes applicatæ quotlibet quæ in utrâque figurâ æquali à vertice intervallo diſtent. Sint exempli gratiâ applicatæ prioris B M, C I, D H, E F: poſterioris verò applicatæ ſint 4 t, 5 2, 6 9, 7 8, & ſit recta A B quæ deſignat intervallum applicatæ B M à vertice, æqualis recta 43 quæ deſignat intervallum etiam applicatæ 4 t à vertice. Sit pariter C A æqualis 53. Item D A æqualis 63, denique E A, quod jam ſuppoſueramus, æqualis 73 Si ſingulæ ex applicatis ſint ſemper ad abſciſſas per tangentes ab axe, in ratione correlatarum, hoc eſt ſi ductis tangentibus ad puncta F, H, I, M, ex unâ parte, & ad puncta 8, 9, Z, T, ex alterâ ſemper contingat ut applicata F E, verbi gratia, ſit ad rectam K E quam tangens F K abſcindit ab axe, in eadem ratione, quæ eſt applicatæ 8 7 ad rectam 7 2 quam tangens 82 ab axe pariter abſcindit. Item applicata D H ſit ad abſciſſam ab axe per tangentem quæ ducitur ad punctum H ut applicata 69 ad abſciſſam ab axe per tangentem ad punctum 9. ductam & ſic de reliquis. Aio duas iſtas curvas A F, 3 z 8. eſſe inter ſe æquales, imò & ſimiles ideóque eaſdem, & applicatas unius figuræ applicatis alterius quæ à vertice æqualiter diſtant eſſe pariter æquales. Ductis enim ad puncta H, I, ut in primâ figurâ portionibus tangentium HO. I N, M R, quæ occurrant applicatis in punctis O, N, R. Item ductis portionibus tangentium in ſecundâ figurâ 9 V, Z Y, T X quæ occurrant applicatis in punctis V, Y, X: ex ſuppoſitione ut F E ad E K in primâ figurâ, ita eſt 87 ad 7 2 in ſecundâ: ſed anguli ad puncta E & 7 ſunt recti, ergo triangula F E K, 8 7 2 ſunt ſimilia: ut ergo F K ad K E, ita 8 2 ad 72. Sed ut F K ad K E ita (productâ applicatâ D H ad punctum G) recta F G ad rectam D E, & ut 82 ad 72 ita (productâ applicata 69 ad punctum P) recta 8 P ad 67. Ergo ut recta F G ad rectam D E, ita recta 8 P ad 67. Sunt autem rectæ DF.

67, æquales, cùm rectæ E A & 73, item rectæ D A & 63 ſint inter ſe æquales: ergo & portiones tangentium FG, 8 P erunt inter ſe æquales. Similiter probabimus portionem tangentis H O æqualem eſſe portioni tangentis 9 V, item portionem tangentis I N æqualem eſſe portioni tangentis Z Y, denique portionem tangentis M R æqualem eſſe portioni tangentis T X. Cum ergo ſeries tangentium in primâ figurâ ſit æqualis ſeriei tangentium in ſecundâ per abductionem ad impoſſibile more Archimedeo facilè concluditur curvam A I F, curvæ 3 Z 8 æqualem eſſe, quod primo loco fuit probandum, imò & pariter concluditur portiones curvæ correlatas eſſe inter ſe æquales, portionem nempè F H portioni 89, portionem curvæ H I portioni 9 Z, & ſic de reliquis. Supereſt probandum applicatas pariter unius figuræ applicatis alterius eſſe æquales. Cum ex ſuppoſitione applicatæ ſint ſemper ad abſciſſas ab axe per tangentes in eâdem utrobique ratione, ergo anguli G F E, P 8 7 qui fiunt ab interſectione tangentium & applicatarum erunt inter ſe æquales: Item anguli O H D, & V 9 6: Item anguli N I C, & Y Z 5: Denique anguli R M B, & X T 4. Cum ergo portiones omnes prioris curvæ F H, H I, I M, M A, ſint æquales portionibus poſterioris 8 9, 9 Z, Z T, T 3 ſingulæ ſingulis, imò & earumdem portionum ſit eadem utrobique inclinatio (inclinationem enim curvarum metiuntur tangentes quæ in utrâque figurâ æquales ſemper, ut probavimus, conficiunt angulos) ergo curvæ A M I H F, 3 T Z 9 8, non ſolùm ſunt inter ſe æquales, ſed etiam ſimiles: Undè ſi intelligantr altera alteri ſuperponi, congruent omninò, ideòque non ſolùm axes ſed applicatas æquales aut eaſdem potius habebunt. Quod ſecundo loco fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Figuræ 2.

Sint duæ in ſecundâ figurâ parabolæ ejuſdem naturæ A O D, X I G, quarum axes ſint A C, X F, ſemibaſes D C, G F, & ſit verbi gratia ut cubus D C ad cubum applicatæ B O, ita quadratum C A ad quadratum B A: & ſimiliter ut cubus G F ad cubum applicatæ I Y, ita quadratum F X ad quadratum I X. (Licèt enim propoſitio ſit generalis à parabolâ noſtrâ non diſcedimus) ſit autem ut axis unius ad ſemibaſem, ita etiam axis alterius ad ſemibaſem nempè ut axis C A ad ſemibaſem D C, ita axis X F ad ſemibaſem G F. Aio duas haſce parabolas eſſe inter ſe in ratione axium, vel ſemibaſium, hoc eſt curvam A O D eſſe ad curvam X I G ut eſt axis A C ad axem X F, vel ut ſemibaſis C D ad ſemibaſem G F. Hæ quippe duæ rationes ex ſuppoſitione ſunt eædem. Demonſtratio eſt in promptu. Secetur enim uterque axis in quotlibet partes æquales, duas tantùm ad vitandam confuſionem & prolixitatem aſſumemus. Secetur ergo bifariam axis A C, in B, & axis F X in Y, & ductis applicatis B O, Y I ducantur ad puncta D, O, tangentes DN, OM quarum prior occurrat applicatæ BO in puncto E, poſterior verò rectæ A V applicatis parallelæ in puncto V. Item in altera figura ducantur ad puncta G, I, tangentes G K, I S, occurrentes applicatæ Y I & ipſi parallelæ X R in punctis H, R: ex ſuppoſitione eſt ut D C ad C A, ita G F ad F X. Sed ex natura iſtius paraboles recta C A eſt ad C N abſciſſam per tangentem ut 2. ad 3. Item recta F X eſt etiam ad rectam F K per tangentem abſciſſam ut 2. ad 3. Ergo ex æquo eſt ut D C ad C N ita G F ad F K. Sunt ergo æquiangula triangula D N C, G K F. Ergo ut D N, ad N C, ita G K ad K F. Sed ut D N ad N C, ita D E ad C B, & ut G K ad K F, ita G H ad F Y. Ergo ut D E ad C B, ita G H ad F Y. Similiter probabitur eſſe ut O V ad B A, ita I R ad X Y. Cum ergo portiones axium A B, B C ex una parte, & X Y, YF ex altera ſint inter ſe æquales, ergo ut omnes tangentium portiones D E, O V ad totum axem A C, ita omnes tangentium portiones G H, I R ad totum axem X F. Omnes autem portiones tangentium D E, & O V & plures, ſi opus ſit, beneficio abductionis ad impoſſibile ut iam ſæpiùs & indicatum & probatum eſt deſignant totam curvam D O A: Item omnes portiones tangentium G H, I R & plures etiam, ſi opus ſit, deſignant totam curvam G I X. Ergo ut curva D O A ad axem A C, ita curva G I X ad axem X F: Et viciſſim & convertendo, erit axis A C ad axem X F: ſive baſis D C ex ſuppoſitione ad baſim G F, ut curva D O A ad curvam G I X. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITI O III.

Figura 3. ESto in 3. Figura curva AO cujus axis AC, baſis C O, & ab ea intelligatur formari alia curva ejuſdem & axis & verticis in quâ applicatæ ſint ſemper in ratione applicatarum prioris curvæ, ſit nempè ut baſis C O, ad baſim C V, ita applicata B P prioris curvæ, ad applicatam B R poſterioris curvæ, & ita applicata D E ad applicatam D N & ſic in infinitum. Si ad punctum quodlibet prioris curvæ ut O ducatur tangens O H cum axe conveniens in puncto H, & continuetur C O, donec occurrat ſecundæ curvæ in V. Aio rectam quæ puncta V & H conjungit tangere ſecundam curvam, & ſemper contingere ut tangentes correlatæ in utraque curva ad idem punctum axi occurrant. Ducantur enim applicatæ B P R, D E N, occurrentes curvis in punctis P, R, E, N, & rectis O H, V H productis, in punctis Q, S, F, M. Si probaverimus rectam B S ſupra rectam CV ductam ſemper majorem eſſe rectâ B R: item rectam D M inferiùs ductam eſſe etiam ſemper majorem applicatâ D N, patebit rectam M V S H tangere ſecundam curvam in puncto V. Ex conſtructione ut C O ad C V, ita eſt applicata B P ad applicatam B R. Sed propter parallelas C O V, B Q S quæ ſecantur à tribus rectis C H, O H, V H ad idem punctum vergentibus, eſt etiam ut C O ad C V ita recta B Q ad rectam B S, ergo ut recta B P ad rectam B R, ita eſt recta B Q ad rectam B S, & viciſſim ut recta B P ad rectam B Q, ita eſt recta B R ad rectam B S. Cùm autem recta O Q H tangat priorem curvam in puncto O, recta B Q erit major recta B P, ergo etiam recta B S erit major recta B R. Quod primo loco fuit probandum. Nec diſſimilis in applicata inferiùs ſumpta erit demonſtratio. Ex ſuppoſitione enim eſt ut C O ad C V, ita D E ad D N, & propter parallelas eſt etiam ut C O ad C V, ita D F ad D M, ergo ut D E ad D N ita eſt D F ad D M; eſt autem D E minor D F, ergo & D N ipſa D M minor erit. Recta itaque M V S H in puncto V tangit ſecundam curvam.

Lemma ad id quod ſequitur.

Figura 4. SIT in 4. figura, parabole noſtra G I A cujus axis A E, ſemibaſis E F G tangens G H. Conſtituatur ad eumdem axem A E alia parabole ejuſdem naturæ F N A cujus ſemibaſis E F ſit poteſtate ſubdupla prioris ſemibaſis E G, & ſemper contingat applicatam quamvis, ut N O, applicatæ O I ad priorem curvam eſſe pariter poteſtate ſubduplam, Sit rectum prioris G I A paraboles latus recta A D, cujus nona pars ſit C D, & reliqua A C biſecetur in B. Ducatur ad ſecundam parabolen tangens ad punctum F recta F H. quæ in eodem puncto H cum axe conveniet non ſolùm ex vi propoſitionis præcedentis, ſed quia ex natura iſtarum parabolarum, in utraque, recta E A eſt ad rectam E H ut 2 ad 3. ex ſuperiùs demonſtratis. Aio quadratum F E eſſe ad quadratum E H ut eſt dimidia rectæ A B ad rectam E G. Jam enim in propoſitione tertiæ diſſertationis demonſtratum eſt quadratum G E eſſe ad quadratum E H ut eſt recta A B ad rectam E G. Ergo ſumptis antecedentium dimidiis erit ut quadratum E F quod ſuppoſuimus eſſe dimidium quadrati G E, ad quadratum E H, ita dimidia rectæ A B ad rectam G E. Probabimus pariter ſi recta F E ſit poteſtate ſubtripla rectæ G E, hoc eſt ſi quadratum F E ſit ſubtriplum quadrati G E, eſſe ut quadratum F E ad quadratum E H, ita tertiam partem rectæ A B ad rectam G E. Et ſic de ſubquadruplo ſubquintuplo & reliquis in infinitum. Cum autem in ratione ſubdupla probaverimus eſſe ut quadratum E F ad quadratum E H ita dimidiam A B ad rectam G E,

ergo componendo erit ut ſumma quadratorum F E, E H, ſive ut unicum quadratum F H ad quadratum E H, ita dimidia A B unà cum G E, ad ipſam G E.

Si verò recta E F ſit poteſtate ſubtripla rectæ G E, erit ut quadratum F H ad quadratum E H, ita tertia pars A B unà cum G E ad ipſam G E.

Si recta E F ſit poteſtate ſubquadrupla rectæ G E, erit ut quadratum F H ad quadratum E H, ita quarta pars A B unà cum E G ad ipſam E G, & ſic in infinitum, & in quacumque applicata idem continget.

PROPOSITIO IV.

HIS præmiſſis theorema generale haud difficulter detegimus.

Sit in figura 5. parabole noſtra A C cujus axis A B, ſemibaſis B C, & ab ea Figura 5.
formentur aliæ in infinitum curvæ A D, A E, A F quarum ea ſit proprietas ut ducta qualibet applicata B C D E F, recta B D ſit ſemper æqualis priori curvæ C A, recta B E æqualis ſecundæ curvæ A D, recta B F æqualis tertiæ curvæ A E, idque ſemper in omnibus ad illas curvas applicatis contingat. Aio omnes illas & ſingulas in infinitum curvas A D, A E, A F &c. eſſe ſemper datis lineis rectis æquales, perinde ac curvas quas in diſſertatione, diverſa & diſſimili ex parte baſis methodo conſtruximus.

Theorema generale ita ſe habet. Exponatur ſeparatim eadem parabole O 3 M æqualis omninò & ſimilis ipſi A C, cujus ideo axis M N æqualis eſt axi A B, & ſemibaſis O N, ſemibaſi B C. Separatim enim ad vitandam confuſionem figuram conſtruendam duximus. Fiat recta N P rectæ N M poteſtate dupla, recta N Q ejuſdem N M poteſtate Figura 6.
tripla, recta N R ejuſdem N M poteſtate quadrupla, & ſic in infinitum. Manente autem eadem ſemibaſi O N, conſtruatur parabole per vertices P, Q, R ejuſdem cum parabola O 3 M vel A C naturæ, & ſint illæ O 4 P, O 5 Q, O 6 R &c. Aio parabolam O 4 P curvæ A D eſſe æqualem; parabolam verò O 5 Q curvæ A E eſſe æqualem, denique parabolam O 6 R curvæ A F eſſe æqualem, & ſic in infinitum. Cum in noſtris parabolis O 4 P, O 5 Q, O 6 R ducta applicata 2 3 4 5 6, ſit ſemper ex natura dictarum parabolarum ut cubus rectæ O N ad cubum rectæ 4 2 ita quadratum rectæ ſive axis N P ad quadratum P 2: item ut cubus O N ad cubum 5 2 ita quadratum N Q ad quadratum Q 2: denique ut cubus O N ad cubum 6 2 ita quadratum N R ad quadratum R 2. Patet ex prædemonſtratis in diſſertatione, ſingulas ex iſtis parabolis, rectis datis æquales eſſe, ergo poſt demonſtrationem theorematis noſtri generalis conſtabit ſingulas quoque ex curvis A D, A E, A F rectis datis æquales eſſe.

Demonſtratio autem theorematis generalis hæc eſt. Sit rectum paraboles iſtius latus recta A S, à qua ſi demas nonam partem S Y, reliquam biſeca in puncto V & ad puncta C, D, E ducantur tangentes ad novas curvas C I, D H, E G quæ occurrant axi in punctis I, H, G. Ex demonſtratis in tertia diſſertationis propoſitione quadratum B C eſt ad quadratum BI ut recta A V ad rectam B C. Et componendo quadratum C I eſt ad quadratum B I ut recta A V unâ cum B C ad B C. Sed ex propoſitione ſexta Diſſertationis, ut eſt quadratum tangentis C I ad quadratum B I, ita quadratum rectæ B D ſe habet ad quadratum rectæ B H, quam abſcindit tangens D H: Ergo ut quadratum B D ad quadratum B H, ita recta A V una cum B C ad B C: Et componendo ut quadratum tangentis D H ad quadratum B H, ita recta A V unà cum B C bis ſumptâ ad ipſam B C. Sed ut quadratum tangentis D H, ad quadratum H B, ita ex eadem diſſertationis propoſitione quadratum B E eſt ad quadratum rectæ B G à tangente E G abſciſſæ: ergo ut quadratum rectæ B E ad quadratum rectæ B G, ita eſt recta A V unà cum B C bis ſumpta, ad ipſam B C. Similiter probabitur ſi ducatur ad curvam E A applicata Z T K, ſecans curvam AC in T, & intelligatur ad punctum K duci, tangens ad curvam AKE, eſſe pariter ut quadratum KZ ad quadratum rectæ, quam tangens per punctum K ducta ab axe abſcindit, ita rectam A V unà cum Z T bis ſumpta ad ipſam Z T. Et ſic ſemper continget.

Exponatur ſeparatim ad vitandam confuſionem eadem curva A K E, quæ ſit in figura ſeparata Β Φ Λ. Baſis Λ Δ ſit itaque æqualis baſi E B, tangens Λ Γ tangenti E G, axis Δ Β axi B A; abſciſſa per tangentem ab axe Δ Γ, abſciſſæ B G; applicata Ν Φ, applicatæ Z K. A B hac curva Λ Φ Β formetur alia ipſa minor Θ Π Β, ea conditione ut applicatæ novæ iſtius curvæ ſint ſemper ſubduplæ poteſtate applicatarum prioris, verbi gratiâ recta Δ Θ ſit ſubdupla poteſtate rectæ Δ Λ, item applicata Ν Π ſit ſubdupla poteſtate rectæ Ν Φ; & ſic de reliquis. Ducantur in hac nova curva tangentes ad puncta Θ, Π rectæ Θ Γ, Π 7. Ex præcedente tertia propoſitione patet tangentes Θ Γ, Λ Γ, ad idem punctum Γ cum axe concurrere. Item tangentes ad puncta Φ, Π ductas ad idem etiam punctum, verbi gratiâ, 7 cum axe concurrere, cùm applicatæ utriuſque figuræ ſint in eadem ſemper inter ſe ratione.

Exponatur adhuc ſeparatim parabole ejuſdem cum parabolis O M, O P &c. naturæ, cujus axi 9 8 ſit æqualis axi M N, ſive AB ſive Β Δ; ſemibaſis autem 8 X ſit ſubdupla poteſtate ſemibaſeos N O, ſive B C. Et ſit illa X 11 9, à qua formetur alia 9 12 Ψ, cujus idem ſit axis 9 8, applicata verò 8 Ψ ſit æqualis curvæ X 11 9: item applicata 10 11 12 ſit æqualis curvæ 11 9; & ſic de reliquis.

Probandum primò curvas Θ Π Β & Ψ 12 9, eſſe eaſdem, hoc eſt omninò æquales, & ſimiles. Quod ſic demonſtrabitur. Probavimus quadratum B E eſſe ad quadratum B G, ſive quadratum Λ Δ ad quadratum Δ Γ, ut rectam A V unà cum C B bis ſumpta ad rectam C B: Ergo ſumptis antecedentium dimidiis, cum poſuerimus rectam Θ Δ eſſe poteſtate ſubduplam rectæ Δ Λ, quadratum rectæ Θ Δ erit dimidium quadrati Λ Δ, ideóque ut quadratum Θ Δ ad quadratum Δ Γ, ita dimidia A V unà cum C B erit ad ipſam C B. Similiter probabimus in alia qualibet applicâta ut Π Ν, eſſe quadratum Π Ν ad quadratum Ν 7 ut dimidiam A V unà cum Z T ad ipſam Z T; & ſic de reliquis. Diſquirendum jam an eadem proprietas curvæ Ψ 12 9 conveniat: quod ita fiet. In curva X 11 9 cujus ſemibaſis X 8 eſt poteſtate ſubdupla ſemibaſis B C, & axis 8 9 æqualis axi A B, ex lemmate ſuperiori ductis tangentibus ad puncta X, Ψ rectis X Ρ, Ψ Σ quadratum X 8 eſt ad quadratum 8 Ρ ut dimidia rectæ A V ad rectam C B (recta enim X 8 eſt poteſtate ſubdupla rectæ C B) Ergo componendo quadratum X Ρ eſt ad quadratum 8 Ρ, ut dimidia A V unà cum C B ad ipſam C B. Similiter ſi intelligatur recta 9 10 æqualis rectæ A Z, hoc eſt ſi puncta 10 & Z æqualiter à vertice diſtent, quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ erit ad quadratum abſciſſæ ab axe, ut dimidia A V unà cum recta Z T ad ipſam Z T. Sed ut quadratum X Ρ ad quadratum 8 Ρ, ita ex propoſitione ſexta diſſertationis eſt quadratum applicatæ Ψ 8 ad quadratum à tangente abciſſæ 8 Σ, & ſimiliter ut quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ ad quadratum abciſſæ ab axe, ita quadratum applicatæ 12 10 ad quadratum abſciſſæ ab axe per tangentem ad punctum 12 ductam: Ergo ut quadratum Ψ 8 ad quadratum 8 Σ, ita dimidia A V unà cum B C ad B C. Sed in alia figura probavimus quadratum applicatæ Θ Δ eſſe ad quadratum abſciſſæ à tangente Δ Γ, ut eſt dimidia A V unà cum B C ad C B. Ergo in duabus curvis Ψ 12 9, Θ Π Β erit ut Ψ 8 ad abſciſſam 8 Σ, ita applicata Θ Δ ad abſciſſam Δ Γ. Et in omnibus aliis punctis idem ſemper continget, & eodem modo probabimus, nempe applicatam, verbi gratiâ, 10 12. eſſe ad abſciſſam à tangente ad punctum 12 ducta, ut eſt Π Ν ad Ν 7, & ſic de reliquis. Per primam itaque propoſitionem hujus appendicis cum curvæ 9 12 Ψ, Θ Π Β, habeant eumdem axem & applicatæ ſint ad abſciſſas ab axe per tangentes, utrobique in eadem correlatarum ratione, illæ curvæ erunt inter ſe æquales, & ipſæ etiam ipſarum ſemibaſes, & omnes ſimiliter applicatæ à vertice æquidiſtantes. Ex conſtructione autem ſemibaſis Ψ 8 eſt æqualis curvæ X 11 9: Ergo curva X 11 9 eſt æqualis rectæ Θ Δ. Recta autem Θ Δ eſt poteſtate ſubdupla rectæ Δ Λ ex conſtructione: Ergo curva parabolica X 11 9 eſt poteſtate ſubdupla rectæ δ λ: recta autem δ λ eſt æqualis rectæ B E, & recta B E ſuppoſita eſt in conſtructione curvarum à primaria A C derivatarum æqualis eſſe curvæ A D: Ergo parabola X 11 9 eſt ſubdupla poteſtate curvæ A D. Sed eadem curva X 11 9 eſt ſubdupla poteſtate parabolæ O 4 P; baſis enim X 8 eſt facta poteſtate ſubdupla baſeos B C ſive N O, & ſimiliter axis 8 9 ſive A B, ſive N M eſt poteſtate ſubduplus axis N P: Cum ergo parabolæ O 4 P, X 11 9 ſint ejuſdem naturæ, & tam axis quàm baſis parabolæ X 11 9 ſint poteſtate ſubduplæ axis & baſis parabolæ O 4 P: Ergo & ipſa parabola X 11 9 ex propoſitione ſecunda hujus appendicis erit ſubdupla parabolæ O 4 P. Cum ergo ut iam probavimus eadem parabola X 11 9 ſit ſubdupla tam parabolæ O 4 P, quàm curvæ A D; curva A D, & ipſa parabola O 4 P erunt inter ſe æquales; quod erat demonſtrandum. Nec diſſimili ad probandum curvam A E æqualem eſſe parabolæ O 5 Q, utendum artificio.

Cum enim quadratum B E eſſe ad quadratum B G ut eſt recta A V unà cum B C bis ſumpta ad ipſam B C, probatum fuerit; ergo componendo & ulteriùs progrediendo erit quadratum tangentis E G ad quadratum rectæ B G, ut recta A V unà cum B C ter ſumpta ad ipſam B C. Eſt autem ex prædemonſtratis in ſexta propoſitione diſſertationis ut quadratum E G ad quadratum B G, ita quadratum B F, ad quadratum abſciſſæ ab axe per tangentem ad punctum F ductam: Ergo quadratum B F erit ad quadratum illius abſciſſæ ut eſt recta A V unà cum B C ter ad B C. In reliquis imitabimur omninò & ſequemur veſtigia demonſtrationis præcedentis, niſi quod in figura ſeparata poſtquàm Λ Δ fuerit facta æqualis ipſi, B F, recta Δ ϑ fiet ſubtripla poteſtate ipſius B F vel Δ Λ; curva Λ Φ Β curvæ F A fiet æqualis; curva θ π β ejus erit naturæ ut omnes applicatæ ſequantur rationem baſium Λ Δ θ δ. In alia autem figura ſeparata in qua curvæ 9 11 X & 9 12 Ψ, recta 9 8 erit æqualis ut ſuprà, rectæ N M, vel A B, vel Β Δ, baſis verò 8 X fiet ſubtripla poteſtate baſis O N vel C B. Et fiet X 11 9 parabola ejuſdem cum parabolis C T A, vel O 3 M naturæ à qua cum formabitur curva Ψ 12 9 cujus applicatæ 8 Ψ, 10 12 ſint, ut ſuprà, æquales curvis X 9, 11 9. Probabimus, ut ſuprà, curvam β π θ, & curvam 9 11 X eſſe inter ſe æquales, & ſimiles, hoc eſt eaſdem. Unde concluditur baſes Θ Δ, & Ψ 8 eſſe æquales, ideoque baſem Ψ 8 ſive curvam 9 11 X eſſe poteſtate ſubtriplam rectæ δ λ, ſive B F, ſive curvæ A E. Eſt autem etiam ex prædemonſtratis parabola X 11 9 ſubtripla poteſtate parabolæ O 5 Q: Ergo curva AE & parabola O 5 Q erunt inter ſe æquales. Eodem ratiocinio in ulterioribus caſibus utemur, & generalem noſtri theorematis veritatem evincemus.

Qui autem ſuperiorem diſſertationem & hanc ad ipſam appendicem accuratiùs legerint, præcipua methodi noſtræ fundamenta ſtatim agnoſcent, & ex eis deduci facillimam curvarum dimenſionem deprehendent.

DE SOLUTIONE PROBLEMAtum Geometricorum per curvas ſimpliciſsimas, & unicuique problematum generi propriè convenientes.

DISSERTATIO TRIPERTITA.

PARS I.

VT conſtet Carteſium in Geometricis etiam hominem eſſe, quod paradoxum meritò forſan quis dixerit, videant ſubtiliores Carteſiani an mendum contineat linearum curvarum in certas claſſes aut gradus Carteſiana diſtributio, & an probabilior & commodior ſecundùm veras analyſeos Geometricæ leges debeat aſſignari. Quod ſine diſpendio famæ tanti & tam celebris viri executuros nos cenſemus, cum Carteſii & Carteſianorum omnium interſit veritatem cujus fautores ſe non immeritò jactant acerrimos, licèt ipſorum placitis aliquantisper adverſetur, omnibus aut (ſi generale hoc nimis) Geometris ſaltem & Analyſtis fieri manifeſtam.

Problematum Geometricorum in certas claſſes diſtributio, non ſolùm veteribus, ſed & recentioribus neceſſaria viſa eſt Analyſtis. Proponatur videlicet A + D æquari B, aut A quadratum + B in A æquari Z plano. Hæ duæ æquationes quarum prior radicem aut latus ignotum ſuis terminis non excedit, poſterior autem lateris ignoti ſecundam poteſtatem ſive quadratum continet, primum & ſimplicius problematum genus conſtituunt. Ea verò ſunt problemata quæ plana Geometris dici conſueverunt. Secundum problematum genus illud eſt in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam poteſtatem, hoc eſt ad cubum vel ad quadratoquadratum pertingit. Ratio autem cur duæ poteſtates proximæ licèt diverſi gradus ſint, unum tamen tantùm conſtituant problematum genus, hæc eſt, quod æquationes quadraticæ reducuntur ad ſimplices aut laterales facili, quæ & veteribus & novis cognita eſt, methodo, ideoque per regulam & circinum nullo negotio reſolvuntur. Æquationes autem quarti gradus ſive quadratoquadraticæ reducuntur ad æquationes tertij gradus ſive cubicas beneficio novæ, quam Vieta & Carteſius prodiderunt, methodi. Huic enim operi Vieta ſubtilem illam & ſibi peculiarem climacticam paraplerosin deſtinavit, ut apud eum videre eſt cap. 6. libelli de emendatione æquationum, nec abſimili in pari caſu uſus eſt artificio Carteſius, licèt aliis verbis illud enunciet.

Similiter quoque cubocubicam æquationem ad quadratocubicam ſive æquationem ſexti gradus ad æquationem quinti deprimet, licèt aliquanto difficiliùs, Vietæus aut Carteſianus Analyſta. Ex eo autem quòd in prædictis caſibus, in quibus una tantùm ignota quantitas invenitur æquationes graduum parium ad æquationes graduum imparium proximè minorum deprimuntur, idem omnino contingere in æquationibus in quibus duæ ignotæ quantitates reperiuntur confidenter pronunciavit Carteſius paginâ 323. Geometriæ linguâ Gallicâ ab ipſo conſcriptæ. Hujuſmodi verò ſunt æquationes omnes linearum curvarum conſtitutivæ, in his enim non ſolùm prædicta reductio vel depreſſio non ſuccedet, ut Carteſius affirmabat, ſed eam omnino impoſſibilem Analyſtæ experientur. Proponatur v. g. æquatio paraboles quadratoquadraticæ conſtitutiva in qua A quadratoquadratum æquatur Z ſolido in E, qua ratione æquatio hæc quarti gradus deprimetur ad tertium? quo utentur remedio climacticæ paraplerosеos artifices?

Quantitatibus autem ignotis characteres vocalium juxta Vietam aſſignamus, hæc enim levia & prorſus arbitraria cur immutarit Carteſius non video.

Ut autem pateat diſquiſitionem hanc aut animadverſionem non eſſe otioſam & inutilem, ſuppetit methodus univerſalis quâ problemata quæcumque ad certum curvarum gradum reducimus.

Proponatur namque problema in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam poteſtatem aſcendat, illud per ſectiones conicas quæ ſunt ſecundi gradus expediemus; ſed ſi æquatio ad quintam vel ad ſextam poteſtatem aſcendat, tunc ſolutionem per curvas tertij gradus poſſumus exhibere: ſi æquatio ad ſeptimam vel ad octavam poteſtatem aſcendat, ſolutionem per curvas quarti gradus exhibebimus, & ſic uniformi in infinitum methodo. Unde evidens fit non hic de nomine tantùm, ſed de re agitari quæſtionem. Proponatur in exemplum A cubocubus + B planoſolidum in A æquari Z ſolido ſolido Aut, ſi velis, A quadratocubus + B planoplanum in A æquari Z plano ſolido, in utroque hoc caſu problema ſolvemus per curvas tertij gradus ſeu cubicas, quod & fecit Carteſius. Sed ſi proponatur A quadratocubocubus + B planoplanoſolidum in A æquari Z planoſolido ſolido. Aut A quadratoquadratocubus + B ſolido ſolido in A æquari Z plano planoſolido, tunc problema ſolvemus per curvas quarti gradus ſeu quadratoquadraticas quod nec fecit nec fieri poſſe exiſtimavit Carteſius, cum in hoc caſu ad curvas quinti vel ſexti gradus neceſſariò recurrendum crediderit. Puriorem certe Geometriam offendit qui ad ſolutionem cujuſvis problematis curvas compoſitas nimis & graduum elatiorum aſſumit, omiſſis propriis & ſimplicioribus, cum jam ſæpe & à Pappo, & à recentioribus determinatum ſit non leve in Geometria peccatum eſſe quando problema ex improprio ſolvitur genere. Quod ne accidat, corrigendus eſt Carteſius & ſingula problemata ſuis hoc eſt propriis & naturalibus ſedibus reſtituenda: ſed & pag. 322. idem Carteſius diſertè aſſerit curvas ex interſectione regulæ & alterius aut rectæ aut curvæ oriundas eſſe ſemper elatioris gradus aut generis, quàm eſt recta aut curva in figura pag. 321. ex qua derivantur. Intelligatur, ſi placet in locum ipſius rectæ C N K in dicta figura pag. 321. ſubſtitui parabolam cubicam cujus vertex ſit punctum K & axis indefinitus K L B A & cætera conſtruantur ad mentem Carteſii. Patet æquationem dictæ parabolæ cubicæ conſtitutivam eſſe ſequentem A cub. ex una parte, & B quad. in E ex altera. experiere autem ſtatim curvam E C ex hujuſmodi poſitione provenientem ad æquationem tantùm quadratoquadraticam aſcendere, ergo curva quadratoquadratica eſt elatioris gradus aut generis, quàm curva cubica ſecundùm prædictam Carteſij definitionem, cum tamen contrarium pag. 323. expreſſe idem Carteſius definierit, curvam nempe quadratoquadraticam & curvam cubicam eſſe unius & ejuſdem gradus aut generis. Methodum autem noſtram qua omnia in infinitum problemata, ea nempe quorum æquationes tertiam & quartam poteſtatem continent, ad ſecundum curvarum gradum: quæ quintam & ſextam poteſtatem, ad tertium: quæ ſeptimam & octavam, ad quartum reducimus, & eo in infinitum ordine exhibere non differemus quotieſcumque id voluerint quibus piaculum videtur errores quoſcumque vel etiam Carteſianos in præjudicium veritatis diſſimulare.

Nec moveat problemata quæ ad ſecundam poteſtatem aſcendunt & quæ ejuſdem cum problematis primi gradus ſint ſpeciei & plana dicuntur, circulis hoc eſt curvis ſecundi gradus indigere; ſuum enim & proprium; huic objectioni reſponſum non deerit cum methodum noſtram generalem omnia omnino problemata per curvas convenientes abſolventem proferemus.

DISSERTATIONIS
PARS II.

UT datæ publicè fidei ſatisfiat, methodum generalem ad ſolvenda quæcumque problemata per curvas proprias & convenientes exhibemus. Prædictum eſt jam in prima diſſertationis parte problemata duorum graduum inter ſe proximorum 3^{i} verbi gratia & 4^{i}. 5^{i}. & 6^{i} 7^{i}. & 8^{i}. 9^{i}. & 10^{i}. &c. unicum tantùm curvarum gradum reſpicere, problemata nempe quæ ad tertiam vel quartam poteſtatem aſcendunt, ſolvi per curvas 2^{i}. gradus: ea verò quæ ad quintam vel ad ſextam poteſtatem aſcendunt ſolvi per curvas 3^{i}. gradus &c. in infinitum.

Modus autem operandi talis eſt. Data quævis æquatio in qua unica tantùm reperitur ignota quantitas reducatur 1^{o}. ad gradum elatiorem ſive parem: deinde ab adfectione ſub latere omnino liberetur, quo peracto remanebit æquatio inter quantitatem cognitam vel homogeneum datum ex una parte, & aliquod homogeneum incognitum cujus ſingula membra à quadrato lateris incogniti adficientur ex una parte, ex altera homogeneum iſtud incognitum æquetur quadrato cujus latus effingendum eo artificio ut in æquatione ipſius quadrati cum homogeneo incognito elatiores quantum fieri poterit lateris ignoti gradus evaneſcant. Cavendum etiam ut ſingula lateris quadratici ſic effingendi homogenea à radice vel latere ignoto adficiantur, & ultimum tandem ex illis à ſecundâ etiam radice incognita adficiatur. Orientur tandem beneficio diviſionis ſimplicis ex una parte, & extractionis lateris quadrati ex altera, duæ æquationes linearum curvarum problemati dato convenientium conſtitutivæ, & earum interſectio ſolutionem problematis exhibebit ea qua dudum uſi ſumus in ſolutione problematum per locos methodo.

Exemplum proponatur, ſi placet, A cub. cub. + B in A qu. cub. + Z. plan. in A quad. quad. + D ſolid. in A cub. + M. plan. plan. in A quad. æquari N. ſol. ſol. problemata quippe omnia quæ ad quintam vel ad ſextam poteſtatem aſcendunt ad hanc formam reduci poſſunt. Nihil enim hoc aliud eſt quàm vel quintam poteſtatem ad ſextam evehere vel eam deinde ab ultima adfectione ſub A vel latere liberare, quæ omnia & Vieta & Carteſius abundè docuerunt.

Effingatur itaque quadratum à latere A cub. + B in A in E & æquetur priori primum illius æquationis parti. Fiet itaque A cub. cub. + B in A qu. qu. in E bis + B qu. in A qu. in E qu. æquale A cub. cub. + B in A qu. cub. + Z pl. in A qu. qu. + D ſol. in A cub. + M pl. pl. in A qu. & deleto utrinque A cub. cub. & reliquis per A qu. diviſis quod ex cautione adjectâ methodo ſemper liberum eſt, remanebit æquatio inter B in A cub. + Z planum in A qu. + D ſol. in A + M pl. pl. ex una parte, & B in A qu. in E bis + B qu. in E qu. ex altera. Hæc autem æquatio, ut patet, dat curvam 3^{i}. gradus.

Quia autem ut conſtituatur duplicata æqualitas & commodè ad ſolutionem problematis deveniatur, æquandum etiam eſt quadratum à latere A cub. + B in A in E poſteriori

riori prioris æquationis parti, hoc eſt N ſol. ſol. ergo per extractionem lateris quadrati, latus quadratum N ſol. ſol. quod facilè datur & dicatur, ſi placet N ſol. æquabitur A cub. + B in A in E, quod eſt latus quadrati prioris æquationis primum datæ parti æqualis. Habemus igitur hanc ſecundam æquationem inter ſol. N & A cub. + B in A in E quæ dabit pariter curvam tertii gradus. Quis deinde non videt interſectionem duarum curvarum jam inventarum dare valorem ipſius A, hoc eſt problematis propoſiti ſolutionem?

Si problema ad ſeptimam vel ad octavam poteſtatem aſcendat ſtatuetur primò ſub forma octavæ poteſtatis, deinde ab adfectione ſub latere omnino liberabitur hoc pacto. Eſto itaque poſt legitimam ex jam præſcripta methodo reductionem, A qu. cub. cub. + B in A qu. qu. cub. + D pl. in A cub. cub. + N ſol. in A qu. cub. + M pl. pl. in A qu. qu. + G pl. ſol. in A cub. + R ſol. ſol. in A qu. æquale Z pl. ſol. ſol.

Effingetur latus quadrati cuilibet iſtius æquationis parti æquandi à latere A qu. qu. + B $\frac{1}{2}$ in A cub. + D pl. in A in E.

Secundum autem hujus lateris quadratici homogeneum eo artificio effinximus ut duæ elatiores lateris vel radicis A poteſtates in æquatione omnino evaneſcant, quod perfacile eſt. Quadratum igitur illius lateris ſi æques priori æquationis propoſitæ parti, deletis communibus & reliquis per A qu. diviſis, orietur æquatio curvæ 4^{i}. gradus conſtitutiva ex una parte.

Deinde poſt extractionem lateris quadrati ex altera æquationis primùm propoſitæ parte latus Z pl. ſol. ſol. quod P pl. pl. dicere licet, æquabitur A qu. qu. + B $\frac{1}{2}$ in A cub. + D pl. in A in E, hæc verò æquatio dabit etiam aliam 4^{i}. gradus curvam, & harum duarum curvarum interſectio dabit valorem A, hoc eſt problematis propoſiti ſolutionem.

Notandum porro in problematibus quæ ad nonam aut decimam poteſtatem aſcendunt, ita effingendum latus quadrati ut in eo ſint quatuor ad minus homogena quorum beneficio evaneſcant tres elatiores lateris ignoti gradus. In problematibus autem quæ ad undecimam aut duodecimam poteſtatem aſcendunt latus effingendi quadrati conſtare debere quinque ad minus homogeneis, ita formandis ut eorum beneficio quatuor elatiores lateris ignoti gradus evaneſcant. Perpetuâ autem & facillimâ methodo, hæc lateris quadrati effingendi forma per ſolam & ſimplicem diviſionem vel applicationem ut verbis geometricis & in re purè geometricâ utamur expediri Analyſtæ experiendo deprehendent, & characterum + & − variatio nullum methodo præjudicium eſt allatura.

Cum autem problemata quæ ad ſecundam poteſtatem aſcendunt per extractionem lateris quadrati reducantur pura, ut notum eſt, per lineas primi gradus, hoc eſt rectas, expedientur, & vana evadet quam in priore diſſertationis iſtius parte metueramus objectio cùm extractionem radicis quadratæ tanquam notam & obviam in quolibet problematum genere ex noſtra methodo uſurpandam ſuppoſuerimus.

Non latebit igitur deinceps accurata & ſimpliciſſima problematum Geometricorum per locos proprios a curvis variæ, prout expedit, ſpeciei oriundos, reſolutio & conſtructio. Variare autem curvas ſalvo ſemper & retento naturali problematis genere, liberum erit Analyſtis, & ſemper problemata 8^{i}. aut 7^{i}. gradus per curvas 4^{i}. problemata 10^{i}. aut 9^{i}. per curvas 5^{i}. problemata 12^{i}. & 11^{i}. per curvas 6^{i}. & ſic uniformi in infinitum methodo expedientur. Cum contra per Carteſium problemata 8^{i}. aut 7^{i}. gradus curvis 5^{i}. aut 6^{i}. indigeant: problemata 10^{i}. aut 9^{i}. curvis 7^{i}. aut 8^{i}. problemata 12^{i}. aut 11^{i}. curvis 9^{i}. aut 10^{i}. & ſic in infinitum, quod quàm longe à ſimplicitate & veritate geometricâ abſit, videant ipſi Carteſiani, aut ſi ita viſum fuerit, contradicant.

Veritatem enim tantùm inquirimus, & ſi in ſcriptis tanti viri alicubi deliteſcat, eam libenti ſtatim animo & amplectemur & agnoſcemus. Tanta me ſanè, ut verbis alienis utar, hujus portentoſiſſimi ingenii inceſſit admiratio, ut pluris faciam Carteſium errantem quam multos κατορθοῦντας.

DISSERTATIONIS
PARS III.

HÆc ad generalem Doctrinam fortasse sufficiant, quæ enim problemata Cartesius per gradus curvarum elatiores determinat expedienda, ea nos generali methodo ad curvarum gradum duplo minorem feliciter depressimus. Quod ita tamen intelligi debere pronunciamus, ut id saltem auxilium omnes omnino quæstiones admittant. Majus quippe infiniti casus speciales non recusant, juvat itaque ulterius expatiari & Analysin Cartesianam non solùm ad terminos duplo minores, sed ad quadruplo, sextuplo, decuplo, centuplo &c. in infinitum aliquando minores deprimere ut tantò magis error Cartesianus detegatur & proprium statim ab Analysi remedium consequatur: potestates autem per numeros ipsarum exponentes designare in gradibus elatioribus, deinceps commodiùs erit.

Proponatur invenire sex continuè proportionales inter duas datas. Sint duæ datæ B & D, prima inveniendarum ponatur A, fiet æquatio inter A^7 & $B^6 D$. Hæc æquatio secundùm Cartesium per curvas 5^i tantùm aut 6^i gradus solvi potest. Nos eam per curvas 4^i gradus in secundâ hujus dissertationis parte sicut reliquas etiam ejusdem naturæ generaliter resolvimus. Sed nihil vetat quominùs eam per curvas 3^i gradus resolvamus. Æquentur quippe singuli æquationis termini homogeneo sequenti $A^4 E^2 D$, æquabitur ex una parte A^7 & divisis omnibus per A^4 manebit D æquatio inter $E^2 D$ & A^3 quæ dat, ut patet, curvam 3^i gradus. Ex altera verò parte $A^4 E^2 D$ æquabitur $B^6 D$, & omnibus per D divisis & reliquis subquadraticè depressis, manebit æquatio inter $A^2 E$ & B^3 quæ dabit etiam curvam 3^i gradus. Harum autem duarum curvarum intersectio dabit valorem A, hoc est problematis propositi per curvas 3^i gradus solutionem.

Sed proponatur inter duas datas invenire duodecim medias proportionales continuè, æquatio erit inter A^{13} & $B^{12} D$, eam autem Cartesius solvi tantùm per curvas 11^i. aut 12^i. gradus solvi posse existimavit. Nos generaliter ut similes quasvis ejusdem gradus eam in secunda hujus dissertationis parte per curvas 7^i gradus solvi posse docuimus. Sed ulteriùs inquirenti occurrit statim elegans per curvas 5^i gradus solutio, imò & datur per curvas 4^i, ut infra videre est: æquentur primùm singula hujus æquationis membra homogeneo $A^8 E^4 D$, ex una parte nempe A^{13}, & ex altera $B^{12} D$, in prima omnibus per A^8 divisis, fiet æquatio inter A^5 & $E^4 D$ quæ dat curvam 5^i. gradus ut patet. In secunda omnibus per D divisis & per quartam potestatem sive quadratoquadratum depressis, remanebit æquatio inter $A^2 E$ & B^3 quæ dat curvam 3^i gradus. Per duas itaque curvas quarum una est 5^i. gradus, altera 3^i. problema propositum expedimus.

Sed idem etiam problema faciliùs, hoc est, per curvas 4^i. gradus construere possumus; æquentur singula æquationis membra $A^9 E^3 D$ fiet illinc post divisionem per A^9 A^4 æquale $E^3 D$, quæ æquatio dat curvam 4^i. gradus, istinc vero omnibus per D divisis, & deinde per tertiam potestatem sive cubum depressis fiet æquatio inter $A^3 E$ & B^4 quæ dabit etiam curvam 4^i. gradus. Problema itaque per duas 4^i. gradus curvas facillimè construimus.

Qui hæc exempla viderit, non poterit dubitare quin inventio trigesima mediarum continuè proportionalium per curvas 7^i, imò & per curvas 6^i. possit expediri. Æquatio nempe inter A^3 & $B^3 D$ communi termino $A^{24} E^6 D$ æquabitur, unde problema per curvas 7^i. gradus expedietur, aut communi termino $A^{25} E^5 D$ æquabitur, unde manabit solutio per curvas 6^i. gradus. Sic inventio 72 mediarum solvetur per curvas 9^i. gradus, & patet ex præmissis posse assignari rationem inter gradum problematis & gradum curvarum illud solventis omni datâ ratione majorem. Quod cum viderint Cartesiani, non dubito quin necessitati & admonitionis & emendationis nostræ subscribant. Advertendum autem

immutandam sæpe esse ipsam æquationis formam ut commodam per partes aliquotas divisionem homogenea ipsa recipiant, quod semel monuisse sufficiet. Proponatur videlicet inventio decem mediarum & sit æquatio inter A^{11} & $B^{10} D$, ducatur quodlibet ex homogeneis in rectam datam verb. grat. Z, ut sit æquatio inter $A^{11} Z$ & $B^{10} D Z$, ita enim ad numerum 12 pervenietur cujus ope facillima per partes aliquotas evadet reductio aut depressio, æquetur videlicet quodlibet ex homogeneis $A^8 E^4$ illinc orietur æquatio inter $A^3 Z$ & E^4 quæ dat curvam 4^i gradus. Istinc verò beneficio extractionis lateris quadratoquadratici inter $A^2 E$ & latus quadratoquadraticum homogenei dati $B^{10} D Z$, quod, si placet, sit N solidum, quæ æquatio dat curvam 3^i gradus, atque ita invenientur 10. mediæ per duas curvas quarum altera est 4^i. altera vero 3^i. gradus. Quod per levem illam prioris æquationis immutationem facillimè sumus executi. Nec moror infinita alia quæ Analystis ars ipsa abunde suppeditabit compendia; Hoc tantùm adjungo ea omnia quæ superiùs diximus non solum locum habere cum potestas ignota nullum aliud sub gradibus inferioribus adfectum continet homogeneum, sed etiam si aliqua ex homogeneis à gradibus potestati proximioribus adficiantur ut si $A^{13} + N A^{12} + M A^{11} + R A^{10}$ æquetur $B^{12} D$, solutio hujus quæstionis perinde facilis reddetur communi adsumpto æquationis homogeneo quo supra usi sumus, nempe $A^9 E^3 D$, ac si inveniendæ 12 mediæ inter duas datas proponerentur. Simili autem in æquationibus ab altioribus gradibus adfectis utemur artificio.

Notandum tamen in æquationibus in quibus una tantùm reperitur ignota quantitas ex una parte, exponentem potestatis illius puræ debere esse numerum primum ut ab eo gradus illius problematis designetur. Si enim exponens ille sit numerus compositus, problema ad gradus numerorum qui eum metiuntur statim devoluetur. Quærantur, exempli gratiâ, 8 mediæ continuè proportionales inter duas datas, fiet æquatio inter A^9 & $B^8 D$, quo casu cum numerus 9. sit compositus à numero 3. bis mensuratus, inferetur problema esse 3^i. gradus, quod quidem ita se habet, si enim inter duas datas reperiantur duæ mediæ, & rursus inter primam & secundam, secundam & tertiam, tertiam & quartam reperiantur similiter duæ mediæ, fient 8 mediæ inter duas primùm propositas lineas. Si quærantur 14. mediæ inter duas datas, æquatio quæ est inter A^{15} & $B^{14} D$ indicabit problema devolui ad alia duo problemata quorum unum est 3^i gradus, alterum 5^i. unde apparet exponentem puræ potestatis debere esse numerum primum ut verè gradum problematis exprimat & designet.

Cum autem numeros à binario quadraticè in se ductos & unitate auctos esse semper numeros primos apud me constet & jam dudum Analystis illius theorematis veritas fuerit significata, nempe esse primos 3. 5. 17. 257. 65537. &c. in infinitum, nullo negotio inde derivabitur methodus cujus beneficio problema construemus cujus gradus ad gradum curvarum ipsius solutioni inservientium rationem habeat datâ quavis majorem. Proponatur namque inter duas datas invenire 256 medias continuè proportionales fiet æquatio inter A^{257} & B^{256} & singuli termini æquabuntur sequenti $A^{240} E^{16} D$, & mox quæstio per curvas 17^i gradus expedietur, si quærantur mediæ 65536 quæstio per curvas 257 gradus solvetur, & sic in infinitum gradus majoris numeri deprimetur ad gradum numeri proximè minoris. Inter duos autem proximos rationem in infinitum augeri quis non videt? An ergo errasse Cartesium ulteriùs Cartesiani dissimulabunt, ego sanè ἐπέχω & quid statuendum hac de re sit sollicitus & tacitus expecto.

PORISMATUM EUCLIDÆORUM
Renovata Doctrina, & sub formâ Isagoges recentioribus Geometris exhibita.

ENUMERAVIT Pappus initio libri septimi libros veterum Geometrarum ad τόπον ἀναλυόμενον pertinentes : qui omnes cùm temporis injuriâ perierint, exceptis unico datorum Euclidis libello & quatuor prioribus conicorum Apollonii, elaborandum Neotericis Geometris maximè fuit ut damnum operum, quæ tentavit edax abolere vetustas, aliquantisper resarcirent; & primò quidem subtilissimus ille, nec unquam satis laudatus Franciscus Vieta Apollonii περὶ ἐπαφῶν libros unico, quem Apollonium Gallum inscripsit, libello feliciter restituit; cujus exemplo se ad eamdem provinciam Marinus Ghetaldus,& VVillebrordus Snellius accingere non dubitarunt, nec defuit proposito eventus, libros enim Apollonii λόγου ἀποτομῆς, χωρίου ἀποτομῆς, διωρισμένης τομῆς & νεύσεων illorum beneficio vix amplius desideramus. Sequebantur loci plani, loci solidi, & loci ad superficiem. At huic quoque parti non ignoti nominis Geometræ succurrerunt: eorumque opera manuscripta licèt, & adhuc inedita latere non potuerunt. Sed supererat tandem intentata, ac velut desperata porismatum Euclidæorum doctrina .Eam quamvis opus artificiosissimum, ac perutile ad resolutionem obscuriorum problematum Pappus asserat, nec superioris nec recentioris ævi Geometræ vel de nomine cognoverunt, aut quid esset solummodò sunt suspicati. Nobis tamen in tantis tenebris dudum cæcutientibus, & quâ ratione in hac materiâ Geometriæ opitularemur elaborantibus, tandem se clara videndam obtulit, & purâ per noctem in luce refulsit; nec debuit inventi novantiqui specimen posteris invideri, postquam enim Suevicum sydus omnibus disciplinis illuxit, frustra scientiarum arcana tanquam mysteria quædam abscondamus, nihil quippe impervium perspicacissimo incomparabilis Reginæ ingenio, nec fas censemus occultare doctrinam quam vel unico duntaxat aut inspirantis, aut mandantis nutu, quandocunque libuerit, detectam iri vix possumus dubitare. Ut autem clariùs se prodat totum porismatum negotium, celebriores quasdam propositiones porismaticas selegimus easque Geometris & considerandas & examinandas confidenter exhibemus, ut mox quid sit Porisma & cui maximè inserviat usui innotescat.

Porisma primum.

Videatur figura porismatis 1.

Sint duæ rectæ ON, O C, quæ angulum constituant in puncto O & sint ipsæ positione datæ, dentur & puncta A & B, à punctis B & A ducantur rectæ B E, A F ipsi OC parallelæ & occurrentes rectæ N O productæ in punctis E & F, jungatur recta A E, quæ rectæ C O productæ occurrat in D, jungatur itidem recta F B, quæ eidem rectæ C O occurrat in C & ad quodvis punctum rectæ O N ut V, verbi gratiâ, inflectantur rectæ A V, B V, ita ut recta AV occurrat rectæ O C in puncto S recta autem BV eidem O C occurrat in puncto R, rectangulum sub C R in D S æquale semper erit rectangulo sub C O in O D, ideoque spatio dato.

Porisma secundum.

Videatur figura porismatis 2.

Exponatur parabole quævis N A B, cujus diametri quælibet sint B E O, sumantur in curva duo quævis puncta A & N; à quibus inflectantur ad aliud quodvis curvæ punctum, ut D, Rectæ A D N, quæ in diametris puncta E, O, G, Q signent, in eadem diametro abscindentur semper duæ rectæ, quæ eamdem servabunt rationem; erit nempe ut O B ad B E, ita, Q B ad G B, idque in infinitum.

Porisma tertium.

Videatur figura porismatis 3.

Esto circulus cujus diameter recta A D, Cui parallela utcunque ducatur N M; circulo in punctis, N & M occurrens; & sint data puncta N & M, inflectatur utcumque recta N B M, quæ secet diametrum in punctis O & V. Aio datam esse rationem rectanguli sub A O in D V, ad rectangulum sub A V in D O; ideoque si inflectatur N C M secans diametrum in punctis R S, erit semper ut rectangulum sub A N in D V ad rectangulum sub A V in D O, ita rectangulum sub A R in D S, ad rectangulum sub A S in D R, nec difficile est propositionem ad ellipses, hyperbolas & oppositas sectiones extendere.

Poriſma quartum.

Videatur figura poriſmatis 4.

EXponatur Circulus I C H cujus diameter I D H data, centrum D, radius ad diametrum normalis C D, ſumantur in diametro producta puncta B & A data, & ſint rectæ A I, B H æquales, fiat ut D I ad I A, ita D L ad L I, & ſit recta D R æqualis D L, dabuntur puncta R & L, jungatur recta C A cui æqualis ponatur A F ad diametrum perpendicularis, eidemque fiat B G æqualis & parallela, inflectatur quævis recta ad circulum à punctis F & G, ut F E G, quæ diametrum ſecet in punctis M & N, Aio ſummam duorum quadratorum R M, L N æquari ſemper eidem ſpatio dato; iiſdem poſitis in ſecundo caſu jungatur recta C L cui æqualis ponatur L P ad diametrum perpendicularis, eidemque æqualis & parallela fiat R Z, ſi à duobus punctis Z & P inflectatur quælibet ad circumferentiam recta ut P V Z ſecans diametrum in punctis K & T quadratorum A T & B K aggregatum æquabitur ſemper alteri ſpatio dato.

Poriſma quintum.

Videatur figura poriſmatis 5.

ESto circulus R A C, cujus diameter R D C data, centrum D, radius D A ad diametrum normalis, ſumantur utcunque puncta Z & B data in diametro à centro D æquidiſtantia, & juncta A Z fiat æqualis Z M ad diametrum perpendicularis eidemque æqualis, & parallela ducatur B O, inflectatur quævis ad circumferentiam recta M H O quæ diametrum in punctis E & N ſecet, erit ſemper ratio quadratorum E H, H C, ſimul ſumptorum ad triangulum E H N data, eadem nempe quæ rectæ A Z ad quartam partem rectæ Z D. Ex adductis poriſmatibus, quorum propoſitiones elegantiſſimas & pulcherrimas eſſe quis diffiteatur, haud difficulter indaganda ſe prodit ipſa poriſmatum natura.

Enunciari nempe poſſeſe, cundùm Pappum, vel ut theoremata vel ut problemata ſtatim patet, nos ſane ut theoremata enunciavimus, ſed nihil vetat quominus in problemata transformentur; exempli causâ ſic quintum poriſma concipi poteſt. Dato circulo R A C cujus diameter R C, quærantur duo puncta ut M & O, à quibus ſi inflectatur quævis ad circumferentiam recta ut M H O faciat ſemper rationem quadratorum ab abſciſſis E H, H C ad triangulum E H C datam; nec latet ex ſupradicto theoremate conſtructio, ſi enim ponatur recta A Z eſſe ad quartam partem Z D in ratione datâ, omnia conſtabunt, eâdemque ratione in reliquis & omnibus omnino poriſmatibus theoremata in problemata facilè tranſibunt.

Quod autem innuit Pappus ex ſententia Juniorum Geometrarum poriſma deficere hypotheſi à locali theoremate, id ſanè totam poriſmatis naturam ſpecificè revelat neque alio ferè auxilio quàm eo quod hæc verba ſubminiſtrarunt hujuſce abdita materiæ penetravimus.

Cum locum inveſtigamus, lineam rectam aut curvam inquirimus nobis tantiſper ignotam, donec locum ipſum inveniendæ lineæ deſignaverimus, ſed cum ex ſuppoſito loco dato & cognito alium locum venamur, novus iſte locus poriſma vocatur ab Euclide, qua ratione locos ipſos poriſmatum unam ſpeciem & eſſe & vocari veriſſimè

Pappus ſubjunxit. Exemplo unico definitionem noſtram aſtruemus in figura 5ª. poriſmatis, datâ rectâ R C, ſi quæratur curva quælibet ut R A B cujus ea ſit proprietas ut à quolibet ipſius puncto ut A demiſſa perpendicularis A D faciat quadratum A D æquale rectangulo R D C inveniemus curvam R A C eſſe circuli circumferentiam, ſed ſi ex dato jam loco illo alium inveſtigemus, problema verbi gratiâ poriſmatis 5ª. novus iſte locus & infiniti alii quos periti ſagacitas Analyſtæ repræſentabit & ex jam cognito eliciet, poriſma dicetur.

Cum autem ut jam diximus Poriſmata ipſa ſint loci, errorem latini Pappi interpretis ex græco textu emendabimus eo loco ubi Poriſmatum opus perutile ait ad reſolutionem obſcuriorum problematum ac eorum generum quæ haud comprehendunt eam quæ multitudinem præbet naturam; quæ ultima verba cum nullum ferè ſenſum admittant ad ipſum authorem recurrendum cujus verba in manuſcriptis Codicibus ita ſe habent, Πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος.

Ait igitur poriſmata conferre ad Analyſin obſcuriorum problematum & generum hoc eſt problematum generalium, ex dictis enim apparet poriſmatum propoſitiones eſſe generaliſſimas, deinde ſubjungit, cum natura multitudinem quæ vix poteſt animo comprehendi ſubminiſtret, quibus verbis infinitas illas & miraculo proximas ejuſdem problematis indicat ſolutiones. Huic autem vel theorematum vel problematum inventioni non deeſt peculiaris à puriore Analyſi derivanda methodus, cujus ope non ſolùm quinque præcedentia Poriſmata ſed pleraque alia & invenimus & conſtruximus & demonſtravimus, & ſi hæc paucula, quæ iſagogica tantùm & accuratioris operis prodroma emittimus, doctis arrideant, tres totos poriſmatum libros aliquandò reſtituemus, imò & Euclidem ipſum promovebimus & Poriſmata in coni ſectionibus & aliis quibuſcumque curvis mirabilia ſanè, & hactenus ignota detegemus.

LETTRES DE MONSIEUR DE FERMAT,

Avec quelques-unes de celles qui luy ont eſté écrites par pluſieurs perſonnes de grand ſçavoir ſur divers ſujets de Mathematiques ou de Phyſique.

LETTRE DE M. DE FERMAT AU R. Pere Merſenne Minime.

Du 3. Juin 1636.

MON R. PERE,

J'ay receu vôtre lettre avec ſatisfaction, puis qu'elle contient des remarques & des experiences tres ſingulieres. J'en fairay l'eſtime que je dois, & de tout ce qui me viendra de vôtre part. Je n'ay point veu de livre de Muſique plus nouveau de vous que celuy que vous appellez queſtions harmoniques, que j'ay relié avec un autre recueil de queſtions, & les mechaniques de Galilæi, ſi la demonſtration de la propoſition de l'helice n'eſtoit pas de grand diſcours & de grande recherche, je vous l'envoyerois preſentement; mais elle contiendra autant que deux des plus grands traitez d'Archimede, de ſorte que je vous demande un peu de loiſir pour cela, & cependant vous la pouvez tenir pour tres-veritable. J'en dreſſeray un traité exprez, ou je vous fairay voir de nouvelles helices auſſi admirables qu'on en puiſſe imaginer. Pour vous en donner l'avant-goût, en voicy une, qui eſt peut-eſtre cette ligne que Menelaüs appelle admirable dans le Pappus.

Eſto helix A M B in circulo C N B, cujus ea ſit proprietas, ut ductâ qualibet rectâ, verbi gratiâ, A M N, tota circuli circumferentia ſit ad ejuſdem circumferentiæ portionem N C B ut A B quad. ad quad. A M (in hoc autem hæc helix differt ab helice Archimedis quod in helice Archim. ſit ut circumferentia ad portionem N C B, ita

A B ad A M) pronunciamus primò ſpatium ſub helice & rectâ A B comprehenſum eſſe dimidium totius circuli.

Deinde (quæ eſt proprietas mirabilis) ſpatium ex prima revolutione ortum (quod hîc ſit N) eſſe dimidium ſpatii M , ex ſecunda revolutione orti , ſpatium verò C ex 3. revolutione ortum eſſe æquale ſpatio M , & omnia omnino deinceps ſpatia ex qualibet revolutione orta dicto ſpatio M ſimiliter eſſe æqualia , ideoque & inter ſe.

Je croy que vous m'avoüerez que ces recherches ſont belles , mais j'ay ſi peu de commodité d'en écrire les demonſtrations qui ſont des plus mal-ayſées , & des plus embarraſſées de la Geometrie , que je me contente d'avoir découvert la verité , & de ſçavoir le moyen de la prouver lorſque j'auray le loiſir de le faire . Si je puis trouver quelque occaſion d'aller paſſer trois ou quatre mois a Paris , je les employeray à mettre par écrit toutes mes nouvelles penſées en ces Arts , à quoy je pourray ſans doûte eſtre beaucoup aydé de vos ſoins. J'ay veu la Geoſtatique de Mr. de Beaugrand , & me ſuis êtonné dabord d'avoir trouvé ma penſée differente de la ſienne , j'eſtime que vous l'aurez déja remarqué. Je luy envoye franchement mon avis ſur ſon livre , vous aſſurant que j'eſtime ſi fort ſon eſprit , & qu'il m'en a donné de ſi grandes preuves , que j'ay peine à me perſuader , qu'ayant entrepris une opinion contraire à la ſienne , je ne me ſois éloigné de la verité. Je conſens pourtant qu'il ſoit mon juge , & ne vous recuſe pas non plus. Et parceque j'ay écrit à la hâte la demonſtration que je vous envoya , & l'écrit que je luy envoye , je mettray tout au net à loiſir , & tacheray méme de trouver de nouvelles raiſons pour ſoutenir mon opinion , à laquelle pourtant , je ne m'attacheray jamais par opiniâtreté dés qu'il me faira connoître le contraire. Je ſuis , &c.

Au R. P. Merſenne Minime.

Du 24. Iuin 1636.

MON R. PERE,

Je ſuis marry de n'avoir peu vous faire preciſement comprendre mes ſentimens touchant ma propoſition Geoſtatique, Il eſt pourtant vray que je n'avois garde de la prendre au ſens que vous avez crû , car la ſeule raiſon que j'ay employée contre l'opinion de M. de Beaugrand , ça eſté celle-la méme que j'ay trouvée dans vôtre lettre , de ſorte que je n'avois garde de tomber dans un inconvenient que j'avois preveu & condamné. J'eſtime donc que tout grave , en quel lieu du monde qu'il ſoit , horſmis dans le centre , pris en ſoy & abſolument , peſe toûjours également ; & c'eſt une propoſition que j'aurois aiſement priſe pour principe ſi je ne la voyois conteſtée ; je tâcheray donc à la preuver. Mais qu'elle ſoit vraye ou non , cela n'empéche pas la verité de ma propoſition qui ne conſidere jamais le grave en ſoy , mais toûjours par relation au levier , & ainſi je ne mets rien dans la concluſion qui ne ſe trouve dans les premiſſes. Or l'equivoque , ſans doûte , eſt venüe de ce que je ne vous ay pas aſſez expliqué les nouvelles penſées que j'ay ſur le ſujet des Mechaniques , & leſquelles vous verrez groſſierement crayonnées ſur le papier que je vous envoye. C'eſt pourtant à la charge que vous m'obligerez de ne les communiquer à perſonne , & que vous me donnerez le loiſir pour en faire les demonſtrations exactes , ou plûtot pour les mettre au net , car elles ſont deja faites. L'erreur d'Archimede , ſi pourtant nous le pouvons nommer ainſi , provient de ce qu'il a pris pour fondement que les bras de la balance arréteroint , quoy qu'ils ne feuſſent pas paralleles à l'horizon , dequoy j'ay demontré le contraire. Si vous examinez de nouveau la 6. & la 7. des equiponderans , vous trouverez que je ne me trompe pas , & que ſa demonſtration eſt toute fondée ſur cette ſuppoſition.

Car ſoit le levier E D B duquel le centre A , celuy de la terre C. Archimede pour demontrer la propoſition reciproque des poids , les diviſe en parties égales comme E, & les attache en diſtances égales le long du levier. Or il ſuppoſe que le centre de gravité de deux poids eſt au point qui diviſe leur intervalle également , & cela eſt bien vray aux deux poids qui ſont autour du point A , parceque la ligne A C , eſtant perpendiculaire au levier , les poids E autour du point A , ſe trouvent également éloignez , & du centre du levier & de celuy de la terre , & par conſequent ils ſe trouvent d'égale inclination , mais ſi dans le méme levier vous prenez le point D qui diviſe l'intervalle des deux graves E également , en ce cas le point plus éloigné du centre du levier eſt auſſi le plus éloigné du centre de la terre , & ainſi le point D avec les deux poids E repreſente une balance, de laquelle les bras ne ſont pas paralleles à l'horiſon ; mais ſi la deſcente des graves ſe faiſoit par lignes paralleles comme en cette figure par les lignes A C , & D N , en ce cas la propoſition d'Archimede ſeroit vraye. Ce n'eſt pas que dans l'uſage elle manque ſenſiblement ; mais il y a plaiſir de chercher les veritez les plus menuës & les plus ſubtiles , & d'ôter toutes les ambiguitez qui pourroint ſurvenir. C'eſt ce que j'ay fait tres exactement , & je vous puis aſſurer que quoy que la recherche en ſoit bien malaiſée , j'en poſſede toutes les demonſtrations parfaitement.

Soit le centre de la terre A , le grave E au point E , & le point N dans la ſuperficie ou ailleurs plus éloigné du centre que le point E. Je ne dis pas , que le poids E peſe moins eſtant en E, que s'il eſtoit en N , mais je dis que ſi le poids E eſt ſuſpendu du point N par le filet N E , que la force étant au point N le retiendra plus aiſement que s'il eſtoit plus proche de ladite force , & ce en la proportion que je vous ay aſſignée.

Je croy vous avoir ſuffiſamment expliqué ma penſée ſur ce ſujet. Pour la queſtion des nombres dont vous me parlez , ſi vous m'en faites part , je tâcheray de la reſoudre : j'envoya il y a déja long-temps la propoſition des parties aliquotes à M. de Beaugrand avec la conſtruction pour trouver infinis nombres de méme nature. S'il ne l'a pas perduë , il vous en faira part. Je vous prie de relire ma propoſition des graves , & de m'en dire vôtre avis. Je ſuis , &c.

Au R. P. Merſenne Minime.

Du 2. Septembre 1636.

MON R. PERE,

La lettre dont vous me parlez dans vôtre derniere s'eſt ſans doûte égarée , car celle que je viens de recevoir eſt la ſeule qui m'eſt venuë depuis cinq ou ſix ſemaines de vôtre part ; ſur le ſujet de laquelle je vous diray , que quand nous parlons d'un nombre compoſé de trois quarrez ſeulement , nous entendons un nombre , qui n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez : & c'eſt ainſi que Diophante & tous ſes interpretes l'entendent , lors qu'ils diſent qu'un nombre compoſé de trois quarrés ſeulement en nombres entiers , ne peut jamais eſtre diviſé en deux quarrés , non pas méme en fractions. Autrement , & au ſens que vous ſemblez donner à vôtre propoſition , il n'y auroit que le ſeul nombre de trois qui fut compoſé de trois quarrez ſeulement en nombres entiers ; car premierement tout nombre eſt compoſé d'autant de quarrés entiers , qu'il a d'unités. Secondement vos nombres de 11. & 14. ſe trouvent compoſez chacun de 5. quarrez. Le premier de 4. 4. 1. 1. 1. Le ſecond de 4. 4. 4. 1. 1. que ſi vous entendez que le nombre que vous demandez ſoit compoſé de 3. quarrez ſeulement , & non pas de quatre.

en ce cas la question tient plus du hazard, que d'une conduite assurée, & si vous m'en envoyez la construction, peut-estre vous le fairay-je avouër. De sorte que j'avois satisfait à vôtre proposition, au sens de Diophante, qui semble estre le seul admissible en cette sorte de questions. Or qu'un nombre composé de 3. quarrez seulement en nombres entiers, ne puisse jamais estre divisé en 2. quarrez, non pas méme en fractions, personne ne l'a jamais encore demontré, & c'est à quoy je travaille, & crois que j'en viendray à bout, cette connoissance est de grandissime usage, & il semble que nous n'avons pas assez de principes pour en venir à bout, M. de Beaugrand est en cela de mon avis. Si je puis étendre en ce point les bornes de l'Arithmetique, vous ne sçauriez croire les propositions merveilleusesque nous en tirerons.Pour la proposition Geostatique,elle est toute fondée sur ce principe seul, que deux graves égaux joints par une ligne ferme & laissez en liberté se joindront au centre de la terre par le point qui divise également la ligne qui les unit, c'est à dire que ce point de division s'unira au centre de la terre. Messieurs de Pascal & de Roberval, aprés avoir reconnu que tout mon raisonnement est fondé la dessus, & qu'accordant ce principe, ma proposition est sans difficulté, m'ont nié ce principe, que je prenois pour un axiome le plus clair & le plus évident qu'on peut demander, obligez-moy de me dire si vous estes de leur sentiment. Je l'ay pourtant démontré depuis peu par de nouveaux principes tirez des experiences qu'on ne me sçauroit contester, & je le leur envoyeray au plûtost. Je suis, &c.

Lettre de Messieurs de Pascal & de Roberval à M. de Fermat.

A Paris le 16. Aoust 1636.

MONSIEUR,

Le principe que vous demandés pour la Geostatique est, que si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme & de soy sans poids, & qu'étans ainsi disposez ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais jusqu'à ce que le milieu de la ligne (qui est le centre de pesanteur des anciens) s'unisse au centre commun des choses pesantes. Ce principe, lequel nous avons consideré il y a long-temps, ainsi qu'il vous a esté mandé, paroit d'abord fort plausible : mais quand il est question de principe, vous sçavez quelles conditions luy sont requises pour estre receu : desquelles conditions, au principe dont il s'agit, la principale manque ; sçavoir, que nous ignorons quelle est la cause radicale qui fait que les corps pesants descendent, & quelle est l'origine de leur pesanteur. Ce qui n'étant point en nôtre connoissance (comme il faut librement avoüer, & en cecy, & quasi en toutes les autres choses physiques) il est évident qu'il nous est impossible de determiner, ce qui arriveroit au centre ou les choses pesantes aspirent, ny aux autres lieux hors la surface de la terre, sur laquelle, parceque nous y habitons, nous avons quelques experiences assez constantes, desquelles nous tirons ces principes en vertu desquels nous raisonnons en la Mechanique.

La diversité des opinions touchant l'origine de la pesanteur des corps, aucune desquelles n'a esté jusques icy ny demontrée ny convaincue de fausseté par demonstration, est un ample témoignage de l'ignorance humaine en ce point.

La commune opinion est, que la pesanteur est une qualité qui reside dans le corps méme qui tombe.

D'autres sont d'avis que la descente des corps procede de l'attraction d'un autre corps qui attire celuy qui descend, comme de la terre. Il y a une troisiéme opinion qui n'est pas hors de vray-semblance ; que c'est une attraction mutuelle entre les corps, causée par un desir naturel que ces corps ont de s'unir ensemble ; comme il est évident au fer & à l'aimant, léquels sont tels, que si l'aimant est arresté, le fer ne l'étant pas, l'ira trouver ; & si le fer est arresté, l'aimant ira vers luy ; & si tous deux sont libres, ils s'approcheront reciproquement l'un de l'autre ; en sorte toutefois, que le plus fort des deux faira le moins de chemin.

Or de ces trois causes possibles de la pesanteur ou des centres des corps, les consequences sont fort differentes, particulierement de la premiere & des deux autres, comme nous fairons voir en les examinant.

Car si la premiere est vraye, le sens commun nous dicte, qu'en quelque lieu que soit un corps pesant, prés ou loin du centre de la terre, il pesera toûjours également, ayant toûjours en soy la méme qualité qui le fait peser, & en méme degré. Le sens commun nous dicte aussi (posée cette méme opinion premiere) qu'alors un corps reposera au centre commun des choses pesantes, quand les parties du corps qui seront de part & d'autre du méme centre, seront d'égale pesanteur, pour contrepeser l'une à l'autre, sans considerer si elles sont peu ou beaucoup, également ou inégalement éloignées du centre commun.

Si cette premiere opinion est veritable, nous ne voyons point que le principe que vous demandez pour la Geostatique puisse subsister.

Car soint deux poids égaux A B joints ensemble par la ligne droite ferme & de soy sans poids A B & soit C le point du milieu de la méme ligne A B, & soint D, E, deux autres points tels quels dans ladite ligne entre les poids A & B. Vous demandez qu'on vous accorde que les poids A, B tombans librement avec leur ligne ne reposeront point jusqu'à ce que le point du milieu C s'unisse au centre commun des choses pesantes. Suivant cette premiere opinion nous accordons, que si le point C est uny au centre des choses pesantes, le composé des poids A B demeurera immobile veritablement. Mais il nous semble aussi que si le point D ou E convient avec le méme centre commun des choses pesantes, combien que l'un des poids en soit plus proche que l'autre, ils contrepeseront encore & demeureront en equilibre : puisque (pour nous servir de vos propres termes) ces deux poids sont égaux, & ont tous deux méme inclination de s'unir au méme centre commun des choses pesantes, & l'un n'a aucun avantage sur l'autre pour le déplacer de son lieu. Et ne sert de rien d'alleguer le centre de pesanteur du corps A B, lequel centre selon les anciens est au milieu C ; car il n'a pas esté demontré que le point C soit le centre de pesanteur du composé A B sinon lors que la descente des corps se fait naturellement par des lignes paralleles, ce qui est contre vos suppositions & les nôtres & contre la verité, & méme nous ne voyons pas qu'aucun corps, horsmis la Sphere, ait un centre de pesanteur, posée la definition de ce centre selon Pappus & les autres Autheurs : & quand il y en auroit un en chaque corps, il ne paroit pas (& n'a jamais esté demontré) que ce seroit ce point la par lequel le corps s'uniroit au centre des choses pesantes : méme cela, pour les raisons precedentes repugne à nôtre commune connoissance en plusieurs figures, comme en la seconde des deux figures suivantes. En tout cas nous ne voyons point que ce centre de pesanteur des anciens doive estre consideré autre part qu'aux poids qui sont pendus ou soutenus hors du lieu auquel ils aspirent.

Quand à la comparaison qui vous a esté faite d'un levier horizontal, lequel estant pressé horizontalement aux deux bouts par deux forces ou puissances égales, demeure en l'estat qu'il est : elle vous semble entierement pareille au levier precedent A B

(puis que vous le voulez appeller ainsi,) d'autant que ces poids ne pressent le levier que par la force ou puissance qu'ils ont de se porter vers leur centre commun. Comme si le levier horizontal est A B, & les forces ou puissances égales A & B pressans horizontalement le levier pour se porter à un certain point commun C, auquel elles aspirent, & lequel est posé également ou inégalement entre les mémes puissances dans la ligne A B. Ces forces pressans également le levier, se resisteront l'une à l'autre selon nôtre sens ; encore meme que l'une comme A, fut plus proche que l'autre du point commun auquel toutes deux aspirent. Et quand le levier ne seroit pas horisontal, mais en telle autre position que l'on voudra, estant consideré de soy sans poids, & toutes les autres choses comme auparavant, le méme effet s'ensuivra selon nôtre jugement.

Nous adjouterons icy ce que nous pensons suivant cette premiere opinion, de deux poids qui seroint inégaux joints comme dessus à une ligne droite ferme & de soy sans poids.

Soint donc deux poids inégaux A & B, desquels A soit le moindre, & soit A B la ligne ferme qui les joint, dans laquelle le point C soit le centre de pesanteur du composé des corps A B, selon les anciens ; ce point C ne sera pas au milieu de la ligne A B. Si donc on met le composé des poids A B, de sorte que le point C convienne au centre commun des choses pesantes, nous ne pouvons croire que ce composé demeurera en cét estat, le poids A estant entierement d'une part du centre des choses pesantes, & le poids B entierement de l'autre part. Mais il nous semble que le plus grand poids B doit s'approcher du méme centre des choses pesantes jusqu'à ce qu'une partie dudit poids B soit au delà dudit centre vers A comme la partie D, en sorte que cette partie D avec tout le poids A estant d'une méme part, soit de méme pesanteur que la partie E restante de l'autre part.

Si la seconde opinion touchant la cause de la descente des poids est veritable, voicy les consequences qu'on en peut tirer selon nôtre jugement.

Soit le corps attirant A B C D spherique duquel le centre soit H ; & que la vertu d'attraction soit également épanduë par toutes les parties du méme corps, en sorte que chacune selon sa puissance, tire à soy le corps attiré, ainsi que supposent les Auteurs de cette opinion.

Sur cette position, le sens commun nous dicte que les distances & autres conditions estant pareilles, les parties égales du corps attirant, attireront également, & les inégales, inégalement.

Soit donc le corps attiré L, consideré premierement hors le corps attirant en A. soit méme la ligne droite A H, à laquelle soit un plan perpendiculaire E H D, coupant le corps A B C D en deux parties égales, & partant d'égale vertu. Soint aussi dans la ligne A H, pris tant de points que l'on voudra, comme K I, par lesquels sont menez des plans F I C, G K B paralleles au plan E H D coupans le corps attirant A B C D en parties inégales, & partant d'inégale vertu. Alors le corps L estant en A, sera attiré vers H par la vertu entiere de tout le corps A B C D ; & le chemin estant libre, il viendra en K ou étant il sera attiré vers H par la plus grande & forte partie B D E G, & contretiré vers A par la plus petite & plus foible partie B A G. Il en sera de méme quand il sera parvenu en I, ou il sera moins attiré que quand il estoit en K ou en A, toutefois il sera toûjours contraint de s'approcher du centre H, tant qu'il y soit venu : mais la partie qui attire diminuant toujours, & celle qui contretire s'augmentant toûjours il sera continüellement attiré avec moins de vertu, jusqu'a ce qu'estant arrivé en H, il sera également attiré de toutes parts, & demeurera en cet estat.

Si cette position est vraye, il est facile de voir que le corps L pesera d'autant moins qu'il sera plus proche du centre H ; mais cette diminution ne sera pas en la raison des lignes H A, H K, H I, ce que vous connoitrez en le considerant sans autre explication.

Si la troisiéme opinion de la descente des corps est veritable les conclusions que l'on

en peut tirer sont les mémes, ou fort approchantes de celles que nous avons tirées de la seconde opinion.

Puis donc que de ces trois causes possibles de la pesanteur, nous ne sçavons quelle est la vraye, & que méme nous ne sommes pas assurez que ce soit l'une d'elles, se pouvant faire que la vraye cause soit composée des deux autres, ou que c'en soit une toute autre, de laquelle on tireroit des consequences toutes differentes, il nous semble que nous ne pouvons poser d'autres principes pour raisonner en cette matiere, que ceux desquels l'experience assistée d'un bon jugement nous a rendus certains.

Pour ces considerations dans nos conferences de Mechanique nous appellons des poids égaux ou inégaux, ceux qui ont égale ou inégale puissance de se porter vers le centre commun des choses pesantes, & nous entendons un méme corps avoir un méme poids quand il a toûjours cette méme puissance : que si cette puissance augmente ou diminüe, alors, quoy que ce soit le méme corps, nous ne le considerons plus comme le méme poids. Or que cela arrive ou non aux corps qui s'éloignent ou s'approchent du centre commun des choses pesantes, c'est chose que nous desirerions bien de sçavoir : mais ne trouvans rien qui nous satisfasse sur ce sujet, nous laissons cette question indecise, raisonnans seulement sur ce que les anciens & nous avons peu découvrir de vray jusqu'a maintenant.

Voyla ce que nous avons à vous dire pour le present touchant vôtre principe de la Geostatique, laissans à part beaucoup d'autres doutes pour éviter prolixité de discours.

Quant à la nouvelle proportion des Angles que vous mettez en avant ; afin de la demontrer, vous supposez deux principes, desquels le premier est vray : mais le second est si éloigné d'estre vray, qu'il y a des cas ou il arrive tout le contraire de ce que vous demandez qu'on vous accorde pour vray.

Le premier est tel. Soit A le centre commun des choses pesantes, l'appuy du levier N ; & du centre A intervalle A N, soit décrite une portion de circonference telle quelle C N B, pourveu que l'arc C N soit égal à l'arc N B ; & soit considerée la circonference C N B, comme une balance ou un levier de soy sans poids, qui se remüe librement à l'entour de l'appuy N, soint aussi des poids égaux posez en C & B. Vous supposez que ces poids fairont equilibre estans balancez sur le point N. Et il semble que tacitement vous supposez encore l'équilibre quand les bras du levier N C & N B seroint des lignes droites pourveu que les extremitez C & B soint également éloignées du centre A, & les lignes N C & N B, soûtendantes ou cordes en effet ou en puissance d'arcs égaux N C, N B.

Toutes ces choses sont vrayes en general; mais nous ne les croyons telles que pour les avoir démontrées par des principes qui nous sont plus clairs & plus connus.

Toutefois en particulier il y a une distinction à faire, laquelle est de grande consideration. Sçavoir que quand les arcs N C & N B sont chacun moindre qu'un quart de circonference, le levier C N B, chargé des poids C & B pese sur l'appuy N, poussant vers le centre A pour s'en approcher. Mais quand les arcs C N, N B font chacun un quart de circonference, le levier C N B chargé des poids C, B ne pese nullement sur l'appuy N, d'autant que les poids sont diametralement opposez ; & partant le levier demeurera de méme sans appuy qu'avec un appuy. Finalement quand les arcs égaux N C, N B sont chacun plus grand qu'un quart de circonference, le levier C N B chargé des poids égaux C, B pese sur l'appuy N poussant vers P, pour s'éloigner du centre A.

Cette distinction estant vraye comme elle est, vostre second principe ne peut subsister, ce qui paroîtra assez par l'examen d'iceluy.

Vostre second principe est tel. Soit A le centre commun des choses pesantes, la balance ou le levier E F B C D, dont l'appuy est D. Soit posé un poids comme B, tout entier au point B pesant de toute sa puissance sur l'appuy B. Ou bien soit divisé le poids B en parties égales E F B C D, lesquelles soint posées sur le levier aux points E, F, B, C, D, étans les arcs E F, F B, B C, C D égaux, & tout l'arc E F B C D décrit alentour du centre A ; vous ſuppoſez que le poids B mis tout entier au point B peſera de méme ſur l'appuy B, qu'eſtant poſé par parties égales aux points E F B C D. Cela eſt tellement éloigné du vray, que quelquefois le poids B, ainſi poſé par parties ſur le levier ne peſera plus du tout ſur l'appuy B ; quelquefois au lieu de peſer ſur l'appuy B pour tirer le levier vers A, il peſera tout au contraire ſur le méme appuy B pour éloigner le levier de A. Et toutefois eſtant ramaſſé tout entier au point B, il peſera toûjours de toute ſa force ſur l'appuy B, pour emporter le levier vers A. Et generalement eſtant divisé & étendu il peſera toûjours moins ſur l'appuy, qu'eſtant ramaſſé au point B, & vous ſuppoſez qu'entier & divisé il peſe toûjours de méme.

Toutes ces choſes ſont demontrées en ſuite de nos principes & nous vous en expliquerons les principaux cas que vous connoiſtrez veritables ſans aucune demonſtration.

Soit derechef A le centre commun des choſes peſantes, alentour duquel ſoit décrit le levier C B D qui ſoit de ſoy ſans poids, prolongé tant que de beſoin : & ſoit B le point de l'appuy, auquel ſi un poids eſt posé, nous demeurons d'accord avec vous qu'il peſera de toute ſa puiſſance ſur l'appuy B, lequel appuy s'il n'eſt aſſez fort rompra, & le poids s'en ira avec ſon levier juſques au centre A. Maintenant ſoit divisé le poids premierement en deux parties égales : & ayant pris les arcs B C & C D chacun d'un quart de circonference, afin que tout l'arc C B D ſoit une demie circonference ſoit posée une moitié du poids en D, l'autre en C ; lors ces deux poids C & D peſans vers A ne feront point d'autre effet ſur le levier C B D, ſinon qu'ils le preſſeront également par les deux extremitez C & D pour le courber. Suppoſant donc qu'il eſt aſſez roide pour ne pas plier ; ils demeureront ſur le levier de méme que s'ils étoient attachez aux bouts du diamettre D A C ſans qu'il ſoit beſoin de l'appuy B ſur lequel le levier chargé de ſes deux poids ne fait aucun effort : & quand cét appuy ſera oſté, le tout demeurera de méme qu'avec l'appuy, ce qui eſt aſſez clair.

Que ſi le poids eſt divisê en plus de deux parties égales, & qu'eſtant eſtendu ſur des portions égales du levier, deux d'icelles parties ſe rencontrent aux points C, D, & les autres dans l'eſpace C B D ; alors celles qui ſeront en C & D ne chargeront point l'appuy B : quant aux autres, elles le chargeront, mais d'autant moins que plus elles approcheront des points C D, auſquels finit la charge : ainſi il s'en faudra beaucoup que toutes enſemble étenduës chargent autant l'appuy que lors qu'elles ſont ramaſſées en B : elles ne peſent donc pas de méme.

Davantage ſoint pris les arcs égaux B C & B D chacun plus grand qu'un quart de circonference, & ſoit imaginée la ligne droite C D ; puis eſtant divisé le poids en deux parties égales ſeulement, ſoint attachées l'une en C, & l'autre en D : alors il eſt clair que le levier chargé des poids C, D, peſera ſur l'appuy B ; mais ce ſera tout au contraire, que ſi les deux poids eſtoint ramaſſez en B : car ſi l'appuy n'eſt pas aſſez fort il rompra, & les poids emportans le levier, que nous ſuppoſons eſtre de ſoy ſans poids, ne ceſſeront de mouvoir tant que la ligne droite C D ſoit venuë au point A, le levier eſtant monté en partie au deſſus de B vers P, au lieu de s'abaiſſer vers A comme il arriveroit ſi les poids eſtans ramaſſez en B, avoint rempu l'appuy. Voyez quelle difference.

Enfin ſoit le levier comme auparavant, auquel ſoint des quarts de circonference B C, B D, & de part & d'autre du point C ſoint pris des arcs égaux C G, C E chacun moindre qu'un quart. De méme de part & d'autre du point D ſoint pris les arcs égaux entre eux & aux precedents D H, D F, tous commenſurables au quart. Soit auſſi diuisé tout l'arc E B F en tant de parties égales que l'on voudra, en ſorte que les points E, C, G, B, H, D, F, ſoint du nombre de ceux qui font la diviſion, & ſoit divisé le poids en autant de parties égales que l'arc E B F, leſquelles parties de poids ſoint posées ſur les parties de la diviſion du levier : alors les poids qui ſe trouveront poſez ſur les arcs E C & F D déchargeront autant l'appuy B qu'il eſtoit chargé par ceux des arcs C G,

D H :

D H : partant tous ceux qui ſeront ſur les arcs E G & F H ne chargeront point l'appuy B, lequel, par ce moyen ne ſera chargé que par ceux qui ſeront ſur l'arc G B H, & ſi entre B G & B H il n'y a aucun poids (ce qui arrivera quand ces arcs B G & B H ne feront chacun qu'une partie de la ſuſdite diviſion du levier) alors l'appuy B ſera entierement déchargé. Voyés donc combien il y a de difference entre les poids ramaſſez en B, & étendus par parties ſur le levier E B F, voyez auſſi qu'un méme poids divisé par parties, & étendu ſur le levier, peſe d'autant moins ſur l'appuy B que plus grande eſt la portion qu'il occupe de la circonference décrite alentour du point A centre commun des choſes peſantes.

Cette derniere conſideration pourroit bien eſtre cauſe qu'un méme corps peſeroit moins, plus proche que plus éloigné du centre commun des choſes peſantes : mais la proportion de ces peſanteurs ne ſeroit nullement pareille à celle des diſtances ; & ſeroit peut-eſtre tres difficile à examiner.

Maintenant pour venir à vôtre demonſtration. Soit le levier G I R, duquel l'appuy ſoit I, & que les extremitez G, R & l'appuy I ſoint également éloignez de A centre commun des choſes peſantes, alentour duquel ſoit imaginée la portion de circonference G I R, & ſoit fait que comme l'arc G I eſt à l'arc I R, ainſi le poids R ſoit au poids G. Vous dites que le levier chargé des poids G R demeurera en equilibre ſur ſon appuy I. Quant à la demonſtration, vous ſuppoſez qu'elle eſt facile en conſequence de vos deux principes precedens. Et de fait ſi ces principes eſtoint vrais, il ne reſteroit aucune difficulté, & la choſe ſe pourroit conclurre ainſi. Soit faite la preparation ſuivant la methode d'Archimede, en ſorte que les arcs R Q, R M ſoint égaux, tant entre-eux qu'a l'arc I G ; & les arcs G B, G M égaux, tant entre-eux qu'a l'arc I R. Et ſoit eſtendu le poids R également depuis Q juſques en M, & le poids G auſſi également depuis M juſques en B ; ainſi les deux poids G R ſeront également étendus, ſur tout l'arc B G I M R Q, lequel arc ſera quelquefois moindre que la circonference entiere, quelquefois égal à icelle, & quelquefois plus grand. Et d'autant que les portions I B, I Q ſont égales, le levier B G I R Q demeurera en equilibre, par le premier principe ſur l'appuy I. Mais le poids G étendu depuis B iuſques en M peſe de méme qu'eſtant ramaſsé au point G, par le ſecond principe : & par le méme principe, le poids R posé de méme eſtant étendu depuis M juſques en Q, qu'eſtant ramaſsé au point R. Partant puis que ces deux poids eſtans ramaſſez en G & en R peſent de méme ſur le levier, qu'eſtans étendus, & qu'eſtans étendus ils font equilibre ſur le levier ; ils feront encore equilibre eſtans ramaſſez en G & en R.

En cette demonſtration tout ce qui eſt fondé ſur le ſecond principe, reçoit les mémes difficultez que le principe méme : & partant la concluſion ne s'enſuit point que les poids G R, faſſent equilibre ſur le levier G I R.

Nous pouvons nous contenter de ce que deſſus, croyans que vous ſerez ſatisfait : mais nous vous prions de conſiderer encore deux inſtances dont la premiere eſt telle.

Au levier G I R ſoit l'angle G I R droit, & partant l'arc G I R, une demie circonference décrite autour de A centre commun des choſes peſantes. Si l'on poſe l'arc G I, moindre que l'arc I R, par exemple que G I ſoit le tiers de I R & le poids R de 20. livres ; il faudroit donc en G 60. liures ſelon vous, pour faire equilibre ſur le levier G I R appuyé au point I, & toutefois ſi vous mettez des poids égaux en G & en R, ils ſeront diametralement oppoſez, & partant par le principe de la Geoſtatique au cas dudit principe, accordé par vous & par nous, leſdits poids égaux feront encore equilibre comme s'ils peſoint ſur les extremitez du diametre G R vers le centre A : & quand il y a une fois equilibre, pour peu que l'on augmente ou diminuë l'un des poids l'equilibre ſe perd. Voyez comme cela ſe peut accorder avec vôtre poſition.

La ſeconde inſtance eſt telle. Soit A le centre commun des choſes peſantes à l'entour duquel ſoit la circonference G I R, l'appuy du levier I, & les bras I G, I R deſquels G I

R

ſoit le moindre, & ſoit prolongée la ligne droite I A tant qu'elle rencontre la circonference en B. Partant ſelon vous, il faudra en G un plus grand poids qu'en R. Et ſi on prend l'arc I C plus grand que I R, mettant en C le méme poids qui eſtoit en R, il faudra en G un plus grand poids qu'auparavant pour faire l'equilibre. De méme prenant l'arc I D. encore plus grand que I C, & faiſant I D eſtre le bras du levier, & mettant en D le méme poids qui eſtoit en C, il faudra encore augmenter le poids G. Ainſi plus le bras du levier qui eſt en la circonference I R B, aboutira prés du point B, eſtant chargé du méme poids, plus il faudra en G un grand poids pour contrepeſer. Et ſelon le ſens commun par le raiſonnement ordinaire, le bras du levier eſtant la ligne droite I B chargé comme deſſus, il faudroit en G le plus grand poids. Et toutefois alors le poids qui ſert en B, peſant vers A fairoit tout ſon éffort ſur la roideur du bras B I, & le moindre poids qui ſeroit en G fairoit balancer le bras I B vers D: & pour peu que le poids qui ſera en G faſſe balancer le bras I B avec ſon poids, vers D (ce qui eſt facile à démontrer) alors encore que tant G que B ſortent hors la circonference, on conclurra quelque choſe de choquant de vôtre poſition.

Enfin, Monſieur, parceque l'experience de ce que deſſus, ne ſe peut faire par les hommes, des poids à l'égard de leur centre naturel; ſi vous vouiez prendre la peine de la faire alentour d'un centre artificiel, ſuppoſant pour levier un petit cercle artificiel, au lieu du grand cercle naturel, & des puiſſances qui agiſſent ou aſpirent vers le centre du petit cercle au lieu des poids qui tendent vers le centre du grand, vous trouverez que l'experience eſt du tout conforme à ce raiſonnement.

Si vous avez agreable de continuer nos communications ſur ce ſujet ou ſur celuy de la Geometrie en laquelle nous ſçavons que vous excellez entre tous ceux de ce temps, nous tâcherons à vous donner contentement: & ce que nous vous propoſerons ne ſera point par forme de queſtions, car nous en envoyerons les demonſtrations en méme temps pour en avoir voſtre jugement. Vous nous obligerez auſſi de nous faire part de vos penſées. Nous ſommes, &c.

Lettre de M. de Fermat à Meſſieurs de Paſcal & de Roberval.

Du 23. Aouſt 1636.

MESSIEURS.

J'ay leu avec grand ſoin le jugement qu'il vous a plû me donner des propoſitions que j'avois envoyées à M. de Carcavi, & comme j'ay reconnu la fermeté de vôtre raiſonnement jointe avec une grande & profonde connoiſſance de cette matiere, j'ay auſſi cru que vous ne trouveriez pas mauvaiſe ma replique que je fairay en peu de mots, & que peut-eſtre je tireray à ce coup de vous le conſentement que vous n'avez pas voulu m'accorder d'abord, & je ne penſe pas avoir beſoin de m'excuſer des erreurs qu'il vous a ſemblé que j'avois commiſes, à quoy quand je ne répondrois que par la hâte que j'eus d'écrire à M. de Roberval, lequel j'avois prié de ſuppleér ce qui ne ſeroit pas expliqué aſſez au long, j'aurois peut-eſtre ſuffiſamment ſatisfait; mais pourtant je vous declare que je n'ay jamais crû parler que du levier moindre que le demi-cercle, & ſi j'ay obmis de l'écrire, ma figure qui n'en repreſentoit que celuy-là reparoit aſſez ce manquement, puiſque je n'avois pas ſeulement eu le temps d'écrire la demonſtration de ma propoſition ſur madite figure, que ſi le levier eſt plus grand que le demy cercle j'ajoûteray à la fin de ce diſcours la proportion qu'il doit garder. Il me ſemble que j'en ay aſſez dit pour répondre à la plus forte des objections que vous avez faites contre mon ſecond levier.

l'autre qui combat mon ſecond principe a eſté preveüe par moy, & je vous avoüeray que quoy que ce ſecond principe ſoit manifeſtement faux, & qu'il choque mon ſentiment ſur le fait du premier levier, je l'avois pourtant induſtrieuſement, & à deſſein mis dans ma lettre, afin de vous faire accorder qu vn grave peſe moins, plus il approche du centre de la terre, on en me niant cette verité vous obliger d'accorder celle de mon ſecond levier. Monſieur de Carcavi à qui je l'avois écrit quelque temps auparavant que de recevoir vos lettres vous le temoignera ſans doute, & j'en ay tiré du moins le profit que vous m'avez accordé qu'un grave peſe moins plus il approche du centre, quoy qu'il ſoit mal aiſé de determiner la proportion de la difference de ces poids; je me contente d'avoir dit ce peu de mots par avance, & viens à la demonſtration de mon ſecond levier, aprés vous avoir aſſuré que jamais homme du monde ne ſe portera avec plus de bonne foy & d'ingenuité que moy à avoüer les veritez que j'auray reconnuës, & que je croy ma propoſition tellement vraye, que l'ayant ſouvent conſidérée de divers biais & à diverſes repriſes, je n'ay jamais peu en doûter.

Voicy les vrais principes de ma demonſtration.

Axioma 1. Si grave quieſcens ab aliquo puncto ſuſpendatur, gravitabit ſuper lineam rectam punctum ſuſpenſionis & centrum terræ conjungentem.

Patet axiomatis veritas quia aliter grave non quieſceret. Axioma 2. in vecte circulari cujus dimidium punctum ſuſpenſionis ſi ex utraque parte in punctis æqualium ſectionum gravia æqualia collocentur, corpus ex omnibus illis gravibus compoſitum & à medio ille puncto ſuſpentum quieſcet.

Axioma 3. in vecte circulari ſemicirculo minori cujus centrum eſt centrum terræ (hoc enim in noſtro vecte ſemper intelligendum) ſi punctum ſuſpenſionis inæqualiter vectem dividat, & ex utraque parte in punctis æqualium ſectionum gravia æqualia collocentur, non manebit corpus ex omnibus illis gravibus compoſitum ſed inclinabitur vectis ex parte majoris portionis; hoc patet etiam ex veſtris poſitionibus, cum enim totus vectis ſit ſemicirculo minor, ſinus minoris portionis erit minor ſinu majoris portionis, ideoque non negabitis inclinationem fieri ex parte majoris portionis.

His ſuppoſitis exponatur figura continens vectem D E G, & perficiantur reliqua juxta præparationem Archimedeam, grave in D diſpoſitum per partes æquales in portiones B C, C D, D E, E F, gravitat ſuper rectam D N, nam ſuſpenſum à puncto D, per ſecundum axioma quieſcit, ergo per primum gravitat ſuper D N, igitur ſive totum ſit in D, ſive diſpoſitum per partes æquales in portiones B C, C D, D E, E F, ſemper ſuper eamdem rectam D N gravitat, ſimiliter grave in G, ſive totum ſit in G, ſive per partes æquales F G, G H, diſponatur ſemper ſuper eamdem rectam G N gravitabit, cum autem gravia per partes æquales B C, C D, D E, E F, F G, G H diſpoſita ſint æqualia, gravitabit aggregatum totius gravis ſuper rectam E N, ergo patet concluſio, aut per deductionem ad abſurdum inde facillimè derivatur ope 3. axiomatis.

Eadem certè erat Archimedis ratiocinatio, nam rectæ B D, centrum gravitatis verbi gratiâ in C conſtituit ut probet gravia æqualia in punctis B D, ſuper rectam C N gravitare, quod ille ſupponit cum in librâ tantum D E F hoc verum ſit quæ ad rectam E N, eſt perpendicularis, in reliquis falſum, quia ad angulos inæquales à rectis à centro terræ ſecantur, in noſtro autem vecte hæc difficultas non occurrit cum ſemper & in quocumque puncto rectæ à centro terræ eum normaliter ſecent. Sit libra D C B, centrum terræ A, centrum libræ C, compleatur circulus centro C intervallo C B, deſcriptus & D E A, B A, C F A, jungantur, jungatur & C E, ponantur in punctis B & D, pondera æqualia & ſit angulus ad C D, major angulo A C B, aio libram à puncto C, ſuſpenſam ad partes B inclinari idque per ſuppoſita ab Archimede; pondus à puncto D ad punctum E, transferatur ex Archimede, idem eſt ac ſi pondus eſſet in puncto D, quia ponitur in recta, punctum D, & centrum terræ conjungente, ſi igitur intelligatur recta C E, pondus in E retinere, manebunt ex Archimede brachia C E & C B, cum ponantur manere C B & C D, igitur anguli E C F, F C B, erunt æquales: triangulum enim æquicrure in cujus extremis æqualia pondera collocantur, movetur ſemper donec perpendicularis horizontis, hoc eſt recta verticem & centrum terræ conjungens angulum ad verticem biſecet, quod experientia teſtatur; Angulus autem E C B duplus eſt anguli ad D, ergo angulus F C B, angulo D eſt æqualis, parallelæ igitur erunt C A & D A, quod eſt abſurdum, non ergo quieſcit libra, ſed ad partes B inclinatur quia angulus B C F, major eſt angulo E C F, ut patet. Voilà en peu de mots ma replique pour le ſecond levier, laquelle j'euſſe plus eſtendue ſi le temps me le permettoit, que ſi le levier eſt plus grand que le demi-cercle comme C A B duquel le point de ſuſpenſion eſt A, les extremitez C B, alors le levier ne ſoutiendra plus, mais ſera preſſé en haut par ces deux poids, de ſorte qu'il faut prendre la proportion reciproque des deux angles CND, DNB, apres avoir prolongé la ligne A N, la demonſtration en eſt auſſi aiſée que celle du premier cas.

Pour le premier levier, ſoit le centre de la lettre B, les poids égaux A, & C, & la ligne B C plus grande que B A. Si vous m'accordez que ce poids en C peſe plus qu'en A (quoy que vous eſtimiez qu'il ſoit mal-aiſé d'en determiner la proportion) mes affaires ſont faites; Car il deſcendra donc, & la méme raiſon ayant toujours lieu juſques à ce que la ligne C B ſoit égale à B A, il ne s'arreſtera pas plûtôt: & que cela ſe faſſe par attraction ou autrement, la choſe eſt indifferente.

Toutefois je vous puis aſſûrer que je puis prouver cette meſme propoſition par des experiences que vous ne ſçauriez conteſter, & que je vous envoyeray au long de que la commodité me le permettra, cependant voicy une de mes propoſitions Geometriques, puis qu'il ſemble que vous ayez deſiré d'en voir.

Sit Parabola A B, cujus vertex A & circa rectam D A ſtabilem figura D A B circumvertatur, deſcribetur conois parabolicus Archimedæus cujus proportio ad conum ejuſdem baſis & verticis erit ſeſquialtera; quod ſi circa ſtabilem D B figura D A B circumvertatur, fiet novus conois cujus proportio ad conum ejuſdem baſis & verticis quærebatur, eam nos eſſe ut 8, ad 5, demonſtravimus, nec res vacabat difficultate. Imò & centrum gravitatis ejuſdem conoidis invenimus.

J'ay trouvé beaucoup d'autres propoſitions geometriques, comme la reſtitution de toutes les propoſitions de locis planis, & autres, mais ce que j'eſtime plus que tout le reſte eſt une methode pour determiner toutes ſortes de problemes plans ou ſolides, par le moyen de laquelle je trouve l'invention maximæ & minimæ in omnibus omnino problematibus, & ce par une equation auſſi ſimple & aiſée que celles de l'analyſe ordinaire: il y a infinies queſtions que je n'aurois jamais peu reſoudre ſans cela, comme les deux ſuivantes que vous pouvez eſſayer ſi vous voulez.

Datæ Sphæræ inſcribere conum omnium inſcribendorum ambitu maximum.

Datæ Sphæræ inſcribere Cylindrum omnium inſcribendorum ambitu maximum.

J'entens par ambitum, non ſeulement ſuperficies conicas & cylindricas, mais le circuit entier compris au cone du cercle de la baſe & de la ſuperficie conique, & au cylindre des deux cercles des baſes & de la ſuperficie cylindrique.

Il ſemble que ces deux queſtions ſont neceſſaires pour une plus grande connoiſſance des figures iſoperimetres.

Cette methode ne ſert pas ſeulement à ces queſtions, mais à beaucoup d'autres, & pour les nombres & pour les quantitez. Vous m'obligerez infiniment de me faire part des productions de voſtre eſprit, & de me croire, &c.

A Monſieur de Roberval Profeſſeur aux Mathematiques à Paris.

MONSIEUR,

Apres vous avoir remercié de la faveur que vous m'avez faite, & de la peine que vous avez priſe, je répondray en peu de mots aux objections que j'ay trouvé dans vôtre Lettre & ce ſans aucun eſprit de diſpute, & pour vous faire ſeulement approuver la verité de mes propoſitions.

La premiere objection conſiſte en ce que vous ne voulez pas accorder que le mitan d'une ligne qui conjoint deux poids égaux deſcendans librement s'aille unir au centre du monde; en quoy certes il me ſemble que vous faites tort à la lumiere naturelle & aux premiers principes: car puis que ces deux poids ſont égaux, & qu'ils ont tous deux méme inclination pour s'unir au centre du monde s'ils n'eſtoient pas empéchez, il eſt clair qu'ils y approcheront tous deux egalement, autrement ayant ſuppoſé les poids égaux & les inclinations au centre égales, vous admettriez neantmoins plus de reſiſtance d'un coſté, ce qui ſeroit abſurde, & n'importe d'alleguer un levier horizontal, lequel eſtant preſſé par deux forces égales aux deux bouts horizontalement, demeure neantmoins en l'eſtat qu'il eſt, quoy que l'appuy qui eſt au deſſoûs le diviſe en parties inégales, car au cas de ma propoſition, la verité de mon principe depend de ce que les deux poids ou puiſſances, ont naturellement inclination au centre de la terre, & tendent là; & c'eſt pourquoy n'ayant point d'avantage l'un ſur l'autre ils s'y approchent tous deux également; mais en l'eſpece du levier horizontal les deux puiſſances des extremitez n'ont aucune inclination naturelle à l'appuy, mais à s'approcher ſeulement, & ainſi l'appuy ne doit étre non plus conſideré que s'il n'eſtoit point, outre que jamais perſonne n'a doûté que le centre d'un grave ne s'unit au centre de la terre s'il n'eſtoit empéché: or deux graves joints par une ligne qui conjoint leurs centres de gravité ne ſont cenſez conſtituer qu'un ſeul grave, duquel le centre de gravité eſt au mitan de la ligne qui les conjoint; quelle raiſon donc de croire qu'il s'arreſte ailleurs, que lors que ſon centre ſera uny à celuy de la terre? ſoint les deux poids égaux A & B joints par la ligne A B, le centre de la terre C, qu'on laiſſe cheoir librement les poids A & B, lors que le poids B ſera au centre C, on ne peut pas dire qu'il s'arreſte, parce que les poids A, gravitat ſuper B, & deſtruit æquilibrium; où commencera donc le levier A B de s'arreſter? vous ne ſçauriez trouver le commencement de ſon repos en un point plutôt qu'en l'autre, ſi ce n'eſt au mitan, parce qu'il ſe trouve pour lors également contrebalancé de tous côtez, je ne ſçay ſi ces raiſons ſeront capables de vous faire changer d'avis, mais vous me permettrez bien de vous dire que vous trouverez peu de gens qui ſuivent vôtre opinion, & qui ne m'accordent ce principe: c'eſt pourquoy je vous conjure de me dire nettement ce qu'il vous en ſemble.

La deuxiéme objection eſt contre la nouvelle proportion des angles que j'ay decouverte, contre laquelle pourtant vous n'avez rien dit de precis, mais ſeulement que vous avez démonſtré que la proportion reciproque des poids doit eſtre expliquée non pas par les angles, mais par les ſinus de ces angles. Voicy la demonſtration de ma propoſition de laquelle vous verrez aiſément par conſequent celle de toutes celles que vous avez veues dans l'ecrit que j'envoya à Monſieur de Carcavi.

Sit centrum terræ A, vectis C N B, portio circuli centro A intervallo A N deſcripti C N, C B æquales circumferentiæ & in punctis C B æqualia pondera, ſupponimus vectem C B a puncto N ſuſpenſum manere idemque accidere ſi gravia æqualia in quibuſlibet punctis brachiorum C N, N B collocentur, modo hujuſmodi puncta ex utraque parte æqualiter à puncto N diſtent neque enim deſtruent, æquilibrium pondera æqualia à centro terræ & à centro vectis ſive libræ æqualiter diſtantia, ſit centrum terræ A, vectis ſive libra E F B C D, ut ſupra centrum ſive medium libræ punctum B, collocetur pondus B, in puncto B, aut diviſo pondere B, in partes æquales E F B C D, collocentur eæ partes in punctis E F B C D, & ſint intervalla E F, F B, B C, C D, æqualia, ſupponimus pondus B, in puncto B collocatum & à puncto B, ſuſpenſum idem ponderare ac partes E F B C D ſimul ſumptæ in vecte collocatæ & ab eodem puncto B ſuſpenſæ, illud nempe accidit quia propter circulum E F B C D, partes ponderis B, eamdem ſemper ſervant diſtantiam à centro terræ ac pondus ipſum integrum B, quod non animadvertiſſe & deſcenſus gravium parallelos ſuppoſuiſſe errorem peperit Archimedæum. His ſuppoſitis propoſitionem noſtram demonſtramus & cum tantùm caſum in quo tum vectis centrum, tum extrema æqualiter à centro terræ diſtant, quia hic caſus veritatem prioris vectis Geoſtatici non ſupponit, de qua videris ambigere; ſit vectis F H, in cujus centrum H, extrema F, & M, in eadem quo punctum H, à terræ centro diſtantia, centro A, intervallo A H, deſcribatur portio circuli F H M, vectis extrema committens & ſit grave in F, ad grave in M, in proportione reciproca circumferentiæ M G, ad circumferentiam H A, aio vectem H F M, à puncto H, ſuſpenſum manſurum & æquilibrium conſtituturum, hanc autem proportionem eamdem eſſe quæ angulorum ad centrum A, patet ex conſtructione & duobus axiomatibus præcedentibus facillimè theorema concludes.

La hâte du Courrier me fait finir là, parce que je ne doûte pas que vous ne puiſſiez voir la concluſion avec un peu de meditation.

Au reſte je vous puis aſſûrer que le Livre qu'il vous a plû m'envoyer eſt ce que j'ay veu de plus ingenieux ſur cette matiere, mais ſi mes propoſitions ſont vrayes, dequoy peut-être vous ne doûterez pas toûjours, vous m'accorderez que ce mouvement ſur les plans inclinez ſe peut prouver encore plus preciſement, ce n'eſt pas que je n'eſtime autant que je dois vôtre invention; Mais ce que le Chancellier Bacon a dit eſt bien vray, multi pertranſibunt, & augebitur ſcientia. Je ſuis, &c,

A Monſieur de Roberval Profeſſeur aux Mathematiques à Paris.

Du 16. Septembre 1636.

MONSIEUR,

Je me trouvay ces jours paſſez à la campagne lors que je rêpondis à voſtre écrit, que j'avois pourtant laiſſé en cette Ville. Depuis mon retour je l'ay conſideré plus exactement, & vous envoye la réponſe plus preciſe à tous ſes points concernant le premier levier. Si vous ne goûtez pas mes raiſons ſur le ſecond, vous m'obligerez beaucoup de m'envoyer la démonſtration de voſtre propoſition ſuivant l'opinion où vous eſtes, que les graves gardent la proportion reciproque des perpendiculaires tirées du centre du levier ſur les pendans, & de laquelle je doûteray toûjours juſques à ce que je l'auray veüe. Je vous puis pourtant aſſeurer que je ne ſçaurois démordre encore de la mienne, & qu'il me ſemble que vous ne ſçauriez démonſtrer la voſtre, au moins par les principes que nous connoiſſons, permettez moy de changer de matiere, & de vous demander la demonſtration de cette propoſition que j'advoue franchement que je n'ay encore ſceu trouver, quoy que je ſois aſſeuré qu'elle eſt vraye.

Summa quadratorum à duabus rectis rationalibus longitudine commenſurabilibus, ſi ad duplum ſummæ laterum applicetur excedens figurâ quadratâ, latitudo exceſſus erit apotome.

Vous ne ſçauriez croire combien la ſcience du dixiéme Livre d'Euclide eſt deffectueuſe, je veux dire que cette connoiſſance n'a pas encore fait de grands progrez, & qu'elle eſt pourtant de grandiſſime uſage. J'y ay découvert beaucoup de nouvelles lumieres, mais encore la moindre choſe m'arreſte, comme le Theoreme que je viens de vous écrire qui ſemble d'abord plus aiſé à démonſtrer qu'il n'eſt pas, j'attends de vos nouvelles, & ſuis, &c.

Le principe que je vous ay demandé pour l'établiſſement de mes propoſitions Geoſtatiques eſt, que ſi deux poids égaux ſont joints par une ligne droite ferme, & de ſoy ſans poids; & qu'eſtant ainſi diſpoſez ils puiſſent deſcendre librement, ils ne repoſeront jamais juſques a ce que le milieu de la ligne s'uniſſe au centre commun des choſes peſantes, ce principe qui vous a ſemblé plauſible d'abord, a enfin choqué vôtre opinion ſur ce principalement que nous ignorons la cauſe radicale, qui fait que les corps graves deſcendent, ſur quoy vous dites qu'il y a trois opinions differentes, & que de toutes les trois les conſequences ſemblent differentes.

Je ne repete point vos mots, ny vos raiſons, je me contente d'y répondre, & primò en la premiere opinion.

En vôtre figure vous dites qu'il vous ſemble que ſi le point D, ou E, convient avec le centre commun des choſes peſantes, combien que l'un des poids en ſoit plus proche que l'autre ils contrepeſeront encore, & demeureront en equilibre. Puiſque, dites vous (pour me ſervir de vos propres termes) ces deux poids ſont égaux, & ont tous deux méme inclination de s'unir au centre commun des choſes peſantes, l'un n'a aucun advantage ſur l'autre pour le déplacer de ſon lieu.

Or ſi ce raiſonnement eſt bon, voyez-le dans la figure ſuivante dans laquelle j'employeray les mémes mots.

Soit le centre de la terre D, un point dans ſa ſurface ou ailleurs C, ſoit jointe la ligne C D, & ſoit au point C, attaché le levier B C, C A, duquel les bras B C, C A, ſoient égaux & les poids B & A auſſi égaux, l'angle B C A ferme. S'il n'y avoit point le poids en B, la ligne C A s'uniroit à la ligne C D, c'eſt à dire que le poids A s'aprocheroit du centre D, autant qu'il pourroit, & tout de méme de la ligne B C, ſoit fait l'angle B C D moindre que D C A, par le precedent raiſonnement, le levier s'arreſtera (ce qui eſt contre l'experience) puis que les deux poids A & B ſont égaux, & ont tous deux méme inclination de s'unir au centre D, ſive à la ligne C D, & l'un n'a aucun advantage ſur l'autre pour le déplacer de ſon lieu; or de méme qu'en ce cas l'experience nous fait voir que ces deux poids approcheront également du centre D, & de la ligne C D, il ne faut pas doûter qu'au premier cas ils n'aprochent également du centre de la terre, & la raiſon de toutes ces deux propoſitions eſt, qu'ayant méme inclination au centre, & ne pouvant tous deux y deſcendre, à cauſe qu'ils s'entrempéchent, ils y approchent du moins également, autrement la force de celuy qui y approcheroit d'avantage ſeroit plus grande.

L'exemple du levier horizontal ne fait rien a la queſtion; car pour marquer que les poids B & A n'ont pas leur inclination au point C, il ne faut qu'ôter la ligne C D, ſur laquelle le levier s'appuye, & le levier ne reſtera pas de demeurer s'il eſt preſſé par les poids A & B horizontalement, de ſorte que le point C n'eſt non plus conſiderable que tel autre de ligne B A, que vous prendrés; & cela eſtant l'exemple eſt inutile:

parce que la principale raiſon de mon principe dépend de l'inclination des graves au centre de la terre.

Ce que vous adjoûtez de deux poids,qui ſeroient inégaux joints comme deſſus à une ligne droite ferme, & de ſoy ſans poids, n'eſt non plus recevable; car vous acccordant que lors que vous niez un plan perpendiculaire à la ligne qui joint les deux poids comme vous faites en vôtre figure, il eſt certain qu'en ce cas, il y a de chaque coſté du centre une grandeur égale. Il arrive pourtant cent cas, auſquels ſi vous coupez les deux poids par un autre plan paſſant par le centre, les grandeurs qui ſeront de chaque coſté ſeront inégales, & ainſi un méme corps en méme temps arrêtera & n'arrêtera pas, & n'importe de dire que ce plan doit être toûjours perpendiculaire à la ligne qui joint les deux graves; car vous ſçavez qu'autour du centre tous endroits ſont indifferens, & omnia intelliguntur ſurſum, omnia deorſum, il faut donc neceſſairement prendre les repos des poids, non pas de cette façon, mais de la proportion reciproque ſuivant mon ſentiment.

Voilà en peu de mots la réponſe à vôtre premiere opinion que j'euſſe peu étendre d'avantage & tirer méme la demonſtration de mon principe de l'experience que je vous ay donnée, comme il vous ſera aiſé de voir.

Si la ſeconde opinion eſt vraye mon principe eſt infaillible; car en ce cas vous dites que le corps peſera d'autant moins qu'il ſera proche du centre, mais cette diminütion ne ſera pas en la raiſon des éloignemens.

Or puis qu'un corps peſe moins en ce cas à meſure qu'il eſt plus proche du centre, donc il ſera toûjours preſſé par le plus éloigné, juſques à ce qu'ils ſoint égalemeni éloignez du centre.

En la 3. opinion les mémes raiſons ſont bonnes, je ſeray bien aiſe que Monſieur Paſcal voye ma Lettre, ſi vous l'agreés.

A Monſieur de Roberval Profeſſeur aux Mathematiques à Paris.

Du 22. Septembre 1636.

MONSIEUR,

Je ſurſeoiray avec vôtre permiſſion à vous écrire ſur le ſujet des propoſitions de Mechanique juſques à ce que vous m'aurez fait la faveur de m'envoyer la démonſtration des vôtres; ce que j'attends au plûtôt ſur la promeſſe que vous m'en faites. Sur le ſujet de la methode de maximis & minimis, vous ſçavez que puiſque vous avez veu celle que Monſieur Deſpagnet vous a donnée,vous avés veu la mienne que je luy baillay il y a environ ſept ans étant à Bourdeaux, & en ce temps là je me reſſouviens que Monſieur Philon ayant receu une de vos Lettres, dans laquelle vous luy propoſiez de trouver le plus grand Cone de tous ceux qui auront la ſuperficie conique égale à un cercle donné, il me l'envoya, & j'en donnay la ſolution à Monſieur Prades, pour vous la rendre, ſi vous rappellez vôtre memoire, vous vous en ſouviendrez peut-être, & que vous propoſiez cette queſtion comme difficile,& ne l'ayant pas encore trouvée.Si je rencontre parmi mes papiers voſtre Lettre, que je garday pour lors,je vous l'envoyeray. Si Monſieur Deſpagnet ne vous a propoſé ma methode que comme je la luy baillay pour lors, vous n'avez pas veu ſes plus beaux uſages. Car je la fais ſervir en diverſifiant un peu,Premierement pour l'invention des propoſitions pareilles à celle du Conoide que je vous envoyay par ma derniere. 2. Pour l''invention des tangentes des lignes courbes, ſur lequel ſujet je vous propoſe ce probleme, ad datum punctum in

conchoide

conchoide Nicomedis invenire tangentem. 3. Pour l'invention des centres de gravité de toute ſorte de figures aux figures mémes differentes des ordinaires comme en mon Conoide & autres infinies, dequoy je fairay voir des exemples quand vous voudrez. 4. Aux problemes numeriques, auſquels il eſt queſtion de parties aliquotes, & qui ſont tous tres-difficiles. C'eſt par ce moyen que je trouvay 672. duquel les parties ſont doubles auſſi bien que celles de 120. le ſont de 120, c'eſt auſſi par là que j'ay trouvé de nombres infinis qui font la méme choſe que 220.& 284.c'eſt à dire que les parties du premier égalent le ſecond, & celles du ſecond le premier, dequoy ſi vous voulez voir un exemple pour tâter la queſtion, ces deux y ſatisfont 17296. & 18416. je m'aſſûre que vous m'advoüerez que cette queſtion & celles de ſa ſorte ſont tres-mal-aiſées: j'en envoyay il y a quelque temps la ſolution à Monſieur de Beaugrand; j'ay auſſi trouvé des nombres en proportion donnée ou qui ſurpaſſent d'un nombre donné leurs parties aliquotes & pluſieurs autres. Voilà quatre ſortes de propoſitions que ma methode embraſſe, & que peut-eſtre vous n'avez pas ſceües: ſur le ſujet du premier j'ay quarré infinies figures compriſes de lignes courbes, comme par exemple ſi vous imaginez une figure comme la parabole, en telle ſorte que les cubes des appliquées ſoient en proportion des lignes qu'elles coupent du Diametre,cette figure approchera de la parabole, & ne differe qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des quarrez, je prends en celle-cy celle des cubes (& c'eſt pour cela que Monſieur de Beaugrand,à qui j'en fis la propoſition,l'appelle parabole ſolide) or j'ay démonſtré que cette figure eſt au triangle de méme baſe & hauteur,en proportion ſeſquialtere.Vous trouverez en la ſondant qu'il m'a falû ſuivre une autre voye que celle d'Archimede en la quadrature de la parabole, & que je n'y fuſſe jamais venu par là. Puiſque vous avez trouvé ma propoſition du Conoïde excellente, la voicy plus generale.

Si circa rectam D A parabole (cujus vertex B & axis B F & applicata A D) circumducatur, fiet conoides novæ ſpeciei, quo ſecto bifariam plano ad axem recto, dimidium ipſius ad conum ejuſdem baſis & altitudinis eſt ut 8. ad 5. Si verò plano ſecetur ad axem recto inæqualiter, puta per punctum E, ſegmentum conoidis A B C E ad conum ejuſdem baſis & altitudinis eſt ut quintuplum quadrati E D unà cum rectangulo A E D bis & rectangulo ſub D F, & A E ad quadrati E D quintuplum, & viciſſim ſegmentum conoidis D C E eſt ad conum ejuſdem baſis & altitudinis ut quintuplum quadrati A E, unà cum rectangulo A E D bis, & rectangulo ſub D F & D E ad quadrati A E quintuplum.

Pour la demonſtration, outre les aydes que j'ay tirées de ma methode, je me ſuis ſervi des cylindres inſcrits & circonſcrits.

J'avois obmis le principal uſage de ma methode qui eſt pour l'invention des lieux plans & ſolides,elle m'a ſervi particulierement à trouver ce lieu plan que j'avois auparavant trouvé ſi difficile. Si à quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ, & ſint ſpecies quæ ab omnibus fiunt dato ſpatio æquales, punctum continget poſitione datam circumferentiam.

Tout ce que je viens de vous dire ne ſont qu'exemples; car je vous puis aſſûrer que ſur chacun des points precedents, j'ay trouvé un tres-grand nombre de tres-belles propoſitions. Je vous envoyeray la demonſtration de celles que vous voudrez. Permettez-moy neantmoins de vous prier de les eſſayer plûtôt, & de m'en donner vôtre jugement. Au reſte depuis la derniere Lettre que je vous écrivis, j'ay trouvé la demonſtration de la propoſition que je vous faiſois, elle ma donné grandiſſime peine, & ne ſe preſente pas d'abord. Je vous conjure de me faire part de quelqu'une de vos penſées, & de me croire, &c.

S

Lettre de Monſieur de Roberval à Monſieur de Fermat.

Du 11. Octobre 1636.

MONSIEUR,

Je vous envoye la demonſtration de la propoſition fondamentale de noſtre Mechanique, ainſi que ie vous l'ay promis. En quoy je ſuivray l'ordre commun d'expliquer auparavant les definitions & principes deſquels nous nous ſervons.

Nous appellons en general une puiſſance cette qualité par le moyen de laquelle quelque choſe que ce ſoit tend ou aſpire vers un autre lieu que celuy ou elle eſt, ſoit en bas, en haut, ou a coſté : ſoit que cette qualité convienne naturellement à la choſe, ou qu'elle luy ſoit communiquée d'ailleurs. De laquelle definition il s'enſuit que tout poids eſt une eſpece de puiſſance, puiſque c'eſt une qualité, par le moyen de laquelle les corps aſpirent vers la partie inferieure. Souvent nous appellons auſſi du nom de puiſſance la choſe méme, à laquelle la puiſſance convient, comme un corps peſant eſt appellé un poids ; mais avec cette precaution que ce ſoit à l'égard de la vraye puiſſance, laquelle augmentant ou diminuant, ſera appellée plus grande ou moindre puiſſance, quoy que la choſe à qui elle convient demeure toûjours la méme.

Si une puiſſance eſt pendue ou arreſtée à une ligne flexible & ſans poids, laquelle ligne ſoit attachée par un point à quelque arreſt, en ſorte qu'elle ſouſtienne la puiſſance tirant ſans empeſchement contre cette ligne ; la puiſſance & la ligne prendront quelque poſition, en laquelle elles demeureront en repos, & la ligne ſera droite par force ; ſoit icelle ligne appellée le pendant ou la ligne de direction de la puiſſance ; & le point par lequel la ligne eſt attachée à l'arreſt, ſoit appellé le point d'appenſion, lequel pourra eſtre quelquefois au bras d'un levier, ou d'une balance, & lors la ligne droite ménée du centre de l'appuy du levier ou de la balance ; juſques au point d'appenſion, ſoit appellée la diſtance ou le bras de la puiſſance, laquelle diſtance ou bras nous ſuppoſons étre une ligne ferme conſiderée de ſoy ſon poids. D'avantage l'angle compris du bras de la puiſſance & de la ligne de direction, ſoit appellé l'angle de la puiſſance. Apres ces
1. Axiome. definitions nous poſons pour principe qu'au levier, & à la balance, les puiſſances égales tirans par des bras égaux, & des angles de direction égaux, tireront également ; & ſi en cét eſtat elles tirent l'une contre l'autre, elles feront equilibre ; que ſi elles tirent enſemble ou de méme part, l'effet ſera double.

Si les puiſſances eſtans égales, & les angles de direction égaux, les bras ſont inégaux, la puiſſance qui ſera ſur plus grand bras fera plus d'effet. Comme en la 1. figure le centre de la balance, ou du levier, eſtant A, ſi les bras A B, A C ſont égaux, & les angles A B D, A C E égaux, les puiſſances égales D E, tireront également, & fairont equilibre ; de méme le bras A F eſtant égal à A B, l'angle A F G à l'angle A B D, & la puiſſance G à la puiſſance D, ces puiſſances G, D, tireront également, & pour ce qu'elles tirent de méme part, l'effet ſera double : au contraire la puiſſance G & la puiſſance E, feront equilibre. Par le méme principe les puiſſances I, L, contrepeſeront ſi étans égales les bras A K, A H ſont égaux & les angles A H I, A K L auſſi égaux. Il en ſera de méme des puiſſances P, R, ſi le tout eſt diſpoſé de méme. Et en ce cas nous ne mettons point d'autre difference entre les poids & les autres puiſſances, ſinon que les poids tendent & aſpirent tous vers le centre des choſes peſantes ; & les puiſſances peuvent eſtre entenduës aſpirer vers toutes les parties de l'Univers, avec autant, plus, ou moins de forces que les poids. Auſſi les poids & leurs parties tirent par des lignes de direction qui toutes concourent à un méme point ; & les puiſſances & leurs parties peuvent étre

entenduës tirer de telle ſorte que toutes les lignes de direction ſoient paralleles entre elles.

En ſecond lieu nous poſons qu une puiſſance & ſa ligne de direction demeurans toû- 2. Axiome.
jours en méme poſition ; & le centre de la balance, ou du levier, de méme ; quel que puiſſe etre le bras mene du centre de la balance à la ligne de direction ; la puiſſance tirant de ſoy toûjours de méme ſorte, fera toûiours méme effet. Comme en cette 2. figure le centre de la balance eſtant A, la puiſſance B & ſa ligne de direction B F prolongée, tant que de beſoin, à laquelle aboutiſſent les bras A C, A G, A F. En cét eſtat ſoit que la ligne B F ſoit liée au bras A F ou A C ou A G, ou à un autre bras mené du centre à la ligne de direction A F, nous ſuppoſons que cette puiſſance B fera toûjours un méme effet ſur la balance : & ſi tirant par le bras A C elle fait equilibre avec la puiſſance D tirant par le bras A E ; lors qu'elle tirera par le bras A F, ou A G, elle fera encore equilibre avec la puiſſance D tirant par le bras A E. Ce principe quoy qu'il ne ſoit pas expreſſement dans les autheurs, eſt neantmoins uſurpé tacitement par tous ceux qui en ont eu affaire, & l'experience le confirme conſtamment.

En troiſiéme lieu nous poſons, que ſi les bras d'une balance ou d'un levier ſont dire- 3. Axiome.
ctement poſez l'un à l'autre, & qu'eſtans égaux, ils ſouſtienent des puiſſances égales deſquelles les angles de direction ſoient droits, ces puiſſances peſeront également ſur le centre de la balance, ſoit qu'elles ſoient proche du méme centre, ſoit qu'elles en ſoient fort éloignées, ſoit que toutes deux ſoient ramaſſées au méme centre. Comme en la troiſiéme figure la balance étant E D, le centre A, les bras égaux A D, A E ſoûtenans des puiſſances égales H, I, deſquelles les angles de direction A D H, A E I ſoient droits ; nous ſuppoſons que ces puiſſances I, H, peſeront de méme ſur le centre A que ſi elles étoient plus prés du méme centre ſur les diſtances égales A B, A C, & encore de méme que ſi ces mémes puiſſances étoient enſemble pendües en A, ces angles de direction eſtans toûjours droits.

Ces principes poſez, nous demonſtrons facilement, imitans Archimede, que ſur 1. Prop.
une balance droite, les puiſſances deſquelles & de toutes leurs parties les lignes de direction ſont paralles entre elles, & perpendiculaires à la balance, contrepeſeront & feront equilibre, quand les mémes puiſſances ſeront entre elles en proportion reciproque de leurs bras, ce que nous penſons vous étre auſſi facile qu'à nous. En ſuite dequoy nous demonſtrons cette propoſition univerſelle, à laquelle nous butons.

En toute balance ou levier ſi la proportion des puiſſances eſt reciproque à celle des
lignes perpendiculaires du centre ou point de l'appuy, ſur les lignes de direction des 2. Prop.
puiſſances, ces puiſſances tirans l'une contre l'autre feront equilibre : & tirans d'une méme part, elles feront un pareil effet ; c'eſt à dire qu'elles auront autant de force l'une que l'autre pour mouvoir la balance. Soit en la 4. figure le centre de la balance A, le bras A B plus grand que le bras A C ; & ſoient premierement les lignes de direction B D, C E perpendiculaires aux bras A B, A C ; par leſquelles lignes tirent les puiſſances DE, (leſquelles ſerontdes poids ſi on veut) & qu'il y ait méme raiſon de la puiſſance D à la puiſſance E que du bras A C au bras A B, les puiſſances tirans l'une contre l'autre : je dis qu'elles feront equilibre ſur la balance C A B. Car ſoit prolongé le bras C A juſques en F, en ſorte que A F ſoit égale à A C, & ſoit conſiderée C A F comme une balance droite de laquelle le centre ſoit A : ſoient auſſi imaginées deux puiſſances G, H, deſquelles, & de toutes leurs parties, les lignes de direction ſoient paralleles à la ligne C E ; & que la puiſſance G ſoit égale à la puiſſance D, & la puiſſance H égale à la puiſſance E, l'une ſçavoir G tirant ſur le bras A F, & l'autre ſçavoir H tirant ſur le bras A C. Lors par la premiere propoſition, les puiſſances G, H, feront equilibre ſur la balance C A F. Mais par le 1. principe la puiſſance D ſur le bras A B, fait le méme effet que la puiſſance G ſur le bras A F ; partant la puiſſance D ſur le bras A B fait equilibre avec la puiſſance H ſur le bras A C ; & la puiſſance H tirant de meme que la puiſſance E ſur

le bras A C par le méme premier principe, la puiſſance D ſur le bras A B ; faira equilibre avec la puiſſance E ſur le bras A C. Maintenant en la 5. fig. ſoit le centre de la balance A ; les bras A B, A C ; les lignes de direction B D, C E qui ne ſoint pas perpendiculaires aux mémes bras ; & les puiſſances D, E, tirans par les mémes lignes de direction ; ſur leſquelles lignes ſoint ménées des perpendiculaires du centre A, ſçavoir A F ſur B D & A G ſur E C ; & que comme la ligne A F eſt à A G ainſi ſoit la puiſſance E à la puiſſance D, leſquelles puiſſances tirent l'une contre l'autre, je dis qu'elles fairont equilibre ſur la balance C A B. Car ſoint imaginées les lignes A F, A G comme les deux bras d'une balance G A F, ſur leſquels tirent les puiſſances D, E, par les lignes de direction F D, G E, ces puiſſances fairont equilibre par la premiere partie de cette 2. prop. Mais par le 2. principe la puiſſance D ſur le bras A F fait le méme effet que ſur le bras A B; & la puiſſance E ſur le bras A G fait le méme effet que ſur le bras A C; partant la puiſſance D ſur le bras A B, fait equilibre avec la puiſſance E ſur le bras A C. Il y a pluſieurs cas ſuivant les cheutes des perpendiculaires, mais il vous ſera facile de voir que tous n'ont qu'une méme demonſtration. Il eſt auſſi facile de demonſtrer que ſi les puiſſances tirent de méme part, elles fairont méme effet l'une que l'autre, & l'effet des deux enſemble ſera double de celuy d'une ſeule.

J'attens vôtre jugement ſur cette demonſtration, & ſi vous l'approuvez nous communiquerons en ſuite des conſequences qui en dépendent. J'ay trouvé la demonſtration de la ſomme des quarrez de deux coſtez rationaux commenſurables en longueur, appliquée au double de la ſomme des coſtez, excedant d'une figure quarrée : mais puis que vous l'avez auſſi trouvée, je ne vous diray ici que mon principal fondement, qui eſt que de deux nombres quelconques, la ſomme de deux fois le quarré du premier, deux fois le quarré du ſecond, & deux fois le produit des deux nombres, n'eſt pas un nombre quarré, d'autant que prenant les moindres nombres de leur raiſon, un nombre ſimplement pris n'eſt pas quarré. Si nous avons tous deux un méme moyen, cecy ſuffit, ſi vous en avez un autre, ce que vous reconnoiſtrez par ce diſcours, vous me fairez faveur de me l'apprendre, & moy je vous écriray le mien tout au long, ſi vous le deſirez.

J'ay auſſi trouvé la demonſtration de vôtre conoide, & celle de vôtre parabole ſolide, & en conſequence, celles d'une infinité d'autres pareilles quarre-quarrées, quarre-ſolides, &c. J'ay trouvé les tangentes de toutes ces figures : par exemple en la parabole ſolide la portion de l'axe, priſe entre la tangente & le ſommet, eſt double de la portion du méme axe, priſe entre le ſommet & la ligne appliquée de l'attouchement à l'axe. J'ay par le méme moyen quarré la parabole geometriquement autrement qu'Archimede. Et je me trompe fort ſi je n'ay rencontré le méme moyen que vous, me ſervant des lignes paralleles à l'axe, & des portions de ces lignes, priſes entre les paraboles & la ligne qui touche les mémes paraboles par le ſommet, leſquelles portions ſe ſuivent en la raiſon de l'ordre naturel des nombres quarrez ou des nombres cubes, &c. Or la ſomme des quarrez eſt toûjours plus que le tiers du cube qui a pour coſté le coſté du plus grand quarré : & la méme ſomme des quarrez, le plus grand eſtant oſté eſt moindre que le tiers du méme cube. La ſomme des cubes plus que le quart du quarre-quarré; & le plus grand cube oſté, moins que le quart, &c. Si par ce diſcours vous reconnoiſſez que ce n'eſt pas vôtre moyen, j'en ſeray d'autant plus réjoüi pour ce que nous en aurons deux, & vous me fairez la faveur de m'envoyer le vôtre faiſant le méme de ma part.

Pour les tangentes de la conchoide, je les ay conſiderées il y a long-temps, comme étans determinations d'equations quarre-quarrées. Sur ce ſujet il y a deux points en la conchoide, par leſquels on ne peut mener des tangentes, je vous prie de les conſiderer, & vous trouverez une admirable proprieté d'angles au ſommet l'un de l'autre à la ſection d'une ligne droite & de la conchoide.

J'eſtime vos propoſitions des nombres & celle du lieu plan fort difficiles ce que je ſçauray mieux quand j'auray eu le loiſir de les conſiderer comme auſſi les centres de gravité des figures ſuſdites tant planes que ſolides ; n'eſtant pas reſolu pourtant de m'obſtiner apres ; car j'aimeray mieux tenir de vous ce que vous en aurez, ſi vous l'avez agreable. Je vous prie pourtant de me mander ſi le centre de gravité de vôtre demi-conoide n'eſt pas ce point ou l'axe eſt diviſé, de ſorte que l'un des ſegments eſt à l'autre comme 11. à 4. pour ce qu'un leger raiſonnement, & non encor bien conſideré m'a ſemblé me mener à cette raiſon.

Une autre fois je vous pourray mander de nos propoſitions ainſi que vous le deſirez : pour cette heure que je n'employe à écrire cecy qu'un temps dérobé, je vous envoyeray ſeulement celle-cy. De deux cones droits égaux & iſoperimetres eſtans données les baſes inégales, ou les hauteurs inégales, trouver les cones. Quand je dis iſoperimetres, j'entens les baſes y compriſes ou exceptées, comme vous voudrez. Vous en aurez la ſolution quand il vous plairra, ſi vous ne voulez prendre la peine de la trouver vous méme, & je vous l'aurois envoyé des maintenant, n'eſtoit que je croy que vous deſirerez d'avoir le plaiſir d'y penſer. Attendant que vous me faſſiez la faveur de m'écrire, je demeureray, &c.

Objecta à D. de Fermat,

Adversùs propoſitionem Mechanicam D. de Roberval.

SI vera eſſet propoſitio Mechanica D. de Roberval, in vecte quolibet, pondera perpendiculis à centro vectis in lineas directionum demiſſis eſſe reciprocè proportionalia ad aſtruendam quietem, non poſſet ſubſiſtere proportio gravis ad potentiam in plano inclinato, quam in libello ſuo tradidit. Hoc perſpicuè demonſtramus.

In 1. figura, eſto punctum in ſuperficie telluris N, centrum terræ H; junctâ N H, ducatur A N G F, perpendicularis ipſi H N, quam quidem A N G F, ii qui ſunt in puncto N, vocant parallelam horizonti. Exponantur ſphæræ quarum centra B, C, D, quæ tangant rectam ſivè planum per A N G F, in punctis N, G, F.

Patet primùm Sphæram B, à minima potentia moveri, idque D. de Roberval non diffitetur, & in puncto N collocatam, manere, ſed in nullo alio totius plani puncto idem accidit. Perficiatur figura ut hic vides. Recta H G, connectens punctum contactus G, & centrum terræ H, ad rectam C G, facit angulum obtuſum ideoque ſphæra C, ad partes G N, movebitur. Idem de ſphæra D. Sit igitur potentia in Z, retinens ſphæram C, per motum rectæ A N G F, parallelum aut quod idem eſt per rectam Z C. Intelligitur vectis cujus centrum fixum G, ducatur in H C, perpendicularis G C Sphæræ C, motus naturalis eſt per rectam C H. Motus retinens per C Z ad quam perpendicularis eſt G C. Ergo ex ſuppoſitis D. de Roberval eſt reciprocè ut recta G I, ad rectam G C, ita potentia retinens in Z ad ſphæram C, quod erat demonſtrandum. In ſphæra autem D, major requiretur potentia ad retinendum, & quo magis diſtabit à puncto N, eò majore potentia opus erit, quod eſt mirabile.

Ex ſuppoſitione autem D. de Roberval numquam in eodem plano variat proportio, quod quam longe abeat à veritate ipſe viderit.

Sit centrum terræ B, Planum inclinatum A C D C, in punctis A & C, eamdem potentiam retinere, poterat fortaſſe non incongruum videri D. de Roberval. Sed ducto perpendiculo E D, cum in puncto D ſit quies, & minima potentia retineat, qua ratione conſtabit ipſius propoſitio?

In quolibet autem plano habet locum noſtra demonſtratio. Omne quippe planum alicui horizonti invenietur parallelum.

Hac propoſitione evertitur demonſtratio Domini de Roberval & breviſſimâ viâ ad ipſius hypotheſes nova proportio deregitur.

Secundam figuram addideramus, qua judicium noſtrum de ipſius ultima propoſitione prodere ſperabamus. Sed non ſuppetit tempus.

Nova in Mechanicis Theoremata D. de Fermat.

FUndamenta Mechanices non ſatis accurata tradidiſſe Archimedem fueram dudum ſuſpicatus, ſuppoſuiſſe enim motus gravium deſcendentium inter ſe parallelos patet, nec vero abſque hac hypotheſi conſtare poſſunt ipſius demonſtrationes: Non inficior quidem hypotheſim hanc ad ſenſum proximè accommodari, quippe propter magnam a centro terræ diſtantiam poſſunt deſcenſus gravium ſupponi paralleli non ſecus ac radij ſolares: ſed veritatem intimam & accuratam quærentibus, hæc non ſatisfaciunt. Generalis nempe vectium natura in quolibet mundi loco videtur conſideranda & aſtruenda ideoque nova in mechanicis fundamenta è veris & proximis principiis accerſenda: Hujus novæ ſcientiæ propoſitiones tantum exhibemus, demonſtrationes cum libuerit, tradituri.

Duplex igitur vectium genus fingimus aut potius conſideramus unum cujus motus rectus tantùm eſt non circularis, alterum cujus extrema deſcribunt circulos, de ſecundo hoc quæſitum tantùm apud veteres; primum quod longè videtur ſimplicius, nè agnoverunt quidem.

Singula exemplis illuſtramus & prioris quidem centrum idem eſt cum centro terræ, poſterioris centrum extra centrum terræ neceſſariò debet collocari.

Sit igitur in ſequenti figura centrum terræ punctum A, & intelligatur recta C B, tranſire per centrum A, imò & ipſa A B, intelligatur eſſe vectis & in punctis B & C, collocentur gravia B & C, ſitque pondus B, ad pondus C, ut recta C A, ad rectam A B, aio vectem CB, manſurum & æquilibrium in hoc caſu conſtituturum. Si vero deminuatur tantiſper grave B, movebitur vectis in rectum per centrum A ad partes C, donec pondera diſtantiis à centro ſint reciprocè proportionalia. Hæc eſt prima propoſitio cujus reſpectu terra ipſa magnus vectis dici poteſt ad imitationem Gilberti qui eam magnum magnetem vocat.

Hoc poſito, mirabilius quiddam proponimus, gravia nempe eò facilius tolli à potentia in ſuperficie terræ aut alibi conſtituta quò propiora fuerint centro terræ.

Sit centrum terræ A punctum C, extra centrum jungatur recta C A, in qua ſumpto puncto B, collocetur grave in B. Si intelligamus grave B, per filum aut axem C B, ſuſpenſum, detinebitur à potentia in C, collocata cujus proportio ſit ad pondus B, ut recta A B, ad rectam A C.

Indeque facillimè deducitur & demonſtratur gravia in centro non ponderare, cujus rei demonſtrationem hactenus quæſitam jam novimus.

Secundùm vectium genus Archimedæum dici poteſt. Sed reciproca diſtantiarum cum ponderibus proportio (quam in vecte ſimplici demonſtravimus) in hoc habere locum non poteſt, nec ideò ſubſiſtere ſexta & ſeptima Archimedis propoſitio.

Ita igitur confidenter pronuntiamus & vectem generaliter ſive brachia, ſive in directum, ſive parallela horiſonti, ſive etiam angulum conſtituant, conſideramus.

Una quippe demonſtratione totum evincimus. Sit vectis extra centrum terræ D B C, cujus centrum B, Brachia B D, & B C, centrum terræ A, jungantur rectæ D A, B A, C A, &

in punctis B & C, collocentur gravia, ſitque proportio gravis D, ad grave C, compoſita ex proportione rectæ D A, ad rectam C A, & reciprocè ex angulo C A B ad angulum B A D. Aio vectem B D C à puncto B ſuſpenſum manſurum & æquilibrium conſtituturum.

Hanc propoſitionem ſicut & reliquas veriſſimas aſſeveramus, & cum libuerit, demonſtrationibus ex puriore Geometria & Phyſica derivatis confirmabimus.

Inde patet corruere omnino veterum de centris gravitatum definitiones, nullum quippe corpus præter Sphæram poteſt reperiri in quo punctum reperiatur à quo grave extra centrum terræ ſuſpenſum, ſervet eam quam in principio habuerit poſitionem.

Definietur ergo deinceps centrum gravitatis cujuſque corporis, punctum intra corpus poſitum, quod ſi cohæreat centro terræ, corpus eam ſervabit quam in principio habuerit poſitionem: eo enim ſolum caſu habent locum centra gravitatis.

Demonſtrabitur etiam & refelletur error Ubaldi & aliorum qui exiſtimant libræ brachia licet non ſint parallela horizonti æquilibrium tamen conſtitutura.

Sit centrum terræ B, ſemidiameter B A, portio alterius ſemidiametri BC, & fiat ut A B, ad B C, ita pondus appenſum in C ad pondus appenſum in A. Aio pondera A C non moveri, ſed fieri æquilibrium, hæc autem propoſitio probatu facillima eſt veſtigiis Archimedis inſiſtendo. Et, ſi negetur, ſtatim demonſtrabitur.

Hoc ſuppoſito, propoſitionem ſanè mirabilem inde deducimus. Ponatur grave in puncto N, inter puncta A & B, & fiat ut A B ad B N ita pondus N ad potentiam R. Aio pondus N juncto axe AN à potentia R in puncto A collocata detineri, & ſi minimùm augeatur potentia R, ſurſum tolli, ideoque quò propius pondus accedit ad centrum terræ, minorem potentiam ad tollendum illud requiri.

Hæc eſt, ni fallor, propoſitio quam Beaugrandus in ſua Geoſtatica demonſtrat; nos eam hac ratione, quæ ſequitur, demonſtramus.

Propoſitio Geoſtatica D. de Fermat.

SUppoſitis & conceſſis quibus in demonſtratione utimur, ex præcedente propoſitione, & ex communibus notionibus deſumptis.

Sit centrum terræ C, ſemidiameter CA in qua ſumatur punctum B, in puncto autem B ſit quodvis grave appenſum. Fiat autem ut recta CA, ad rectam CB, ita pondus in B appenſum ad potentiam aliquam ut R. Aio grave B à potentia R in puncto A ſuſtineri, & ſi augeatur quantumlibet potentia R, pondus B ab hujuſmodi auctâ potentiâ in puncto A collocatâ ſurſum moveri, producatur enim AC in D, & ſit CD, æqualis CB. Et in D collocetur pondus ponderi B æquale. Corporis igitur ex duobus gravibus B & D compoſiti centrum gravitatis eſt C, ideoque ſi à puncto A auferatur potentia R, cum recta B A, nihil ponderet, erunt pondera B & D in æquilibrio & manebunt. Si autem in A, collocetur pondus deorſum tendens potentiæ R ſurſum moventi æquale, idem eſt ac ſi à puncto A dematur potentia R, nam quantum potentia tollit tantumdem pondus deprimit. Collocetur igitur hujuſmodi pondus in A, corpus igitur compoſitum ex potentia R collocata in A, & ſurſum movente, ex pondere A, deorſum tendente, & ex gravibus B & D erit in æquilibrio, aut, ſi mavis, non movebitur. Cum autem grave D, ſit æquale gravi B & recta CD rectæ C B, erit ut AC ad CD; ita AC ad C B, & ut pondus B ad potentiam R in A collocatam, ita pondus D ad pondus in A deorſum tendens (quod ipſi R potentiæ æquale poſuimus) eſt autem ex hypotheſi ut recta A C ad C B, ita pondus B ad potentiam R in A collocatam. Erit igitur ut A C ad C D, ita pondus D ad pondus in A deorſum tendens. Cum igitur diſtantiæ ponderibus ſint reciprocè proportionales pondus in A deorsum tendens ponderi D æquiponderabit. Si verò ab æquiponderantibus æquiponderantia auferantur, reliqua æquiponderabunt. Ergo si ab æquilibrio ex potentia R in A collocata & sursum movente, ex pondere in A deorsum tendente & ponderibus B & D composito, auferatur æquilibrium ex ponderibus A & D compositum, reliqua æquiponderabunt, aut potiùs non movebuntur. Auferantur igitur pondus A & pondus A D. Remanebit potentia R in A collocata, & pondus B. Quod proinde potentia R detinebit. Ideoque si minimâ augeatur vi, sursum tollit G E D.

Propositio D. de Fermat circa parabolen.

PRoposui per data 4. puncta parabolen describere. Duplex est casus, uttique lemma sequens præmittendum.

Sit parabole in 1. fig. E C B A D cujus diameter A F detur positione, dentur etiam duo puncta B & C, per quæ transit parabole, dentur denique anguli applicatarum ad diametrum A F. Aio parabolen positione dari. Applicentur ordinatim B N & C M, à puncto dato B in A F, positione datam ducitur B N in dato angulo (positum quippe est dari angulum applicatarum) ergo datur punctum N, similiter datur punctum M & rectæ B N, C M positione & magnitudine; Ex natura paraboles est ut quadratum C N ad quadratum B N, ita M A ad N A, si ponas A esse verticem paraboles sive extremum diametri. Ergo datur ratio M A ad N A & dividendo datur ratio M N ad N A, datur autem recta M N, quia duo puncta M, N dantur, datur igitur N A & punctum A. Si fiat ut A N data ad N B datam, ita N B ad Z, dabitur Z rectum paraboles latus. Dato igitur vertice A, Z recto latere, A F diametro positione, angulo applicatarum, datur positione parabole, ex 52. 1. Apoll.

Hoc supposito facillimè construitur primus casus in 2. fig. in qua dentur 4. puncta D, B, C, F, quæ si jungas per rectas, B C, C F, F D, D B, vel neutra oppositarum erit alteri parallela, vel ut in hoc casu erit B C verbi gratia parallela D F. Bifariam utraque dividatur in punctis I & E & sit factum, ergo juncta I E erit diameter paraboles cum æquidistantes bifariam dividat, dantur autem puncta I & E, ergo I E positione datur & angulus D E I. Cum igitur diameter I E positione detur, detur etiam angulus applicatarum & duo puncta B & D per quæ transit parabole, dabitur positione parabole DBACF.

In 2. casu major est difficultas, cum neutra rectarum duo ex punctis datis conjungentium alteri est æquidistans.

In 3. fig. sint data 4. puncta X, N, D, R, quæ per rectas X R, R D, D N, N X, conjungantur, & neutra oppositarum sit alteri æquidistans. Ponatur jam factum esse, & descriptam parabolen X A N D B R, proposito satisfacientem. Concurrant productæ X N, R D, in puncto V, & bifariam divisis X N, R D, in punctis M & C, ducantur ad ipsas diametri M A, C B, occurrentes parabolæ in punctis A, & B, à quibus rectæ I A S, S B ipsis X V, V R, ducantur æquidistantes, & concurrant in puncto S. Juncta A B bifariam dividatur in P & jungatur S P, his ita constructis patet, cum per verticem diametri M A ducatur I A S, æquidistans applicatæ X N, rectam I A S tangere parabolen in A, probabitur similiter rectam S B tangere eamdem parabolen in B, ergo per 16. 3. Apoll. erit ut rectangulum X V N ad rectangulum R V D, ita quadratum A S ad quadratum SB. Datur autem ratio rectanguli X V N ad rectangulum RVD, cum dentur 4. puncta X N D R, ergo datur ratio quadrati A S ad quadratum S B, ideoque rectæ A S ad rectam S B. Datur autem angulus A S B, quia propter parallelas æquatur angulo X V R, dato. Ergo in triangulo ASB datur angulus ad verticem S & ratio laterum A S, S B, ideoque triangulum A S B datur specie, igitur datur angulus S A B & ratio S A ad AB, cum autem

autem AP sit dimidia AB, datur etiam ratio SA ad AP, in triangulo igitur S A P datur angulus ad A, & ratio laterum S A, A P, datur igitur specie & angulus P S A datur. Hoc posito cum recta SP rectam AB puncta contactuum conjungentem bifariam dividat, erit diameter paraboles, ex 29. 2. Apoll. in parabolâ autem omnes diametri sunt inter se æquidistantes, ergo diameter M A rectæ S P æquidistabit, ideoque angulus I A M, æquabitur angulo AS P, probavimus autem dari angulum A S P, ergo dabitur angulus I A M & ipsi alternus propter parallelas N M A, datur autem punctum N quia rectam N X positione & magnitudine datam bifariam dividit. Ergo datur diameter M A positione, datur etiam angulus applicatarum A M N, & dantur duo puncta N & D per quæ transit parabole. Datur igitur parabole positione ex lemmate, & est facilis ab analysi ad synthesim regressus.

Patet autem duas parabolas in hoc secundo casu propositum adimplere, concurrent enim rectæ D N & X R, quas posuimus non esse parallelas : hoc casu eâdem argumentatione nova construetur parabole proposito satisfaciens.

Lettre de M. de Fermat au R. Pere Mersenne de l'Ordre des Minimes.

MON REVEREND PERE,

Puis que j'ay esté assez heureux pour vous oster l'opinion que vous aviez eüe que j'eusse suivi en ma proposition le méme raisonnement que Monsieur de Beaugrand, j'espere qu'avec la méme facilité je vous osteray tous les autres scrupules. 1. Vous avez creu que ma proposition étoit la méme que celle de M. de Beaugrand & ce par deux raisons, l'une que je l'avois écrit lors que je l'envoyay à Mr. de Carcavi; l'autre qu'elle semble conclurre la méme chose. Pour le premier, je vous répons que lors que j'envoyay ladite proposition, je n'avois pas veu encore le livre de M. de Beaugrand, & n'avois sçeu si ce n'est qu'il écrivoit du divers poids des graves secundùm varia à terræ centro intervalla, si bien que la dessus j'imagina la proposition que vous avez veuë, & creus que peut-étre ce seroit la méme que celle de M. de Beaugrand, & l'écrivis ainsi à mondit sieur de Carcavi, mais depuis ayant veu le livre de Mr. de Beaugrand, j'ay trouvé que son opinion est differente de la mienne en ce qu'il suppose que le grave en soy, se rend ou plus pesant ou plus leger selon l'éloignement ou l'apprroche du centre, & moy je soûtiens (en quoy je répondray à vôtre seconde raison) qu'en soy il ne change point de poids, mais qu'il est tiré avec plus ou avec moins de force, ce qui est bien different du reste.

Soit le centre de la terre C, le grave B au point B & le point D dans la superficie, Mr. de Beaugrand tient que si on pese le grave B dans le point B on le trouvera plus leger que si on le pese au point D. Et moy je dis que si on pese le grave B dans le point B, on le trouvera de méme poids que s'il étoit pesé au point D; & qu'en tout cas quand bien cela ne seroit pas (car ma proposition ne depend nullement de la sienne) que le grave B sera soûtenu plus aisément par une puissance qui sera au point D, que par une autre puissance qui en sera plus proche, & en la proportion que j'ay assignée. Vous ne devez pas doubter que ma demonstration ne conclüe parfaitement, bien qu'il semble que Monsieur de Roberval ne l'a pas trouvée precise. Je vous puis donc asseurer que toutes les propositions que j'ay mises dans mon écrit sont parfaitement vrayes, & de cela je n'en veux pas étre creu que lors que j'auray mis par écrit toutes les demonstrations sur cette matiere. Je suis si peu ambitieux que si j'avois trouvé erreur en ce que je vous ay écrit je ne fairois nulle difficulté de l'advoüer. Je suis, &c.

Lettre de M. de Fermat à Monſieur de Roberval à Paris.

Du 4. Novembre 1636.

MONSIEUR,

Me reſervant à vous écrire une autre fois les defauts que j'ay trouvé dans vôtre demonſtration & dans vôtre Livre imprimé, que j'eſpere vous faire advoüer par vos propres maximes, je me contenteray de répondre preſentement aux autres points de vôtre Lettre, & premierement vous ſçaurez que nous avons concouru au méme medium ſur le ſujet de la ſomme des deux quarrez rationaux commenſurables en longueur appliquée au double de la ſomme des côtez, excedant d'une figure quarrée. Vous vous eſtes ſervy auſſi d'un mémé medium que moy en la quadrature des paraboles ſolides quarre-quarrez,& à l'infini ; mais vous ſuppoſez une choſe vraye,de laquelle vous n'avez pas peut-étre la demonſtration préciſe, qui eſt que la ſomme des quarrez eſt plus que le tiers du cube, qui a pour coſté le coſté du plus grand quarré la ſomme des cubes plus que le quart du quarre-quarré la ſomme des quarre-quarrez plus qu'un cinquiéme du quarrecube, &c. Or pour demonſtrer cela generalement, il faut étant donné un nombre, in progreſſione naturali, trouver la ſomme, non ſeulement de tous les quarrez & cubes,ce que les Autheurs qui ont écrit ont déja fait, mais encore la ſomme des quarre-quarrez quarre-cubes, &c. ce que perſonne que je ſçache n'a encore trouvé, & pourtant cette connoiſſance eſt belle & de grand uſage, & n'eſt pas des plus aiſées, j'en ſuis venu à bout avec beaucoup de peine.

En voicy un exemple. Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in quadratum trianguli numerorum, & à producto demas ſummam quadratorum à ſingulis fiet ſumma quadrato-quadratorum quintupla. Il ſemble que Bachet, dans ſon traitté de numeris multangulis, n'a pas voulu tâter ces queſtions apres avoir fait celle des quarrez & des cubes : je feray bien-aiſe que vous vous exerciez pour trouver la methode generale, pour voir ſi nous rencontrerons. En tout cas je vous offre tout ce que j'y ay fait, qui comprend entierement tout ce qui ſe peut dire ſur cette matiere. Voicy cependant une tres-belle propoſition, qui peut-étre vous y ſervira, au moins c'eſt par ſon moyen que j'en ſuis venu à bout. C'eſt une regle que j'ay trouvée pour donner la ſomme non ſeulement des triangles, ce qui a été fait par Bachet & les autres, mais encore des pyramides, triangulo-triangulorum, &c. à l'infini, voicy la propoſition.

Ultimum latus in latus proximè majus facit duplum trianguli.

Ultimum latus in triangulum lateris proximè majoris facit triplum pyramidis.

Ultimum latus in pyramidem lateris proximè majoris facit quadruplum triangulo-trianguli.

Et eo in infinitum progreſſu.

Toutes ces propoſitions, quoy que belles de ſoy,m'ont ſervi à trouver les quadratures, que je ſuis bien-aiſe que vous eſtimiez.

Je voudrois avoir aſſez de loiſir pour vous envoyer les propoſitions des nombres que vous trouvés ſi difficiles, elles le ſont en effet, méme Tartaglia avoit creu qu'elles n'eſtoient point trouvables par art. J'en ay envoyé la conſtruction au Pere Merſenne. Il vous la communiquera ſi vous la luy demandez, je vous envoyeray auſſi une autre-fois le centre de gravité de toutes ces nouvelles figures, avec la methode generale pour le trouver ; vous ſçavez cependant que celuy du demy-conoide diviſe l'axe en proportion de 11. a 5. non pas de 11. à quatre, comme vous aviez creu, &

que celuy des nouvelles paraboles diviſe l'axe en proportion pareille à celle du parallelogramme, qui a pour hauteur l'axe, & pour baze celle de la figure à la figure, ou pour mieux dire le diametre de toute parabole eſt diviſé en tel point de ſon diametre par le centre de gravité en ſorte que le ſegment d'en bas eſt à celuy d'enhaut, comme la figure au paralellogramme de méme baze & de méme hauteur,

Puis que vous avez trouvé la demonſtration de toutes mes propoſitions, vous m'obligerez beaucoup de prier le Pere Merſenne de vous donner mes nouvelles Helices, deſquelles les demonſtrations vous ſeront auſſi aiſées que celles du conoïde & des paraboles, il m'écrit qu'on doûte de delà de leur verité, Vous la luy confirmerez, s'il vous plaît, & deſabuſerez Monſieur de . . . . . qui ſemble ne les avoir pas creües, mais il n'en faut pas demeurer là,car pour ſuppleér tout ce qui ſemble manquer dans l'Archimede. Exponatur parabole, A C D F cujus axis D E, baſis A F, C B parallela D E & ideo perpendicularis ipſi AF. Circa rectam DE fixam figura ADE, converſa conſtituit conoïdem Archimedeum;circa AE fixam conſtituit noſtrum conoïdem,ſed ſi figura ACB, circa A B,fixam convertatur conſtituitur portio noſtri conoïdis,ſi autem circa CB fixam fiat converſio quæritur proportio novi iſtius conoïdis ad conum ejuſdem baſis & altitudinis,hoc autem etiam perfecimus. Imò mirabilius quiddam invenimus,Ellipſioidem cui ſi conum æqualem inveneris dabimus circuli quadrationem. Sed hæc aliàs. Vôtre queſtion des cones eſt ſi aiſée qu'il ſeroit inutile de vous en écrire la ſolution.

Pour les tangentes de la Conchoïde j'ay peur que vous aurez equivoqué ; car voicy ma propoſition qui n'exclud aucun point, laquelle j'ay coppié ſans la verifier ſur mon manuſcrit, peut-étre que c'eſt moy qui auray failli, je vous l'écriray la premiere fois.

Eſto Conchoïs A B C,cujus polus F,intervallum H A & in ea datum punctum B, primùm aſſerimus eam in interiora convexam repræſentandam, licèt contrarium Pappo & Eutocio viſum fuerit,deinde tangentem ita ducimus. Jungatur FIB & perpendicularis B D,demittatur rectangulum B F I unà cum quadrato BD ad rectam B D, applicentur & faciant latitudinem D N, fiat ut H D ad D N, ita B D ad D I, juncta Y B tanget Conchoïdem. J'attends vôtre réponſe, & ſuis, &c.

A Monſieur de Roberval.

Du 7. Decembre 1636.

MONSIEUR,

Apres vous avoir aſſeuré, que je n'ay jamais ſongé de ſoûtenir une opinion contre mon ſentiment, & que je ſerois ravi que vôtre propoſition mechanique feut vraye, afin que nous ne fuſſions plus en peine de ſonder la nature par cét endroit : je m'en remettray du ſurplus à la lettre que j'écris à Monſieur de Carcavi, à laquelle j'adjoûteray ſeulement, que le dernier des principes dont vous vous ſervez pour l'établiſſement de vôtre propoſition ne me ſemble du tout point admiſſible, & que ſans aucun eſprit de contradiction j'eſtime que pour établir la proportion des poids qui ſe meuvent librement on ne doit pas avoir recours aux forces mouvantes, & qu'au contraire les poids libres doivent ſervir de regle à tous les autres mouvemens violens, & c'eſt en quoy je trouve que vôtre principe eſt défectueux, outre qu'il eſt apparemment faux, puiſque celuy dont je me ſers en ſa place ne peut, ce me ſemble, étre contredit, & de cela j'en fais juge qui que ce ſoit.

Sit vectis B D C, cujus medium D, centrum terræ A, ſit autem recta D A vecti perpendicularis. Et ſint æqualia pondera B & C ad centrum terræ per rectas B A, C A, naturaliter annuentia, ſuſpendatur autem vectis à puncto D, & à quavis potentia retineatur. Aio idem ponderare B & C corpora ita conſtituta, ac ſi ambo in puncto D ab eadem potentia detineantur.

Car puis que la ligne B C eſt ſans poids, & que la puiſſance qui eſt en D, abſtrahit à centro, ou au contraire les poids B & C, ſive ſint in punctis B & C, ſive in puncto D, vergunt ad centrum motu oppoſito, il s'enſuit clairement que la puiſſance qui retiendra les poids aux points B & C, les retiendra auſſi en D, & viceverſâ.

Et n'importe d'alleguer qu'il ſemble que le mouvement qui ſe fait par des puiſſances paralleles à la ligne D A eſt auſſi bien contraire au mouvement qui ſe fait ſurſum par la puiſſance qui retient en D. Car primò, il n'eſt pas ſi probable de dire qu'un mouvement violent eſt contraire à un autre mouvement violent, comme de dire qu'un mouvement violent eſt contraire au mouvement naturel. 2. Le mouvement qui ſe fait ſur les lignes paralleles à D A, ſe fera ſur des plans inclinez à l'horizon, & duquel la proportion ſera plus inconnüe que le principe, de ſorte que ou il nous faut advoüer la verité de mon principe, ou demonſtrer le vôtre. Au premier cas je vous demonſtreray ma propoſition de mon ſecond levier par vos propres maximes. J'eſtime que vous aurez grande difficulté au ſecond.

Vous pouvez encore répondre qu'il n'eſt pas icy queſtion des mouvemens qui ſe font ſur des plans inclinez à l'Horizon, parce que vous ſuppoſez, & je l'accorde auſſi qu'en tout mouvement ſi la force qui retient tire à l'oppoſite, l'equilibre ſe fera lors qu'elle ſera égale à la force qui tire au contraire, & qu'ainſi la puiſſance en D tirant à l'oppoſite l'effet de vôtre principe s'en enſuivra ; mais je réponds que vôtre réponſe ſeroit bonne ſi la puiſſance qui eſt en D étoit diviſée & placée aux points B & C, & qu'elle tirât au contraire par les mémes lignes, que les forces, que vous ſuppoſez en C & B, meuvent. Mais cela n'eſtant pas, excuſez mon incredulité ſi elle ne ſe rend pas à vos raiſons, leſquelles je ſouhaiterois plus fortes pour pouvoir librement me dedire de tout ce que j'ay fait ſur ce ſujet, vous proteſtant que jamais homme n'a eſté plus docile que moy, & que lors que je reconnoiſtray mes fautes, je les publieray le premier avec toute franchiſe. J'ay eſté bien-aiſe de voir vôtre remarque ſur la Conchoïde, & vous prie de m'en donner la demonſtration, & vous ſouvenir que lors que je vous écrivis ſur ce ſujet, je le fis en doûtant, & ſans examiner l'écrit que je tranſcrivis d'un Livre où je l'avois mis il y avoit quatre ans; la conſtruction pourtant convient au probleme & au point méme de vôtre propoſition ſi elle eſt vraye, ce que j'atens que vous me confirmiez, je vous prie auſſi me faire ſçavoir vôtre ſentiment ſur les autres propoſitions que je vous ay envoyées, & vôtre réponſe ſur les autres points de ma derniere Lettre, & me croire toûjours, &c.

A Monſieur de Roberval à Paris.

Du 16. Decembre 1636.

MONSIEUR,

Je viens de recevoir vôtre Lettre du 29. Novembre, pour réponſe à laquelle je vous diray que de la methode que vous avez trouvée pour donner la ſomme des quarrez-cubes & quarrequarrez je ne voy point qu'on en puiſſe tirer une regle generale pour l'invention de la ſomme omnium poteſtatum in infinitum, ce qui eſt requis à la ſolution de mon probleme, car vous dites ſeulement qu'il ſera aiſé de trouver les autres apres avoir veu celles dont vous baillés les exemples, mais je demande une methode generale qui ſerve, ad omnes, poteſtates, comme Viete a trouvé celles des ſections angulaires, vous y ſongerés s'il vous plaît, & j'en ècriray cependant l'invention & demonſtration que vous

verrez lors qu'il vous plairra. Pour ce qui eſt des nombres, & de leurs parties aliquotes j'ay trouvé une methode generale pour ſoudre toutes les queſtions par algebre, dequoy j'ay fait deſſein d'écrire un petit traité. Je croy que vous aurez maintenant veu la conſtruction des deux que j'ay envoyé au Pere Merſenne ; car il m'écrit qu'il vous les baillera, toutes ces queſtions ſont tres difficiles, comme vous ſçavez, & n'ont eſté traitées par perſonne, j'ay eſté bien aiſe d'étre confirmé par vôtre lettre en l'opinion que j'avois déja conceüe de Monſieur de .... il eſt pourtant vray qu'il doit avoir grande experience dans les nombres, car luy ayant par l'entremiſe du Pere Merſenne propoſé une queſtion que perſonne de ceux à qui je l'avois propoſée n'avoit encore peu ſoudre, il m'a envoyé d'abord les nombres qui ſatisfont à la queſtion, ſans pourtant expliquer ſa conſtruction, la queſtion eſt. Invenire tria triangula rectangula numero, quorum areæ conſtituant tria latera trianguli rectanguli numero, ſingulæ nempe areæ ſingulis lateribus ſint æquales : je vous advoüeray que ce probleme me donne beaucoup plus de peine qu'à Monſieur de .... Il eſt vray que les nombres que j'ay trouvé ſont differents des ſiens, & que peut-étre ay-je tenu un chemin plus difficile, comme vous ſçavez que ces queſtions ont infinies ſolutions, peut-étre ſerez vous de mon advis ſi vous eſſayez de ſatisfaire à la propoſition.

Vous verrez auſſi mes ſpirales, deſquelles la demonſtration vous ſera connüe tout auſſi-tôt ; car elle eſt pareille à celle des nouvelles figures que j'ay quarrées, ou auſquelles j'ay trouvé des cones égaux, & vous m'advoüerez que ces propoſitions n'illuſtrent pas peu la Geometrie.

Si Monſieur de Beaugrand n'a pas encore trouvé la demonſtration de ces queſtions vous m'obligerez de luy en faire part, je luy ay écrit l'invention du centre de gravité de toutes ces nouvelles figures par une methode particuliere, qui ne ſuppoſe point la connoiſſance de la quadrature, ce qui vous ſemblera merveilleux juſques à ce que vous l'aurez veu, il eſt vray que je luy ay envoyé l'analyſe ſeulement, & non pas la compoſition que je vous éclairciray une autre fois, parce qu'elle a ſes difficultez & ne paroît pas d'abord par cette voye. J'ay trouvé le centre de gravité de la parabole ſans preſuppoſer la quadrature, comme a fait Archimede, & ainſi on en peut tirer la quadrature par un ſimple corollaire, toutes ces propoſitions, enſemble celles des lieux plans, ſolides, & ad ſuperficiem, que j'ay achevées, & celles encore des parties aliquotes des nombres dépendent de la methode dont Monſieur Deſpagnet ne vous a peu faire voir qu'un ſeul cas, parce que depuis que je n'ay eu l'honneur de le voir je l'ay beaucoup étenduë & changée. Les tangentes des lignes courbes dépendent auſſi de là, ſur lequel ſujet je vous propoſeray de trouver une tangente à un point donné en la ſeconde Conchoïde de Nicomedes.

Au reſte je ſuis bien aiſe que vous ayez trouvé la demonſtration, comme vous dites ; de ce que ſuppoſé qu'aux paraboles les ſegmens de l'axe ſont entre eux comme les parallelogrammes aux mémes paraboles, il ſera vray auſſi qu'eſtans tournez ſur leurs axes, les centres des ſolides ſeront où l'axe eſt diviſé en raiſon comme les Cylindres aux ſolides ; car par la voye dont j'ay envoyé un exemple à Monſieur de Beaugrand, & que je mettray au long une autre fois, j'ay trouvé la demonſtration de l'antecedent & de celle du conſequent que vous m'envoyerez, s'il vous plaît, j'en tireray la proportion des ſolides paraboliques à leurs cones, qu'il ſeroit mal-aiſé de trouver autrement, car vous trouverez bien la proportion de ceux qui viennent poſt quadrata alternatim, comme quarre-quarrez, cubocubes, &c. dequoy vous baillez l'exemple au premier, mais in parabolis cubicis, quadratocubicis & ſic alternis in infinitum methodus qua uſi ſumus non dat proportionem conoïdum ad conos, ex noſtra autem methodo in omnibus omnino conoïdibus invenimus centrum gravitatis, ergo ex tua propoſitione dabitur proportio eorum ad conos. Je l'attends donc avec impatience, puis qu'elle doit ſervir à cét uſage, ſi ce n'eſt que vous ayez trouvé la proportion des conoïdes cubiques quadrato-cubiques, &c. à leur cones, ce que vôtre lettre ſemble marquer, auquel cas je vous ſupplie m'envoyer leſdites proportions.

Ce n'eſt pas que je doûte de la verité de vôtre propoſition, mais permettez-moy de vous dire que je me ſuis défié que vous en euſſiez trouvé la demonſtration & que j'ay crû ſeulement que vous en avez fait l'experience aux conoïdes paraboliques des quarre-quarrez, cubocubes, &c. alternis, mais la connoiſſance que j'ay de vôtre ſçavoir fait que j'eſpere que vous me détromperez.

Pour ce qui eſt de la proportion du ſolide qui ſe fait ſur un diametre de la parabole parallele à l'axe ma conſtruction eſt differente de la vôtre. Il ſeroit inutile de l'adjoûter, puis qu'elles concluënt toutes deux.

Je me trouve obligé d'adjoûter un mot touchant vôtre propoſition mechanique par-ce que le Pere Merſenne m'écrit qu'enfin j'ay acquieſſé à vôtre opinion, ce que pour-tant je ne ſçaurois faire par les raiſons que vous allez voir, & vous puis aſſûrer que ja-mais je ne fus mieux confirmé en la propoſition de mon ſecond levier que je le ſuis maintenant, car pour celle du premier il la faut établir par de nouveaux principes, puiſ-que vous avez nié ceux que j'eſtimois ſi clairs.

Si vôtre principe duquel je vous ay déja écrit par ma derniere lettre eſt vray, il s'enſuit manifeſtement qu'un méme corps approchant du centre de la terre changera ſon poids. In ſecunda figura ſit vectis C A B, cujus medium A, cum centro terræ N, per rectam A N ad vectem perpendicularem jungatur, in punctis C & B, pondera C & B, æqualia conſtituantur, & ſimilia quæ ad centrum per rectas C N, B N annuant. Si rectæ N C, N B, eſſent ad vectem perpendiculares potentia in A æqualis duobus ponderibus B & C ex tuo principio detineret vectem. Sed cum angulos N C A, N B A acutos efficiant, aut eadem, aut minor, aut major potentia requiretur in A ad æquilibrium. Si eadem poten-tia facit æquilibrium, verum erit principium quo in precedenti ad te epiſtola uſi ſumus (quod ſi fatearis, ſtatim vectem noſtrum demonſtrabimus.) Si major, aut minor poten-tia æquilibrium conſtituit, ergo in 1. caſu quò minuentur magis anguli rectarum C N, B N cum vecte, eò major requiretur ad æquilibrium potentia; in 2. caſu minor. Supra punctum A idem vectis in eadem directionis linea ſimiliter ponatur, ut in figura mi-nuentur anguli linearum C N, B N, ut patet : variabit igitur potentia æquilibrij in A con-ſtituta, ideoque pondus ex gravibus B & C compoſitum pro diverſa à terræ centro di-ſtantia erit etiam diverſum.

Primam partem dilemmatis quo minus fatearis impedit tua propoſitio, quippe hoc dato, corrueret, fatearis igitur neceſſe eſt, aut potentiam in A variare pro diverſitate angu-lorum, aut eamdem ſemper eſſe in omni angulorum acutorum poſitione, ſed tamen inæqualem potentiæ quæ detinet potentias ad vectem perpendiculares.

Utrumlibet conceſſeris, manifeſtiſſima demonſtratione detegitur paralogiſmus, quem tuæ demonſtrationi irrepſiſſe nec veritas quam quærimus patitur diſſimulare, nec tu ipſe poteris fortaſſe diffiteri.

In prima figura quæ eſt quarta tuæ propoſitionis, his verbis ita conſtruis. Soit le cen-tre de la balance A, le bras A B plus grand que le bras A C, & ſoint premierement les lignes de direction B D, C E, perpendiculaires aux bras A B, A C, par leſquelles lignes tirent les puiſſances, D, E, (leſquelles ſeront des poids ſi on veut) & qu'il y ait méme raiſon de la puiſſance D à la puiſſance E, que du bras A C, au bras A B, les puiſſances tirans l'une contre l'autre, je dis qu'elles feront equilibre ſur la balance C A B. Car ſoit prolongé le bras C A juſques en F en ſorte que A F ſoit égale à A B, & ſoit conſiderée C A F com-me une balance droite, de laquelle le centre ſoit A, ſoint auſſi imaginées deux puiſſan-ces G, H, deſquelles & de toutes leurs parties les lignes de direction ſoint paralelles à la ligne CE, & que la puiſſance G ſoit égale à la puiſſance D, & la puiſſance H égale à la puiſſance E, l'une ſçavoir G tirant ſur le bras A F, & l'autre ſçavoir H tirant ſur le bras A C, lors par la premiere propoſition, les puiſſances G H feront equilibre ſur la balance C A F. Mais par le premier principe la puiſſance D ſur le bras A B, fait le méme effet que la puiſſance G ſur le bras A F, partant la puiſſance D ſur le bras A B fait equilibre

avec la puiſſance H ſur le bras A C, & la puiſſance H tirant de méme que la puiſſance E ſur le bras A C, par le méme premier principe, la puiſſance D ſur le bras A B, ſera equi-libre avec la puiſſance E ſur le bras A C. Hîc vertitur cardo tuæ demonſtrationis.

Et 1. ſi dixeris in omni angulorum acutorum poſitione eamdem ſemper poten-tiam requiri ad æquilibrium, ſtatim demonſtrabo meam de vecte propoſitionem; fatearis igitur neceſſe eſt variare potentiam prout anguli variant. His poſitis, eſto ſi pla-cet in expoſita figura centrum terræ N in quod rectæ C E, B D dirigantur, & ſint in punctis E & D pondera ſeu gravia in proportione data, quod quidem liberum eſſe tua innuit conſtructio (imò hùc tantùm abs te tenditur ut per potentias imagina-rias ab omnibus omnino partibus παραλλήλως moventes inveniatur proportio ponderum in vecte quieſcente, aliter quippe, cum hujuſmodi potentiæ nullibi in rerum natura reperiantur, inutiles prorſus eſſent) in punctis H & G conſtruis potentias ponderi-bus E & D, æquales, quæ ab omnibus ipſarum partibus παραλλήλως moveant, potentiam deinde H, potentiæ E æqualiter movere concludis per 1. tuorum axiomatum, quia nempe trahet H potentia per punctum C, & rectam H A, perpendicularem vecti, tra-het etiam pondus E, per eamdem rectam vecti perpendicularem, cum igitur æquales potentiæ per eamdem rectam & eumdem angulum moveant, & circa eamdem à vectis centro diſtantiam, pondus E & imaginaria H, potentia æqualiter trahunt. Id veriſimile cum ſit, veritatem intimam quærentibus non poteſt non videri falſiſſimum. Pondus in E ſit Sphæricum, verbi gratia, omnes omnino ipſius partes ad centrum N tendunt per rectas in eadem N, centro concurrentes & vectem I C, ſi continuentur ad angulos acu-tos ſtantes, ergo potentiæ abs C, utrinque æqualiter remotæ intelligentur, vectem ad angulos acutos ſuis motibus ſecantes; contra cum partes omnes potentiæ H παραλλήλως moveant, intelligentur potentiæ abs C utrinque æqualiter remotæ ad angulos rectos vectem ſuis motibus ſecantes. Cum igitur partes omnes potentiæ H ſimul ſumptæ æquentur partibus omnibus potentiæ ſeu ponderis E ſimul ſumptis, tota enim poten-tia H toti ponderi E æquatur, patet ex jam traditis potentiarum H, E, in punctis H & E inæqualem eſſe motum; quod igitur de potentia H concludit demonſtratio, perperam ad pondus E porrigit.

S'il me reſtoit du temps ou du papier j'adjoûterois ſuivant vôtre deſir la demonſtra-tion des cones Iſoperimetres, ce ſera une autre fois, me reſervant encore de vous écrire quelque choſe de plus recherché ſur les Mechaniques, à la charge que vous m'o-bligerez de croire que je n'aurois garde de m'opiniâtrer aprés une propoſition, ſi je ne la croyois veritable, & que je la quitteray un moment aprés que de nouvelles raiſons l'em-porteront ſur les miennes. Je ſuis, &c.

A Monſieur de Roberval.

MONSIEUR,

Je trouve aſſés de loiſir pour vous envoyer encore la conſtruction du lieu plan, ſi à quotcumque, &c. que je tiens une des plus belles propoſitions de la Geometrie, & je crois que vous ſerés de mon advis.

Sint data quotlibet puncta, 5. verbi gratia, A, G, F, H, E, (nam propoſitio eſt gene-ralis) quæritur circulus ad cujus circumferentiam in quolibet puncto inflectendo re-ctas à datis punctis, quadrata omnium ſint æqualia ſpatio dato. Jungantur puncta quæ-vis A & E, per rectam A E, in quam ab aliis punctis datis cadant perpendiculares G, B, H, D, F, C, omnium rectarum, punctis datis vel occurſu perpendicularium & puncto

A terminatarum sumatur pars conditionaria, quintans, verbi gratia, in hac specie; quintans ergo rectarum A B, A C, A D, A E, simul sumptarum esto A O, & à puncto O excitetur perpendicularis infinita O N, à quâ resecetur O I pars conditionaria (quintans nempe pro numero punctorum datorum) perpendicularium G B, F C, H D, & intelligantur jungi rectæ A I, G I, F I, H I, E I, quadrata istarum 5. erunt minora spatio dato; demantur igitur à spatio dato & supersit, verbi gratia, Z planum cujus quintans, pars nempe conditionaria sumatur, & in quadratum redigatur, circulus centro I, intervallo M descriptus satisfaciet proposito, hoc est quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia rectarum à datis punctis ad illud punctum ductarum quadrata erunt æqualia spatio dato.

Adderem demonstrationem, sed longa sanè est, & malim vestrum amborum sollicitare genium ad eam inveniendam: non solùm autem has propositiones, sed omnes omnino de locis planis absolvi, imò locos quamplurimos adinveni de quibus nihil scripserat Apollonius, qui tamen sunt pulcherrimi, verbi gratiâ.

Datis tribus punctis in rectâ A B C, invenire circuli circumferentiam in quâ sumendo quodlibet punctum ut N, quadrata A N, N B, superent quadratum N C spatio dato.

De locis solidis & ad superficiem multa quoque jam sunt detecta. Casus loci plani superioris non addo, nam patebunt statim. Si puncta data sint tantùm tria, & constituant triangulum, centrum circuli localis erit centrum gravitatis illius trianguli, & hæc proportio singularis, satis est mira.

Sed hic non moror. Propositionem universalissimam ita constituo, & jam construxi. Si à datis quotlibet punctis inflectantur rectæ, & exponantur omnium species in datâ proportione crescentes, aut deficientes erunt species ita auctæ aut deminutæ dato spatio æquales. Exemplum. Sint data tria puncta in superiori figurâ A, N, C, & quærendus circulus in cujus circumferentiâ sumendo quodlibet punctum ut N quadrati N A dimidium, verbi gratiâ, quadrati B N duplum & quadrati C N triplum simul juncta conficiunt spatium datum & demonstratio ad quamlibet proportionem & quotlibet puncta porrigenda. Hanc propositionem, pulcherrimam sanè, videtur non vidisse Apollonius.

Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 4. Avril 1637.

MONSIEUR,

Quoy que j'eusse receu des Lundy dernier vôtre demonstration du lieu plan, neantmoins mes occupations tant publiques que particulieres ne me permirent point de la considerer jusques à Jeudy que je la presentay de vôtre part à l'Assemblée de nos Mathematiciens qui étoit ce jour là chez Monsieur de Montholon Conseiller, où elle feut receüe, considerée, admirée avec étonnement des esprits, & vôtre nom élevé jusques au Ciel, avec charge particuliere à moy de vous remercier au nom de la Compagnie, & vous prier de m'envoyer tout d'une main la composition du lieu solide avec une briefve demonstration, afin de faire imprimer les deux ou soûs vôtre nom, ou sans nom comme vous le voudrez: en quoy nous aurons le soin d'étendre plus au long ce qui semblera trop concis pour le public; cependant il y eût debat à qui auroit vôtre écrit pour en tirer copie, chacun m'enviant le bon-heur de la communication que j'ay avec vous: mais Monsieur le President Paschal à qui le premier je l'avois mis entre les mains, & qui l'avoit leu à la Compagnie, donna arrest en sa faveur, se fondant sur la maxime (qui tenet, teneat) & pour faire droit aux parties interessées, se chargea luy méme de leur en fournir copie, ordonnant que puis aprés l'original me seroit remis entre les mains. Je leur avois dés auparavant communiqué la construction, & un nommé Monsieur le Pailleur avoit trouvé la demonstration particuliere pour trois & pour quatre points, si differente de la vôtre, que c'est une chose étrange; il y avoit apparence qu'avec le temps il eût trouvé une demonstration generale. Mais il confesse que cette recherche le tüoit, & qu'il vous a une particuliere obligation, de l'avoir delivré d'une peine presque insupportable; pour moy je ne me puis promettre aucun loisir que trois mois ne soient passez, pour étre delivré de mes leçons publiques, & quand j'aurois ce loisir je ne serois pas assûré de trouver le lieu solide, lequel je prevoy tres-difficile, c'est pourquoy dés maintenant je vous feray si vous voulés une ample declaration de mon impuissance, afin que sans me tenter plus long-temps, & qu'ayant égard aux prieres d'une telle Compagnie que celle dont je vous parle, vous nous fassiez part de vôtre invention, qui est telle que le grand Geometre des siecles passez se glorifioit particulierement d'y avoir adjoûté la perfection, en ayant receu l'invention de ceux qui l'avoint precedé; jugés combien vous avés occasion de vous glorifier de l'avoir trouvée en un temps auquel elle étoit en méme état que si elle n'avoit jamais été connue. Il m'est enfin parû quelque lumiere pour le centre de gravité des paraboles en considerant les centres des parallelogrammes circonscrits, comme s'ils étoint tous posés sur une méme baze differens seulement en hauteur, mais comme ces lumieres me viennent au matin en me levant, & qu'il faut du loisir pour les éclaircir je ne me puis pas promettre d'en venir à bout si tôt, si vous me délivrés de cette peine, je vous en auray l'obligation entiere. Je suis, &c.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris.

Du 20. Avril 1637.

MONSIEUR,

Je ne peus pas vous écrire par le dernier Courrier, à cause des occupations ausquelles je me trouvay engagé, je prens maintenant la plume pour vous témoigner que je suis beaucoup obligé à ces Messieurs, à qui vous avés fait voir ma proposition, ausquels vous asseurerés, s'il vous plaît, que j'estime beaucoup plus leur approbation que mon Ouvrage. Leur sçavoir est si connu, que je ne puis m'empécher d'étre glorieux d'avoir écrit & inventé quelque chose qui leur plaise. Je ne pretends pas par là vous exclurre du nombre, au contraire les marques de vôtre sçavoir m'étant plus particulierement connuës, je juge par là quels doivent étre ceux qui conferent avec vous.

Au reste je vous eusse envoyé les lieux solides, ad 3. & 4. lineas, n'étoit que j'ay creu que Monsieur de Beaugrand ne fera pas difficulté de bailler à Monsieur de Carcavi le lieu ad 3. lineas, que je luy envoyay il y a long-temps avec la demonstration, dés que vous aurez celuy-là je vous envoyeray l'autre. Si j'avois retenu copie de celuy ad 3. lineas je n'eusse pas fait difficulté de vous l'envoyer. Mais ne l'ayant plus, j'ay voulu ménager la peine qu'il m'eût falu prendre à le refaire, à laquelle je me porteray pourtant, si Monsieur de Beaugrand ne le baille pas. Vous verrez entre les mains de Monsieur Carcavi les deux livres, de locis planis, que j'avois promis depuis long-temps à Monsieur Beaugrand, & que j'ay à dessein envoyé un Courrier plûtôt que je ne luy avois fait esperer, afin que vous puissiez cependant les voir. Vous m'obligerez de m'en écrire avec franchise vôtre sentiment. Je ne doûte pas que la chose n'eût peu se polir davantage, mais je suis le plus paresseux de tous les hommes; je feray bien aise que vous m'écriviez aussi quelles de ces propositions vous étoient connües, & quelles non, & en cas que vous en ayez veu quelqu'une, principalement du 2. Livre, si elles étoient pareilles à celles que vous verrez. Car il y a huit ans que le deuxiéme Livre est écrit & en ce temps j'en baillay deux copies, l'une à Monsieur Despagnet Conseiller au Parlement de Bourdeaux, & l'autre à Monsieur de ...., si bien que peut-étre quelqu'une de ces propositions aura esté divulguée, peut-étre vous méme, ou quelqu'autre de ceux de vôtre Compagnie en ont fait une partie. Eclaircissez moy de tout au vray, & vous m'obligerez beaucoup, & sur tout que vôtre jugement suive toutes ces propositions, s'il vous plaît, je l'attends pour réponse à celle-cy; au reste quoy qu'on juge digne d'impression de moy, je ne veux pas que mon nom y paroisse, je me reserve à vous entretenir plus amplement une autrefois; cependant vous sçaurez qu'outre les lieux plans & solides qui sont dans Pappus, j'en ay trouvé grande quantité de tres-beaux & dignes de remarque, que je n'ay pourtant ozé méler avec ceux d'Apollonius. J'en ay plus de cent propositions tres-belles, & particulierement des lieux solides, & ad superficiem, mais le loisir me manque; je n'ay pas voulu faire le Grammairien en expliquant au menu le texte de Pappus, il suffit que j'aye pris son sens, comme je croy que vous m'advoüerez. J'attends vôtre réponse, & suis, &c.

Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 1. Iuin 1638.

MONSIEUR,

Puis qu'il est vray qu'il n'y a aucun contentement que je prefere à celuy que je reçoy de vos Lettres, vous devés penser que les occupations qui m'ont empéché de vous écrire depuis si long-temps, doivent avoir esté bien pressantes, ayans eu la force d'interrompre nôtre entretien qui m'est si cher & si agreable. Or pour recommencer, je vous diray que si j'ay entrepris la defense de vôtre traitté (de Minimis & Maximis) contre les objections de M. Descartes, je m'y suis senty obligé, ou plûtôt necessité par mon genie, qui ne peut souffrir que la verité soit tant soit peu obscurcie, tant s'en faut qu'il endure qu'on la fasse passer pour ce qu'elle a de plus contraire, j'entens pour une fausseté accompagnée de paralogismes. C'est pourquoy j'ay grand besoin qu'au lieu de me remercier comme vous faites, vous m'excusiez, tant pour ce qu'étant foible j'ay osé entrer en lice contre un fort adversaire pour vous, que pource que je l'ay fait sans vous en advertir, veu que vous sembliez y avoir le principal interest. Mais en effet c'est l'interest de la verité, & de tous ceux qui la cherissent; c'est pourquoy j'en ay fait le mien propre, & elle m'a paru si claire qu'elle m'a fait passer pardessus les considerations de ma foiblesse, à laquelle j'ay pensé que son évidence pourroît suppleér assez suffisamment. J'espere que vous recevrez cette excuse & que vous me ferés l'honneur de croire que la connoissance que j'ay de vôtre merite, m'a tellement acquis à vous, qu'elle m'a fait témoigner ce zele, quoy que mon insuffisance seule l'ait peu rendre en quelque sorte indiscret. Monsieur Descartes n'ayant pas encor receu mon écrit le 3. May, ce qui est pourtant bien tard, a fait quelques objections nouvelles de peu de consequence, vous les verrez dans sa Lettre que le Pere Mersenne vous pourra envoyer, il veut trouver la tangente d'un cercle, persistant toûjours que c'est la plus grande, sinon qu'il y adjoûte qu'elle n'est la plus grande que soûs certaines conditions; en quoy il s'enferre luy mé-

me, voulant refuter vôtre écrit qui parle de la plus grande absolument, par l'exemple d'une qui n'est la plus grande que conditionnairement. Il est vray que voulant la trouver absolument ou la moindre, & pour ce faire nommant le diametre ND, C, DE, B, & DC, ou EC, A, on tombe dans une absurdité que $C + B^2$ est égal à rien, & si le point E étoit dans le cercle $C - B^2$ seroit égal à rien. Mais cette absurdité monstre qu'il ne faut pas chercher le point B dans la circonference autre part que dans la ligne DN, sçavoir au point N pour la plus grande, & au point D pour la moindre. En quoy il est remarquable que $C + B^2$ est la somme de la plus grande & de la moindre & $C - B^2$ est leur difference. Mandez moy quel est vôtre sentiment, car n'ayant pas encor le loisir de considerer bien particulierement le fonds de vôtre methode & sa demonstration, il ne peut étre qu'elle ne contienne des mysteres qui me sont encore cachez. J'ay trouvé admirable le moyen par lequel vous l'appliquez aux paraboles & solides paraboliques pour en trouver les centres, mais le voulant éprouver en la vraye parabole, j'ay trouvé qu'il falloit changer vôtre raisonnement qui n'est que particulier au Conoïde parabolique, car ayant l'espece de la ligne EO, vous pouvez bien dire comme la difference des quarrez IA, & AN est au quarré de AN, ainsi la ligne EO est à OM, ce que vous ne prouvez pas en la parabole méme, en laquelle suivant ce raisonnement il faudroit dire, comme la difference des cubes de IA & AN est au cube de AN, ainsi la difference des quarrez de EM, & MO est au quarré de MO, & cependant vous n'avez pas l'espece ny de l'un ny de l'autre de ces quarrez; au lieu desquels j'ay dit ainsi, il y a plus grande raison du cube IA au cube AN que du quarré EI au quarré OI, ce qui reüssit, & en la parabole cubique j'ay dit, il y a plus grande raison du quarré-quarré IA au qq. AN, que du cube EI au cube OI, &c. Mais le raisonnement est autant ou plus beau & plus facile par les figures qui restent ayant osté le plan parabolique du parallelogramme qui le comprend. J'ay promis à Mr. Mydorge de l'entretenir sur cette invention que je ne sçaurois assez admirer; & je m'asseure que Mr. Paschal en fera ses exclamations ordinaires, si je puis la luy faire voir, comme j'espere & a Mr. des-Argues; il faut aussi que Mr. Descartes la voye, afin qu'il nous en fasse voir les paralogismes, & puis que vous avez trouvé par la méme voye les tangentes de sa figure qui est une espece d'ovale, il sera bon que vous luy envoyez, ou nous, si vous le trouvez meilleur. Mais prenez garde que par le méme point donné il peut y passer deux de ces ovales, & partant y avoir deux tangentes, ce que j'espere que l'equation fera découvrir. J'y travaillerois, mais je suis assûré que vous y reüssirez mieux que moy: joint qu'il me faudroit étre délivré de la roüe à laquelle je suis attaché, ayant appellé du nom de roüe le cercle qui roule, avec les conditions que vous sçavez, & ayant donné un nom à la ligne courbe que décrit un point de la circonference pendant une revolution entiere, je demonstre que l'espace compris de cette ligne courbe, & de la droite qui luy sert de base sur laquelle la roüe se meut, est (majus datâ quàm in ratione) c'est à sçavoir que de cét espace en ayant osté l'espace de la roüe, il y aura méme raison du reste à la méme roüe, que de la base de l'espace à la moitié de la circonference de la roüe. D'où il s'ensuit qu'en la roüe ordinaire de laquelle la base est estimée égale à la circonference, l'espace dont il s'agit est triple de la roüe, & si la base est double de la circonference l'espace sera quintuple de la roüe; Si triple, septuple: & ainsi en continüant par les nombres impairs. De tout cecy, je vous envoyeray par le premier Courrier une brieve demonstration, en attendant le traitté entier. Je suis, &c.

*Lettre de Monſieur de Fermat à Monſieur de*****

MONSIEUR

Puis que Monſieur de..... parle, & que vous l'ordonnés, vous, Monſieur, de qui la reputation eſt ſi grande & ſi bien établie, je laiſſe éveiller ma Geometrie, qui dormoit depuis long-temps dans un profond repos, & pour entrer d'abord en matiere, je veux bien vous conter l'intrigue de nôtre Dioptrique * & de nos refractions en forme d'Hiſtoire, afin de vous laiſſer le jugement libre, & que vous puiſſiez prononcer ſans preoccupation. Dés que j'eus veu le Livre de feu Monſieur Deſcartes, & que j'eus examiné avec quelque attention la propoſition qui ſert de fondement à ſa Dioptrique, & qui établit la proportion des refractions, je ſoupçonnay ſa preuve, ſa demonſtration me ſembla un veritable paralogiſme. 1. Parce qu'il la fonde ſur une comparaiſon, & que vous ſçavez que la Geometrie ne ſe picque guere de ces figures, les comparaiſons y étant encore plus odieuſes que dans le commerce du monde. Secondement parce qu'il ſuppoſe que le mouvement de la lumiere qui ſe fait dans l'air & dans les corps rares eſt plus malaiſé, ou ſi vous l'aimez mieux ainſi plus lent que celuy qui ſe fait dans l'eau, & les autres corps denſes, ce qui ſemble choquer le ſens commun, & enfin parce qu'il pretend que l'une des directions ou des determinations du mouvement d'une balle ſubſiſte toute entiere aprés la rencontre du ſecond milieu, j'adjoûtois méme quelques autres raiſons, qu'il ſeroit ou ſuperflu, ou ennuyeux de vous déduire; il vît mes écrits, il y répondit, & aprés pluſieurs réponſes & repliques de part & d'autre nous nous ſeparames, comme le prevenu & le témoin, l'un dans l'affirmative, l'autre dans la negative, quoy que j'eus enfin des Lettres de ſa part pleines de civilité. Depuis ſa mort Mr. de la Chambre ayant publié ſon traité de la lumiere, & m'ayant fait l'honneur de me l'envoyer, je pris occaſion de luy écrire la Lettre que vous avés veüe, dans laquelle je luy témoignay que pour nous guarentir des paralogiſmes en une matiere ſi obſcure, je ne voyois point de moyen plus aſſûré que de chercher les refractions dans cét unique principe que la nature agit toûjours par les voyes les plus courtes, ſur le fondement duquel je luy indiquay qu'on pouvoit chercher par Geometrie le point de refraction en le reduiſant au probleme où theoreme que vous ſçavez; mais parce que j'en jugeay l'invention tres-difficile & tres-embarraſſée, puis que ces queſtions de maximis & minimis, conduiſent d'ordinaire à des operations de longue haleine, & qui ſe broüillent aiſement par une infinité d'aſymmetries qu'on trouve ſur ſon chemin, je laiſſay là ma penſée pendant pluſieurs années en attendant que quelque Geometre moins pareſſeux que moy en fit ou la découverte ou la demonſtration. Perſonne ne voulut entreprendre ce travail; cependant je recevois de Lettres de Monſieur de la Chambre de temps en temps, par leſquelles il me preſſoit d'adjoûter la Geometrie à mon principe, & de faire la demonſtration en forme du veritable fondement des refractions. Ce qui me rebutoit à l'advance étoit l'aſſeurance que Mr. Petit & autres m'avoint donnée, que leurs experiences qu'ils avoint ſouvent reiterées pour meſurer les refractions, & dans l'eau, & dans le criſtal, & dans le verre, & dans beaucoup d'autres liqueurs differentes, s'accordoint tres-preciſement avec la proportion de Monſieur Deſcartes, de ſorte qu'il me ſembloit inutile d'en aller

* Ceux qui ont le troiſiéme Tome des Lettres de M. Deſcartes y pourront voir plus au long les objections de M. de Fermat contre la Dioptrique de M. Deſcartes, & divers écrits ſur ce ſujet depuis la page 167. juſques à la page 350

chercher quelqu autre par mon principe, puiſque la nature elle méme s'expliquoit ſi clairement en ſa faveur. L'objection que vous me faites dans vôtre écrit ne me faiſoit nulle peine, & j'y avois déja répondu dans ma Lettre à Mr. de la Chambre par cette raiſon que tout ce qui appuye ou fait ferme ſur quelque point d'une ligne courbe eſt cenſé faire ferme ou appuyer ſur la ligne droite qui touche la courbe audit point, & ainſi quoy que la ſomme des deux lignes de reflection ſoit quelquefois la plus grande dans les miroirs concaves, ſphæriques ou autres, elle eſt toûjours la plus petite de toutes celles qui peuvent tomber ſur la ligne ou ſur le plan qui touchent les miroirs au point de la reflection, & cela n'a pas beſoin de plus grande preuve, Mr. Deſcartes le ſuppoſant ainſi auſſi bien que moy; toute la difficulté ſe reduiſoit donc à ce qu'il me paroiſſoit que j avois à combattre, non ſeulement les hommes, mais encore la nature. Neantmoins les dernieres inſtances de M. de la Chambre furent ſi preſſantes que je reſolus il y peut avoir environ deux ou trois ans de tenter le ſecours de mon analyſe, m'imaginant qu'il y a une infinité de proportions differentes entre-elles, dont les ſens ne ſçauroient verifier la diverſité, & qu'ainſi j en trouverois peut-étre quelqu'une qui approcheroit de celle de Monſieur Deſcartes, & qui pourtant ne ſeroit pas la méme. Je fis mon analyſe en forme par une methode qui m'eſt particuliere, & qu'Herigone à fait autrefois imprimer dans ſon cours Mathematique, je ſurmontay toutes les aſymmetries avec peine, & voila que tout à coup à la fin de mon operation tout ſe débroüille, & il me vient une equation tres-ſimple qui me donne juſtement la méme proportion de Monſieur Deſcartes; je creus ſur l'heure avoir equivoqué, car je ne pouvois me figurer qu on aboutit à une méme concluſion par des routes tout à fait oppoſées, Mr. Deſcartes ſuppoſant pour un des moyens de ſa demonſtration que le mouvement de la lumiere trouve plus de reſiſtence dans l'air que dans l'eau, & moy ſuppoſant tout le contraire, comme vous verrez dans la copie de ma demonſtration que j'ay tâché de refaire de memoire pour vous ſatisfaire pleinement, mon original ayant eſté envoyé à Monſieur de la Chambre ſuivant ma pareſſe ordinaire. Je refis donc pour lors la queſtion à diverſes repriſes en changeant les poſitions, & je trouvay toûjours la méme concluſion, ce qui me confirma deux choſes, l'une que l'opinion de Mr. Deſcartes ſur la proportion des refractions eſt tres-veritable, & l'autre que ſa demonſtration eſt tres-fautive, & pleine de paralogiſmes. Meſſieurs les Carteſiens virent enſuite ma demonſtration qui leur fut communiquée par Monſieur de la Chambre, ils s opiniâtrerent d'abord à la rejetter, & quoy que je leur repreſentaſſe tout doucement qu'il leur devoit ſuffire que le champ de bataille demeurât à Mr. Deſcartes, puiſque ſon opinion ſe trouvoit veritable & confirmée, quoy que par de raiſons differentes des ſiennes, que les plus fameux Conquerans ne s'eſtimoient guere moins heureux lors que la victoire leur étoit procurée par les troupes auxiliaires, que ſi c'étoit par les leurs, ils ne voulurent point dans les premiers mouvemens entendre raillerie, ils vouloint que ma demonſtration fût fautive, puis qu'elle ne pouvoit pas ſubſiſter ſans deſtruire celle de Mr. Deſcartes qu'ils entendoient mettre toûjours hors du pair; mais comme les plus habiles Geometres qui virent la mienne ſembloint y donner leur approbation, ils me firent enfin compliment par une Lettre de Mr. Clairſellier, qui eſt celuy qui a procuré l'impreſſion des Lettres de Monſieur Deſcartes, ils crierent au miracle dequoy une méme verité s'étoit rencontrée au bout de deux chemins entierement oppoſez, & prononcerent qu'ils vouloient bien laiſſer la choſe indeciſe, & advoüer qu'ils ne ſçavoint à qui donner la preferance de Mr. Deſcartes ou de moy ſur ce ſujet, & que la poſterité en jugeroit. C'eſt à vous, Monſieur, qui eſtés ſans doûte deſtiné par vôtre merite extraordinaire à avoir grand commerce avec elle à l'informer, ſi vous le jugez à propos, de ce celebre demélé, ou ſi vous aymés mieux placer ce petit écrit parmi vos papiers inutiles, j'y conſens, & tout m'eſt indifferent; mais il n'en eſt pas de méme de la tres-humble priere que je vous fais de me croire, &c.

Demonſtration dont il eſt parlé dans la Lettre precedente.

SOit la droite A F M, qui repreſente la ſeparation de deux differens milieus, que l'air ſoit du coſté de B, & l'eau du coſté de H, le rayon de lumiere qui doit aller du point B qui eſt en l'air, vers le point F, ou commence le milieu de l'eau, ſe romp & va vers H, s'approchant de la perpendiculaire ſuivant les experiences connuës & vulgaires. Monſieur Deſcartes determine ce point H, en telle ſorte qu'en tirant une perpendiculaire du point B ſur la ligne A F M, qui ſoit B A, il fait que la ligne A F eſt à la ligne F M, comme la reſiſtance d'un des milieus à celle de l'autre, bien qu'il entende contre mon ſens, que la reſiſtence eſt plus grande dans l'air qu'elle ne l'eſt dans l'eau. Soit donc la plus grande reſiſtance repreſentée par la ligne A F & la moindre par celle de F M & par conſequent la ligne A F plus grande que F M, ſoit élevée du point M la perpendiculaire M H qui ſoit coupée en H par le cercle dont le centre eſt F, & le rayon F B, ſi bien que les droites B F, & F H ſeront égales, je dis que le rayon B I venant à ſe rompre par la rencontre de l'eau ira vers H, car puiſque par mon principe la nature agit toûjours par les voyes les plus courtes, ſi je prouve qu'en paſſant par les deux droites B F, & F H elle y employe moins de temps qu'en paſſant par aucun autre point de la droite A M, j'auray prouvé la verité de la propoſition ; or puis que je preſuppoſe que le mouvement dans l'air eſt plus aiſé, & par conſequent plus vîte, le mouvement de B en F ſe faira en moins de temps que celuy de F à H, & pour regler la veritable proportion, il faut faire comme A F à F M, qui ſont les meſures des reſiſtances, ainſi B F à F D, & les deux droites D F & F H ſeront les meſures du temps qui ſera employé de B à F & de F a H, ſçavoir la droite D F, ſera la meſure du mouvement par B F qui eſt plus vîte, & la droite F H ſera la meſure du mouvement par F H qui eſt plus lent, & ce ſuivant la proportion de B F à F D, ou de H F qui eſt égale à B F à la méme F D ; ſi je prouve donc que quelque point que vous preniez des deux coſtez D F, la ſomme des deux droites D F, F H eſt toûjours plus petite que deux droites priſes au méme ſens, j'auray ce que je cherchois ; ſoit donc premierement du coſté vers M le point O en joignant les droites B O, & O H, & faiſant comme B F à D F ainſi B O à C O, je dois prouver que la ſomme des deux droites C O & O H eſt plus grande que celle de D F & F H, & en prenant de méme quelqu'autre point comme V de l'autre côté vers A, je dois auſſi prouver qu'en joignant les deux droites B V, & V H, & faiſant comme B F à D F, ainſi B V à Y V la ſomme des deux droites Y V, & V H eſt plus grande que celle des deux droites D F & F H ; pour y parvenir je fais comme B F à A F, ainſi F O à F R, & comme la méme B F à F M ainſi F O à F I, puiſque B F eſt plus grande que A F, donc F O eſt plus grande que F R, & puiſque A F eſt plus grande que F M, F R eſt auſſi plus grande que F I, & il paroît méme que F R eſt à F I comme A F à F M, car puiſque par la conſtruction comme A F eſt à F B ainſi F R à F O, & comme F B à F M ainſi F O à F I, donc, ex æquo, comme A F à F M, ainſi F R eſt à F I, je dis donc que les deux droites C O & O H ſont plus grandes que les deux droites D F & F H, car par Euclide au triangle amblygone F H O la ſomme des deux quarrez H F & F O eſt égale à la ſomme du quarré H O & du rectangle M F O pris deux fois, or puiſque nous avons fait comme B F ou F H à F M ainſi F O à F I, donc le rectangle ſoûs les extremes H F I eſt égal au rectangle ſoûs les moyennes M F O, & le rectangle H F I pris deux fois eſt égal au rectangle M F O pris deux fois ; nous avons donc la ſomme des deux quarrez H F & F O égale à la ſomme du quarré H O & du rectangle H F I pris deux fois, mais le rectangle H F I pris deux fois eſt égal au rectangle H I F pris deux fois, & au double quarré de I F & le quarré H F par le méme Euclide eſt égal au rectangle H I F pris deux fois, &

aux deux quarrez H I & I F, nous avons donc d'un côté le quarré H I, le quarré I F, le rectangle H I F deux fois pris, & le quarré F O égaux au quarré H O au rectangle H I F deux fois pris & au quarré F I pris deux fois, ôtez de part & d'autre le rectangle H I F deux fois & le quarré F I, reſte d'un côté le quarré H I avec le quarré F O égaux audit quarré H O & I F, mais le quarré F O eſt plus grand que le quarré F I, puis que par la conſtruction F O eſt plus grande que F I, donc le quarré H O eſt plus grand que le quarré H I, & partant la droite H O eſt plus grande que la droite H I ; ſi je prouve en ſuite que la droite C O eſt plus grande que les deux droites D F & F I, il reſtera prouvé que les deux C O & O H ſont plus grandes que les trois D F, F I, & I H, ou que les deux D F & F H ; je prouve donc le requis dans le triangle amblygone B F O par Euclide le quarre B O eſt égal à la ſomme des quarrez B F & F O & au double rectangle A F O, mais puiſque nous avons fait par la conſtruction comme B F à F A ainſi F O à F R, donc le rectangle ſoûs B F & F R eſt égal au rectangle A F O, & par conſequent le quarré B O eſt égal aux quarrez B F & F O & au rectangle ſoûs B F, F R deux fois pris, mais le quarré F O eſt plus grand que celuy de F R, puiſque la ligne F O a eſté prouvée plus grande que la ligne F R, donc ſi vous ſubſtituez le quarré de F R au lieu de celuy de F O, le quarré B O ſera plus grand que les deux quarrez B F, F R, & le rectangle B F R deux fois pris, mais ces dernieres ſommes ſont égales par Euclide au quarré des deux droites B F & F R priſes comme une ſeule, donç la droite B O eſt plus grande que la ſomme des deux droites B F & F R : mais nous avons prouvé que R F eſt à I F comme A F à F M, c'eſt à dire comme B F à F D qui eſt la meſure de la diverſité des mouvemens, donc comme la ſomme des deux antecedens B F & F R eſt à la ſomme des deux conſequens D F & F I, ainſi B F à F D, or B O eſt à O C, comme B F à F D, donc comme B O eſt à O C, ainſi la ſomme des deux droites B F & F R eſt à la ſomme des deux droites D F & F I, mais nous avons prouvé que la droite B O eſt plus grande que la ſomme des deux droites B F & F R, il eſt donc vray que la droite C O eſt plus grande que la ſomme des deux droites D F & F I, ce qu'il faloit prouver en ſecond lieu ; il n'y a donc aucun point du côté de M par où le rayon puiſſe paſſer ſans y employer plus de temps que par le point F. Il reſte à prouver la méme choſe au point V ; ſoit fait comme cy deſſus, comme B F à F A, ainſi F V à F N, & comme la méme B F à F M, ainſi F N à F X, N F ſera à X F comme A F à F M, c'eſt à dire comme B F à F D par la preuve precedente, & chacune de ces deux droites N F & X F ſera plus petite que V F, par ce qui a precedé ; il faut prouver que la ſomme des deux droites Y V & V H eſt plus grande que la ſomme des deux droites D F & F H. Je conſidere premierement que par Euclide dans le triangle amblygone V F H la ſomme des quarrez H F & F V, & du rectangle M F V pris deux fois eſt égale au quarré V H, mais puis que par la conſtruction il a eſté fait comme B F à F M ainſi F V à F X, donc le rectangle B F X ou le rectangle H F X (puiſque B F & F H ſont égales) eſt égal au rectangle M F V : nous avons donc d'un coſté la ſomme des quarrez H F & F V & du rectangle H F X pris deux fois égale au quarré H V, mais le quarré F X eſt moindre que le quarré F V, donc la ſomme des quarrez H F, F X & du rectangle H F X pris deux fois eſt moindre que le quarré H V. Or cette ſomme eſt égale au quarre fait des deux droites H F & F X, comme d'une ſeule par Euclide, donc la ſomme des deux droites H F & F X eſt moindre que H V & H V eſt plus grande que ces deux droites H F & F X ; ſi je prouve donc que la droite Y V eſt plus grande que la droite D X il reſtera prouvé que la ſomme des deux Y V & H V eſt plus grande que la ſomme des trois D X, X F, F H, c'eſt à dire que des deux D F, F H, pour faire cette derniere preuve, je conſidere le triangle amblygone B V F auquel par Euclide les deux quarrez B F & F V ſont égaux au quarré B V, & au rectangle A F V pris deux fois ; or puiſque par la conſtruction nous avons fait comme B F à F A, ainſi V F à F N, donc le rectangle B F N eſt égal au rectangle A F V, & partant la ſomme des deux quarrez B F & F V eſt égale à la ſomme du quarré B V, & du rectangle B F N pris deux fois ; or le rectangle B F N pris deux fois eſt égal au rectangle B N F pris deux fois, & à deux fois le quarré F N, donc la ſomme des deux quarrez BF & F V eſt égale à la ſomme du quarré B V, du rectangle B N X pris deux fois, & du quarré de F N pris deux fois; or le quarré B F eſt par Euclide égal au quarré BN, au quarré N F, & au rectangle B N F pris deux fois, nous avons donc la ſomme des quarrez B N, N F, F V, & du rectangle B N F pris deux fois égale à la ſomme du quarré BV du rectangle B NF pris deux fois, & du quarré de FN pris deux fois: ôtez de châque côté le rectangle BNF pris deux fois, & le quarré N F, il reſtera donc que le quarré de BN, & le quarré FN ſeront égaux aux quarrez BV & FN, or le quarré FV eſt plus grand que le quarré de F V par la conſtruction, donc le quarré B V eſt plus grand que celuy de B N, & partant la droite B V eſt plus grande que la droite B N, mais nous avons prouvé que comme la droite B F eſt à F D, ainſi N F eſt à F X, donc comme la droite B F eſt à F N, ainſi ſera D F à F X, & par la converſion des raiſons, comme B F à B N, ainſi ſera D F à DX, & comme B F à D F, ainſi B N à D X, mais nous avons fait comme BF à D F, ainſi B V à Y V, donc comme B V à Y V, ainſi ſera B N à D X, mais nous avons prouvé que B V eſt plus grande que B N, donc Y V le ſera plus que D X. Or il a eſté déja prouvé que V H eſt plus grande que les deux droites H F & FX, donc il eſt pleinement prouvé que les deux droites Y V & V H ſont plus grandes que les trois D X, X F, & F H, ou que les deux D F & F H, & ainſi la demonſtration eſt complette. Il ſuit de là qu'en poſant mon principe, que la nature agit toûjours par les voyes les plus courtes, la ſuppoſition de Monſieur Deſcartes eſt fauſſe lors qu'il dit que le mouvement de la lumiere ſe fait plus aiſement dans l'eau, & les autres corps denſes que dans l'air, & les autres corps rares, car ſi cette ſuppoſition de M. Deſcartes étoit vraye, & que vous imaginiez qu'en ma figure l'air eſt du côté de H, & l'eau du côté de B, il s'enſuivroit en tranſpoſant la demonſtration que le rayon qui partiroit du point H, & rencontreroit l'eau au point F ſe romproit vers B, parce que le mouvement par l'air étant plus lent ſelon la ſuppoſition de Monſieur Deſcartes, il ſeroit meſuré par la droite H F, & celuy qui ſe fait dans l'eau ſeroit meſuré par la droite F D, comme étant plus vîte, de ſorte que les deux droites H F, F D, étant les plus petites, la refraction ſe feroit vers B, c'eſt à dire que le rayon s'écarteroit de la perpendiculaire, ce qui eſt abſurde & contre l'experience; ſi la ſitüation des deux points B & H change dans les deux lignes BF & FH prolongées de part & d'autre autant que vous voudrez, la demonſtration aura lieu, & vous le verrez de vous méme. Je n'adjoûte point l'analyſe, car outre qu'elle eſt longue & embarraſſée, il vous doit ſuffire que le retour que vous venez de lire eſt court & purement Geometrique; il ſuit de tout cela, que lors que les deux points B & F ſont donnez, ou bien H & F, on peut trouver aiſement le probleme par les plans, mais lors qu'on donne deux points C, O, B, & H, & qu'on veut chercher par eux le point de refraction dans la ligne ou plan qui ſepare les deux milieus, en ce cas le probleme eſt ſolide, & ne ſe peut conſtruire qu'en y employant des paraboles, des hyperboles, ou des ellipſes, mais comme cette invention n'eſt guere mal-aiſée à un Geometre mediocre en demeurant d'accord du fondement, & de la proportion ſur laquelle il doit travailler, & que je vous ay déja expliquée, je n'ay garde de doûter que vous ne la trouviez d'abord, vous, Monſieur, qui eſtés ſi fort au deſſus du commun; outre que ne s'agiſſant proprement dans la queſtion que vous me faites, que d'apprendre quelles ſont les voyes de la nature, j'y ay déja ſatisfait, & que cette grande ouvriere n'a pas beſoin de nos inſtrumens & de nos machines pour faire ſes operations.

Lettre de Monſieur de Fermat à Monſieur de Roberval à Paris.

MONSIEUR,

Aprés vous avoir remercié de vos civilitez, & proteſté que je ſeray ravy d'avoir des occaſions à vous plaire, je vous ſupplieray de me faire part de vôtre invention ſur le ſujet des tangentes des lignes courbes, & encore de vos ſpeculations mechaniques ſur la percuſſion, puiſque vous me faites eſperer la communication de vos penſées en cette matiere. Aprés cela je vous diray que Mr. Frenicle m'a donné depuis quelque temps l'envie de découvrir les myſteres des nombres, en quoy il me ſemble qu'il eſt extremement verſé; je luy ay envoyé les belles propoſitions ſur les progreſſions Geometriques, qui commencent à l'unité, leſquelles j'ay non ſeulement trouvées, mais encore demonſtrées, bien que la demonſtration en ſoit aſſez cachée, ce que je vous prie d'eſſayer, puiſque vous les avez veües; mais voicy ce que j'ay découvert depuis ſur le ſujet de la propoſition 12. du 5. Livre de Diophante, en quoy j'ay ſuppleé, ce que Bachet advoüe n'avoir pas ſceu & rétably en méme temps la corruption du texte de Diophante, ce qui ſeroit trop long à vous deduire: il ſuffit que vous voyez ma propoſition, & que je vous faſſe plûtôt ſouvenir que j'ay autrefois demonſtré qu'un nombre moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez, ny en entiers, ny en fractions. J'en demeuray là pour lors, bien qu'il y ait beaucoup de nombres plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui pourtant ne ſont ny quarrez ny compoſez de deux quarrez, comme 21, 33, 77, &c. ce qui a fait dire à Bachet ſur la diviſion propoſée de 21. en deux quarrez, quod quidem impoſſibile eſt, ut reor, cum is neque quadratus ſit, neque ſuaptè natura compoſitus ex duobus quadratis, où le mot de, reor, marque évidemment qu'il n'a point ſceu la demonſtration de cette impoſſibilité, laquelle j'ay enfin trouvée & compriſe generalement dans la propoſition ſuivante.

Si un nombre donné eſt diviſé par le plus grand quarré qui le meſure, & que le quotient ſe trouve meſuré par un nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire; le nombre donné n'eſt ny quarré, ny compoſé de deux quarrez, ny en entiers, ny en fractions. Exemple, ſoit donné 84. le plus grand quarré qui le meſure eſt 4. le quotient 21. lequel eſt meſuré par trois, ou bien par 7. moindres de l'unité qu'un multiple de 4. je dis que 84. n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez, ny en entiers ny en fractions.

Soit donné 77. le plus grand quarré qui le meſure eſt l'unité, le quotient 77. qui eſt icy le méme que le nombre donné ſe trouve meſuré par 11. ou par 7. moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire; je dis que 77. n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez ny en entiers ny en fractions, &c.

Je vous advoüe franchement que je n'ay rien trouvé en nombres qui m'aye tant plû que la demonſtration de cette propoſition, & je ſeray bien aiſe que vous faſſiez effort de la trouver, quand ce ne ſeroit que pour apprendre ſi j'eſtime plus mon invention qu'elle ne vaut. J'ay demonſtré en ſuite cette propoſition qui ſert à l'invention des nombres premiers.

Si un nombre eſt compoſé de deux quarrez premiers entr'eux, je dis qu'il ne peut eſtre diviſé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

Comme par exemple adjoûtez l'unité, ſi vous voulez, à un quarré pair, ſoit le quarré

10000000000. lequel avec un, fait 10000000001. Je dis que 10000000001, ne peut étre divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple de 4. Et ainsi lorsque vous voudrez éprouver s'il est nombre premier, il ne faudra point le diviser ny par trois, ny par 7. ny par 11. &c.

Si ne faut-il pas oublier tout à fait la Geometrie, voicy ce qu'on m'a proposé, & que j'ay trouvé tout aussi-tôt.

Per datum extra vel intra parabolam punctum rectam ducere quæ abscindat segmentum à parabolâ æquale dato spatio. Et si punctum sit intra parabolam, determinare minimum quod à parabola per dictum punctum abscindi possit spatium.

Si vous ne rencontrez pas d'abord la construction je vous feray part de la mienne. J'attens de vos nouvelles, & suis, &c.

*A Monsieur de *****

Du 18 Octobre 1640.

MONSIEUR,

Les vacations qui m'ont éloigné de Tolose m'ont en méme temps eloigné de mon devoir, & empéché de vous écrire plûtôt depuis la derniere de vos lettres en datte du 21. Septembre. Je tâcheray de reparer par celle-cy la longueur de l'attente, & commenceray par la liberté que je prens de vous dire que je n'ay point veu encore aucune proposition de vôtre part, que je n'eusse plûtôt trouvée & considerée, & afin de vous rendre vous méme juge de cette verité, & vous ôter en méme temps le scrupule que vous pourriez avoir que je n'en uze comme quelqu'un de ceux du lieu où vous estes qui s'attribüe impunement les inventions d'autruy, apres qu'elles luy ont esté communiquées; je commenceray par la proposition de la difference de deux quarrez que vous trouverez dans Bachet sur le Diophante au Commentaire de la proposition 11. du 3. Livre en méme façon que vous me l'avez envoyée, vous advoüant pourtant que l'application que j'estime beaucoup est toute vôtre, & que je l'ay apprise de vous. Pour le sujet des progressions, je vous avois envoyé par advance les propositions qui servent à determiner les parties des puissances -1, & par ma seconde Lettre je vous avois fait comprendre que j'avois consideré toutes les propositions qui servent aux puissances plus un, dequoy je m'étois contenté de vous donner deux exemples, dont l'un étoit demonstré par moy, & par consequent connu necessairement, & l'autre ne m'étoit point entierement connu par raison demonstrative, bien que je vous assûrasse que je n'en doûtois pas: or pour venir à la connoissance de ce dernier quoy qu'imparfaite encore & non achevée, je ne le pouvois sans avoir plûtôt examiné & prouvé par demonstrations toutes leurs propositions contenües en vôtre derniere, ce que vous n'aurez nulle peine de croire, puisque le seul exemple que je vous envoyay le marquoit assez, auquel j'adjoûtois qu'en toutes progressions on pouvoit determiner les diviseurs communs & generaux avec pareille aisance; Mais je vous advoüe tout net (car par advance je vous advertis que comme ie ne suis pas capable de m'attribüer plus que je ne sçay, je dis avec méme franchise ce que je ne sçay pas) que je n'ay peu encore demonstrer l'exclusion de tous diviseurs en cette belle proposition que je vous avois envoyée, & que vous m'avez confirmée touchant les nombres 3, 5, 17, 257. 6553. &c. Car bien que je reduise l'exclusion à la plus part des nombres, & que j'aye méme des raisons probables pour le reste, je n'ay peu encore demonstrer necessairement la verité de cette proposition, de laquelle pourtant je ne doûte non plus à cette heure que je faisois auparavant. Si vous en avez la preuve asseurée vous

m'obligerez de me la communiquer; car apres cela rien ne m'arrestera en ces matieres.

Reste à vous parler de la proposition fondamentale des parties aliquotes, laqüelle m'étoit tellement connue que je vous l'avois envoyée par la premiere Lettre que je vous écrivis, laquelle on m'a dit depuis s'être égarée. Pourtant si le Pere Mersenne veut prendre le soin de la faire chercher dans le Bureau de la Poste elle se trouvera dans un paquet que j'adressois à Monsieur..... Outre que cette proposition est si naturelle qu'il est impossible de determiner & de trouver la moindre chose sur ce sujet qu'elle ne se presente d'abord. De sorte qu'ayant depuis fort long-temps trouvé & envoyé les propositions des deux nombres 17296. & 18416. & autres pareilles, il faloit par necessité que j'eusse passé par ladite proposition. Pour vôtre application, il me semble qu'elle n'oste pas la longueur que je trouvois en cette sorte de questions, qui est la seule difficulté que j'y ay toûjours reconnuë: sinon que je ne l'aye pas bien comprise, dequoy je vous prie m'avertir & me rendre certain. Il me semble apres cela qu'il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuye les demonstrations de tout ce qui concerne les propositions Geometriques qui est tel.

Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances -1. de quelque progression que ce soit, & l'exposant de ladite puissance est soûs-multiple du nombre premier donné -1. Et aprés qu'on a trouvé la premiere puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposans sont multiples de l'exposant de la premiere satisfont de méme à la question.

Exemple, soit la progression donnée,

1 2 3 4 5 6
3 927 81 243 729, &c.

Avec ses exposans au dessus.

Prenez, par exemple, le nombre premier 13. il mesure la troisiéme puissance -1, de laquelle 3. exposant est soûsmultiple de 12. qui est moindre de l'unité que le nombre de 13. Et parce que l'exposant de 729. qui est 6. est multiple du premier exposant 3. il s'ensuit que 13. mesure aussi ladite puissance de $729 - 1$. Et cette proposition est generalement vraye en toutes progressions & en tous nombres premiers. Dequoy je vous envoyerois la demonstration, si je n'apprehendois d'étre trop long. Mais il n'est pas vray que tout nombre premier mesure une puissance $+ 1$ en toute sorte de progressions. Car si la premiere puissance $- 1$ qui est mesurée par ledit nombre premier a pour exposant un nombre impair, en ce cas il n'y a aucune puissance $+ 1$ dans toute la progression qui soit mesurée par ledit nombre premier.

Exemple, parce qu'en la progression double 23. mesure la puissance $- 1$ qui a pour exposant 11, ledit nombre 23. ne mesurera aucune puissance $+ 1$ de ladite progession à l'infini.

Que si la premiere puissance $- 1$ qui est mesurée par le nombre premier donné a pour exposant un nombre pair: en ce cas la puissance $+ 1$ qui a pour exposant la moitié dudit premier exposant sera mesurée par le nombre premier donné.

Toute la difficulté consiste à trouver les nombres premiers, qui ne mesurent aucune puissance $+ 1$ en une progression donnée. Car cela sert, par exemple, à trouver que les deux nombres premiers mesurent les radicaux des nombres parfaits, & a mille autres choses, comme par exemple, d'où vient que la 37. puissance $- 1$ en la progression double est mesurée par 223. En un mot il faut determiner quels nombres premiers sont ceux qui mesurent leur premiere puissance $- 1$ & en telle sorte que l'exposant de ladite puissance soit un nombre impair, ce que j'estime fort mal-aisé, en attendant un plus grand éclaircissemement de vôtre part, & qu'il vous plaise deffendre cét endroit de vôtre Lettre, où vous dites qu'aprés avoir trouvé que le diviseur doit étre multiple $+ 1$ de l'exposant, il y a aussi des regles pour trouver le quantiéme desdits multiples $+ 1$ de l'exposant doit étre le diviseur. Voicy une de mes propositions que peut-étre vous aurez aussi trouvée que j'estime beaucoup, bien qu'elle ne découvre pas tout ce que je cherche, que ſans doûte j'acheveray d'apprendre de vous.

En la progreſſion double, ſi d'un nombre quarré, generalement parlant, vous, oſtez 2. ou 8. ou 32. &c. les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui meſureront le reſte feront l'effet requis comme de 25. qui eſt un quarré, ôtez 2. le reſte 23. meſurera la 11. puiſſance − 1, oſtez 2. de 49. le reſte 47. meſurera la 23. puiſſance − 1.

Oſtez 2. de 225. le reſte 223. meſurera la 37. puiſſance − 1 &c.

En la progreſſion triple, ſi d'un nombre quarré, ut ſupra, vous oſtez 3. ou 27. ou 243. &c.

Les nombres premiers & moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui meſureront le reſte feront l'effet requis, comme,

Oſtez 3. de 25. le reſte 22. eſt meſuré par 11. qui eſt premier & moindre de l'unité qu'un multiple de 4. auſſi 11. meſure la 5. puiſſance − 1.

Oſtez 3. de 121. le reſte 118. eſt meſuré par 59. moindre de l'unité, &c. auſſi 59. meſure la 29. puiſſance − 1.

En la progreſſion quadruple il faut oſter 4. ou 64. &c. à l'infini en toutes progreſſions en procedant de méme façon.

J'adjoûteray encore cette petite propoſition.

Si d'un quarré vous oſtez 2. le reſte ne peut être diviſé par aucun nombre premier, qui ſurpaſſe un quarré de 2. comme prennés pour quarré 100000. duquel oſté 2. reſte 99998. je dis que ledit reſte ne peut être diviſé ny par 11. ny par 83. ny par 167. &c. vous pouvez éprouver la méme regle aux quarrez impairs, & ſi je voulois je vous la rendrois belle & generale, mais je me contente de vous l'avoir indiquée ſeulement.

Avant que finir, voicy une autre propoſition, laquelle vous fournira peut-etre quelque application, comme vous y êtez tres-heureux.

Si un nombre eſt meſuré par un autre, & que le nombre diviſé ſoit encore diviſé par un autre nombre moindre que le premier diviſeur: en ce cas, ſi vous oſtez du quotient de la ſeconde diviſion multiplié par la difference des deux diviſeurs, le reſte de la ſeconde diviſion, ce qui reſtera ſera meſuré par le premier diviſeur.

Exemple, 121. eſt meſuré par 11.

Diviſez encore 121. par 7. le quotient ſera 17. & le reſte de ladite diviſion 2.

Multipliez le quotient 17. par 4. difference du premier & ſecond diviſeur & du produit 68.

Oſtez en 2. le reſte 66. ſera auſſi meſuré par 11. premier diviſeur.

Que ſi le ſecond diviſeur eſt plus grand que le premier; en ce cas ſi vous adjoûtez au quotient de la ſeconde diviſion multiplié par la difference des deux diviſeurs le reſte de la ſeconde diviſion, ce qui reſtera ſera meſuré par le premier diviſeur.

Exemple, 117. eſt meſuré par 3.

Diviſez encore 117. par 4. le quotient ſera 29. & le reſte de ladite diviſion 1.

Adjoûtez au quotient 29. multiplié par la differencce des diviſions qui ne change icy rien, parce que c'eſt l'unité, le reſte de ladite diviſion qui eſt 1. la ſomme 30. ſera auſſi meſurée par 3. premier diviſeur.

J'ay déja trop écrit, & il me ſemble qu'il eſt temps que vous parliez aprés avoir employé ſi mal vôtre temps à lire cette longue lettre, qui vous confirmera que je ſuis &c.

Lettre de Monſieur de Roberval à Monſieur de Fermat.

Du 4. Aouſt 1640.

MONSIEUR,

Encore que depuis prés de trois ans je n'aye eu l'honneur d'avoir commerce avec vous, je n'ay pourtant pas eſté privé entierement du plaiſir que je reçois de vos ſpeculations Mathematiques. Car le Pere Merſenne m'a fait la faveur de me communiquer la plus grande partie des Lettres qu'il a receües de vous depuis ce temps là, dans leſquelles, j'ay reconnu une augmentation continüelle, & tres-ſenſible en la beauté & ſolidité de vos penſées, auſquelles il n'y a rien que d'admirable, ſoit ſur le ſujet de la Geometrie ou de l'Arithmetique: ſur tout je ſuis ravi de vôtre invention (de minimis & maximis) & du moyen par lequel vous l'appliquerez à la recherche des touchantes des lignes courbes, & ne croy pas que juſques icy il ſe ſoit veu rien ſur ce ſujet, qui ne cedat de beaucoup à ce que vous nous en avez donné: car l'invention de Mr. Deſcartes, à laquelle j'aſſigne le premier lieu apres la vôtre, n'en aproche que de bien loin, parce que quoy qu'elle puiſſe être rendüe univerſelle, ce qu'il n'a pas fait & le pourra maintenant à l'imitation de vôtre derniere addition, toutesfois elle eſt ſans comparaiſon plus longue, plus embarraſſée & plus difficile. Je vous diray que j'ay d'autant plus admiré vôtre invention, qu'à peine croyois-je que pour trouver les touchantes des lignes courbes, qui n'ont rapport qu'à d'autres courbes, ou partie à des droites, & partie à des courbes, on peut s'en ſervir, ce que Monſieur Deſcartes advoüe de la ſienne ſur le ſujet de la roulette & autres lignes pareilles, leſquelles pour cette conſideration il rejette de la Geometrie, ſans raiſon, puis qu'à l'imitation de vôtre derniere addition, ſa methode peut étre rendüe univerſelle comme la vôtre, mais avec une difficulté, laquelle bien ſouvent ne ſe pourroit preſque ſurmonter par un eſprit humain. Cette opinion fut cauſe que quand je vis que vous aviés trouvé les touchantes de la roulette, & que vous aſſuriez avoir la regle univerſelle pour toutes les lignes courbes, je creus qu'elle ne pouvoit être autre que celle que j'avois inventée au temps méme que j'inventay cette roulette, laquelle regle ou methode je n'avois encore communiqué à perſonne m'étant contenté d'en avoir demonſtré les effets à Monſieur Paſchal en la tangente de la quadratrice qui ſe trouvoit des plus difficiles, y joignant la demonſtration Geometrique comme a fait Archimede en celle de la ſpirale, laquelle par ma methode s'expedie en deux mots. J'avois fait la méme choſe en la Ciſſoide, & avois demonſtré de plus que ces deux lignes courbes ſont infinies de leur nature, & ont des aſymptotes paralelles entr'elles, ce qu'on m'a aſſuré avoir eſté déja demonſtré par un Auteur dont on ne m'a peu dire le nom. J'ay auſſi demonſtré les tangentes des lignes courbes qui ſe décrivent avec un compas ſur la ſuperficie d'un Cylindre, puis ſe reduiſent en plan, & en general celles de toutes les lignes courbes qui ont peu venir à ma connoiſſance, & cette methode eſt tellement differente de la vôtre (contre ma premiere opinion) qu'elles ne ſe reſſemblent en rien qu'en la concluſion. Depuis Monſieur Mydorges faiſant quelques difficultez ſur la vôtre, je luy en donnay la ſolution, & en méme temps je luy ouvris les principes de la mienne, & luy en fis voir un eſſay en la Ciſſoide: ſi je ſçay que vous l'ayés agreable je vous en écriray. Elle n'eſt pas inventée avec une ſi ſubtile & ſi profonde Geometrie que la votre, ou celle de Monſieur Deſcartes, & partant elle paroit avec moins d'artifice; en recompenſe elle me ſemble plus ſimple, plus naturelle & plus courte, de ſorte que pour toutes les touchantes dont j'ay parlé il ne m'a pas mémes eſté beſoin de mettre la main à la plume. Depuis cette invention je me ſuis appliqué aux lieux ſolides (ad tres & ad quatuor lineas) leſquels j'ay entierement reſtituez, quoy que pour n'y rien oublier, il ne faille gueres moins de diſcours qu'aux ſix premiers livres des elemens. C'eſt dequoy je vous entretiendray une autre fois , parce qu'il y a quelque choſe qui me ſemble le meriter. En ſuite j'ay conſideré la percuſſion, le mouvement, & les autres effets, que cauſe quelque impreſſion ſoit violente ou naturelle, en quoy je ne croy pas avoir mal employé le temps, puis qu'en une matiere ſi épineuſe, encore ay-je découvert quelque choſe de grande utilité, à ce que je penſe, & laquelle je pourray peut-étre augmenter avec le temps. J'oubliois preſque à vous dire que les nombres dont vous avés déja découvert des proprietez admirables, contiennent de grands myſteres, mais pour les mieux découvrir, il faudroit étre pluſieurs enſemble d'accord & ſans jalouſie, & deſquels le genie fut naturellement porté à cette ſpeculation, ce qui eſt tres-difficile à rencontrer. Si ce ſujet vous plaît, ou quelqu'un de ceux dont j'ay parlé cy-deſſus, je prendray auſſi plaiſir à le conſiderer plus particulierement, eſperant que vous me fairés part de vos inventions, dequoy je vous ſupplie en qualité de, &c.

Lettre de Monſieur de Frenicle à Monſieur de Fermat.

Du 2. Aouſt 1641.

MONSIEUR,

J'étois dans l'impatience de ſcavoir vótre retour à Toloſe, pour me donner l'honneur & le contentement de continüer nos conferences, lorſque le R. P. Merſenne m'en a donné advis ; j'eſpere qu'elles dureront plus long-temps que je ne penſois, par ce qu'il eſt ſurvenu quelque choſe qui m'arréte icy. J'ay mille remercimens à vous faire de la limitation des côtez que vous m'avez envoyée, laquelle veritablement je priſe fort, j'avois bien reconnu que la proportion étoit irrationelle, & pour cela je m'étois contenté des raiſons de 10. à 24. & à 25. mais vous l'entendez icy à l'infiny. J'avois crû par la lecture de vôtre precedente, par laquelle vous mandiez qu'il étoit aiſé de la trouver, que vous pretendiſſiez de donner une raiſon rationelle pour cette limitation ; c'eſt ce qui m'avoit fait dire, que peut-être ne la trouveriez-vous pas ſi facile , parceque je la ſçavois étre impoſſible. Je ſçay que l'Algebre de ce païs-cy ce n'eſt pas propre pour ſoudre ces queſtions, ou pour le moins on n'a pas encore icy trouvé la maniere de l'y appliquer; c'eſt ce qui me fait croire que vous vous eſtés fabriqué depuis peu quelque eſpece d'Analyſe particuliere pour foüiller dans les ſecrets les plus cachez des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adreſſe pour vous ſervir à cét effet de celle que vous aviez accoûtumé d'employer à d'autres uſages. Si la demonſtration de cette limitation étoit courte, vous m'obligeriez beaucoup de me l'envoyer, car ſi elle eſt trop longue, je ne voudrois pas que vous vous detournaſſiez de vos études à cette occaſion. Cette méme raiſon de 1. à 1 + 2. ſe peut auſſi appliquer à la proportion des côtez des quarrez qui compoſent l'hypotenuſe, mais en un ſens contraire à celuy des parties plus prochaines du côté impair, comme auſſi elle ſe peut appliquer aux nombres qui compoſent la moitié des côtez pairs, au méme ſens qu'aux parties des impairs. Je viens maintenant à ce qui regarde les triangles.

Les methodes que vous donnez, tant pour trouver les quarrez, que les côtez des triangles qui appartiennent aux hypotenuſes compoſées ſont veritablement fort belles, & vous avez la methode de ſi bien diſpoſer vos regles, que cela leur donne une certaine grace, qui les fait encore agreer davantage, mais elles ne ſuivent pas mon intention, car je n'ay

point entendu qu'on ſe ſervit des quarrez, ny des triangles des parties des hypotenuſes compoſées, mais ſeulement deſdites parties, par exemple, je demande une maniere de trouver que 65. eſt compoſé des quarrez 64. 1. & 49. 16. ſupoſant ſeulement qu'il a 5. & 13. pour les parties premieres, ſans employer à cét effet le quarré 4. & 1. ny les côtez 3. & 4. non plus que ceux qui apartiennent à 13.

Des 4. proprietez des triangles que je vous avois propoſées, vous avez fort bien trouvé la 2. pour les 3. autres vous n'avez pas ſuivi mon intention, partant il faut que je m'éclairciſſe plus que je n'avois fait. La premiere eſt facile.

Que le triangle rectangle ſoit A B C, il le faut diviſer en deux triangles A B D, A D C, avec la perpendiculaire A D.

Et derechef le triangle A D C, en deux triangles E D C, par la perpendiculaire D E & l'autre pareillement A B D, en deux, ſçavoir, A D F, B D F, par la perpendiculaire DF.

Et derechef les triangles B D F, A D F, A D E, D E C, par les autres perpendiculaires F O, F I, E L, E N, & continüer ainſi tant qu'on voudra, & faire que toutes les lignes, & ſections d'icelles, comme A L, L I, I O, B O, O D, D N. N C, ſoint nombres entiers.

Vous donnez par apres les triangles dont le moindre côté eſt different d'un quarré de chacun des deux autres. Je ſçay bien que la moitié de ceux qui ont 1. pour difference de leurs petits côtez, ont auſſi cette proprieté, ſçavoir, ceux qui commencent par un nombre pair, mais je n'attendois pas que vous deuſſiez vous ſervir de ceux là, eſperant que vous donneriez le moyen de les trouver tous, & afin d'exclurre les ſuſdits, on pourroit ainſi propoſer le probleme.

Donner tous les triangles qui ont un quarré pour difference de leur petit côté à chacun des deux autres côtez, en ſorte que l'une des differences ne puiſſe pas meſurer l'autre.

Pour l'autre proprieté des triangles, qui eſt d'avoir un autre triangle relatif en differences, en ſorte que la difference des deux grands côtez du premier ſoit celle des deux petits côtez du ſecond, & la difference des deux petits côtez du premier ſoit celle des deux grands côtez du ſecond comme on voit aux triangles.

11. ^{49}. 60. ^{1}. 61. | 119. ^{1}. 120. ^{49}. 169.

Vous n'avez pas conſideré attentivement cette propoſition, car les triangles que vous donnez,

449, ^{98} 351. ^{71} 280. | 949. ^{98} 851. ^{431} 420.

N'ont pas cette proprieté, mais en ont une autre, qui eſt que les grands côtez de châcun ont pareille difference, ſçavoir 98. & en outre que les 2. hypotenuſes ont pareille difference que les deux grands côtez, mais ce n'eſt pas ce que je demande, car aux triangles,

11. ^{49} 60. ^{1} 61. & 119. ^{1} 120. ^{49} 169.

Vous voyez que 120. & 169. n'ont pas méme difference que 60. & 61. ny 61. & 169. méme difference que 60. & 120. Il faudroit donc pour ſatisfaire à la queſtion qu'en vos triangles, il y eût méme difference de 449. à 351. que de 851. à 420. & de 351. à 280. que de 949. à 851.

Vous me propoſez par aprés de trouver un nombre qui ſoit polygone autant de fois qu'on voudra & non plus. Je vous diray qu'il y a quelques années que je m'étois mis a la recherche de cela, mais à peine eus-je commencé, que je m'adviſay, que les figures qui ſont maintenant en uſage ſont ſi extravagantes, lors qu'on les veut mettre en pratique, j'entens quand on les veut repreſenter avec des jettons, ou des points, qu'on les nommeroit plus à propos chimeres, ou croteſques, que figures, leſquelles ſi elles ne ſont entierement regulieres, au moins doivent elles en aprocher le plus que faire ſe peut.

Cela fut cauſe que je quittay ce que j'avois commencé pour me mettre à reformer ces figures, & Dieu m'a fait la grace d'y reüſſir en quelque façon, car j'ay trouvé une maniere de faire des figures regulieres en nombres d'une infinité de ſortes, & d'autres aussi qui n'ont point d'angles ingrediens de tant de côtez qu'on voudra. J'ay en suite consideré quelques-unes de leurs proprietez, & ce qui depend d'icelles, de sorte que je ne me suis pas beaucoup arresté aux figures communes, que je nommerois plûtôt progression de triangles que figures, à cause de l'assemblage des triangles, par lequel elles sont formées. Je croy bien que ce n'est pas de ces nouvelles figures dont vous voulez parler, car possible ne vous en estez vous pas encore advisé ; mais pour les communes, on peut considerer vôtre question en deux manieres.

La premiere, si le nombre demandé est plusieurs fois polygone, de telle sorte, qu'il envelope tous les polygones inferieurs, c'est à dire que si ce nombre est par exemple Eptagone il doive aussi être Exagone, Pent. Quarré, & triangle; & ainsi pour avoir un nombre qui fut 7. fois polygone, il en faudroit donner un qui fut figure de 9. 8. 7. 6. 5. 4. & 3. côtez; ce qui seroit à la verité fort difficile, & il faudroit un nombre fort grand pour y satisfaire, car les nombres qui sont seulement triangles, quarrez, & pentagones deviennent incontinent fort grands, & c'est à cela que j'avois commencé à travailler.

L'autre consideration est, qu'un nombre soit polygone en plusieurs façons, sans se soucier si les polygones sont de suite ou non ; je n'ay pas encore recherché cela ; si vous l'avez trouvé, vous m'obligerez de me le communiquer.

L'autre question que vous me faites contient deux problemes, l'un de choisir un nombre qui soit la somme des deux petits côtés de tant de triangles qu'on voudra. & non plus.

L'autre est de determiner à combien de triangles un nombre donné est la somme des deux petits côtez.

Pour soudre ces problemes, il faut considerer que tout nombre premier different de l'unité d'un nombre divisible par 8. est la somme des deux petits côtez d'un triangle, & tout nombre qui est la somme des deux petits côtez d'un triangle, auquel les côtez sont premiers entr'eux differe de l'unité d'un nombre divisible par 8.

Sur ces fondemens il faut faire la méme chose avec ces nombres, qu'on feroit sur les nombres premiers pairement pairs + 1. pour trouver ce qui est requis par les problemes si on demandoit des hypotenuses, au lieu de la somme des deux petits côtez ; il seroit superflu de deduire cela plus au long, intelligenti loquor. Si vôtre methode est autre que celle-là, vous m'obligerez de me la communiquer, & aussi de quelle façon se pourroit trouver le triangle, ayant seulement la somme de ses petits côtez ; sans avoir les quarrez & doubles quarrez, dont elle est la difference ; car ces sommes ont cette propieté d'étre toûjours deux fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, & si cette somme est un nombre composé d'autres de méme nature, comme 119. composé de 17. & 7. il sera 4. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré.

Il faudroit aussi trouver la méme chose pour l'enceinte entiere des triangles, que pour la somme des deux petits côtez.

Sur le sujet des triangles, voicy ce que je vous proposeray encore.

Une hypotenuse composée étant donnée avec les quarrez premiers entr'eux qui la composent par leur addition, trouver ses parties.

Que 221. soit l'hypotenuse donnée, avec les quarrez qui la composent, sçavoir 100. 121. & 196. 25. il faut trouver par le moyen d'iceux que 221. à 13. & 17. pour parties.

J'attens de vous la maniere de trouver les nombres premiers qui ne mesurent que les puissances − 1. en toute analogie, & principalement en celle de 2. Je suis, &c.

Lettre

Lettre de M. de Frenicle à M. de Fermat.

Du 6. Septembre 1641.

MONSIEUR,

Vôtre regle pour trouver les triangles pareils à 11. 60. 61. & 119. 120. 169. est fort bonne, je m'étois seulement arrété à l'exemple, sans la considerer autrement, mais celle que vous mettez en suite pour les triangles dont le moindre côté differe d'un quarré des 2. autres, sert à la verité pour trouver quelques-uns de ces triangles, mais non pas pour les trouver tous ainsi que vous pretendez, car prenant tous les nombres qui sont en proportion comme le quarré + 1. de quelque nombre au double − 2. du méme nombre, on ne trouvera pas les triangles, qui se font par 29. & 12. ou par 60. & 293. & une infinité d'autres, mais on les trouvera tous par la regle que vous mettez en l'écrit particulier que vous avez envoyé, qui se fait metant pour un des nombres constitutifs du triangle un nombre composé de 2. quarrez premiers entr'eux, & de divers ordres.

Et cette derniere methode sert à trouver tous les primitifs dont les côtez du quarré sont comme d'un nombre impair à un autre nombre ; par exemple on trouvera par icelle qu'il y a 2. triangles, où les côtez quarrez sont comme de 65. à un autre nombre, & dont le moindre côté est different d'un quarré des 2. autres, sçavoir les deux qui sont faits de 65. & 14. & de 65. & 24. & les autres qui sont en méme proportion. Mais si on vouloit tous les triangles primitifs dont les racines des quarrez sont comme d'un nombre pair à un impair, comme par exemple de 60. à quelqu'autre nombre, on n'y pourroit pas satisfaire par cette 2. regle sinon aprés un long tatonement, & la 1. regle ne donne que la raison de 60. à 1861. Mais il y a encore 3. autres proportions outre celle-là, qui ont toutes 60. pour un de leurs termes. J'ay 2. regles differentes, dont chacune donne tous les triangles susdits, avec cette difference, que l'une regarde la proportion qui commence par un pair, & l'autre celle qui commence par un impair, & celle-cy n'est pas beaucoup differente de vôtre derniere, car ayant pris un triangle primitif, je me sers de son hypotenuse pour le premier terme, & pour l'autre j'ôte d'un des côtez du triangle la difference de l'autre côté à l'hypotenuse. Exemple.

Que 20. 21. 29. soit le triangle, 29. le premier terme, pour l'autre j'ôte de 20. la difference de 21. à 29. ou de 21. la difference de 20. à 29. & restera 12. on aura donc 29. & 12. dont les quarrez composeront le triangle cherché.

Vôtre premiere regle pour trouver 3. quarrez en proportion Arithmetique à le méme defaut que la precedente, car on ne les peut pas trouver tous par icelle, par exemple, on ne trouvera pas le quarré de 1. 29. 41. ou de 17. 53. 73. mais par la proposition que vous mettez en l'écrit particulier on les peut tous comprendre. Vous pouviez aussi donner aisement par la 1. regle le 3. quarré sans obliger à prendre la difference des 2. quarrez trouvez ; comme en l'exemple que vous apportez le quarré − 2. de 5. est 23. le quarré suivant + 1. est 37. si on veut avoir le 3. nombre, il faut adjoûter à 37. le double de 5. & on aura 47.

Si on prenoit 4. son quarré − 2. est 14. le quarré suivant + 1. est 26. auquel adjoûtant 8. double de 4. on aura 34. les 3. nombres étant reduits sont 7. 13. 17.

La methode dont je me sers pour trouver ces 3. quarrez proportionaux est toute autre que celle-là, & voicy comme on procede pour les avoir tous. L'hypotenuse de tout triangle primitif sera le côté du moyen quarré, la difference des 2. côtez du triangle sera le moindre côté, & leur somme sera le plus grand.

Exemple. Que le triangle ſoit 28. 45. 53. le moyen côté ſera l'hypotenuſe 53. la difference de 28. à 45. qui eſt 17. ſera le moindre & leur ſomme 73. ſera le plus grand, on aura donc 17. 53. 73. pour les racines des quarrez cherchez. Et ſi on prend tous les triangles commençant par le premier 3. 4. 5. on aura tous leſdits quarrez.

Aprés cette regle generale j'en ay conſideré deux particulieres, dont l'une eſt celle que vous propoſez en l'écrit particulier, ſçavoir que le moindre des 3. quarrez demeurant toûjours le méme, on ait les 2. autres en une infinité de façons, & à laquelle vous croyez que je n'ay pas pris garde, quoy qu'il y ait déja long-temps que je l'ay trouvée, lorſque je travaillois aux triangles rectangles,

Que tout nombre & chacun d'iceux eſt la difference des 2. moindres côtez d'une infinité de triangles ;

Et tout nombre premier different de l'unité d'un multiple de 8. ou composé deſdits nombres premiers ſeulement, eſt la difference des moindres côtez d'une infinité de triangles rectangles primitifs.

Et y ayant des voyes certaines pour trouver tous les triangles qui ont une méme difference en leurs moindres côtez, on aura aiſement tous les quarrez ſuſdits. Sur quoy il faut remarquer que ſi le nombre propoſé, qui doit être la racine moindre du quarré de 3. & qui doit être la difference des deux petits côtez du triangle n'eſt diviſible que par un ſeul nombre premier different de 1. d'un octonaire comme ſont 7. 49. 343. 17. 289. &c. le nombre ſera la difference des petits côtez de 2. triangles qu'on peut nommer Surprimitifs, pource qu'ils ſont primitifs des primitifs, car d'iceux dépend l'infinité des autres triangles, & ces deux triangles ſont toûjours les moindres, dont l'un commence par un pair, & l'autre par un impair, & d'iceux ſe forme l'infinité des autres. Voicy la maniere dont je me ſers.

3. 2.	4. 1.
8. 3.	9. 4.
19. 8.	2. 9.
46. 19.	53. 22.

Si je veux par exemple avoir tous les triangles qui ont 7. de difference entre leurs moindres côtez je cherche les deux premiers triangles qui ont cette difference, & trouve 5. 12. 13. & 8. 15. 17. je prens les racines des quarrez de chaque triangle, ſçavoir 3. 2. & 4. 1. & mets chaque couple en teſte d'une colomne. J'ay donc pour le 1. 3. 2. Pour avoir le triangle ſuivant je prens la plus grande racine du 1. pour la moindre du 2. ſçavoir 3. & pour la plus grande je prens le double de la plus grande du 1. + la moindre, ainſi j'auray 8. qui eſt double de 3 + 2. ce 8. ſera la moindre racine du 3. triangle, & la plus grande dudit 3. ſera 19. qui eſt double de 8 + 3. on fera la méme choſe à l'autre couple 4. 1. & on pourſuivra auſſi loin qu'on voudra.

Ayant donc tous les triangles qui ont 7. pour difference de leurs moindres côtez, il ſera facile, parce qui a eſté dit cy-devant de trouver tous les quarrez arithmetiquement proportionaux, dont le moindre eſt 49. Si le ſuſdit moindre quarré étoit diviſible par 2. nombres premiers de méme nature que les ſuſdits il y auroit 4. ſouches, dont tous les triangles dependroient ; s'il étoit diviſible par 3. nombres premiers, il y en auroit 8. qui ne dependroient point l'un de l'autre, &c. Ainſi 161. composé de 7. & 23. eſt la difference des petits côtez des triangles ſurprimitifs 19. 180. 181. | 60. 221. 229. | 279. 440. 521. | & 400. 561. 689. & de chacun d'iceux on peut faire une infinité de triangles primitifs, qui auront le méme 161. pour difference, & partant le quarré de 161. ſera le moindre quarré des 3. proportionaux en une infinité de ſortes. Il faut excepter l'unité de ce qui a eſté dit, car elle ſert bien de difference à une infinité de triangles, mais elle n'a qu'une ſeule ſouche, qui eſt le triangle 3. 4. 5. d'où dependent tous les autres ; on aura

7. 13. 17.	7. 17. 23.
7. 73. 103.	7. 97. 137.
7. 425. 601.	7. 565. 799.
7. 2477. 3503.	7. 3293. 4657.

donc les quarrez proportionaux, dont les racines ſont icy ; & on les peut continüer tant qu'on voudra en continüant les triangles. Voila donc pour la 1. choſe qui appartient auſdits quarrez.

La 2. eſt de trouver leſdits 3. quarrez en telle ſorte qu'ils ſoient comme enchainez l'un à

l'autre, & que le dernier & plus grand des 3. ſoit le 1. des 3. ſuivans, comme on peut voir en ces colomnes, la fabrique deſquelles je vous envoiray au premier voyage ; toutefois j'eſtime que par l'inſpection vous la jugerez aiſement.

1.	5.	7.	7.	17.	23.	1.	29.	41.
7.	13.	17.	23.	37.	47.	41.	85.	113.
17.	25.	31.	47.	65.	79.	113.	173.	217.
31.	41.	49.	79.	101.	119.	217.	293.	353.
49.	61.	71.	119.	145.	167.	353.	445.	521.
71.	85.	97.	167.	197.	223.	521.	629.	721.
97.	113.	127.						

Il y a auſſi des voyes pour avoir les differences égales deſdits quarrez, car en la 1. colomne ſi on multiplie 24. par les ſommes de tous les quarrez, leſquelles ſommes ſont 1. 5. 14. 30. &c. on aura les differences des quarrez. Et en la ſeconde colomne il faudroit multiplier 24. par les ſommes des ſeuls quarrez impairs ; il y a d'autres choſes à conſiderer là deſſus, que je n'ay pas maintenant le loiſir de deduire plus au long.

Me voicy maintenant à l'endroit de vôtre Lettre, auquel vous parlez des nombres qui ſont la ſomme des deux petits côtez d'un triangle, & ſur ce ſujet, je vous dois ôter de l'opinion que vous avez que je ne ſceuſſe pas que chacun de ces nombres peut ſervir de difference à une infinité de quarrez & de doubles quarrés ; vous vous eſtez fondé ſur un advertiſſement que je donnois, que leſdits nombres ſont toûjours 2. fois la difference d'un quarré & d'un double quarré, mais je n'ay pas dit qu'ils fuſſent ſeulement 2. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, comme vous croyez avoir leu ; il faudroit avoir bien peu de pratique aux nombres, pour ne s'étre pas apperceu d'abord que 7. eſt 4. fois la difference entre de fort petits nombres, ſçavoir entre 1. & 8. | 2. & 9. | 18. & 25. | 25. & 32. & je ne vous ay pas cotté cela pour une proprieté deſdits nombres ; mais vous ayant demandé le moyen de trouver le triangle dont un nombre donné eſt la ſomme des côtez, ſans avoir les quarrez, & doubles quarrez, dont il eſt la difference, il faloit vous advertir que leſdits nombres étoient toûjours 2. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, car il y a 2. couples dont je me ſers pour avoir ledit triangle, par exemple pour avoir le triangle dont 7. eſt la ſomme des 2. côtez je me ſers de 1. & 8. & de 2. & 9. & pour ce que j'étois preſſé je n'eus pas le loiſir de m'éclaircir d'avantage, je n'entens pas que leſdits couples ſoient 2. 9. & 18. 25. comme vous avez creu, mais 1. 8. & 2. 9. & ce que j'obſerve en cecy eſt que leſdites ſommes ſont 2. fois la difference d'un quarré & d'un double quarré, en chaque couple deſquels il y a un nombre moindre que la difference donnée ; ſçavoir à un des couples le quarré eſt moindre, & à l'autre couple c'eſt le double quarré ; cela s'obſerve toûjours ainſi ; & aux nombres qui ſont compoſez de 2. nombres premiers comme 119. il y a 4. couples, dont un des nombres eſt moindre que 119. Et voilà la methode dont je me ſers pour voir quels ſont les couples utiles pour faire les triangles, car ce ſont ceux auſquels un des nombres eſt moindre que la difference. Ainſi à 17. les 2. couples utiles ſont 1. 18. & 8. 25. à chacun deſquels couples il y a un nombre moindre que 17. & ſelon vôtre methode méme on ſe ſervira auſſi bien de 1. 18. que de 25. 8. car ſi à 25. 8. on prend 2. & la difference de 5. à 2. de méme à 1. 18. on aura 3. & la difference de 1. à 3. & on aura en l'une & l'autre ſorte les mémes nombres 2. 3. De mémes ſi on donnoit 161. on auroit 4. couples, ſçavoir 1. 162. | 8. 169. | 81. 242. | 128. 289. a chacun deſquels il y a un nombre moindre que 161. & pour trouver les triangles je me ſers des racines des doubles quarrez, car elles ſont les racines des quarrez qui compoſent l'hypothenuſe, ainſi à 17. on aura 2. & 3. racines des doubles quarrez 8. 18. mais quand il y en a 4. comme à 161. je prends les extremes, ſçavoir 9. 8. & celles du milieu 2. 11. qui donneront les triangles 17. 144. 145. & 44. 117. 125. Pour avoir le côté pair du triangle il faut prendre le double du produit des racines ſuſdites des doubles quarrez, ainſi le double de 9. par 8. eſt 144. & le double de 2.par 11. eſt 44. mais pour le côté impair on prend le produit des racines des quarrez ſimples;ainſi 1.par 17. donne 17. & 9.par 13. donne 117. le 1. pour le triangle 17.144.145. le 2. pour 44.117. 125. Vous voyés ſi j'ay eu raiſon de dire que les nombres ſuſdits ſont la difference de 2. couples quand ils ſont premiers, & de 4. couples lors qu'ils ſont diviſibles par 2. nombres premiers. Mais ce qui le montrera encore mieux eſt la façon de trouver tous les couples dont un deſdits nombres eſt la difference; car ſelon ma methode il eſt neceſſaire d'avoir ces deux couples qui ſont comme 2. ſouches. Exemple.

1.	162.	1.	9.
169.8.		13.	2.
81.	242.	9.	11.
289.128.		17.	8.

On me demande tous les quarrez & doubles quarrez dont 7. eſt la difference. Je cherche les 2. couples utiles à chacun deſquels il y a un nombre moindre que 7. j'auray 1.8. & 9. 2. je prens leurs racines & en fais 2. colomnes ſeparées comme on voit icy, & mets en chaque colomne les racines des quarrez d'un côté, & celles des doubles quarrez de l'autre. J'ay donc d'un côté 1.2. pour avoir les racines des couples ſuivans. Je prens la ſomme de 1. 2. qui eſt 3. pour la racine du double quarré; & la ſomme des racines des deux doubles quarrez prochains pour la racine du quarré.

Quarrez	Doubles quarrez.	Quarrez	Doubles quarrez.
1.	2.	3.	1.
5.	3.	5.	4.
11.	8.	13.	9.
27.	19.	31.	22.
65.	46.	75.	53.
157.	111.	181.	128.

Ainſi la ſomme de 1. 2. eſt 3. & celle de 3. 2. eſt 5. j'ay donc 5. & 3. pour le 3. couple, la ſomme de 5. 3. eſt 8. celle de 8. & 3. eſt 11. On pourſuit ainſi autant qu'on veut, & l'autre colomne qui commence par 3. 1. ſe fait de méme. A chaque colomne la rangée de main droite dont les nombres ſont pairs & impairs alternativement contient les racines des doubles quarrez, leſquels ſont plus grands que les quarrez, lors que la racine du double quarré eſt paire comme 1. 2. & 11. 8. mais le double quarré eſt moindre quand ſa racine eſt impaire; ce qui a lieu lorſque le moindre quarré des 2. qui compoſent l'hypotenuſe du triangle dont ladite difference eſt la ſomme des côtez, eſt impair, comme à 3. 4. 5. mais c'eſt le rebours, quand le moindre quarré eſt pair comme au triangle 5. 12. 13. Je laiſſe le reſte pour le premier voyage, auquel je vous envoyeray auſſi la methode dont je me ſers pour former les triangles relatifs en difference, comme 11. 60.61. & 119. 120. 169. car je ne me ſers pas des 3. quarrez proportionaux. Voicy ſeulement ce que je vous propoſeray.

1. Trouver le moindre nombre qui ſoit autant de fois qu'on voudra, & non plus la ſomme de 2. quarrez.

2. Trouver un triangle auquel le double du quarré du petit côté étant ôté du quarré de la difference des deux moindres côtez, il reſte un quarré. Par exemple ſi le triangle cherché étoit 7. 24. 25. il faudroit qu'ôtant 98. de 289. le reſte 191. fut un quarré.

3. Trouver un nombre qui ſerve d'hypotenuſe à tant de triangles qu'on voudra & non plus, à chacun deſquels le produit du moindre côté par l'hypotenuſe ſoit plus grand que le quarré du moyen côté.

4. Trouver les bornes des proportions que les racines des quarrez conſtitutifs du triangle doivent avoir l'une à l'autre, afin que les triangles ayent la proprieté du 3. probleme.

Pour cecy il y a autant de danger que les racines pechent en excez, qu'en defaut, mais elles ont un eſpace aſſez grand pour s'égayer, & elles ne ſont pas génées comme à l'autre limitation que vous m'avez envoyée. Si les racines ſont en proportion double, ou moindre, ou ſi elles ſont en proportion triple, ou plus grande, les triangles n'auront pas ladite proprieté. Entre ces deux proportions il y a un grand eſpace qui contient une infinité de proportions propres à ces triangles, lequel pourtant n'eſt pas

ſi grand que la difference & intervalle des proportions double, & triple, mais eſt un peu plus retrecy.

Vous n'avez pas pris garde, que je vous avois propoſé par ma precedente de faire la méme choſe de l'enceinte entiere du triangle que vous demandiez de la ſomme des 2. moindres côtez. Je ſuis, &c.

Lettre de M. de Fermat au Reverend Pere Merſenne de l'Ordre des Minimes. A Paris.

MON REVEREND PERE,

Je vous dois deux réponſes pour les deux dernieres Lettres que j'ay receuës de vôtre part, & que j'ay trouvées toutes deux en méme temps à mon retour de la campagne, le ſujet de la premiere concerne Monſieur Des-Argues, & celuy de la ſeconde Monſieur de Frenicle. Je ſuſpens la réponſe aux queſtions de Monſieur Des-Argues juſques à ce que j'auray veu par vôtre faveur le troiſiéme Livre des Coniques de Mr. Mydorge, & les autres s'il y en a d'imprimez depuis les deux premiers qui ſont les ſeuls que j'ay en mon pouvoir. Je vous promets alors de m'eſtendre ſur tout ce qu'il ſemble que vous deſirés de moy, & cependant je ſuis obligé de vous dire que j'eſtime beaucoup Monſieur Des-Argues, & d'autant plus qu'il eſt luy ſeul inventeur de ſes Coniques. Son livret qui paſſe, dites vous, pour jargon, m'a parû tres-intelligible & tres-ingenieux. Pour Monſieur de Frenicle ſes inventions en Arithmetique me raviſſent, & je vous declare ingenüement que j'admire ce genie, qui ſans ayde d'Algebre pouſſe ſi avant dans la connoiſſance des nombres entiers, & ce que j'y trouve de plus excellent conſiſte en la viteſſe de ſes operations, dequoy ſont foy les nombres aliquotaires qu'il manie avec tant d'aiſance. S'il vouloit m'obliger de me mettre dans quelqu'une de ſes routes, je luy en aurois tres-grande obligation, & ne ferois jamais difficulté de l'advoüer, car les voyes ordinaires me laſſent, & lors que j'entreprens quelqu'une de ces queſtions, il me ſemble que je vois devant moy

Magnum maris æquor arandum,

à cauſe de ces frequentes diviſions qu'il faut faire pour trouver les nombres premiers. Ce n'eſt pas que mon Analyſe ſoit defectueuſe, mais elle eſt lente & longue pour ce regard, & j'oſe dire ſans vanité que ſi je pouvois l'accompagner de cette facilité, je trouverois de fort belles choſes, je voudrois avoir merité par mes ſervices la faveur que je luy demande, & ne deſeſpere pas méme de la payer par quelques inventions qui peut étre ſeront nouvelles à Monſieur Frenicle.

Je viens aux propoſitions des quarrez. Sur quoy je vous puis proteſter que je n'ay jamais veu, ny Stiphelius, ny cette clavicule, & ne ſçay ce que ces Livres contiennent, & pour faire voir que j'ay veu peut-étre plus loin qu'eux, & ſatisfaire à la ſemonce de Monſieur Frenicle, je vous envoye le quarré de 14. aux conditions requiſes, duquel ſi vous ôtez deux enceintes, le reſtant ſera auſſi quarré aux conditions requiſes, & ſi vous ôtez encore deux enceintes de ce reſtant, ce qui reſtera ſera encore quarré aux mémes conditions.

Le 1. Quarré fait en ſes lignes 1379.

Le 2. fait 985.

Le 3. fait 591.

Or ne doutés point que je ne poſſede la methode generale pour faire toute ſorte de quarrez en cette ſorte, & aux conditions qu'ôtant tel nombre d'enceintes qu'on voudra le reſtant ſoit encore quarré, &c.

Mais à n'ôter qu'une ſeule enceinte, je crois la queſtion impoſſible, à quoy peut-étre Monſieur de Frenicle ne prît pas garde, lors qu'il me propoſa d'ôter 3. enceintes de 21. & puis 2. du reſtant & puis une du reſtant, car aux deux premiers cas la queſtion eſt faiſable en beaucoup de manieres, mais au 3. je ne l'eſtime point poſſible, dequoy la raiſon dépend de ma regle, laquelle je n'ay pourtant ny trouvée, ny cherchée que depuis que j'ay receu la Lettre de Monſieur Frenicle, & c'eſt pour cela que je ne determine pas abſolûment l'impoſſibilité de ce cas juſqu'à ce que j'auray eu encore quelques jours pour y ſonger de nouveau.

Mais ce que je trouve de plus beau en ma regle, & que je ne crois pas avoir eſté touché ny par Stiphelius, ny par aucun autre, eſt que je puis determiner en combien de façons & non plus châque quarré peut-étre diſpoſé aux conditions requiſes, comme par exemple s'il m'eſt permis de demander à Monſieur Frenicle en combien de ſortes differentes 22. peut étre rangé.

Je paſſe bien plus outre en paſſant aux ſolides qui le ſont effectivement, j'ay trouvé une regle generale pour ranger tous les cubes à l'infiny, en telle façon que toutes les lignes de leurs quarrez tant diagonales, de largeur, de longueur, que de hauteur, faſſent un méme nombre, & determiner outre cela en combien de façons differentes chaque cube doit étre rangé, ce qui eſt, ce me ſemble, une des plus belles choſes de l'Arihmetique, vous en trouverez un exemple ſur le cube 64. à côté du quarré de 14.

Il faut ranger les 4. quarrez qui font la ſolidité du cube, en telle façon que le 1. ſoit deſſous, & le ſecond ſoit mis ſur le premier, en telle façon que 53. ſoit ſur 4. & 56. ſur 1. Il faut enſuite mettre le 3. ſur le 2. en telle façon que 60. ſoit ſur 53. & 57. ſur 56. & enfin il faut mettre le 4. ſur le 3. en ſorte que 13. ſoit ſur 60. & 16. ſur 57. Cela étant fait vous aurés un cube qui ſera diviſé en 12. quarrez, leſquels ſe trouveront tous diſpoſez aux conditions requiſes, & il y aura en tout 72. lignes differentes, deſquelles chacune faira une méme ſomme, ſçavoir 130.

Vous voyez combien cecy eſt au deſſus du Tetraedre & de l'Hexagone de Monſieur Frenicle, deſquels le premier n'eſt pas ſolide en effet, mais par fiction ſeulement, quoy que je ne doûte pas qu'il ne puiſſe étre hauſſé en ſolide: mais dans ces deux propoſitions il y a beaucoup de nombres ſuperflus dans les entre-deux des lignes qui aboutiſſent ou au ſommet ou au centre, ce qui fait qu'elles ne ſont pas ſi parfaites que la mienne en laquelle je puis encore ôter les enceintes requiſes & faire que le reſtant demeure auſſi cube, &c. Je ſoûmets pourtant le tout a mondit Sieur de Frenicle, & crois que ſi j'avois l'honneur d'étre connu de luy, il auroit obmis quelques paroles qui ſont dans ſa Lettre. Je ne reſteray pas de luy aſſeurer l'eſtime que je fais de luy, & de le conjurer de me faire part de ſa methode. Pour le ſolide de la roulette, je le reduirois bien à des ſolides plus ſimples, mais à des Sphæres, cones, ou cylindres qui ſoint creés par des lignes droites données, il me ſemble qu'il eſt impoſſible: excuſez ſi le papier me manque, &c.

Depuis ma Lettre écrite un de mes vieux papiers m'eſt tombé en main, lequel contient une obſervation ſur le probleme 21. du Livre de Bachet imprimé à Lyon 1624. & qui porte pour titre, Problemes plaiſans & delectables qui ſe font par les nombres.

Voyés l'endroit où il propoſe de ranger en quarré les nombres conſecutifs en progreſſion Arithmetique, en ſorte que tous les rangs tant de haut en bas, qu'à côté & par les diametres faſſent une méme ſomme, dequoy il baille une regle generale pour les quarrez impairs, & avoüe n'en avoir peu trouver aucune pour les pairs, mais avoir ſeulement fait pluſieurs obſervations particulieres par le moyen deſquelles il a rangé les pairs juſques à 144.

Or pour la regle des quarrez impairs, je dis premierement qu'elle n'eſt pas de ſon invention, car elle eſt dans l'Arithmetique de Cardan, mais d'ailleurs elle ne reſout la

queſtion que d'une ſeule façon qui le peut étre en pluſieurs. Je dis donc que ma methode range les quarrez pairs, & impairs à l'infiny.

2. Qu'elle les range en toutes les façons poſſibles, leſquelles augmentent comme les combinaiſons à meſure que les quarrez ſont plus grands.

3. Que la regle des pairement, impairs n'eſt pas differente de celle des pairement pairs, mais bien la méme, quoy que Bachet aye creu qu'elle devoit étre differente.

Voicy un exemple de ma methode.

Il range le 25. d'une ſeule façon, n'y ſçachant autre choſe, & voyez comme il le range.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

En voicy 3. autres que j'ay choiſi parmi pluſieurs que ma methode enſeigne.

11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

Il range le 36. à tâtons d'une ſeule façon, comme s'enſuit.

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

En voicy un autre parmi pluſieurs que ma methode fournit, ſi le temps ne me manquoit je vous en envoyerois demi douzaine.

5	31	4	33	36	2
14	18	22	21	13	23
26	7	9	10	30	29
11	25	27	28	12	8
20	24	15	16	19	17
35	6	34	3	1	32

Mais parce qu on pourroit croire que la regle n'a qu'un ſeul exemple lors que les diametraux demeurent les mémes. Voicy qui fait voir le contraire. C'eſt un exemple de ma methode du 64. different de celuy de Bachet, & qui garde pourtant les diametraux.

1	7	6	60	61	59	58	8
16	10	51	52	53	54	15	9
17	47	19	45	44	22	18	48
40	34	38	28	29	27	31	33
32	26	30	36	37	35	39	25
41	23	43	21	20	46	42	24
56	50	11	13	12	14	55	49
57	63	62	5	4	3	2	64

En voilà aſſés pour donner de l'exercice à Monſieur de Frenicle, car je ne ſçay gueres rien de plus beau en l'Arithmetique que ces nombres que quelques uns appellent Planetarios, & les autres Magicos; & de fait j'ay veu pluſieurs Taliſmans ou quelques-uns de ces quarrez rangez de la ſorte ſont décrits,& parmy pluſieurs un grand d'argent, qui contient le 49. rangé ſelon la methode de Bachet, ce qui fait croire que perſonne n'a encore connu la generale ny le nombre des ſolutions qui peuvent arriver à chaque quarré; ſi la choſe eſt ſceuë à Paris, vous m'en éclaircirez, en tout cas je ne la dois qu'à moy ſeul. Je ſuis, &c.

Lettre de Monſieur de Fermat au Reverend Pere Merſenne de l'Ordre des Minimes. A Paris.

MON REVEREND PERE,

J'ay receu avec grande ſatisfaction vôtre Lettre accompagnée de celle de Monſieur Frenicle, qui me confirme en l'eſtime que je faiſois de luy. J'y répons ſuccinctement, & premierement ſur ce qu'il a doûté que j'euſſe une methode generale pour ranger tous les quarrez pairs à l'infiny,je vous prie de l'aſſurer du contraire,car il eſt tres-certain qu'il y a plus de 10. ans que je la découvris, & en donnay dés lors des exemples ſur des quarrez plus hauts que ceux de Bachet comme Mr. Deſpagnet vous pourroit témoigner. Il eſt vray que je n'avois pas ſongé de determiner exactement en combien de façons ces quarrez pouvoient étre ordonnez, & j'avoüe que je n'avois pas veu toutes les manieres qui y conduiſent, puiſque je doûtois méme que le quarré peut demeurer Magique en levant une ſeule enceinte, mais ayant trouvé une regle pour les ordonner en beaucoup de façons, je creus qu'elle les contenoit toutes, ce qui me ſemble excuſable, puiſque je vous envoyay ma Lettre auſſi-tôt aprés la premiere meditation que j'eus fait ſur ce ſujet. Depuis que j'ay receu la derniere de Monſieur Frenicle, j'ay auſſi-tôt découvert que la queſtion du quarré 22. étoit de ma portée, & pour ce que l'operation ſeroit trop longue qui conſiſte à ranger le quarré de 22. en telle ſorte que levant 3. enceintes il reſte Magique, & du reſtant encore 2. & qu'il demeure Magique, & puis une ſeule du reſte à la méme condition, je me contenteray pour ce coup de vous envoyer le quarré qui reſte aprés les trois premieres, & les 2. ſecondes enceintes ôtées, duquel ſi vous levez une ſeule enceinte le reſte demeure Magique comme vous verrez.

127	126	125	361	362	363	364	365	366	118	117	116
347	148	338	339	145	143	342	142	344	345	139	138
325	161	169	168	318	319	320	321	163	162	324	160
292	293	191	190	299	298	297	186	185	184	302	193
270	280	272	273	211	210	209	208	278	279	205	215
248	227	250	251	230	232	231	233	256	257	258	237
226	249	228	229	252	254	253	2 55	234	235	236	259
204	214	206	207	277	276	275	274	212	213	271	281
182	192	301	003	189	188	187	296	295	294	183	303
171	315	323	223	164	165	166	167	317	316	170	314
149	346	147	146	340	341	144	343	141	140	337	336
369	359	360	124	123	122	121	120	109	367	368	358

Parce que le temps me manque je differe à vous envoyer les 5. enceintes qui manquent pour parfaire le quarré entier de 22. juſques au départ du prochain Courrier.

Aprés

Aprés cela vous devés croire que dés que j'auray loiſir, j'iray auſſi avant ſur ce ſujet qu'il eſt poſſible.

Pource qui eſt des cubes, je n'en ſçay pas plus que Monſieur Frenicle, mais pourtant je puis les ranger tous à la charge que les Diagonales ſeules de quarrez que nous pouvons ſuppoſer paralleles à l'Horiſon, ſeront égales aux côtez des quarrez, ce qui n'eſt pas peu de choſe. En attendant qu'une plus longue meditation découvre le reſte, je dreſſeray celuy de 8. 10. ou 12. à ces conditions ſi Monſieur de Frenicle me l'ordonne.

Pour les quarrez qui ont des cellules vuides j'y travailleray au plûtôt.

Ce que j'eſtime le plus eſt cét abbregé pour l'invention des nombres parfaits, à quoy je ſuis reſolu de m'attacher, ſi Monſieur Frenicle ne me fait part de ſa methode. Voicy trois propoſitions que j'ay trouvées, ſur leſquelles j'eſpere de faire un grand baſtiment.

Les nombres moindres de l'unité que ceux qui procedent de la progreſſion double, comme

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
11	12	13	2047	4095	8191	&c.			

Soient appellez les nombres parfaits, parceque toutes les fois qu'ils ſont premiers ils les produiſent. Mettez au deſſus de ces nombres, autant en progreſſion naturelle 1. 2. 3. &c. qui ſoient appellez leurs expoſans.

Cela ſuppoſé, je dis,

1. Que lors que l'expoſant d'un nombre radical eſt composé, ſon radical eſt auſſi composé, comme parceque 6. expoſant de 63. eſt composé, je dis que 63. eſt auſſi composé.

2. Lors que l'expoſant eſt nombre premier, je dis que ſon radical moins l'unité eſt meſuré par le double de l'expoſant, comme parceque 7. expoſant de 127. eſt nombre premier, je dis que 126. eſt multiple de 14.

3. Lors que l'expoſant eſt nombre premier, je dis que ſon radical ne peut étre meſuré par aucun nombre premier que par ceux qui ſont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'expoſant, ou que le double de l'expoſant. Comme parce que 11. expoſant de 2047. eſt nombre premier, je dis qu'il ne peut étre meſuré que par un nombre plus grand de l'unité que 22. comme 23. ou bien par un nombre plus grand de l'unité qu'un multiple de 22. en effet 2047. n'eſt meſuré que par 23. & par 89. duquel ſi vous ôtez l'unité, reſte 88. multiple de 22.

Voilà trois fort belles propoſitions que j'ay trouvées & prouvées non ſans peine. Je les puis appeller les fondements de l'invention des nombres parfaits. Je ne doute pas que Monſieur Frenicle ne ſoit allé plus avant, mais je ne fais que commencer, & ſans doute ces propoſitions paſſeront pour tres-belles dans l'eſprit de ceux qui n'ont pas beaucoup épluché ces matieres, & je ſeray bien aiſe d'apprendre le ſentiment de Monſieur de Roberval.

Au reſte vous ou moy avons equivoqué de quelques characteres au nombre que j'avois creu parfait, ce que vous connoiſtrez aiſement, puiſque je vous baillois 137438953471. pour ſon radical, lequel j'ay pourtant depuis trouvé par l'Abbregé tiré de ma 3. propoſition eſtre diviſible par 223. ce que j'ay connu à la ſeconde diviſion que j'ay faite, car l'expoſant dudit radical eſtant 37. duquel le double eſt 74. j'ay commencé mes diviſions par 149. plus grand de l'unité que le double de 74. puis continüuant par 223. plus grand de l'unité que le triple de 74. j'ay trouvé que ledit radical eſt multiple de 223.

De ces Abbregez j'en vois déja naître un grand nombre d'autres, *Et mi par di veder un gran lume.*

Je vous entretiendray un jour de mon progrez ſi Monſieur de Frenicle ne vient au ſecours, & n'abbrege par ce moyen ma recherche des Abbregez, en tout cas je vous conjure de faire en ſorte que Mr. de Roberval joigne ſon travail au mien, puiſque je me trouve pressé de beaucoup d'occupations qui ne me laissent que fort peu de temps à vacquer à ces choses, je suis, &c.

Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carcavi Conseiller au Grand Conseil. A Paris.

MONSIEUR,

Vous m'obligez toûjours, & je connois dans la continüation de vos soins celle de vôtre affection, dequoy je vous rends mille graces. Pour la Geometrie je n'ose pas encore m'y attacher fortement depuis mon incommodité, je n'auray pourtant pas beaucoup de peine à trouver les deux de vos propositions; pour celle de la parabole, je ne l'ay pas examinée ny tentée, je remets tout cecy à ma premiere commodité. Mais de peur que vous ne m'accusiez de n'envoyer rien de mon invention, je vous envoye trois nombres parmy plusieurs autres que j'ay trouvés dont les parties aliquotes font le multiple.

Le nombre suivant est sous-triple de ses parties aliquotes, 14942123276641920.

Celuy-cy est sous-quadruple, 1802582780370364661760.

Et celuy-cy aussi, 87934476737668055040.

Puisque je me trouve sur cette matiere, en voicy deux que j'ay choisis parmy mes sous-quintuples.

Le premier se produit des nombres suivans multipliez entr'eux, 8388608. 2801. 2401. 2197. 2187. 1331. 467. 307. 289. 241. 125. 61. 41. 31.

Et l'autre se produit des nombres suivans multipliez entr'eux. 134217728. 243. 169. 127. 125. 113. 61. 43. 31. 29. 19. 11. 7.

En voicy encore un sous-double de ses parties de mon invention, lequel multiplié par 3. fait un sous-triple, ledit nombre est, 51001180160.

C'est parmy quantité d'autres que j'ay trouvez que j'ay choisi par advance ceux-cy pour vous en faire part, afin que vous en puissiés juger par cét échantillon. J'ay trouvé la methode generale pour trouver tous les possibles, dequoy je suis assuré que Monsieur de Roberval sera étonné, & le bon Pere Mersenne aussi, car il n'y a certainement quoy que ce soit dans toutes les Mathematiques plus difficile que cecy, & hors Monsieur de Frenicle, & peut-être Monsieur Descartes, je doute que personne en connoisse le secret, qui pourtant ne le sera pas pour vous, non plus que mille autres inventions, dont je pourray vous entretenir une autrefois, & pour exciter par mon exemple les Sçavans du Païs où vous estez, je leur propose de trouver autant de triangles en nombres qu'on voudra, de méme aire, ce que Diophante ny Viete n'ont trouvé que pour trois seulement. Je suis, &c.

Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carcavi Conseiller au Grand Conseil. A Paris.

MONSIEUR,

Je suis marry de la perte du paquet de Monsieur de S. Martin, je luy écrivois sur le

sujet des nombres, & luy faisois part de quelques propositions, & sur tout de la suivante que Monsieur Frenicle m'avoit autrefois proposée, & qu'il m'advoüa tout net ne sçavoir point. Trouver un triangle rectangle, auquel le quarré de la difference des deux moindres côtez surpasse le double du quarré du plus petit côté d'un nombre quarré. Je luy advoüay aussi pour lors que je n'en sçavois point la solution, & que je ne voyois pas méme de voye pour y venir, mais depuis je l'ay trouvée avec autres infinies, voicy le triangle 156. 1617. 1525. Il sert à la suivante question pour laquelle Monsieur Frenicle se metoit en peine de ce prealable. Trouver un triangle rectangle duquel le plus grand côté soit quarré, & le plus petit differe d'un quarré de chacun des deux autres. Si vous jugez à propos de faire part de cette proposition à mondit sieur de S. Martin, je m'en remets à vous, je ne resteray pas de luy récrire par la premiere voye.

J'ay donné à Monsieur l'Archevéque un petit memoire de corrections sur le Theon Smyrnæus, que je croy qu'il envoyera à l'Autheur avec le manuscrit de l'Astronomie. Je seray ravy que cette occasion me serve à être connu de Monsieur Bulliaud de qui le merite étant connu à tout le monde m'a esté pleinement confirmé par ce nouveau travail sur le Theon, où j'ay particulierement admiré la correction du Decret de Timothée, qui ne pouvoit être deüe qu'à une main de cette importance. Je suis, &c.

Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Le 29. Iuillet 1654.

MONSIEUR,

L'impatiance me prend aussi-bien qu'à vous, & quoy que je sois encore au lit, je ne puis m'empécher de vous dire que je receus hier au soir de la part de Mr. de Carcavi vôtre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ay pas le loisir de m'étendre, mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dez & des parties dans la parfaite justesse, j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la verité, apres la rencontre admirable où je me trouve avec vous; j'admire bien davantage la methode des parties que celle des dez J'avois veu plusieurs personnes trouver celles des dez, comme Mr. le Chevalier de Meré, qui est celuy qui m'a proposé ces questions, & aussi Monsieur de Roberval, mais Mr. de Meré n'avoit jamais pû trouver la juste valeur des parties ny de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion. Vôtre methode est tres-seure, & est celle qui m'est la premiere venüe à la pensée dans cette recherche. Mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ay trouvé un Abbregé, & proprement une autre methode bien plus courte & plus nette que je voudrois vous pouvoir dire icy en peu de mots. Car je voudrois desormais vous ouvrir mon cœur s'il se pouvoit, tant j'ay de joye de voir nôtre rencontre. Je voy bien que la verité est la méme à Tolose & à Paris. Voicy à peu prés comme je fais pour sçavoir la valeur de chacune des parties, quand deux joüeurs joüent par exemple en trois parties, & chacun a mis 32. pistoles au jeu.

Posons que le premier en ait deux & l'autre une, ils joüent maintenant une partie, dont le sort est tel, que si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, sçavoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties; & par consequent s'ils veulent se separer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, sçavoir chacun 32. pistoles. Considerez donc, Monsieur, que si le premier gagne il luy appartient 64. s'il perd il luy appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hazarder cette partie, & se separer sans la joüer, le premier doit dire, je suis seur d'avoir 32. pistoles, car la perte méme me les donne, mais pour les 32. autres, peut-étre je les auray, peut-étre vous les aurez, le hazard eſt égal, partageons donc ces 32 piſtoles par la moitié, & me donnez outre cela mes 32. qui me ſont ſeures, il aura donc 48. piſtoles & l'autre 16.

Poſons maintenant que le premier ait deux parties, & l'autre point, & ils commencent a joüer une partie, le ſort de cettte partie eſt tel, que ſi le premier la gagne il tire tout l'argent, 64. piſtoles, ſi l'autre la gagne les voilà revenus au cas precedent, auquel le premier aura deux parties, & l'autre une, Or nous avons déja monſtré qu'en ce cas il appartient à celuy qui a les deux parties 48. piſtoles, donc s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainſi, ſi je la gagne, je gagneray tout, qui eſt 64. ſi je la perds, il m'appartiendra legitimement 48. Donc donnez-moy les 48. qui me ſont certaines, au cas méme que je perde, & partageons les 16. autres par la moitié, puis qu'il y a autant de hazard que vous les gagnez comme moy, ainſi il aura 48 & 8. qui ſont 56. piſtoles.

Poſons enfin que le premier n'ait qu'une partie & l'autre point.

Vous voyez, Monſieur, que s'ils commencent une partie nouvelle, le ſort en eſt tel, que ſi le premier la gagne, il aura deux parties à point, & partant par le cas precedent il luy appartient 56. s'il la perd ils ſont partie à partie, donc il luy appartient 32 piſtoles. Donc il doit dire ſi vous voulez ne la pas joüer donnez-moy 32. piſtoles qui me ſont ſeures, & partageons le reſte de 56. par la moitié, de 56. ôtez 32. reſte 24. partagez donc 24. par la moitié prenez en 12. & moy 12. qui avec 32. font 44.

Or parce moyen vous voyez par les ſimples ſouſtractions que pour la premiere partie il appartient ſur l'argent de l'autre 12. piſtoles, pour la ſeconde autres 12. & pour la derniere 8.

Or pour ne plus faire de myſtere, puiſque vous voyez auſſi bien tout à découvert, & que je n'en faiſois que pour voir ſi je ne me trompois pas, la valeur (j'entens ſa valeur ſur l'argent de l'autre ſeulement) de la derniere partie de deux, eſt double de la partie de 3. & quadruple de la derniere partie de 4. & octuple de la derniere partie de 5. &c.

Mais la proportion des premieres parties n'eſt pas ſi aiſée a trouver, elle eſt donc ainſi, car je ne veux rien déguiſer. Et voicy le probleme dont je faiſois tant de cas, comme en effet il me plaît fort.

Eſtant donné tel nombre de parties qu'on voudra trouver la valeur de la premiere.

Soit le nombre des parties donné par exemple 8. prenez les huit premiers nombres pairs, & les huit premiers nombres impairs, ſçavoir 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14 16.

Et 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. multipliés les nombres pairs en cette ſorte le premier par le ſecond, le produit par le troiſiéme, le produit par le 4. le produit par le cinquiéme, &c. Multipliez les nombres impairs de la méme ſorte, le premier par le ſecond, le produit par le troiſiéme, &c. le dernier produit des pairs eſt le denominateur, & le dernier produit des impairs eſt le numerateur de la fraction qui exprime la valeur de la premiere partie de 8. C'eſt à dire que ſi on joüe chacun le nombre des piſtolles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendroit ſur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui ſe demonſtre, mais avec beaucoup de peine par les combinaiſons telles que vous les avez imaginées, & je n'ay peu les demonſtrer par cette autre voye que je viens de vous dire, mais ſeulement par celle des combinaiſons, & voicy les propoſitions qui y menent, qui ſont proprement des propoſitions arithmetiques touchant les combinaiſons, dont j'ay d'aſſez belles proprietez.

Si d'un nombre quelconque de Lettres, par exemple de 8. A, B, C, D, E, F, G, H, vous en prenez toutes les combinaiſons poſſibles de 4. lettres, & en ſuite toutes les combinaiſons poſſibles de 5. lettres, & puis de 6. de 7. & de 8. &c. & qu'ainſi vous preniez toutes les combinaiſons poſſibles depuis la multitude qui eſt la moitié de la toute juſqu'au tout, je dis que ſi vous joignez enſemble la moitié de la combinaiſon de 4. avec

chacune des combinaiſons ſuperieures, la ſomme ſera le nombre tantiéme de la progreſſion quaternaire à commencer par le binaire qui eſt la moitié de la multitude.

Par exemple, & je vous le diray en Latin, car le François n'y vaut rien. Si quotlibet litterarum verbi gratia octo A B C D E F G H, ſumantur omnes combinationes quaternarij, quinquenarij, ſenarij, &c. uſque ad octonarium. Dico ſi jungas dimidium combinationis quaternarij nempe 35. (dimidium 70.) cum omnibus combinationibus quinquenarij nempe 56. plus omnibus combinationibus ſenarij nempe 28. plus omnibus combinationibus ſeptenarij nempe 8. plus omnibus combinationibus octonarij nempè 1. factum eſſe quartum numerum progreſſionis quaternarij cujus origo eſt 2. dico quartum numerum, quia 4. octonarij dimidium eſt.

Sunt enim numeri progreſſionis quaternarij quibus origo eſt 2. iſti, 2. 8. 32. 128. 512. &c. quorum 2. primus eſt, 8. ſecundus, 32. tertius, & 128. quartus, cui 128. æquantur + 35. dimidium combinationis 4. litterarum, + 56. combinationis 5. litterarum, + 28 combinationis 6. litterarum, + 8 combinationis 7. litterarum, + 1 combinationis 8. litterarum.

Voilà la premiere propoſition qui eſt purement Arithmetique.

L'autre regarde la doctrine des partis, & eſt telle : il faut dire auparavant ſi on a une partie de 5. par exemple, & qu'ainſi il en manque 4. le jeu ſera infailliblement decidé en 8. qui eſt double de 4. la valeur de la premiere partie de 5. ſur l'argent de l'autre eſt la fraction qui a pour numerateur la moitié de la combinaiſon de 4. ſur 8. (je prens 4. parce qu'il eſt égal au nombre des parties qui manque, & 8. parce qu'il eſt double de 4.) & pour denominateur ce méme numerateur, plus toutes les combinaiſons ſuperieures.

Ainſi ſi j'ay une partie de 5. il m'apartient ſur l'argent de mon joüeur, $\frac{35.}{128.}$ c'eſt à dire que s'il a mis 128 piſtoles, j'en prens 35. & luy laiſſe le reſte 93. Or cette fraction $\frac{35.}{128.}$ eſt la méme que celle-là $\frac{105.}{384.}$ laquelle eſt faite par la multiplication des pairs pour denominateur & de la multiplication des impairs pour le numerateur.

Vous verrez bien ſans doûte tout cela ſi vous vous en donnez tant ſoit peu la peine. C'eſt pourquoy je trouve inutile de vous en entretenir davantage, je vous envoye neantmoins une de mes vieilles tables.

Je n'ay pas le loiſir de la copier, je la referay, vous y verrez comme toûjours la valeur de la premiere partie eſt égale à celle de la ſeconde, ce qui ſe trouve aiſement par les combinaiſons.

Vous verrez de méme que les nombres de la premiere ligne augmentent toûjours.

Ceux de la ſeconde de méme.

Ceux de la troiſiéme de méme.

Mais en ſuite ceux de la 4. diminüent.

Ceux de la 5. &c.

Ce qui eſt étrange.

Je n'ay pas le temps de vous envoyer la demonſtration d'une difficulté qui étonoit fort M...... car il a tres-bon eſprit, mais il n'eſt pas Geometre. C'eſt comme vous ſçavez un grand defaut, & méme il ne comprend pas qu'une ligne Mathematique ſoit diviſible à l'infiny, & croit fort bien entendre qu'elle eſt compoſée de points en nombre finy, & jamais je n'ay peu l'en tirer, ſi vous le pouviez faire on le rendroit parfait.

Il me diſoit donc qu'il avoit trouvé fauſſeté dans les nombres par cette raiſon.

Si on entreprend de faire un ſix avec un dé il y a advantage de l'entreprendre en 4. comme de 671. à 625.

Si on entreprend de faire Sannes avec deux dez il y a deſadvantage de l'entreprendre en 24.

Et neantmoins 24. eſt à 36. (qui eſt le nombre des faces de deux dez) comme 4. à 6. (qui eſt le nombre des faces d'un dé.)

Voila quel étoit son grand scandale qui luy faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes, & que l'Arithmetique se démentoit.

Mais vous en verrez bien aisement la raison par les principes où vous estés.

Je mettray par ordre tout ce que j'en ay fait quand j'auray achevé des traitez Geometriques où je travaille il y a déja quelque temps.

J'en ay fait aussi d'Arithmetiques, sur le sujet desquels je vous supplie de me mander vôtre avis sur cette démonstration.

Je pose le Lemme que tout le monde sçait, que la somme de tant de nombres qu'on voudra de la progression continüée depuis l'unité comme 1. 2. 3. 4. étant prise deux fois est égale au dernier 4. menée dans le prochainement plus grand 5. c'est à dire que la somme des nombres contenus dans A, étant prise deux fois est égale au produit de A in A + 1.

Maintenant je viens à ma proposition.

Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia unitate demptâ sextupla est omnium numerorum in minoris radice contentorum. Sint duæ radices R, S, unitate differentes, dico $R^3 - S^3 - 1$. æq. summæ numerorum in S contentorum sexies sumptæ; etenim S vocetur A, ergo R est A + 1. Igitur cubus radicis R, seu A + 1 est $A^3 + 3$ $A^2 + 3A + 1^3$. Cubus vero S seu A est A^3. Et horum differentia est $3A^2 + 3A + 1^3$. id est $R^3 - S^3$. Igitur si auferatur unitas, $3A^2 + 3A$ æq. $R^3 - S^3 - 1$, sed duplum summæ numerorum in A seu S contentorum æquatur ex lemmate A in A + 1 hoc est $A^2 + A$. Igitur sextuplum summæ numerorum in A contentorum æq. $3A^2 + 3A$. Sed $3A^2 +$ $3A$ æq. $R3 - S^3 - 1$. Igitur $R^3 - S^3 - 1$ æq. sextuplo summæ numerorum in A seu S contentorum : quod erat demonstrandum.

On ne ma pas fait de difficulté là dessus, mais on ma dit qu'on ne m'en faisoit pas par cette raison que tout le monde est accoûtumé aujourd'huy à cette methode, & moy je pretends que sans me faire grace on doit admettre cette demonstration comme d'un genre excellent, j'en attens neantmoins vôtre avis avec toute soumission : tout ce que j'ay demonstré en Arithmetique est de cette nature, voicy encore deux difficultez.

J'ay demonstré une proposition plane en me servant du cube d'une ligne comparé au cube d'une autre.

Je pretens que cela est purement Geometrique & dans la severité la plus grande.

De méme j'ay resolu le probleme de quatre plans, quatre points & quatre Sphæres, quatre quelconque étant donnez trouver une Sphære, qui touchant les Sphæres données passe par les points donnez, & laisse sur les plans des portions de Sphæres capables d'angles donnez, & celuy-cy.

De trois cercles, trois points, trois lignes quelconques étant donnez trouver un cercle qui touchant les cercles, & les points, laisse sur la ligne un arc capable d'angle donné. J'ay resolu ces problemes plainement n'employant dans la construction que des cercles & des lignes droites.

Mais dans la demonstration je me sers de lieux solides de paraboles ou hyperboles.

Je pretens neantmoins qu'attendu que la construction est plane ma solution est plane, & doit passer pour telle.

C'est bien mal reconnoître l'honneur que vous me faites de souffrir mes entretiens, que de vous importuner si long-temps, je ne pense jamais vous dire que deux mots, & si je ne vous dis pas ce que j'ay le plus sur le cœur, qui est que plus je vous connois plus je vous admire & vous honnore, & que si vous voyez à quel point cela est, vous donneriez une place dans vôtre amitié à celuy qui est, &c.

Table dont il est fait mention dans la Lettre precedente.

Si on joüe chacun 256.
EN

Il m'appartient sur les 256. pistoles de mon joüeur pour la	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie.
1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
2. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	
3. Partie.	56.	60.	64.	64.		
4. Partie.	42.	40.	32.			
5. Partie.	24.	16.				
6. Partie.	8.					

Si on joüe 256. chacun
EN

Il m'appartient sur les 256. de mon joüeur pour	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie.
La 1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
Les 2. premieres parties.	126.	140.	160.	192.	256.	
Les 3. premieres parties.	182.	200.	224.	256.		
Les 4. premieres parties.	224.	240.	256.			
Les 5. premieres parties.	248.	256.				
Les 6. premieres parties.	256.					

Lettre de Monſieur Paſcal à M. de Fermat.

Du 24. Aouſt 1654.

MONSIEUR,

Je ne peus vous ouvrir ma penſée entiere touchant les partis de pluſieurs joüeurs par l'Ordinaire paſſé, & mémes j'ay quelque repugnance à le faire, de peur qu'en cecy cette admirable convenance qui étoit entre nous,& qui m'étoit ſi chere ne commence à ſe démentir,car je crains que nous ne ſoyons de differens avis ſur ce ſujet. Je vous veus ouvrir toutes mes raiſons, & vous me ferez la grace de me redreſſer ſi j'erre, ou de m'affermir ſi j'ay bien rencontré. Je vous le demande tout de bon & ſincerement, car je ne me tiendray pour certain que quand vous ſerés de mon côté.

Quand il n'y a que deux joüeurs vôtre methode qui procede par les combinaiſons eſt tres-ſeure. Mais quand il y en a trois, je croy avoir demonſtration qu'elle eſt mal juſte, ſi ce n'eſt que vous y procediez de quelqu'autre maniere que je n'entens pas, mais la methode que je vous ay ouverte, & dont je me ſers par tout eſt commune à toutes les conditions imaginables de toutes ſortes de partis, au lieu que celle des combinaiſons (dont je ne me ſers qu'aux rencontres particulieres où elle eſt plus courte que la generale) n'eſt bonne qu'en ces ſeules occaſions, & non pas aux autres.

Je ſuis ſeur que je me donneray à entendre, mais il me faudra un peu de diſcours, & à vous un peu de patience.

Voicy comment vous procedés quand il y a deux joüeurs.

Si deux joüeurs joüans en pluſieurs parties ſe trouvent en cét état qu'il manque deux parties au premier, & trois au ſecond, pour trouver le parti il faut (dites vous) voir en combien de parties le jeu ſera décidé abſolument.

Il eſt aiſé de ſupputer que ce ſera en quatre parties, d'où vous concluëz qu'il faut voir combien quatre parties ſe combinent entre deux joüeurs, & voir combien il y a de combinaiſons pour faire gagner le premier, & combien pour le ſecond, & partager l'argent ſuivant cette proportion. J'euſſe eu peine à entendre ce diſcours là ſi je ne l'euſſe ſceu de moy méme auparavant, auſſi vous l'aviez écrit dans cette penſée. Donc pour voir combien quatre parties ſe combinent entre deux joüeurs, il faut imaginer qu'ils joüent avec un dé à deux faces (puis qu'ils ne ſont que deux joüeurs) comme à croix & pile, & qu'ils jettent quatre de ces dez (parce qu'ils joüent en quatre parties) & maintenant il faut voir combien ces dez peuvent avoir d'aſſietes differentes. Cela eſt aiſé à ſupputer, ils en peuvent avoir ſeize qui eſt le ſecond degré de quatre, c'eſt à dire le quarré ; Car figurons nous qu'une des faces eſt marquée A, favorable au premier joüeur, & l'autre B favorable au ſecond, donc ces quatre dez peuvent s'aſſeoir ſur une de ces ſeize aſſietes,

aaaa	1
aaab	1
aaba	1
aabb	1
abaa	1
abab	1
abba	1
abbb	2
baaa	1
baab	1
baba	1
babb	2
bbaa	
bbab	2
bbba	2
bbbb	2

a a a a
b b b b.

Et parce qu'il manque deux parties au premier joüeur, toutes les faces qui ont deux A le font gagner, donc il en a 11. pour luy, & parce qu'il y manque trois parties au ſecond, toutes les faces où il y a 3. B le peuvent faire gagner, donc il y en a 5.

Donc il faut qu'ils partagent la ſomme comme 11. à 5. Voilà vôtre methode quand il y

il y a deux joüeurs. Sur quoy vous dites que s'il y en a davantage il ne ſera pas difficile de faire les partys par la méme methode.

Sur cela, Monſieur, j'ay à vous dire que ce party pour deux joüeurs fondé ſur les combinaiſons eſt tres-juſte & tres-bon. Mais que s'il y a plus de deux joüeurs il ne ſera pas toûjours juſte, & je vous diray la raiſon de cette difference.

Je communiquay vôtre methode à nos Meſſieurs, ſur quoy Monſieur de Roberval me fit cette objection.

Que c'eſt à tort que l'on prend l'art de faire le party ſur la ſuppoſition qu'on joüe en 4. parties, veu que quand il manque 2. parties a l'un & 3. à l'autre, il n'eſt pas de neceſſité que l'on joüe 4. parties pouvant arriver qu'on n'en joüera que deux ou 3. ou à la verité peut-étre 4.

Et ainſi qu'il ne voyoit pas pourquoy on pretendoit de faire le party juſte ſur une condition feinte qu'on joüera 4. parties, veu que la condition naturelle du jeu, eſt qu'on ne joüera plus dés que l'un des joüeurs aura gagné, & qu'au moins ſi cela n'étoit faux, cela n'étoit pas demonſtré.

De ſorte qu'il avoit quelque ſoupçon que nous avions fait un paralogiſme, je luy répondis que je ne me fondois pas tant ſur cette methode des combinaiſons, laquelle veritablement n'eſt pas en ſon lieu en cette occaſion, comme ſur mon autre methode univerſelle à qui rien n'échape, & qui porte ſa demonſtration avec ſoy, qui trouve le méme party preciſement que celle des combinaiſons, & de plus je luy demonſtray la verité du party entre deux joüeurs par les combinaiſons en cette ſorte.

N'eſt-il pas vray que ſi deux joüeurs ſe trouvans en cét état de l'hypoteſe qu'il manque deux parties à l'un & 3. à l'autre conviennent maintenant de gré à gré qu'on joüe quatre parties complettes, c'eſt à dire qu'on jette les quatre dez à deux faces tous à la fois, n'eſt-il pas vray, dis-je, que s'ils ont déliberé de joüer les quatre parties le party doit étre tel que nous avons dit ſuivant la multitude des aſſietes favorables à chacun.

Il en demeura d'acord, & cela en effet eſt demonſtratif, mais il nyoit que la méme choſe ſubſiſtat en ne s'aſtreignant pas à joüer les 4. parties, je luy dis donc ainſi.

N'eſt-il pas clair, que les mémes joüeurs n'étant pas aſtreints à joüer quatre parties, mais voulant quitter le jeu dés que l'un auroit atteint ſon nombre, peuvent ſans dommage ny advantage s'aſtreindre à joüer les quatre parties entieres, & que cette convention ne change en aucune maniere leur condition. Car ſi le premier gagne les deux premieres parties de quatre, & qu'ainſi il ait gagné, refuſera-il de joüer encore deux parties, veu que s'il les gagne il n'a pas mieux gagné, & s'il les perd il n'a pas moins gagné, car ces deux que l'autre a gagné ne luy ſuffiſent pas, puis qu'il luy en faut trois, & ainſi il n'y a pas aſſés de quatre parties pour faire qu'ils puiſſent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il eſt aiſé de conſiderer qu'il eſt abſolument égal & indifferent à l'un & à l'autre de joüer en la condition naturelle à leur jeu qui eſt de finir dés qu'un aura ſon compte, ou de joüer les quatre parties entieres, donc puiſque ces deux conditions ſont égales & indifferentes le party doit étre tout pareil en l'une & en l'autre, or il eſt juſte quand ils ſont obligez de joüer 4. parties comme je l'ay monſtré.

Donc il eſt juſte auſſi en l'autre cas. Voilà comment je le demonſtray, & ſi vous y prenez garde cette demonſtration eſt fondée ſur l'égalité des deux conditions vraye & feinte à l'égard de deux joüeurs, & qu'en l'une & en l'autre un méme gagnera toûjours, & ſi l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre, & jamais deux n'auront leur compte. Suivons la méme pointe pour trois joüeurs.

Et poſons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au ſecond, & deux au troiſiéme ; pour faire le party ſuivant la méme methode des combinaiſons il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu ſera decidé, comme nous avons fait quand il y avoit deux joüeurs, ce sera en 3. Car ils ne sçauroint joüer 3. parties sans que la decision soit arrivée necessairement.

Il faut voir maintenant combien 3. parties se combinent entre trois joüeurs, & combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre, & combien au dernier, & suivant cette proportion distribuer l'argent de méme qu'on a fait en l'hypotese de deux joüeurs.

Pour voir combien il y a de combinaisons en tout, cela est aisé, c'est la troisiéme puissance de 3. c'est à dire son cube 27.

Car si on jette trois dez à la fois (puis qu'il faut joüer trois parties) qui ayent chacun 3. faces, puis qu'il y a trois joüeurs, l'une marquée A favorable au premier, l'autre B pour le second, l'autre C pour le troisiéme.

Il est manifeste que ces trois dez jettez ensemble peuvent s'asseoir sur 27. assietes differentes, sçavoir,

a a a	1		
a a b	1		
a a c	1		
a b a	1		
a b b	1	2	
a b c	1		
a c a	1		
a c b	1		
a c c	1		3
b a a	1		
b a b	1	2	
b a c	1		
b b a	1	2	
b b b		2	
b b c		2	
b c a	1		
b c b		2	
b c c			3
c a a	1		
c a b	1		
c a c	1		3
c b a	1		
c b b		2	
c b c			3
c c a	1		3
c c b			3
c c c			3

Or il ne manque qu'une partie au premier, donc toutes les assietes où il y a un A sont pour luy, donc il y en a 19.

Il manque deux parties au second, donc toutes les assietes où il y a 2. B sont pour luy, donc il y en a 7.

Il manque deux parties au 3. donc toutes les assietes où il y a 2. C sont pour luy, donc il y en a 7.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun suivant la proportion de 19. 7. 7. on se tromperoit trop grossierement, & je n'ay garde de croire que vous le fassiés ainsi. Car il y a quelques faces favorables au premier & au second tout ensemble comme A B B, car le premier y trouve un A qu'il luy faut, & le second deux B, qui luy manquent, & ainsi A C C est pour le premier & le troisiéme.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui sont communes à deux comme vallans la somme entiere à chacun, mais seulement la moitié.

Car s'il arrivoit l'assiete A C C, le premier, & le troisiéme auroint méme droit à la somme ayant chacun leur compte, donc ils partageroient l'argent par la moitié, mais s'il arrive l'assiete A A B, le premier gagne seul, il faut donc faire la supputation ainsi.

Il y a 13. assietes qui donnent l'entier au premier, & 6. qui luy donnent la moitié, & huit qui ne luy valent rien.

Donc si la somme entiere est une pistole.

Il y a 13. faces qui luy valent chacune 1. pistole.

Il y a 6. faces qui luy valent chacune $\frac{1}{2}$ pistole.

Et 8. qui ne valent rien.

Donc en cas de party il faut multiplier,

	13.	Par une pistole qui font.	13
	6.	Par une demy qui font.	3
	8.	Par zero, qui font.	0
Somme	27.	Somme	16

Et diviser la somme des valeurs 16, par la somme des assietes 27. qui fait la fraction $\frac{16}{27}$ qui est ce qui appartient au premier en cas de partys, sçavoir 16. pistoles de 27.

Le party du second & du troisiéme joüeur se trouvera de méme.

Il y a 4. assietes qui luy valent 1. pistole, multipliés,	4.
Il y a 3. assietes qui luy valent $\frac{1}{2}$ pistoles, multipliés,	1. $\frac{1}{2}$
Et 20. assietes que ne luy valent rien.	0
Somme 27.	Somme 5 $\frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joüeur 5. pistoles & $\frac{1}{2}$ sur 27. & autant au troisiéme, & ces trois sommes 5. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{1}{2}$ & 16. étant jointes font les 27.

Voila, ce me semble, de quelle maniere il faudroit faire les partys par les combinaisons suivant vôtre methode, si ce n'est qui vous ayés quelqu'autre chose sur ce sujet que je ne puis sçavoir.

Mais si je ne me trompe ce party est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joüe en 3. parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu là est qu'on ne joüe que jusques à à ce qu'un des joueurs ait atteint le nombre de parties qui luy manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joüe 3. parties, mais il peut arriver aussi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, & rien de necessité.

Mais d'où vient, dira t'on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la méme supposition feinte que quand il y avoit deux joüeurs?

En voicy la raison.

Dans la condition veritable de ces trois joüeurs il n'y en a qu'un qui peut gagner: car la condition est que dés qu'un a gagné, le jeu cesse; mais en la condition feinte deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties : sçavoir si le premier en gagne une qui luy manque, & un des autres deux qui luy manquent, car ils n'auront joüé que trois parties, au lieu que quand il n'y avoit que deux joüeurs la condition feinte & la veritable convenoint pour les avantages des joüeurs en tout, & c'est ce qui met l'extreme difference entre la condition feinte & la veritable.

Que si les joüeurs se trouvans en l'état de l'hypothese, c'est à dire s'il manque une partie au premier, & deux au second, & deux au troisiéme, ueulent maintenant de gré à gré & convienent de cette condition, qu'on joüera trois parties complettes, & que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la somme entiere (s'ils se trouvent seuls qui l'ayent atteint) ou s'il se trouve que deux l'ayent atteint qu'ils la partageront également.

En ce cas le party se doit faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16. le second, 5 $\frac{1}{2}$ le troisiéme, 5 $\frac{1}{2}$ de 27. pistoles, & cela porte sa demonstration de soy mémes en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils joüent simplement à condition non pas qu'on joüe necessairement 3. parties, mais seulement jusques à ce que l'un d'entr'eux ait atteint ses parties, & qu'alors le jeu cesse sans donner moyen à un autre d'y arriver, lors il appartient au premier 17. pistoles, au second 5. au troisiéme 5. de 27.

Et cela se trouve par ma methode generale qui determine aussi qu'en la condition precedente il en faut 16. au premier 5 $\frac{1}{2}$ au 2. & 5. $\frac{1}{2}$ au 3. sans se servir des combinaisons, car elle va par tout seule & sans obstacle.

Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet sur lequel je n'ay d'autre avantage sur vous que celuy d'y avoir beaucoup plus medité. Mais c'est peu de chose à vôtre égard, puisque vos premieres veuës sont plus penetrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse par de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous, Je croy vous avoir fait connoître par là que la methode des combinaisons est bonne entre deux joüeurs par accident comme elle est l'est aussi quelquefois entre trois joüeurs, comme quand il manque une partie à l'un, une a l'autre, & deux à l'autre, parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé ne suffit pas pour en faire gagner deux, mais elle n'est pas generale, & n'est bonne generalement qu'au cas seulement qu'on soit astreint à joüer un certain nombre de parties exactement.

De sorte que comme vous n'aviés pas ma methode quand vous m'avés proposé le party de plusieurs joüeurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous soyons de sentimens differens sur ce sujet, je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procedez en la recherche de ce party.

Je recevray vôtre réponse avec respect & avec joye, quand méme vôtre sentiment me seroit contraire, je suis, &c.

Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Du 27. Octobre 1654.

MONSIEUR,

Vôtre derniere Lettre m'a parfaitement satisfait, j'admire vôtre methode pour les partys, d'autant mieux que je l'entens fort bien, elle est entierement vôtre, & n a rien de commun avec la mienne, & arrive au méme but facilement. Voilà nôtre intelligence rétablie, mais, Monsieur, si j'ay concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numeriques dont vous m'avez fait la grace de m'envoyer les enonciations, pour moy je vous confesse que cela mè passe de bien loin, je ne suis capable que de les admirer, & vous supplie tres-humblement d'occuper vôtre premier loisir à les achever, tous nos Messieurs les virent Samedy dernier & les estimerent de tout leur cœur : on ne peut pas aisement supporter l'attente de choses si belles & si souhaitables, pensés y donc, s'il vous plaît, & assûrez vous que je suis, &c.

Problemata proposita à D. de Fermat.

PRoponatur (si placet) *Vvallisio*, & reliquis Angliæ Mathematicis, sequens quæstio numerica.

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum. Exempli gratia. Numerus 343. est Cubus, à latere 7. Omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49; quæ adjunctæ ipsi 343. conficiunt numerum 400, qui est quadratus à latere 20.

Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus Quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia aut Galliæ Belgica & Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis, easque in pignus nascentis amicitiæ *D. Digby* offeret & dicabit.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelme Digby.

Du 20. Avril 1657.

MONSIEUR,

Puis que vous voulés, que les complimens cessent, soit fait. Il me suffit de vous asseurer une fois pour toutes, que vous vous estes tres-justement acquis un pouvoir absolu sur moy, & que je ne perdray point d'occasion à vous le témoigner. J'ay leu l'*Arithmetique Infinitorum* de M. Uvallis, & j'en estime beaucop l'Autheur. Et bien que la quadrature tant des paraboles, que des hyperboles infinies ait esté faite par moy depuis fort longues années, & que j'en aye autresfois entretenu l'illustre Toricelli, je ne laisse pas d'estimer l'invention de M. Uvallis, qui sans doûte n'a pas sçeu, que j'eusse preoccupé son travail. Voicy une de mes propositions aux termes que je la conceus en l'envoyant à Toricelli. Soient les deux droites S K R, & K O F. Et soient descrites les courbes E G H Q d'un côté, & D A B C de l'autre, en forme d'hyperboles, dont les asymptotes soient les droites premierement données. Soient encore tirées A G, B H, paralleles à S K R, & les droites B N, A M, G L, H I, paralleles à K O F. En l'hyperbole ordinaire le rectangle N P est égal au rectangle M A O. Mais supposons maintenant, que le produit du quarré B N & de la droite B P, soit égal au produit du quarré M A & de la droite A O. En ce cas la courbe sera une nouvelle hyperbole, dont la proprieté sera, que le parallelogramme B I sera égal à l'espace compris soûs la base B H, & les deux courbes B A D F, F E G H qui vont à l'infini du côté F. Que si le produit du cube B N & de la droite B P, est égal au produit du cube A M & de la droite A O, en ce cas ce sera une autre hyperbole, dont la proprieté sera, que le parallelogramme B I sera double de l'espace compris sous la base B H & les deux courbes en montant, ut suprà. Et par regle generale, Si le produit d'une puissance de B N par une puissance de B P, est égal au produit d'une pareille puissance de M A par une pareille de A O, en supposant celles de B N & M A pareilles entre elles, comme aussi celles de B P & de A O aussi pareilles, le parallelogramme B I sera à la figure prolongée à l'infini, ut supra, comme la difference de l'exposant de la puissance de B N avec l'exposant de la puissance de B P est à l'exposant de la puissance de B P. De sorte qu'il suit de là, qu'en l'hyperbole ordinaire, l'espace de la figure prolongée à l'infini n'est point égal à un espace donné, parce que l'exposant des puissances étant le méme ne donne aucune difference. Et pour faire que l'espace de ladite figure prolongée à l'infini soit égal à un espace donné, il faut que l'exposant de B N soit plus grand que celuy de B P, comme il est aisé de remarquer. Tout cecy quoy qu'énoncé un peu diversement se peut tirer du livre de M. Uvallis. Mais il n'a pas fait une speculation sur ces figures, de laquelle il sera sans doûte bien aise d'étre adverti, & qui peut passer pour un des miracles de la Geometrie. Je l'ay autrefois donné à Toricelli aussi bien que la precedente. C'est comme il arrive que quelquesfois l'espace prolongé à l'infini, comme B A D F E G H est aussi infini, comme en l'hyperbole ordinaire, & quelquesfois fini, comme en celles dont les exposants de BN surmontent ceux de B P. On demande, si lors que ledit espace prolongé à l'infini est égal à un espace fini, il a un centre de gravité fixe & certaine. Or il arrive une chose merveilleuse en cette recherche, & laquelle j'ay découverte, & démonstrée, c'est que quelquesfois ledit espace quoy que fini n'a point de centre de gravité fixe, & quelquesfois il en a. Car par exemple, lors que le produit du quarré B N, & de la droite B P, est égal aux produits semblablement tirez, la figure B A D F E G H prolongée à l'infini qui en ce cas est égale au parallelogramme b I, n'a pourtant aucun centre de gravité. Mais ſi le produit, par exemple, du cube B N & de la droite B P eſt égal aux produits ſemblables & ſemblablement tirez, en ce cas non ſeulement l'eſpace de la figure prolongée à l'infini, eſt égal à un eſpace donné, qui eſt, comme nous avons dit, la moitié du parallelogramme B I, mais encore cette figure prolongée à l'infini a un centre de gravité, qui va en ce cas en la ligne P F coupée en telle ſorte au point O, que la ligne P O ſoit égale à la ligne K P. Et ce point O ſera ledit centre de gravité de cette figure prolongée à l'infini. Si Monſieur Uvallis veut avoir la demonſtration de cette propoſition & de la regle generale pour trouver leſdits centres de gravité, je vous l'envoyeray pour luy en faire part.

Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans ſondit traitté, je n'en ſuis pas pleinement perſuadé, car ce qui ſe deduit par comparaiſon en Geometrie n'eſt pas toûjours veritable.

Je ne vous parle ny de vôtre livre, ny de celuy de Thomas Anglus, *ne ſutor ultra crepidam.* Vous eſtés ſouverain en Phyſique, & je vous reconnois pour tel. J'eſpere pourtant au premier voyage de vous entretenir de la proportion que gardent les graves dans leur deſcente naturelle, dequoy vous avés traitté dans vôtre Livre que Monſieur Borel m'a fait la faveur de me faire voir. Je ſuis, &c.

Problema propoſitum à D. de Fermat.

QUæſtiones purè Arithmeticas vix eſt qui proponat, vix qui intelligat. Annon quia Arithmetica fuit hactenus tractata Geometricè potius quam Arithmetice? Id ſane innuunt pleraque & Veterum & Recentiorum volumina. Innuit & ipſe Diophantus, qui licet à Geometria paulò magis quam cæteri diſceſſerit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adſtringit: Eam tamen partem Geometriâ non omnino vacare probant ſatis ſuperque Zetetica Vietæa; in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur. Doctrinam itaque de numeris integris, tanquam peculiare ſibi vendicat Arithmetica patrimonium. Eam apud Euclidem leviter dumtaxat in elementis adumbratam, ab ijs autem qui ſecuti ſunt, non ſatis excultam, (niſi forte in ijs Diophanti libris, quos injuria temporis abſtulit, deliteſcat,) aut promovere ſtudeant Ἀριθμητικῶν Παῖδες, aut renovare. Quibus ut præviam lucem præferamus, Theorema ſeu Problema ſequens, aut demonſtrandum aut conſtruendum proponimus. Hoc autem ſi invenerint, fatebuntur hujuſmodi quæſtiones nec ſubtilitate, nec difficultate, nec ratione demonſtrandi, celebrioribus ex Geometria eſſe inferiores.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in datum numerum ducti, adſcitâ unitate, conficiant quadratum. Exemplum. Datur 3. numerus non-quadratus; iſte ductus in quadratum 1, adſcitâ unitate, conficit 4, qui eſt quadratus. Item idem 3 ductus in quadratum 16, adſcitâ unitate, facit 49. qui eſt quadratus. Et loco 1 & 16, poſſunt alii infiniti quadrati idem præſtantes inveniri. Sed Canonem Generalem, Dato quovis numero non-quadrato, inquirimus. Quæratur, verbi gratia, quadratus, qui ductus in 149, aut 109. aut 433, &c. adſcitâ unitate conficiat quadratum.

Lettre de M. de Fermat à Monſieur le Chevalier Kenelme Digby.

Du 20. Iuin 1657.

MONSIEUR,

J'ay receu vôtre derniere lettre à la veille du départ de M. Borel, qui ne me donne quaſi pas le loiſir de vous faire un mot de réponſe. Vos deux lettres *Angloiſes* m'ont eſté traduites par un jeune *Anglois*, qui eſt en cette ville, & qui n'a point connoiſſance de ces matieres; de ſorte que ſa traduction s'eſt trouvée ſi peu intelligible, que je n'y ay peu decouvrir aucun ſens reglé; & ainſi je ne puis vous reſoudre, ſi ce Mylord à ſatisfait à mes queſtions, ou non. Il me ſemble pourtant au travers de l'obſcurité de cette traduction bourruë, que l'Autheur des lettres à trouvé mes queſtions un peu trop aiſées: ce qui me fait croire, qu'il ne les a pas reſoluës. Et par ce qu'il pourroit equivoquer ſur le ſens de mes propoſitions, j'ay demandé un nombre cube en nombres entiers, lequel adjoûté à toutes ſes parties aliquotes faſſe un nombre quarré J'ay donné par exemple 343, qui eſt cube, & auſſi nombre entier, lequel adjoûté à toutes ſes parties aliquotes fait 400, qui eſt un nombre quarré. Et par ce que cette queſtion reçoit pluſieurs autres ſolutions, je demande un autre nombre cube en entiers, qui joint a toutes ſes parties aliquotes faſſe un nombre quarré; Et ſi le Mylord Brouncker répond, qu'en entiers il n'y a que le ſeul nombre 343. qui ſatisfaſſe à la queſtion, je vous promets, & à luy auſſi, de le deſabuſer en luy en exhibant un autre. Je demandois encore un quarré en entiers, qui joint à toutes ſes parties aliquotes faſſe un cube. Pour la queſtion propoſée dans l'écrit Latin, que je vous envoyay, elle eſt auſſi en nombres entiers. Et partant les reſolutions en fractions (leſquelles peuvent étre d'abord fournies *à quolibet de trivio Arithmetico*) ne me ſatisferoient pas. Je ſuis, &c.

Lettre de M. de Fermat à Monſieur le Chevalier Kenelme Digby.

Du 15. Aouſt 1657.

MONSIEUR,

J'ay receu avec joye & ſatisfaction vôtre dernier pacquet, & quand il ne contiendroit autre nouvelle, que celle de vôtre convaleſcence, & du retour de vôtre ſanté, c'eſt un bien ſi grand, & ſi conſiderable pour tous ceux qui aiment les belles lettres, qu'ils ne peuvent en recevoir un plaiſir mediocre. J'ay receu la copie de la lettre de Monſieur Uvallis, que j'eſtime comme je dois, & j'advoüe, que ſes figures ſont les mémes que les miennes; & que ſes concluſions pour leur quadrature ſont auſſi les mémes; mais ſa façon de demonſtrer, qui eſt fondée ſur induction plûtôt que ſur un raiſonnement à la mode d'Archimede, faira quelque peine aux novices, qui veulent des ſyllogiſmes demonſtratifs depuis le commencement juſqu'à la fin. Ce n'eſt pas que je ne l'approuve, mais toutes ses propositions pouvant étre demonstrées *viâ ordinariâ, legitimâ & Archimedæa* en beaucoup moins de paroles, que n'en contient son livre, je ne sçay pas, pourquoy il a preferé cette maniere par notes Algebriques à l'ancienne, qui est & plus convainquante, & plus elegante, ainsi que j'espere luy faire voir à mon premier loisir. Je voudrois qu'ensuite il eût determiné les centres de gravité de ces hyperboles infinies en distinguant celles qui en ont, d'avec celles qui n'en ont pas : car tandis qu'il dira, que la chose luy est connüe, & qu'il n'en a pas voulu charger son livre, il ne me persuadera pas; Et d'autant plus, que la proposition generale sans demonstration me suffira de sa part; Et je vous réponds à l'advance, qu'elle ne sçauroit contenir plus de huit, ou dix lignes. Dés qu'il me l'aura envoyée, je luy fairay part de ma speculation sur ce sujet, & de ma façon de demonstrer.

Pour les questions des nombres, j'ose vous dire avec respect & sans rien rabatre de la haute opinion que j'ay de vôtre Nation, que les deux lettres de Mylord Brounker, quoy qu'obscures à mon égard & mal traduites, n'en contiennent aucune solution. Ce n'est pas que je pretende par là renouveller les joûtes & les anciens coups de lances, que les Anglois ont autrefois fait contre les François. Mais sans sortir de la Metaphore, j'ose vous soustenir, & à vous, Monsieur, plus justement qu'à tout autre, qui excellez aux deux mestiers, que le hazard, & le bon-heur se mélent quelquefois aux combats de science aussi bien qu'aux autres, & qu'en tout cas nous pouvons dire, que *non omnis fert omnia tellus.* Je seray pourtant ravy d'étre détrompé par cét ingenieux & sçavant Seigneur, & pour luy témoigner, que nôtre combat ne sera point à outrance, je me relâche dans la question suivante, que je m'en vay luy proposer, de la rigueur de mes premieres questions, qui ne vouloient que des nombres entiers : il me suffira, qu'ils soient rationaux à la mode de Diophante. Le nom de cét Autheur me donne l'occasion de vous faire souvenir de la promesse, qu'il vous a pleu me faire de recouvrer quelque manuscrit de cét Autheur, qui contienne tous les treize livres, & de m'en faire part, s'il vous peut tomber en main. Voicy la nouvelle question ou pour Mylord Brounker, ou pour Monsieur Uvallis, que j'écris en Latin suivant vôtre ordre.

Datum numerum ex duobus numeris cubis compositum dividere in duos alios numeros cubos.

Hanc propositionem in quadratis tantùm exequutus est Diophantus. In cubis ne tentavit quidem, in ijs saltem libris, qui ad nos de majore ipsius opere pervenerunt.

Exempli gratiâ, proponatur numerus 28. ex duobus Cubis 1. & 27. compositus, oportet dictum numerum 28. in duos alios Cubos rationales dividere, & propositionis solutionem generaliter præstare.

Je consens, que Monsieur Frenicle l'entreprenne, je suis persuadé, qu'il ne la trouvera pas si aisée, que les autres, que je sçavois étre de sa jurisdiction. Je l'estime extraordinairement aussi bien que vous, mais pourtant ce que je m'en vay adjoûter, l'estonnera, si vous prenés la peine de le luy communiquer. Je luy avois écrit, qu'il n'y a qu'un seul nombre quarré en entiers, qui joint au binaire fasse un cube, & que ledit quarré est 25. auquel si vous adjoûtés 2. il se fait 27. qui est cube. Il a peine à croire cette proposition negative, & la trouve trop hardie & trop generale. Mais pour augmenter son étonnement, je dis que si on cherche un quarré, qui adjoûté à 4. fasse un cube, il n'en trouvera jamais que deux en nombres entiers, sçavoir 4. & 121. car 4. adjoûté à 4. fait 8. qui est cube: & 121. adjoûté à 4. fait 125. qui est aussi cube : mais aprés cela toute l'infinité des nombres n'en sçauroit fournir un troisiéme, qui ait la méme proprieté.

Je ne sçay ce que diront vos Anglois de ces propositions negatives, & s'ils les trouveront trop hardies. J'attens leur resolution, & celle de Monsieur Frenicle, qui n'a point répondu à une longue lettre, que M. Borel luy rendit de ma part; dequoy je suis surpris, car je luy répondois exactement à tous ses doûtes, & luy faisois quelque question de mon chef, dont j'attends la solution. Je suis, &c.

J'oubliois

J'oubliois de vous dire, que Monsieur Borel a écrit à son pere que Monsieur l'Ambassadeur de Hollande s'étonnoit dequoy je n'avois pas répondu à M. Schooten qu'il pretend avoir resolu mes questions, & m'en avoir proposé d'autres. Mais je vous asseure, que je n'ay rien veu de sa part, & que si vous m'en envoyés copie, j'y répondray.

J'ay mis la proposition un peu plus generale dans la page suivante où elle me semble étre mieux. On la peut concevoir pour M. Frenicle, qui aime les nombres entiers, en ces termes.

Trouver deux nombres cubes, dont la somme soit cube : & trouver deux nombres cubes, dont la somme soit égale à deux autres nombres cubes.

Proposuit Diophantus datum numerum quadratum in duos quadratos dividere.

Item. Datum numerum ex duobus quadratis compositum in duos alios quadratos dividere.

Quæstionem autem ad cubos evehere, nec ipse, nec Vieta tentavit.

Quidni igitur famosam propositionem, & recentioribus reservatam Analystis, expedire aut dubitemus, aut differamus?

Proponatur itaque, datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere.

Item. Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere.

Remarques * de M. de Fermat sur l'Arithmetique des Infinis de Monsieur Uvallis Professeur de Geometrie en Angleterre dans l'Université d'Oxford.

1. EN son Epître il declare comment il s'est mis à la recherche de la Quadrature du Cercle, & dit que quelques veritez qui ont esté descouvertes en Geometrie, luy ont donné l'esperance, qu'elle se pourroit trouver. Ces veritez sont,

Que la raison des cercles infinis du Cone aux infinis du Cylindre est connuë, sçavoir celle du Cone au Cylindre qui a méme base & hauteur : & pareillement la raison des diametres desdits Cercles, sçavoir celle du Triangle qui passe par l'Axe du Cone, au parallelogramme, qui passe par l'Axe du Cylindre.

Comme aussi on a la raison du Conoïde parabolique au Cylindre circonscrit, & celle de la parabole au parallelogramme, qui passent par leurs Axes, qui sont comme l'assemblage des Diametres des Cercles infinis, qui composent lesdits solides.

De plus, qu'on a aussi trouvé la raison des ordonnées tant au Triangle, qu'au Conoïde parabolique, ou parabole, qui sont les Diametres desdits Cercles.

D'où il conclud, que puis qu'on a trouvé aussi la raison de la Sphere au Cylindre circonscrit, ou celle de l'infinité des Cercles paralleles, dont on peut concevoir que la Sphere est composée, à pareille multitude de ceux qui se peuvent feindre au Cylindre; on pourra aussi esperer de pouvoir découvrir la raison des ordonnées en la Sphere, ou au Cercle, à celle du Cylindre, ou Quarré, sçavoir la raison des Diametres des Cercles infinis, qui composent la Sphere, aux Diametres des Cercles du Cylindre; ce qui seroit avoir la quadrature du Cercle.

Mais de méme qu'on ne pourroit pas avoir la raison de tous les Diametres pris ensemble des Cercles, qui composent le Cone, à ceux du Cylindre circonscrit, si on n'avoit la Quadrature du Triangle non plus que la raison des Diametres des Cercles qui composent le Conoïde parabolique, à ceux qui font le Cylindre circonscrit, si on n'avoit la Quadrature de la Parabole. Ainsi on ne pourra pas connoître la raison des Diametres de tous les Cercles, qui composent la Sphere, à ceux des Cercles, qui compo-

*Les Problemes cy-devant imprimés page 188. & 190. envoyez par M. de Fermat à M. le Chevalier Digby avec ces Remarques, ont esté le sujet d'un Livre de M. Uvallis celebre Professeur de Geometrie dans l'Université d'Oxford : le titre de ce Livre imprimé en Angleterre en 1658. est. Commercium Epistolicum, inter D. Vicecomitem Brouncker Anglum; D. Kenelmum Digby; D. Fermatium Senatorem Tolosanum; D. Freniclum Nobilem Parisinum, cum D. Joh. Uvallis Geomet. Profess. Oxonij; D. Franc. à Schooten, Math. Prof. Lugduni Batavorum; Alijsque.

sent le Cylindre circonscrit ; si on n'a pas la Quadrature du Cercle. Car de demander la raison, qu'il y a entre les Diametres de tous les Cercles Paralleles, qu'on peut concevoir en la Sphere (lesquels Diametres pris tous ensemble, ne sont autre chose, qu'un Cercle) & ceux des Cercles, qu'on peut feindre au Cylindre circonscrit (lesquels font un quarré circonscrit audit Cercle) cela n'est autre chose, que de demander la raison du Cercle au quarré circonscrit.

2. En la méme Epître aprés avoir posé une suite de nombres, sçavoir 1. 6. 30. 140. 630. il demande le terme moyen, qui doit étre mis entre 1. & 6. Je responds, que si on a égard à la suite entiere desdits nombres, on ne peut poser aucun terme moyen entre lesdits 1. & 6. pource qu'en cette suite les nombres ne font pas une proportion continuë ; mais en autant de façons, que l'un est comparé à l'autre, autant sont ils de proportions differentes, de sorte que ce sont plusieurs proportions, ou progressions disjointes, & ainsi quand on prendroit un terme moyen entre 1. & 6. il n'auroit rien de commun avec les autres nombres.

Toute la proportion ou suite, qu'on peut remarquer en ces nombres, consiste au raport qu'ont entr'eux les nombres, dont ils proviennent par multiplication, ausquels on voit une espece de progression Arithmetique ; neantmoins ne sçauroit passer aux nombres susdits, en telle sorte que par iceluy on puisse donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correspondance à toute la suite : au contraire la proprieté méme de cette progression fait, qu'il n'y en peut avoir. Voicy comment.

Les nombres donnez 1. 6. 30. 140. 630. sont produits par les suivans en multipliant, 1. 4. $\frac{2}{1}$ 4. $\frac{2}{2}$ 4. $\frac{2}{3}$ 4. $\frac{2}{4}$ ou les equivalens 1. $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{14}{3}$ $\frac{18}{4}$

En ces nombres, qui servent à faire les donnés, il est facile à voir où est le raport: Il consiste aux premiers, en la seule augmentation du denominateur de la fraction, qui y est jointe, ce qui fait diminüer les nombres d'autant plus, qu'ils s'éloignent du premier terme, sçavoir de 1. & aux 2mes. 1. $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ &c. (qui sont les mémes en autres termes) les numerateurs des fractions augmentent de 4. & les denominateurs de l'unité, ce qui fait pareillement diminüer les nombres, tant plus la progression avance ; en sorte que celuy qui est le plus proche du premier terme 1. sçavoir 4. $\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ qui vaut 6. est le plus grand de tous.

Il faut aussi remarquer, que le raport des nombres de ladite progression n'arrive pas jusques au premier terme 1. ou plûtôt ne commence pas dés le premier terme, mais au second seulement, qui est sa borne ; De sorte que si on vouloit augmenter les termes de ladite progression, en la changeant & mettant un nombre moyen entre le premier & le second terme, sçavoir entre 1. & 4. $\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ il ne faudroit pas avoir égard à 1. mais aux autres nombres 4. $\frac{2}{1}$ 4. $\frac{2}{2}$ 4. $\frac{2}{3}$ 4. $\frac{2}{4}$ ou à ces autres qui sont les mémes $\frac{6}{1}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{14}{3}$ $\frac{18}{4}$ car cette progression n'auroit pas de suite, si on la commençoit par 1.

Puis donc qu'il ne faut pas avoir égard au premier terme 1. qui n'a rien de commun avec les nombres de ladite progression ; mais aux autres seulement, & qu'ils augmentent à mesure, qu'ils approchent du premier terme 1. il s'ensuit, que le nombre, qu'on prendroit entre 1. & 4. $\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ seroit plus grand, que ledit $\frac{6}{1}$ ou 6. & il faudroit mulplier le premier terme 1. par ce nombre moyen, qui seroit plus grand que 6. pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premierement donnez, qui sont 1. & 6. (car lesdits nombres donnez 1. 6. 30. 140. 630. n'ont point d'autre raport ou liaison. que celle, qu'ils empruntent de leurs multiplicateurs, autrement ils n'en ont aucune) & ainsi on auroit un nombre plus grand que 6. pour le moyen terme d'entre 1. & 6. ce qui est absurde.

De là s'ensuit, qu'on ne peut donner le moyen terme entre 1. & 6. en tant qu'ils sont

compris en la suite ou progression des nombres 1. 6. 30. 140. 630.

On peut inferer de là, que la ligne courbe V C, n'est point égale en elle méme, & qu'elle ne peut provenir d'aucun mouvement continu, qui soit égal ou reglé ; mais de plusieurs differens, suivant ses parties ; & que c'est une ligne composée de proportions de plusieurs courbes comprises entre les paralleles à l'axe V X de la figure : car en icelle il est bien necessaire, que la moyenne ligne tirée entre la premiere & la seconde paralleles, sçavoir entre 1. & 6. soit moindre que 6. mais outre que cette moyenne ligne seroit de differente longueur suivant la nature & la proprieté de cette portion de la courbe V C, qui n'a rien de commun avec les autres portions, comme a esté dit ; elle n'auroit raport qu'avec les 2. termes, 1. 6. & non pas avec les autres, n'y avec les moyennes, qu'on auroit tirées entre-deux, si on prenoit le tout conjointement.

3. En la premiere proposition ledit sieur Uvallis propose une suite de quantités commenceans par *o*, (qui represente le point) & qui se suivent en progression Arithmetique ; & cherche quelle raison il y a entre la somme desdites quantitez, & la somme d'autant de termes égaux à la plus grande des données.

Le moyen qu'il donne pour trouver cette raison, est de prendre les sommes de diverses quantitez de nombres commenceans par les moindres ; puis comparer les raisons les unes aux autres, & inferer de la une proposition universelle.

On se pouvoit servir de cette methode, si la demonstration de ce qui est proposé étoit bien cachée ; & qu'auparavant de s'engager à la chercher on se voulut asseurer à peu prés de la verité : mais il ne s'y faut fier que de bonne sorte, & on y doit apporter les precautions necessaires ; car on pourroit proposer telle chose & prendre telle regle pour la trouver, qu'elle seroit bonne à plusieurs particuliers, & neantmoins seroit fausse en effect, & non universelle ; de sorte qu'il faut étre fort circonspect pour s'en servir ; quoy qu'en y apportant la diligence requise elle puisse étre fort utile, mais non pas pour prendre pour fondement de quelque science, ce qu'on en aura deduit ; comme fait le sieur Uvallis ; car pour cela on ne se doit contenter de rien moins, que d'une demonstration, & principalement au sujet de la proposition, dont il s'agit ; dont la solution & demonstration est fort facile.

Voicy comme on demonstrera que lesdites quantitez proposées, étans jointes ensemble, font la moitié d'autant de quantitez égales à la plus grande d'icelles.

Soient exposées des quantités ou nombres, qui commencent par le point, ou par *o*, & qui se suivent en progression Arithmetique, & soient celles de la premiere ligne.

1. *o. a. b. c. d.* Quantités données.
2. *d. d. d. d. d.* Quantités égales à la plus grande des données.
3. *d. c. b. a. o.* Excés des plus grandes par dessus les données.

Puisque les quantités données sont en progression Arithmetique, le troisiéme terme *b*, surpassera le second de pareille quantité, que le second (sçavoir *a*) surpasse le premier qui est *o* ; mais l'excés de *a* par dessus *o* est *a* ; & partant toutes ces quantités se surpasseront l'une l'autre de proche en proche, selon la quantité du second terme *a*. Et si on prend les quantités de 2. en 2. laissant une d'icelles entre-deux, comme sont *a*, *c*, ou *b*, *d*, de la premiere ligne ; leur difference sera le troisiéme terme, comme il est evident : & de méme si on les prenoit de 3. en 3. elles auroient le quatriéme terme *c*, pour leur difference.

De là il s'ensuit, que si on prend autant de termes égaux au plus grand terme *d*, des quantités données, comme en la seconde ligne ; leur excés pardessus les quantitez données sera égal ausdites quantités données ; comme on voit en la troisiéme ligne. Car l'excez de *d*, par dessus la plus grande des quantitez données, sçavoir par dessus *d*, est *o*, qui est le premier terme des quantitez données ; l'excez du méme *d*, pardessus le terme precedent *c*, est le second terme *a*, comme il a esté monstré ; sçavoir pource que les 2. quantitez *c* & *d*, sont prochaines : & ensuite l'excez du *d*, par dessus *b*, sera *b*, & ainsi des autres; jufques à ce, qu'enfin étant au premier terme *o*, l'excez de *d*, par deffus iceluy fera le méme *d*: & ainfi la ligne des excez, qui eft la troifiéme, fera égale à la premiere qui contient les quantitez données. Mais la premiere & la troifiéme ligne étant jointes enfemble; fçavoir les quantitez données, étant jointes aux excez des quantitez de la feconde ligne par deffus celles de la premiere, qui font les données, font ladite feconde ligne, qui a chacun de fes termes égal au plus grand de ceux de la premiere, partant la feconde ligne, ou le plus grand terme des données, pris autant de fois qu'il y a de termes, fera double de la premiere ligne, c'eft à dire des quantitez données. Ce qu'il falloit demonftrer.

4. En la feconde propofition il requiert, que le premier terme foit *o*, & le fecond 1. autrement il dit que *moderatio eft adhibenda*.

A cela je dis, que fi on commence par *o*, quelque nombre qu'on mette pour le fecond terme, la fomme d'autant de fois le plus grand terme fera toûjours double des quantitez données; car fi pour *a*, *b*, *c*, *d*; on prend quelques nombres, qu'on voudra, qui foient en progreffion Arithmetique depuis le premier terme *o*, cela fuccedera toûjours en la méme forte, ainfi qu'il a efté cy-devant demonftré.

Lettre de Monfieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 5. Decembre 1657.

MONSIEUR,

Je me donnay l'honneur de vous écrire le 19. du mois paffé, depuis ce temps là j'ay efté en Normandie, & à mon retour j'ay trouvé la Lettre que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire du 17. du méme mois, dont je vous rends tres-humbles graces, & m'eftime tres-heureux de vous fervir dans le commerce qui eft entre vous & Monfieur de Frenicle, à qui je monftray auffi vôtre Lettre, & comme vous y parlez de nôtre Chancellier Bacon, cela me fit fouvenir d'un autre beau mot qu'il dit en ma prefence une fois à feu Monfieur le Duc de Bouquingam. C'étoit au commencement de fes malheurs, quand l'Affemblée des Eftats, que nous appellons le Parlement, entreprit de le ruiner, ce qu'elle fit en fuite: ce jour là il en eût la premiere alarme. J'étois avec le Duc ayant difné avec luy, le Chancelier furvint, & l'entretint de l'accufation qu'un de ceux de la Chambre Baffe avoit prefentée contre luy, & il fupplia le Duc d'employer fon credit auprés du Roy pour le maintenir toûjours dans fon efprit: le Duc luy répondit qu'il étoit fi bien avec le Roy leur Maître qu'il n'étoit pas befoin de luy rendre de bons offices auprés de Sa Majefté; ce qu'il difoit, non pas pour le refufer, car il l'aymoit beaucoup, mais pour luy faire plus d'honneur; le Chancelier luy répondit de tres-bonne grace, qu'en effet il croyoit étre parfaitement bien dans l'efprit de fon Maître, mais auffi qu'il avoit toûjours remarqué que pour fi grand que foit un feu, & pour fi fortement qu'il brûle de luy méme, il ne laiffera pourtant pas de brûler mieux & d'étre plus beau & plus clair fi on le fouffle comme il faut; de méme j'ay dit à Monfieur Frenicle que pour fi grand feu d'efprit qu'il ait, & quelque merveilleux que foit fon genie pour la fcience des nombres, fon feu feroit plus brillant s'il le vouloit exciter ou augmenter par l'eftude, par la lecture des Anciens & par la converfation. Il vous honnore infiniment, & dit que jamais homme n'a approché de vôtre fond de fcience, il m'a apporté ce matin un écrit pour vous l'envoyer, je l'ay fait copier par mon Secretaire, car vous ne l'auriés peu lire, il écrit d'ordinaire fur de lambeaux de papier, & fi vîte

qu'il n'y a que luy méme qui puiffe lire fon écriture. Vous aurés veu par ma derniere Lettre que j'ay receu celle que vous me fites l'honneur de m'écrire lors que vous eftiés à la campagne. Au lieu de vous laiffer paffer le titre de pareffeux que vous vous donnez injuftement, j'admire infiniment la facilité & la prefence avec laquelle au milieu de vos grandes occupations vous exprimez fur le champ vos profondes & fubtiles penfées. Je vous fupplie de croire que j'honnore vos rares talens, & que je voudrois que mes actions vous peuffent témoigner mieux que mes paroles à quel point je fuis, &c.

Lettre de Monfieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 12. Decembre 1657.

MONSIEUR,

Depuis que je me fuis donné l'honneur de vous écrire une Lettre du 5. de ce mois, je receus celle que vous m'avés fait la faveur de m'écrire du 25. du paffé, dont je vous rends tres-humbles graces; elle me fut renduë comme j'étois à table avec Monfieur Frenicle à qui je la montray, & y ayant papier & ancre fur le buffet, je le priay de vous écrire quelque petit mot fur ce que vous y difiés fur fon fujet, je vous envoye fon écrit: il me fait fouvenir fort fouvent d'un Aumônier qu'avoit le feu Roy d'Angleterre, qui étoit un des plus Eloquens Predicateurs de fon temps, & tres-fubtil Theologien: mais depuis que la guerre fut commencée il n'y avoit plus moyen de le faire précher ou parler de fa fcience, il n'avoit d'autres idées en fon imagination que de machines de guerre & des ftratagemes pour prendre des Villes, en quoy il n'entendoit rien du tout: ainfi Monfieur Frenicle ne me veut entretenir d'autre chofe que de la Theologie Myftique & de fes penfées fur le Franc-arbitre, ou fur la predeftination, quittant le rang qu'il pourroit poffeder d'un des plus grands Mathematiciens du fiecle pour un des moindres Theologiens: car c'eft bien tard de commencer la Phyfique & la Theologie aprés l'âge de cinquante ans, je dis la Phyfique, parce qu'il eft mal-aifé d'étre un grand Theologien fi on n'eft un folide Phyficien, & fi on n'a une veritable connoiffance de la nature dont le fommet fert de bafe à la grace. Mais je dois bien prendre garde de m'engager en ce que j'entens auffi peu & encore moins que luy, je reviens à ce que je fçay de fcience certaine, dont je vous feray demonftration evidente toutes les fois que l'occafion s'en prefentera, & c'eft que je fuis, &c.

Lettre de Monfieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 13. Fevrier 1658.

MONSIEUR,

Je fuis fur le point d'entrer en carroffe pour aller à Roüen, dont je ne croy pas revenir de 15. jours ou trois femaines, c'eft pourquoy dés que j'eus receu vôtre pacquet du 27. du paffé j'allay chez Monfieur Clerfelier, & n'y ayant pas moyen de luy faire faire des copies de vos écrits avant mon départ, je creus que vous trouveriez bon que je les luy confiaffe fur la parole qu'il me donna de vous les rendre fidelement dés qu'il auroit tiré copie de ce qu'il luy faut: c'eft un fort honnéte homme,

& fort vôtre serviteur, il m'a dit qu'il se donneroit l'honneur de vous écrire, par cét Ordinaire. Au reste, Monsieur, quand bien je demeurerois icy je ne serois pas assez vain pour accepter la charge que vous voudriez m'imposer, elle est trop pesante pour ma foiblesse, je sçay trop bien, *quid ferre recusent, quid valeant humeri*, pour pouvoir étre Arbitre entre deux Grands Personnages il faut aller du pair avec eux; Crassus s'aquitta bien mal de cette fonction entre Cæsar & Pompée, n'ayant pas les reins aussi forts qu'eux. Il est vray que ceux qui sont dans les valées peuvent discerner la hauteur des plus grandes montagnes pour en avoir de l'admiration. Mais pour bien juger de ce qu'il y a au sommet de quelqu'une d'elles il faut étre monté aussi haut sur une autre. Vous me permettrez donc de vous dire avec le grossier Palæmon, *non nostrum inter vos tantas componere lites*, Et pour ce qui est de la chaleur avec laquelle vous, Monsieur,& Monsieur Descartes avés soûtenu vos sentimens, je ne serois pas d'avis d'en rien oster ou changer, pourveu qu'il n'y ait rien qui soit offenceant, ce qu'on ne peut presumer de deux aussi grands hommes, & à quoy Monsieur Clerselier prendra garde. Car de vouloir étouffer ce petit feu brillant & étincelant, ce seroit ôter beaucoup de la grace & de la force à une contestation d'esprit & de science, & c'est une des raisons pourquoy les disputes aux Universitez des Suisses sont si peu agreables, leur maniere d'argumenter étant bien éloignée de la vivacité des Bacheliers de la Sorbonne qui pressent avec vehemence & avec chaleur; car cette chaleur provient d'un feu qui ne brûle pas, mais qui semble donner la lumiere & la vie comme celle du Soleil. Je ne sçaurois m'empécher de vous envoyer quelques Vers que le plus grand genie de nôtre Isle pour les Muses écrivit au Chancelier Bacon, qui étoit son grand amy, & que vous témoignez étre fort le vôtre en le citant souvent. Je vous diray comment je les ay rappellez en ma memoire: l'autre jour m'entretenant avec une personne de grand merite de vos rares qualitez, je luy recitay ces vers y mettant vôtre nom au lieu de celuy de Baco, il en voulut avoir une copie, je la luy fis transcrire par mon Secretaire sur le broüillard que j'en fis à la hâte, il vous en auroit fait aussi une copie s'il eût esté chez moy, mais je viens de l'envoyer chez Monsieur l'Ambassadeur d'Angleterre. Je suis, &c.

Lettera del Signor Digby al Signor Di Fermat.

Di 15. Maggio 1658

ILL.MO SIG. PADRON COL.MO,

Haurei temuto d'infastidire troppo V. S. Illustrissima con nuova lettera, se la sua ultima delli 4. del corrente, non m'havesse recata cagione (quantunque in soggetto di poco rilievo) di renderle qualche picciola servitù ò più presto ossequio e conformità alli suoi commandi; Havendo imparato dal savio, che come c'è tempo di parlare, vi lo è anche del silentio; & dallo spiritoso Poëta Thosco, che

Il silentio ancor suole
Haver prieghi e parole.

Ma lei havendomi fatto l'honore d'ordinarmi di mandarle un de' miei libri della Physica in Inglese, non l'ho voluto lasciar andare senza accompagnamento di queste poche righe, per ringratiarla della sua tanta compiacenza in dire che ha intento di trascorrerlo, per auvezzarsi cosi alla nostra rozza favella; rozza in quant'al suono, & ingrata all' orechia non auvezza a essa; ma forse, quanto alla copia, proprietà, & energia dell'espressioni, & all'eleganza e politezza in ogni altro genero, che non cede punto alle più eleganti e stimate, ne delle volgari, ne delle dotte, che habbino mai havuto prattica nel mondo, e che nelle poësie che habbiamo, non solo va del pari, ma auvanza di gran lunga li migliori ò Toscani, ò Latini, ò Greci; eccettuando però nell'Heroica Homero & Virgilio, i quali doi, senza contrasto, son fuori d'ogni comparatione con tutti de i secoli dopo loro, e però, prudentemente fece quel Grammatico ardito Giulio Scaligero (che maggior epitheto non gli posso conceder io, quantunque i pedanti moderni gl' affigghino il titolo invidioso di divino Critico) che in vece di far censura dell' ultimo e forse il minore di essi, gl' eresse un altare. Onde veramente alle volte lamento la sorte che ci ha fatti,

Penitus toto divisos orbe Britannos.

Poiche habbiamo parecchie compositioni Poëtiche lequali meritarebbono la luce & il godimento universale, e per lequali capire, ho conosciuto 4. persone di spiriti sublimi & ingegnosissimi (doi Francesi, e doi Italiani) che per haver visto delle grossieri interpretationi in prosa di certi carmi Inglesi, si sono applicati con fervore a studiare nostra lingua, per bever alla schietta fonte delle nostre acque, le quali hanno poi confessato haver gli più sedato la loro sete in simile materia, che qualsivoglia abondante fiume di altra regione in terra ferma. Per conformarmi dunque al voler di V. S. J. ho messo in mano del Messaggiero di Tolosa Lunedi passato un involto contenendo il mio detto libro, del quale veramente non ne haveva piu copia apresso di me, havendo per cio scritto in Inghilterra, doue è stato ristampato questo trattato tre ò quattro volte in ambedue le Università di Oxonio e Cantabrigia: e poi che lei si uvole penare di dar un' occhiata à questo mio componimento, mi rallegro molto che cio sia nella lingua nella quale io l'ho conceputo: Per esser che quantunque il tradottore sia stato huomo dottissimo, e la sua traduttione essaminata per tutto il Collegio de i Dottori Inglesi di questa Città tutti valenti Theologii quali la fecero fare per servir allo studio di tutti i loro seminarij, nientedimeno, egli è cosa certa, che ci è gran differenza tra l'original & il transcritto, inquanto al vigor dell'espressione, e credo che dopo haver vissuto sempre in nostra corte polita, e conversato continüamente co'l Bacono, il Seldeno e altri maggiori lumi della nostra Patria, non si stimarebbe vanità in me s'io mi attribuisse lo scriver correttamente in Inglese. E quando io feci il primo disegno di questo dicorso, godevo di tranquillità assai per spiegar con maggior chiarezza cio che voleva dire, essendo che lo feci nello spatio di quelli quasi doi anni ch'io fui continüamente su'l mare: durante il quale, è ben vero che quasi ogni giorno hebbi occasione di prepararmi a combattere con la mia flotta (essendo nel mar mediterraneo circondata dalle forze Francesi e Spagnuole, con chi hauevamo allora guerra, e anche dalle Vineziane) nientedimeno mi avuanzava tanto tempo, che se non fosse stato che per evitar il tedio (ancorche il comando del Rè fù il mio primo motivo) mi accingevo ogni giorno con premura a metter qualche cosa in carta, dimodo che posto con ragione dire come quel più dotto & gentil cavagliero di tutta la nation Castigliana, e Prencipe de'loro Poëti Garcilasso de la Vega,

Entre las armas del sangriento Marte
Hurtè del tiempo esta breve suma,
Tomando hora la spada, hora la pluma.

Ma poi che lei si degna voler veder de i meschini parti del mio sterile ingegno, ho volsuto farle parte ancora d'un altro trattaticivolo che ho composto intorno all'infallibilità della Religione Catholica per dar sodisfatione a un' de' maggiori genij ch'io habbia mai conosciuto, e che finalmente l'ha convinto. Perche lui non si contentava di considerar Iddio come un Legislatore, che volesse dimonstrare il suo potere con dar premij ò pene secondo una volontà imperiosa senza motivo ragionevole fondato in natura, e però bisognò penetrar nella Filosofia della Religione, e perche essa sia necessaria a gl'huomini. In una parola, bisognò combattere in lui tutte le maggiori forze de' più dotti Sociniani (la più terribil' setta d'Here tici che sia mai stata) nel che fare ho qui impiegato tutto'l vigore del mio debbole ingegno in una ſtrada non calcata d'altri, & tutte le piu ſquiſite eſpreſſioni che sò della lingua noſtra, & non ne feci ſtampare ſe non 30. copie per dar ad amici confidenti. Gli mando ancora un altro trattato Ingleſe, che ha fatto gran romore in Inghilterra & che molti vogliono attribuire a me, ancor che ſia ſotto il nome del Signor Bianchi (conoſciuto ſotto titolo di Thomas Anglus) per eſſer che i ſentimenti dell'Autor & li miei ſiano preciſamente gl'iſteſſi. Dimando perdono de'l mio tanto importunarla, & la riveriſco, &c.

Lettre de Monſieur Paſcal à M. de Fermat.

De Bienaſſis le 10. Aouſt 1660.

MONSIEUR,

Vous étes le plus galand homme du monde, & je ſuis aſſurement un de ceux qui ſçay le mieux reconnoître ces qualitez là & les admirer infiniment, ſur tout quand elles ſont jointes aux talens qui ſe trouvent ſingulierement en vous; tout cela m'oblige à vous témoigner de ma main ma reconnoiſſance pour l'offre que vous me faites, quelque peine que j'aye encore d'écrire & de lire moy méme: mais l'honneur que vous me faites m'eſt ſi cher que je ne puis trop me hâter d'y répondre. Je vous diray donc, Monſieur, que ſi j'étois en ſanté je ſerois volé à Toloſe, & que je n'aurois pas ſouffert qu'un homme comme vous eût fait un pas pour un homme comme moy. Je vous diray auſſi que quoy que vous ſoyez celuy de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand Geometre, ce ne ſeroit pas cette qualité là qui m'auroit attiré. Mais que je me figure tant d'eſprit & d'honéteté en vôtre converſation que c'eſt pour cela que je vous rechercherois. Car pour vous parler franchement de la Geometrie, je la trouve le plus haut exercice de l'eſprit, mais en méme temps je la connois pour ſi inutile que je fais peu de difference entre un homme qui n'eſt que Geometre, & un habile artiſan. Auſſi je l'appelle le plus beau métier du monde, mais enfin ce n'eſt qu'un métier; & j'ay dit ſouvent qu'elle eſt bonne pour faire l'eſſay, mais non pas l'employ de nôtre force: de ſorte que je ne ferois pas deux pas pour la Geometrie, & je m'aſſure que vous étes fort de mon humeur. Mais il y a maintenant cecy de plus en moy que je ſuis dans des études ſi éloignées de cét eſprit là, qu'à peine me ſouviens je qu'il y en ayt. Je m'y étois mis il y a un an ou deux par une raiſon tout a fait ſinguliere, à laquelle ayant ſatisfait je ſuis en hazard de n'y plus penſer jamais, outre que ma ſanté n'eſt pas encore aſſez forte, car je ſuis ſi foible que je ne puis marcher ſans baſton, ny me tenir à cheval. Je ne puis méme faire que trois ou quatre lieües au plus en carroſſe, c'eſt ainſi que je ſuis venu de Paris icy en vingt-deux jours: les Medecins m'ordonnent les eaux de Bourbon pour le mois de Septembre, & je ſuis engagé autant que je puis l'étre depuis deux mois d'aller de là en Poitou par eau juſqu'à Saumur pour demeurer juſqu'à Noël avec Monſieur le Duc de Roanes Gouverneur de Poitou, qui a pour moy des ſentimens que je ne vaus pas. Mais comme je paſſeray par Orleans en allant a Saumur par la riviere, ſi ma ſanté ne me permet pas de paſſer outre, j'iray de là à Paris; Voilà, Monſieur, tout l'état de ma vie preſente, dont je ſuis obligé de vous rendre compte, pour vous aſſurer de l'impoſſibilité où je ſuis de recevoir l'honneur que vous daignez m offrir, & que je ſouhaite de tout mon cœur de pouvoir un jour reconnoître ou en vous ou en Meſſieurs vos enfans, auſquels je ſuis tout devoüé, ayant une veneration particuliere pour ceux qui portent le nom du premier homme du monde. Je ſuis, &c.

Clariſſimo

VIRO CLARISSIMO DOM. GASSENDO

Petrus de Fermat. S. P.

De proportione quâ gravia decidentia accelerantur.

PRonuntiavit Galileus motum uniformiter acceleratum eſſe eum, qui à quiete recedens temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta ſibi ſuperaddit.

Eum verò qui æqualibus ſpatijs æqualia celeritatis momenta ſibi ſuperaddit, adeo non convenire motui gravium deſcendentium affirmat, ut ex eo ſuppoſito motum in inſtanti fieri deducat, & ut ſibi perſuaſit, facillimè demonſtret.

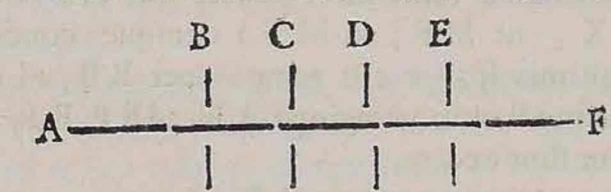
Sed concedatur, ſi placet, viro perſpicaci & Lynceo indemonſtrata concluſio dummodò ſit vera. Demonſtrationem enim dum primo ſtatim obtutu,

Aut videt, aut vidiſſe putat per nubila.

Nihil mirum ſi lectoribus minus utique Lynceis parum videatur ſatisfeciſſe.

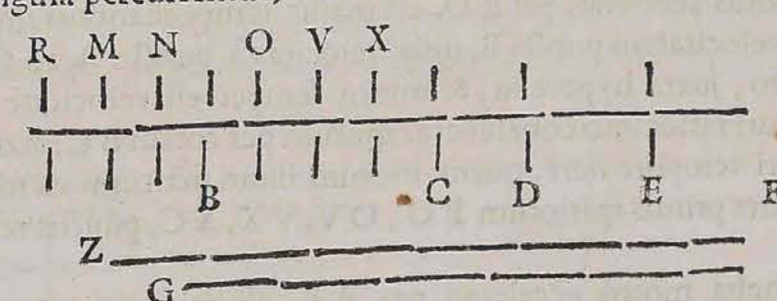
Ut igitur conſtet ſuus honor Galileo, neque ampliùs de ipſius illatione ambigatur, aut rationibus tantum probabilibus diſputetur, propoſitionem ipſam more Archimedæo hîc demonſtratam habebis.

Si quotlibet rectæ ad unum punctum concurrentes exponantur in continua proportione, earum intervalla erunt in eadem ratione, verbi gratiâ,



Sint rectæ A F, B F, C F, D F, E F, &c. in continua proportione, erunt intervalla ipſarum A B, B C, C D, D E in eadem ratione. Eſt enim ut tota A F ad totam B F ita ablata B F, à priore ad C F ablatam à poſteriore. Ergo ita reliqua A B ad reliquam B C, ut tota ad totam, hoc eſt, ut A F ad B F, & ſic de cæteris. Eâdem ratione demonſtrabimus ut A F, ad C F, ita eſſe A B ad C D, & ut B F, ad D F, ita eſſe B C, ad D E, &c.

Si intelligatur motus à puncto F verſus punctum A continuè acceleratus ſecundum rationem decurſorum ſpatiorum & exponantur quotlibet continuè proportionales ut A F, B F, E F, &c. tempus in quo mobile percurret ſpatium D E, erit æquale tempori, in quo idem mobile percurret ſpatium D C, denique ſpatia omnia E D, D C, C B, eodem tempore ſingula percurrentur,



Demonſtrabimus primò ſpatia C B, B A, eodem tempore in ſuppoſito motu percurri. Si enim tempus per A B, non eſt æquale tempori per B C, erit vel majus, vel minus, Sit primum majus ſi fieri poteſt. Ergo tempus per A B, eſt ad tempus per B C, ut aliqua recta major ipſa B F, ad ipſam B F: ſit recta illa Z. Ergo eſt ut tempus per A B, ad

Hæc epiſtola Typis edite fuit tomo 6. operum Gaſſendi inter epiſtolas ad eum ſcripras.

tempus per B C ita recta Z ad rectam B F, sumantur inter rectas N F, B F, tot mediæ in continua proportione, ut R F, M F, N F, donec minor ex ipsis ut A F, sit minor quam recta Z, quod quidem necessariò eventurum vel ex sola mediæ inventione, ejusque iteratâ, quoties opus fuerit, operatione, quis non videt?

Erunt ergo continuæ proportionales rectæ AF, RF, MF, NF, BF, cùm autem sit ut A F, ad B F, ita B F, ad C F, & ita A B, ad BC, ergo poterit continuari proportio sub eodem numero terminorum, ut sint etiam proportionales B F, O F, V F, X F, C F, idque in eadem superiorum ratione.

His ita positis & constructis considerentur & comparentur singula spatia A R, R M, M N, N B, singulis spatijs B O, O V, V X, X C, singula nempe singulis, hoc est spatium A R, spatio B O: si igitur per spatium A R, fuerit motus uniformis juxta gradum velocitatis in puncto R acquisitum, tempus per A R, ad tempus per B O, componeretur ex ratione spatij A R, ad spatium B O, & vicissim ex ratione velocitatis per B, ad velocitatem per R, quod notissimum est, & Galileus ipse demonstravit propositione quintâ tractatus de motu æquabili.

At ut spatium A R, ad spatium B O, ita per primam propositionem recta A F, ad rectam B F, & ut velocitas per B, ad velocitatem per R, ita ex supposita motus accelerati juxta spatia decursa definitione, recta B F ad rectam R F, ergo tempus per A R, hoc casu ad tempus per B O, componeretur ex ratione A F, ad B F, & ex ratione B F, ad R F, esset igitur motus per A R, ad motum per B O, ut recta A F, ad rectam R F: deinde si per spatium R M, fieret motus uniformis juxta gradum velocitatis in O acquisitum, eâdem ratione probabitur motum per R M, ad motum per O V, esse ut recta R F, ad rectam M F: similiter considerando velocitates punctorum N, & V, erit tempus per M N, ad tempus per V X, ut M F, ad M F: denique considerando velocitates punctorum B, & X, in ultimis spatijs erit tempus per R B, ad tempus per X E, ut N F, ad B F, sed omnes ejusmodi rationes nempe A R, ad R F, R F, ad M F, M F ad N F, N F, ad B F, ex constructione sunt eædem.

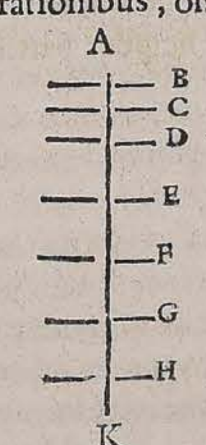
Ergo tempus omnium motuum per totam A B, ad tempus omnium motuum per totam B C, in utrisque spatijs, ita ut diximus, consideratorum est ut recta A F, ad R F, sive N F, ad B F, sed tempus motus accelerati per A R, est minus tempore motus per A R uniformis juxta velocitatem in R, cùm enim à puncto R, usque ad punctum A, perpetuò ex hypothesi velocitas crescat, ergo à puncto R, ad punctum A, citiùs per motum acceleratum pervenitur, quàm si velocitas acquisita in R, eadem & uniformis usque ad punctum A, perseveraret. Eâdem ratione probabitur tempus motus accelerati per R M esse minus tempore motus uniformis per R M, si velocitas ipsius ultimo ipsius spatij M puncto respondeat. Denique constat motum per totam AB, acceleratum, ut fiet hypothesis, minori tempore fieri quàm motum alium fictitium ex motibus uniformibus juxta velocitates ultimis spatiorum A R, R M, M N, NB, punctis respondentes compositum, at contra tempus motus accelerati per B O, est majus tempore motus uniformis per B O, considerati juxta velocitatem puncti B, quia velocitas à puncto B, ad O, semper crescit in motu accelerato, juxta hypotesin, & minor semper est velocitate, quæ respondet puncto B: unde pari ratiocinio concludetur motum per totam B C, acceleratum, ut fiet hypothesis, majori tempore fieri, quàm motum illum fictitium ex motibus uniformibus juxta velocitates primis spatiorum B O, O V, V X, X C, punctis respondentes compositum.

Cum ergo tempus motus accelerati per A B, sit minus tempore motus illius fictitij per eandem A B, & contra tempus motus accelerati per B C, sit majus tempore motus illius fictitij per eandem B C, ergo minor est ratio temporis motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C, quàm temporis motus fictitij per AB, ad tempus motus fictitij per BC: sed ut tempus motus accelerati per AB, ad tempus motus accelerati per B C, ita posuimus esse rectam Z ad rectam B F, & ut tempus

motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C, ita demonstravimus esse N F, ad B F, ergo minor est ratio rectæ Z ad rectam B F, quàm rectæ N F, ad eamdem B F, quod est absurdum, cùm recta Z sit major recta N F.

Ergo tempus motus accelerati per A B, non est majus tempore motus accelerati per B C. Eâdem facilitate probabimus tempus motus per A B, accelerati non esse minus tempore motus accelerati per B C: sit enim minus, si fieri potest, erit igitur ut tempus motus per AB, accelerati ad tempus motus accelerati per B C, ita recta minor ipsa B F, ad ipsam B F, esto itaque recta illa minor quam B F G, & sit tempus motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C, ut G, ad rectam B F, & inter rectas B F, C F, exponatur continuè proportionalium series quarum maxima O F, sit major quàm G. Eodem quo usi sumus in superiori demonstrationis parte ratiocinio conferendo spatia in ipsa B, inter similes proportionales intercepta, cum spatijs B O, O V, V X, X C, mutemus solummodo velocitates uniformes, & fingamus verbi gratiâ motum per A R, uniformem fieri juxta gradum velocitatis in puncto A acquisitæ, motum verò uniformem per B O, fieri juxta velocitatem acquisitam in puncto, O & sic in reliquis spatijs in quibus patet omnes velocitates per A B, uniformes augeri, velocitates verò per B C, uniformes minui, contrà id quod in priore demonstrationis parte fuerat usurpatum. Concludetur ut suprà tempus motus hujusmodi uniformis per A R, ad tempus motus uniformis per B O, esse ut recta R F, ad rectam A F, dum enim augentur velocitates, tempora motuum minuuntur: similiter tempus motus uniformis per R M, ad tempus motus uniformis per O V, erit ut M F, ad M R: denique tempus motus fictitij illius per A B, ex uniformibus compositi ad tempus motus fictitij per B C, ex uniformibus pariter compositi erit ut R F, ad A F, cum omnes rationes sint eædem, hoc est ut O F, ad BF, per primam propositionem.

Tempus autem motus accelerati per A B, est majus tempore motus illius fictitij ex uniformibus compositi, cum supposuerimus in motibus uniformibus auctas fuisse velocitates, quæ nimirùm in hoc casu primis spatiorum A R, R M, &c. punctis respondent; sed & tempus motus accelerati per B C, est minus tempore motus fictitij ex uniformibus compositi, quia hîc velocitates minuuntur, & ultimis spatiorum B O, O V, &c. punctis respondent. Ergo major est ratio temporis motus accelerati per B C, quam temporis motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C: sed ut tempus motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C; ita est recta G, ad rectam B F, ex suppositione: ut autem tempus motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C, ita recta O F, ad B F, ex demonstratione; ergo recta G, ad rectam B F, majorem proportionem habet, quàm recta O F, ad rectam B F, quod est absurdum, cùm recta G, sit minor rectâ OF, ex constructione: non ergo tempus motus accelerati per AB, est minus tempore motus accelerati per BC, sed nec majus ut supra demonstratum est, ergo est æquale. Eadem ratione patet tempus motus accelerati per C D, æquari tempori motus accelerati per A B, & tempori motus accelerati per B C, & continuatis, si placet, in infinitum rationibus, omnia omninò spatia eodem tempore percurri.



His positis tertiâ propositione mentem Galilei revelamus, aut propositionis veritatem astruimus. Intelligatur motus gravium descendentium à quiete expuncto A usque ad punctum H, verbi gratia, & supponatur, si fieri potest, velocitatem gravis cadentis accelerari juxta rationem spatiorum decursorum. Ponatur motus jam factus ab A, usque ad H, tempore unius minuti, aut altero quovis tempore determinato, & supponatur motus continüari usque ad punctum K, aio motum per HK, fieri in istanti. Si enim motus per HK, non fiat in instanti, fiet in tempore aliquo determinato, quod per aliquem numerum multiplicatum excedet tempus in decursu spatij AH insumptum. Ponatur numerus multiplicans 5. ita ut tempus motus per HK, quinquies sumptum excedat tempus motus per AH, rectis KA, HA, sumatur tertia proportionalis GA, & toties continüetur proportionalium series, donec spatiorum interceptorum numerus excedat numerum quinque: fiant ergo ex proportionalibus continüatis sex, verbi gratiâ, spatia ultra punctum H, quæ sint HG, GF, FE, ED, DE, CB, ergo tempus motus per HG, per præcedentem est æquale tempori motus per HK, similiter tempus motus per GF, est æquale tempori motus per HK. Denique motus per totam HB, fiet in tempore quod ad tempus per HK, erit sextuplum. At tempus temporis per HK, quintuplum est majus tempore motus per AH, ergo à fortiori tempus motus per HB, tempore motus per totam HA, est majus, quod est absurdum. Ergo vera remanet Galilei illatio quamvis eam ipse non demonstrârit.

Hæc breviter & familiariter, Clarissime Gassende, scripsimus, ne tibi imposterùm facessat negotium aut Cazræus, aut quivis alius Galilei adversarius, & in immensum excrescant volumina, quæ unicâ demonstratione, vel fatentibus ipsis authoribus aut destruentur, aut inutilia & superflua efficientur. Vale.

*Lettre de Monsieur Gassendi à Monsieur de ****

MONSIEUR,

Il y a déja quelque temps que Monsieur le President de Donneville s'étant donné la peine de me venir voir, me laissa un écrit de Monsieur de Fermat touchant l'accroissement de vîtesse qui est en la cheute des corps, & parce que je n'ay point eu l'honneur de le revoir dépuis, & que je ne sçay point son logis pour le luy pouvoir rendre, & que d'ailleurs il me semble qu'il me dit en passant qu'il avoit charge de vous le remettre aprés qu'il me l'auroit monstré, je me suis advisé de vous l'envoyer sans plus attendre, avec les tres-humbles remerciemens que je dois à mondit sieur de Fermat de la bonté qu'il a eüe de m'en donner la communication. Il seroit superflu de vous dire, combien j'en suis satisfait, puisque comme vous sçavés mieux que tout autre rien ne peut partir d'une telle main qui ne soit parfait en tout point. Je suis, &c.

*Lettera del Signor Benedetto Castelli Abbate di Verona, al Signor di ****

ILL.MO ED ECC.MO SIG.RE

Ho Letti i pensieri sottilissimi del Sig.r di Fermat intorno al centro di gravita, e confesso libetamente che mi sono parsi belli, & degni di quello sublime intelletto, che mi fu celebrato con alta lode dal Signor di Beaugrand, quando passò per Roma, e voglio credere che ne habbia assoluta dimostratione; e perche il Sig.re di Beaugrand mi disse di havere dimostrata una simile propositione, cioè, che il medesimo grave posto in diverse lontananze dal centro della terra pesava inegualmente, e che il peso al peso era come la distanza alla distanza dal centro della terra, io mi applicai à pensare à questa materia, e pretesi allhora di havere ritrovata la dimostratione, mà dopo essendo mi state promosse alcune difficoltà, mi raffreddai in questa specolatione: mi ricordo però che ancor io ne deducevo la medesima consequenza, che deduce ancora il Signor di Fermat, cioè, che il grave che haverà il suo centro di gravità col centro della terra non haverà peso alcuno: e di più che la terra tutta non ha peso: e in oltre ne cavai, che descendendo un grave verso il centro della terra non solo và mutando peso di momento in momento, ma (cosa che puo parere più marauigliosa) il suo centro di gravità si va continuamente movendo nella mole di esso grave; di più che un grave di qualsivoglia figura che si mova in se medesimo circolarmente pure va continuamente mutando il suo centro di gravità: e per tanto facilmente concorro con il Sigr. di Fermat, che il centro di gravità non sia in natura tale quale l'hanno descritto communemente i Mechanici: e se io credessi che le mie debolezze potessero esser care al Signor di Fermat, gli ne mandarei una copia, non solo per ricevere documenti da S. Sig.ria Ill.ma ma per fare acquisto di un tale e tanto padrone, al quale prego V. S. J. dedicarmi servitore di singolare devotione, e li bacio le mani.

VIRO CLARISSIMO DOM. DE RANCHIN, Sen. Thol. Petrus de Fermat S. P.

POlyænum tibi tuum, Vir Clarissime, mitto, sed observanda in eo quædam sup-
peditat codex manuscriptus optimæ notæ auctorum rei militaris hactenus ine-
ditorum quem penes me habeo; apud eum collectionem quamdam præceptorum
& monitorum militarium inveni sub nomine Παρεκβολῶν, cujus auctorem licet manus-
criptus non detegat, colligo tamen ex glossario Græcobarbaro Meursij, eum esse He-
ronem, non illum quidem Alexandrinum cujus spiritalia & alia quædam opuscula
extant, & qui antiquo, hoc est, optimo ævo, Græcè scripsit, sed alium posterioris
ævi, quod pleraque ipsius vocabula Græcobarbara satis innuunt; utrumque, ætatem
nempe & nomen auctoris, confirmat Meursius in voce κοντουβέρνιον ubi citantur sequen-
tia Heronis verba in παρεκβολαῖς, ἀπέστειλε νῦν τῆς νυκτὸς εἰς τὰ ἄπληκτα αὐτῶν καὶ τὰ κοντουβέρνια,
hæc enim verba cum in meo manuscripto desint, supplendum in eo nomen auctoris
ex manuscripto Meursii; tempus vero quo hæc scribebantur & quo voces ἄπληκτον &
κοντουβέρνιον in usu erant, ultra septingentos plus minùs annos non videtur excurrere;

hoc autem παρεκβολῶν tractatu, pleraque Polyæni ſtratagemata ſuppreſſo authoris nomine alijs ſæpe verbis referuntur, quandoque & ijſdem, unde ampla emergit emendationum & notarum criticarum penus; celebriores aliquot tibi, vel ſi mavis doctis omnibus tuo nomine jure repræſentationis libenter exhibeo.

Cleomenis ſtratagema narratur lib. 1. Polyæni pag. 20. editionis Tornæſianæ ſequentibus verbis, Κλεομένης Ἀργείοις ἐπολέμει καὶ ἀντεστρατοπέδευσεν, ἣν τοῖς Ἀργείοις ἀκριβὴς φυλακὴ τῶν δρωμένων τοῖς πολεμίοις, καὶ πάντα ὅσα Κλεομένης βούλοιτο ὑπὸ κήρυκος ἐσήμαινε τῇ στρατιᾷ, καὶ αὐτοὶ τὰ ἴσα δρᾶν ἐσπούδαζον, ὁπλιζομένων ἀνθωπλίζοντο, ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, ἀναπαυομένων ἀντεναπαύοντο, Κλεομένης λάθρα παρέδωκεν ὅταν ἀριστοποιεῖσθαι κηρύξῃ, ὁπλίσασθαι, ὁ μὲν ἐκήρυξεν, οἱ δὲ Ἀργεῖοι πρὸς ἄριστον ἐτράποντο, Κλεομένης ὁπλισαμένους ἐπαγαγὼν ἀμαχεὶ ἀνόπλους καὶ γυμνοὺς τοὺς Ἀργείους ἀπέκτεινεν, hoc loco poſt verba ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, addendum ex manuſcripto ἀριστώντων, ἠρίστων, quod finis ipſius ſtratagematis pleniſſimè confirmat.

Themiſtoclis ſtratagema, eodem libro pag. 44. refertur hoc modo, Θεμιστοκλῆς Ἰώνων Ξέρξῃ συμμαχούντων, ἐκέλευσε τοῖς Ἕλλησι καταγράφειν ἐπὶ τοὺς τείχους, Ἄνδρες Ἴωνες οὐ δίκαια ποιεῖτε στρατεύοντες ἐπὶ τοὺς πατέρας, τούτων ἀναγινωσκομένων βασιλεὺς ὑπόπτους αὐτοὺς ἐποιήσατο, corrigendum ex manuſcripto ἐλογίσατο, quam eſſe veram lectionem innuit ſenſus.

Ageſilai ſtratagema occurrit lib. 20. pag. 86. Ἀγησίλαος, ait ille, ἐν Κορωνείᾳ Ἀθηναίους ἐνίκησεν, ἤγγειλέ τις, οἱ πολέμιοι φεύγουσιν εἰς τὸν νεὼν τῆς Ἀθηνᾶς, ὁ δὲ προσέταξεν ἐᾶν αὐτοὺς οἷ καὶ βούλοιντο ἀπιέναι, ὡς ἄρα εἴη σφαλερὸν συμπλέκεσθαι τοῖς ἐξ ἀπονοίας μαχομένοις, ibi loco vocis Ἀθηναίους reponendum ex manuſcripto Θηβαίους.

Aliud Ageſilai ſtratagema refert Polyænus eodem libro pag. 103. Ἀγησίλαος ἐν ταῖς διαπρεσβείαις ἠξίου τῶν πολεμίων τοὺς μάλιστα δυνατοὺς πέμπεσθαι πρὸς αὐτὸν οἷς διαλέξηται περὶ τῶν κοινῇ συμφερόντων, τούτοις ἐπὶ πλεῖστον συγγενόμενος, καὶ κοινωνῶν ἑστίας καὶ σπονδῶν, ταῖς πόλεσιν στάσιν ἐνεποίει διὰ τὰς τῶν πολλῶν ὑποψίας. Vulteius hoc modo interpretatur: Ageſilaus in legationibus petebat ab hoſtibus ut maxime potentes ad ſe mitterent; cum quibus de communi utilitate ſermones conferret, cum his plurimum habens conſuetudinis, & communicans focum ac cineres, ſeditiones in urbibus excitabat propter vulgi ſuſpiciones. Videtur interpres loco verbi σπονδῶν quod eſt in textu Græco, legiſſe σποδῶν cum vertat cineres, ſed nihil mutandum ex manuſcripto evincitur ubi leguntur hæc verba καὶ ὅρκους πρὸς αὐτοὺς ποιούμενος.

Clearchi ſtratagema narratur libro eod. pag. 110. his verbis, Κλέαρχος ἦν ἐν Θρᾴκῃ, νυκτερινοὶ φόβοι τὸ στράτευμα κατελάμβανον, ὁ δὲ παρήγγειλεν, εἰ γένοιτο νύκτωρ θόρυβος, μηδένα ὀρθὸν ἀνίστασθαι, ὁ δὲ ἀναστὰς ἀναιρείσθω, τὸ παράγγελμα τοῦτο ἐδίδαξε τοὺς στρατιώτας καταφρονεῖν τοῦ νυκτερινοῦ φόβου. Verba quædam hîc ſupplenda ex manuſcripto, quæ tamen videtur in ſuo codice vidiſſe interpres Latinus, licet deſint in editione græcâ Tornæſij, ſunt autem ſequentia, καὶ οὕτως ἀνεπαύσαντο ἀναπηδῶντες καὶ ταρασσόμενοι. Atque ita deſierunt exilire ac perturbari.

Perdiccæ ſtratagema ſequens legitur libro 4. pag. 114. Περδίκκας Ἰλλυριῶν καὶ Μακεδόνων πολεμούντων ἐπειδὴ πολλοὶ Μακεδόνες ἡλίσκοντο ζωγρεῖν, καὶ οἱ λοιποὶ Μακεδόνες λύτρων ἐλπίδι πρὸς τὰς μάχας ἦσαν ἀτολμότεροι, ἐπεκηρυκεύσατο περὶ λύτρων, ἐντειλάμενος τῷ κήρυκι ἐπανελθόντι ἀγγεῖλαι ὡς ἄρα λύτρα Ἰλλυριοὶ μὴ προσίοιντο, ἀλλὰ ψηφίσειαν τοὺς αἰχμαλώτους κτιννύειν. οἱ δὴ Μακεδόνες ἀπογνόντες τῆς διὰ τῶν λύτρων σωτηρίας εὐτολμότεροι πρὸς τὰς μάχας ἐγίνοντο, ὡς ἐν μόνῳ τῷ νικᾶν ἔχοντες τὸ ζώζεσθαι, quod ſic interpretatur Vulteius. Perdiccas Illyriis & Macedonibus bellum gerentibus cum multi Macedones caperentur vivi, reliqui etiam redemptionis ſpe ad pugnam minùs alacres erant, quibus legationem inter ſe de redemptoriis muneribus mittentibus, præcepit legato ut reverſus nuntiaret ſe redemptoria munera Illyriorum non accepturum, ſed condemnatos captivos morte affecturum, Macedones deſperatâ ſalute redemptivâ audaciores ad pugnandum reddebantur, quippe quibus in ſolâ victoriâ ſalus poſita eſſet. In hoc ſtratagemate vocem Ἰλλυριοὶ mutandam in Ἰλλυριῶν indicat nota marginalis editionis Tornæſianæ; ſi vera eſſet explicatio Vulteii, non ſolùm vera ſed & neceſſaria eſſet illa emendatio, ſed frigidiſſimum eſſet ſtratagema, ſi ſequeremur ſenſum interpretis: Polyænus quippe vult Perdiccam præcepiſſe legato, ut

reverſus nuntiaret Illyrios redemptoria munera non accepturos, & hic eſt verus ſenſus ſtratagematis, quem Hero aliis verbis, ſecundùm hanc quæ eſt vera & germana interpretatio, expreſſit in manuſcripto his verbis, ἐπετήδευσε τοιοῦτον, παρεσκεύασε τινὰ ὡς πρόσφυγα ἐλθόντα ἀπὸ τῶν πολεμίων εἰπεῖν ὅτι οἱ πολέμιοι ἐβουλεύσαντο καὶ ἀπεκύρωσαν ἵνα ὅσους κρατήσουσιν αἰχμαλώτους ἀποκτείνωσι.

Alexandri ſtratagema refertur etiam lib. 4. pag. 248. verbis ſequentibus, Ἀλέξανδρος Δαρείῳ παρατάσσεσθαι μέλλων, παράγγελμα τοῖς Μακεδόσιν ἔδωκεν. ἢν ἐγγὺς γένησθε τῶν Περσῶν εἰς γόνυ κλίναντες ταῖς χερσὶν διατρίβετε τὴν γῆν, ἢν δὲ ἡ σάλπιγξ ὑποσημήνῃ τότε δὴ ..... Μακεδόνες οὕτως ἐποίησαν, οἱ δὲ Πέρσαι σχῆμα προσκυνήσεως ἰδόντες, τὴν πρὸς τὸν πόλεμον ὁρμὴν ἐξέλυσαν καὶ ταῖς γνώμαις ἐγένοντο μαλακώτεροι. Δαρεῖος δὲ ἐκυδριοῦτο καὶ φαιδρὸς ἦν, ὡς ἀμαχὶ κρατῶν, οἱ Μακεδόνες ὑπὸ τῷ συνθήματι τῆς σάλπιγγος ἀναπηδήσαντες ῥύμηδὸν ἐμβάλλουσι τοῖς πολεμίοις καὶ τὴν φάλαγγα ῥήξαντες ἐς φυγὴν ἐτράποντο.

Hoc loco deſunt quædam verba poſt vocem τότε, quæ ſupplenda ex manuſcripto ubi narratio eſt integra & elegans; lacuna itaque ex eo ſic replenda, τότε μετὰ θυμοῦ καὶ ἀνδρείας τοῖς πολεμίοις προσβάλλετε.

Pammenis ſtratagema tale proponitur libro 5. pag. 385. Παμμένης ὀλίγην ἔχων δύναμιν ὑπὸ πλειόνων ἀποληφθεὶς ἔπεμψεν αὐτομόλον ἐς τὸ τῶν πολεμίων στρατόπεδον, ὁ δὲ σύνθημα ἐκμαθὼν ἤγγειλε τῷ Παμμένει, ὁ δὲ νυκτὸς ἐπιθέμενος τοῖς πολεμίοις, πολλοὺς αὐτῶν φθείρας διεξιππάσατο αὐτὸς σύνθημα, τοῖς δὲ ἦν ἀπορία γνωρίζειν ἐν σκότει τοὺς οἰκείους μὴ δυναμένοις διὰ τοῦ συνθήματος.

Hîc addenda ex manuſcripto poſt verbum αὐτὸς ſequentia, αὐτὸς μὲν καὶ ὁ τούτου στρατὸς ἐγίνωσκον τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα, ἐκείνοις δὲ ἀπορία ἦν ἐν τῷ σκότει τῆς νυκτὸς γνωρίζειν τοὺς ἰδίους ἢ τοὺς πολεμίους, τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα ἀποκρινομένων.

Pompiſci ſtratagema refertur lib. 5. pag. 402. Πομπίσκος περιστρατεύων πόλιν, ἐπὶ μὲν τὴν πολλὴν τῆς χώρας ἐξιέναι τοὺς πολεμίους ἐκώλυσεν, ἐπὶ δὲ τόπον ἕνα συνεχῶς .... καὶ τοῖς λῃζομένοις ἀπέχεσθαι τοῦ τόπου τούτου προσέταξεν, οἱ δὲ ἐκ τῆς πόλεως ἀδεῶς ἐνταῦθα προΐεσαν, ὁ δὲ παρὰ τῶν σκοπῶν, ὡς ἔμαθεν, τοὺς ἥκοντας πολλοὺς ἐπιθέμενος τοὺς πλείστους αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς quæ hîc vulgò legitur, corrigenda ex manuſcripto & loco illius reponendum συνεχώρει quod ex conjecturâ viderat Caſaubonus ut patet ex ipſius notis.

Alexandri Pherenſis ſtratagema refertur lib. 6. pag. 426. Ἀλέξανδρος Πάνορμον πολιορκοῦντος Λεωσθένους πρὸς ἅπασας τὰς Ἀττικὰς ναῦς φανερῶς ναυμαχεῖν οὐ θαρρῶν, διέπεμψεν ἐπὶ ἀκάτιον νύκτωρ, &c. legendum eſſe, ἐπὶ ἀκατίου, ut vult Caſaubonus in notis, confirmat codex manuſcriptus ubi legitur διὰ μικροῦ πλοιαρίου, quæ verba idem ſonant.

Cyri ſtratagema narrat Polyænus lib. 70. pag. 477. his verbis. Κῦρος Μήδοις παραταξάμενος τρὶς ἡττήθη; ἐπεὶ δὲ Περσῶν αἱ γυναῖκες καὶ τὰ τέκνα ἦσαν ἐν Πασαργάδαις τὴν τετάρτην μάχην ἐνταῦθα συνῆψε, πάλιν ἔφυγον οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ ἴδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖκας, παθόντες ἐπ' αὐτοῖς ἀνέστρεψαν, καὶ τοὺς Μήδους ἀτάκτους διώκοντας τρεψάμενοι, νίκην τηλικαύτην ἐνίκησαν, ὡς μηκέτι Κῦρον πρὸς αὐτοὺς ἄλλης δεηθῆναι μάχης.

Hîc loco vocis παθόντες corrigendum ex manuſcripto συμπαθόντες, quæ vox itidem reſtituenda in ſtratagemate Apollodori pag. 435. manuſcriptus noſter ex quo coniicimus vocem παθόντες mutandam in συμπαθόντες verbis ſequentibus rem narrat & ſtratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθείᾳ τούτων νικώμενοι, &c. vox autem illa melius authoris ſenſui reſpondet quam τὸ παθόντες vt legendum cenſuit Caſaubonus.

Darii ſtratagema narratur lib. 7. pag. 489. hoc modo. Δαρεῖος ἐπολέμει Σάκκαις τριχῇ διῃρημένοις, μίας ἐκράτησε μοίρας, τῶν δὲ Σακκῶν ἰζόντων τὰς ἐσθῆτας καὶ τὸν κόσμον καὶ τὰ ὅπλα περιέθηκε τοῖς Πέρσαις &c. hîc loco vocis ἰζόντων quæ eſt corrupta in editione Tornæſii, legendum ex manuſcripto ἀναιρεθέντων.

Scipionis continentiæ exemplum laude digniſſimum refertur lib. 8. pag. 568. ſequentibus verbis, Σκιπίων δορυάλωτον λαβὼν ἐν Ἰβηρίᾳ πόλιν Φοίνισσαν, ὡς οἱ φυγαγωγοὶ παρθένον ἤγαγον κάλλους ὑπερφυῶς ἔχουσαν, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα, τοῦ δὲ δῶρα προσκομίσαντος, ὁ δὲ καὶ ταῦτα συνεχαρίσατο, προῖκα φήσας ἐπιδιδόναι τῇ κόρῃ, &c. ibi vulgò legitur φυγαγωγοὶ quod interpres vertit captivorum ductores, ſed legendum ex manuſcripto, νυμφαγωγοί, hoc eſt virginum ductores, quæ correctio & veriſſima, & elegantiſſima, ut nullus ſuperſit dubitandi locus.

Plura adjungerem, ſed feriis jam deſinentibus quarum beneficio otium ſuppetebat, finem quoque huic παρεκβολῶν παρεκβολῇ imponimus. Vale & me ama.

VIRO CLARISSIMO D. DE PELLISSON, Libellorum supplicum Magistro.

Samuel de Fermat. *S. P.*

CRiticas observationes quas mihi nuper misisti, vir clarissime, sæpius legi non sine voluptate & admiratione; in illis enim ingenii, judicii, & doctrinæ dotes quas in te jampridem suspicimus ubique elucent: nihil autem invenire possim quod tanti muneris vice tibi referam, nisi commodùm egestati meæ succurrerent variæ lectiones quas vir tibi singulari conjunctus amicitiâ, cujus mihi jucunda semper est recordatio, margini apposuit quorumdam librorum quos sedulò pervoluebat, & quorum pleraque loca, sed ἐδῶ παρέργον, emendavit; scis enim quàm præcoci ille ubertate florum amænitatem fructuum maturitati junxerit, nec me latet quantâ ipse fiduciâ suas exercitationes solitus sit in tuum sinum effundere; licet autem omnes istæ quas excerpsi emendationes, vel parentis mei conjecturæ, tibi novitatis gratiâ non commendentur, illas tamen, quæ tua est comitas, te benignâ manu suscepturum non dubito.

Theonem Smyrnæum, ne te diutius morer, vir clarissime, nosti, auctorem operis illius cui titulus τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, quod prodromi instar est aut isagoges Philosophiæ Platonicæ, quæ nemini Geometriâ non initiato patebat: illud opus edidit Lutetiæ anno 1644. Ismael Bullialdus vir doctissimus & Latinitate donatum elegantibus notis illustravit; sed non omnibus illud mendis purgasse videtur, ut aliquot, ni fallor, exemplis, quæ sequuntur, planum fiet.

Primum occurrit pag. 78. illius operis ubi περὶ ἁρμονίας & συμφωνίας agit: locum illum exscribere non piget, ipsa enim series emendationis procul dubio necessitatem, & veritatem ostendet; τὰ γράμματα, ait ille, φωναὶ πρῶται εἰσὶ καὶ διαιρετοὶ καὶ ἐλάχισται, & inferiùs, τὰ δὲ διαστήματα ἐκ τῶν φθόγγων οἵτινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ διαιρετικαὶ καὶ στοιχειώδεις, huic voci διαιρετικαὶ asteriscus in margine respondet cum voce διαιρεταὶ, at hîc reponenda bis videtur vox ἀδιαιρετοὶ loco τοῦ διαιρετοὶ & διαιρετικαὶ, legendum nempe γράμματα φωναὶ εἰσὶ ἀδιαιρετοὶ, idque confirmat Manuel Bryennius cap. 1. lib. 2. Ἁρμονικῶν: legendum præterea φθόγγων οἵτινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ ἀδιαιρετοὶ, & hæc quoque lectio confirmatur verbis ejusdem Bryennii lib. 1. cap. 3. ubi dicit φθόγγος ἐστὶ ἀρχὴ ἁρμονίας ὡς ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ νῦν τοῦ χρόνου, punctum, vero & instans sunt ἀδιαιρετὰ & consequenter φθόγγος ἀδιαιρετὸς, non dividendi vim habens, ut uvlt interpres Latinus: nec immerito Bacchius Senior in introductione artis musicæ quæstioni illi τί οὖν ἐστὶν ἐλάχιστον τῶν μελῳδουμένων, respondet, φθόγγος, quem non tantum ἐλάχιστον, sed etiam ἄτομον esse docet antiquæ musicæ celeberrimus auctor Aristides Quintilianus lib. 1. de Musicâ, atque ita authoritas æque ac ratio suffragatur huic emendationi, quæ fit unius tantum litteræ mutatione. Minimâ quoque mutatione alia fit eodem capite licet minoris momenti correctio, ubi vulgò male legitur, φησὶ καὶ τοὺς Πυθαγορικοὺς, legendum scilicet, φασὶ, ut apud Bryennium λέγουσι. Paulò inferiùs ubi legitur ἀποτελεῖται ὁ φθόγγος βραδείας δὲ βαρὺς, καὶ σφοδρᾶς μὲν μείζων ἦχος, ἠρέμου δὲ μικρὸς, legendum videtur ἠρεμαίας, & Bryennii authoritate confirmatur.

Hactenus de sono de quo agitur in cap. illo 6. In cap. vero 8. agitur de semitonio, & ita vulgò legitur κατὰ καὶ τὸ ἡμιτόνιον γράμμα οὐχ ὡς ἥμισυ φωνῆς καλοῦμεν ἀλλ' ὡς μὴ τῷ αὐτοτελεῖ κατὰ ταυτὸ φωνεῖν, legendum vero videtur καθὸ non κατὰ: legendum præterea ἀλλ' ὡς μὴ αὐτοτελῆ καθ' αὑτὸ φωνὴν ἀποτελεῖν, quæ lectio ejusdem Bryennii authoritate nixa veriorem vulgatâ sensum efficit.

Atque

Atque harum probatio lectionum desumi potest, ἐκ τῶν περὶ τοῖς μυστικοῖς ὑποτιθεμένων καὶ ἐκ τῶν περὶ τοῖς μαθηματικοῖς λαμβανομένων, ut Porphyrii verbis utar, quæ in commentariis clarissimi interpretis referuntur pag. 276. sed non sine mendo, malè enim ibi legitur, ἐκ τῶν ὑπὸ τῆς μυστῆς ὑποτιθεμένων.

Nec silentio prætermittenda est elegantissima, & audacter dicam, certissima alterius loci ejusdem Theonis emendatio paginâ 164. ubi de octonario loquitur: refertur ibi vetus inscriptio quam in columna Ægyptiaca reperiri tradidit Evander hoc modo, Πρεσβύτατος πάντων Ὄσιρις θεοῖς ἀθανάτοις πνεύματι καὶ οὐρανῷ ἡλίῳ καὶ σελήνῃ καὶ γῇ καὶ νυκτὶ καὶ πατρὶ τῶν ὄντων καὶ τῶν ἐσομένων ΕΡΩΤΕ μνημεῖα τῆς αὐτοῦ ἀρετῆς βίου συντάξεως, id est, ut vertit Bullialdus, antiquissimus omnium Rex Osiris diis immortalibus Spiritui, & Cœlo, Soli, & Lunæ, & terræ, & Nocti, & Diei, & patri eorum quæ sunt quæque futura sunt, prædicabo memoriam magnificentiæ ordinis vitæ ejus: mendosum procul dubio in hac inscriptione illud ΕΡΩΤΕ, & hanc lectionem si retineas quis inde sensus elici poterit? legendum igitur ΕΡΩΤΙ, atque ita parvâ unius scilicet litteræ mutatione huic loco sua lux, & amori sua laus facile restituitur; nec aliena est ab hoc loco sapientissimi Platonis, cujus velut interpres Smyrnæus ille, sententia, dum ait in convivio καὶ μὲν δὴ τήν γε τῶν ζώων ποίησιν πάντων τίς ἐναντιώσεται μὴ οὐχὶ ἔρωτος εἶναι σοφίαν ᾗ γίγνεται καὶ φύεται πάντα τὰ ζῶα, etenim animalium omnium effectionem, ut vertit Serranus, ex amoris sapientiâ existere, idest gigni atque nasci ecquis negaverit,

Per quem genus omne animantum
Concipitur, visitque exortum lumina Solis.

Apud Iulium Frontinum de aquæductibus Romæ pag. 106. editionis Plantinianæ, vulgò sic legitur: in vicenariâ fistulâ, quæ in confinio utriusque rationis posita est, utrique rationi penè congruit. Nam habet secundùm eam computationem, quæ interjacentibus modulis servanda est in diametro quadrantes viginti: cùm diametri ejusdem digiti quinque sint, & secundùm eorum modulorum rationem qui sequuntur ad eam, habet digitorum quadratorum ex gnomoniis viginti. Hîc procul dubio legendum non ad eam, sed aream: cujus emendationis ratio ex supputatione geometrica ducitur.

Eâdem etiam paginâ legitur, centenaria autem & centenum vicenum, quibus assiduè accipiunt, non minuuntur, sed augentur, Nec usu frequens est: videtur legendum Cen. idest centenaria, loco vocis illius Nec, litteris scilicet ordine inverso accipiendis, cum fortasse in manuscripto repertum fuerit Cen. hoc est centenaria, quod transcriptor transposuit & legendum Nec, particulâ sensui magis, ut videbatur, accommodatâ perperam existimavit.

His emendationibus unam aut alteram duorum insignium locorum addam, quorum primus est apud Sextum Empyricum, alter apud Athenæum: Sextus ille lib. 1. Pyrrhoniarum hypotyposeon pag. 12. ostendere conatur quam variæ sint pro diversitate ætatum Phantasiæ, παρὰ δὲ τὰς ἡλικίας, inquit, ὅτι ὁ αὐτὸς ἀὴρ τοῖς μὲν γέρουσι ψυχρὸς εἶναι δοκεῖ, τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν εὔκρατος καὶ αὐτὸ βρῶμα τοῖς μὲν πρεσβυτάτοις ἀμαυρὸν φαίνεται, τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν κατακορὲς, καὶ φωνὴ ἡ αὐτὴ τοῖς μὲν ἀμαυρὰ δοκεῖ τυγχάνειν τοῖς δὲ ἐξάκουστος, id est, ut vertit Henricus Stephanus, ex ætatibus autem quoniam idem aër senibus quidem frigidus esse videtur, aliis qui in ætatis flore constituti sunt bene temperatus, & idem cibus senibus quidem tenuis videtur, at iis qui florent ætate crassus, eodem modo & vox eadem, aliis quidem depressa esse videtur, aliis vero alta; at hujus loci elegantior sensus erit si legatur non βρῶμα sed χρῶμα, alioquin de sensu visus qui facilè maximam mutationem patitur, nullus hîc foret sermo: prætereà τὸ ἀμαυρὸν meliùs colori convenit quam cibo, & æquè de colore ac de cibo dici potest τὸ κατακορὲς, sic apud Virgilium legimus, *saturatas murice vestes, & hyali saturo fucata colore.*

Nunc ad Athenæi locum transeo; quis autem urbanissimi illius scriptoris sales variâ conditos eruditione ignorat? Et si quid in eo frigidum aut inficetum occurrat, quis ibi mendum subesse non suspicetur? Suspecta igitur erit lectio loci illius in quo hic auctor lib. 12. loquitur de depravatis Alcibiadis moribus, qui locus si uvlgatam lectionem retineas ipſo forſan Alcibiade depravatior erit : Athenæi verba hæc ſunt, Λυσίας δὲ ὁ ῥήτωρ περὶ τῆς τρυφῆς αὐτοῦ λέγων φησὶν, ἐκπλεύσαντες γὰρ κοινῇ Ἀξίοχος καὶ Ἀλκιβιάδης εἰς Ἑλλήσποντον ἔγημαν ἐν Ἀβύδῳ δύο ὄντε Μεδοντιάδα τὴν Ἀβυδηνὴν καὶ Ξυνωκείπην, ἔπειτα αὐτῶν γίνεται θυγάτηρ ἣν οὐκ ἔφαντο δύνασθαι γνῶναι ὁποτέρου εἴη, ἐπεὶ δὲ ἦν ἀνδρὸς ὡραία ξυνεκοιμῶντο καὶ ταύτῃ καὶ εἰ μὲν χρῷτο καὶ ἔχοι Ἀλκιβιάδης Ἀξιόχου ἔφασκεν εἶναι θυγατέρα, εἰ δὲ Ἀξίοχος Ἀλκιβιάδου : error hîc procul dubio in voce illa ξυνωκείπην, & legendum ξυνωκείτην hoc eſt concubuerunt , atque ita ſi falſa Xynoccipe deleatur , & ſola ſuperſit illa duobus nupta Medontias, portentoſæ iſtorum iuvenum libidinis novitati nihil detrahetur ; veritas autem iſtius emendationis ſatis per ſe patet , & ex ipsâ loci ſerie elici poteſt , in quo illud δύο ὄντε alioqui ſupervacaneum foret, nec jam amplius ambigua proles ; ratio igitur illius correctionis in promptu eſt , cui ejuſdem Athenæi accedit authoritas, is enim lib. 13. iterum de Alcibiade loquitur hoc modo, Μεδόντιδος γοῦν τῆς Ἀβυδηνῆς ἐξ ἀκοῆς ἔστερξε καὶ πλεύσας εἰς Ἑλλήσποντον σὺν Ἀξιόχῳ ὃς ἦν αὐτοῦ τῆς ὥρας ἐραστὴς, ὥς φησὶ Λυσίας ὁ ῥήτωρ ἐν τῷ κατ' αὐτοῦ λόγῳ, καὶ ταύτης ἐκοινόνησεν αὐτῷ , id eſt ut interpretatur Dalechampius , Medontidem Abydenam auditione tantùm ille amare cœpit , & imprimis charam habuit , eam tamen cum Helleſpontum navibus adiiſſet , Axiocho navigationis comiti , & pulchritudinis ipſius amatori , ut inquit Lyſias in oratione quam contra eum ſcripſit , utendam dedit : ibi autem fictitiæ Xynoccipes nulla mentio , & illud ἐκοινόνησεν æque ac ξυνωκείτην communes Alcibiadis , & Axiochi amores fuiſſe ſatis arguit.

Sed ab iſtorum juvenum voluptate oculos avertamus , & eam quæ ex ſtudiorum ſocietate percipitur, puriorem & diuturniorem, ſummumque adverſorum ſolatium litteras eſſe fateamur ; cum tu his mirum in modum oblecteris , non iniucundas tibi fore confido obſervationes in quibus amici manum agnoſces ; ipſius ego lucubrationum ſparſas varijs in locis reliquias è tenebris quibus abditæ jampridem erant , eruere conatus ſum , neque hæc contemnenda duxi , ut ex hoc ſpicilegio rerum quæ diligentiſſimos , ut ita loquar , meſſores latuerunt , pateat , quantam earum auctor in liberiori & conjecturis aperto critices campo ſegetem fuerit collecturus , ſi ſæpius in illo ſpatiari voluiſſet : Vale & me ama.

CEDE DEO,

SEU CHRISTUS MORIENS.

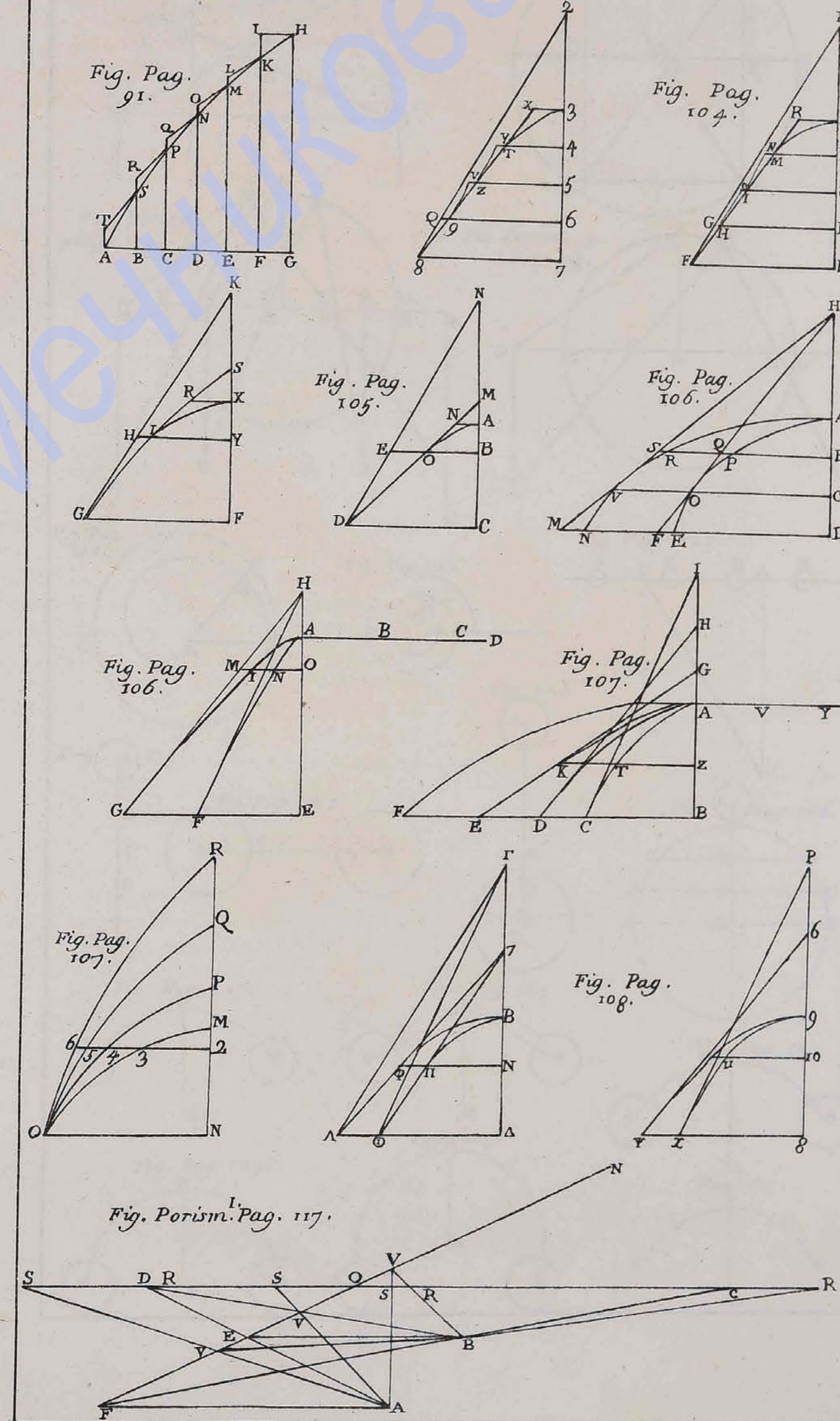
D. Petri de Fermat Carmen amœbæum ad D. Balzacum.

OBSTUPUIT totieſque eluſum mentis acumen
Dedidicit vanos veris præferre colores
Luminibus. Quid bella moves , deletaque pridem
Numina præſtigiis linguæ ſolertis adumbras
Infelix ratio ? Num te ſimulachra tot annis
Deſita , & imbelles Divûm ſub imagine formæ
Fallaci cinxere metu ? Num te oſtia Ditis
Aut ſtygiæ remorantur aquæ , Elyſiive receſſus ,
Et quidquid credi voluit Dijs æqua poteſtas ?
Perge tamen quò te ſecuro tramite ducunt
Balzaco præeunte viæ , nec inertia dudùm
Fatidicæ reſponſa Deæ , quercuſve ſilentes
Dodonæ , aut taciti venerare oracula Phœbi ;
Cede Deo. Ceſſit veterum numeroſa propago
Cœlicolûm : Deus ecce Deus , quem prona parentem
Agnoſcit natura ſuum , cui terra , ſalumque
Paret , & edomitæ fatalia flabra procellæ ,
Submittuntque ipſæ jam non ſua murmura nubes.
Hic puro fulgore micans , de lumine lumen
Dum traheret , Deus unus erat , natuſque ſupremi
Æternâ æternùm manans de mente parentis
Aſſumpſit veros morituræ carnis amictus ,
Si qua forte queat mortalia flectere corda ,
Tantillumque animis extundere poſſit amorem.
At poſtquam ſummi tandem mandata parentis
Horrendo ſacrum caput objecere furori ,
Humanas mœrenti animo depromere voces
Cœpit , & inſolito ſuccuſſus membra fragore ,
Omnipotens , ſi nondùm orbem mala noſtra piarunt ,
Et placet infandum pœnæ genus , en , ait , adſum
Victima , lethiferoque libens ſuccedo dolori.
Cerne tamen ſudore madens & ſanguine corpus ,
Et ſi nulla ſuper noſtræ tibi cura ſalutis ,
At ſaltem ſolare animum non digna ferentem.
Dixit & humentes oculos ad ſydera tollens ,
Quas non ille preces , quæ non ſuſpiria fudit
Anxius ærumniſque gravis , tua , rector Olympi ,

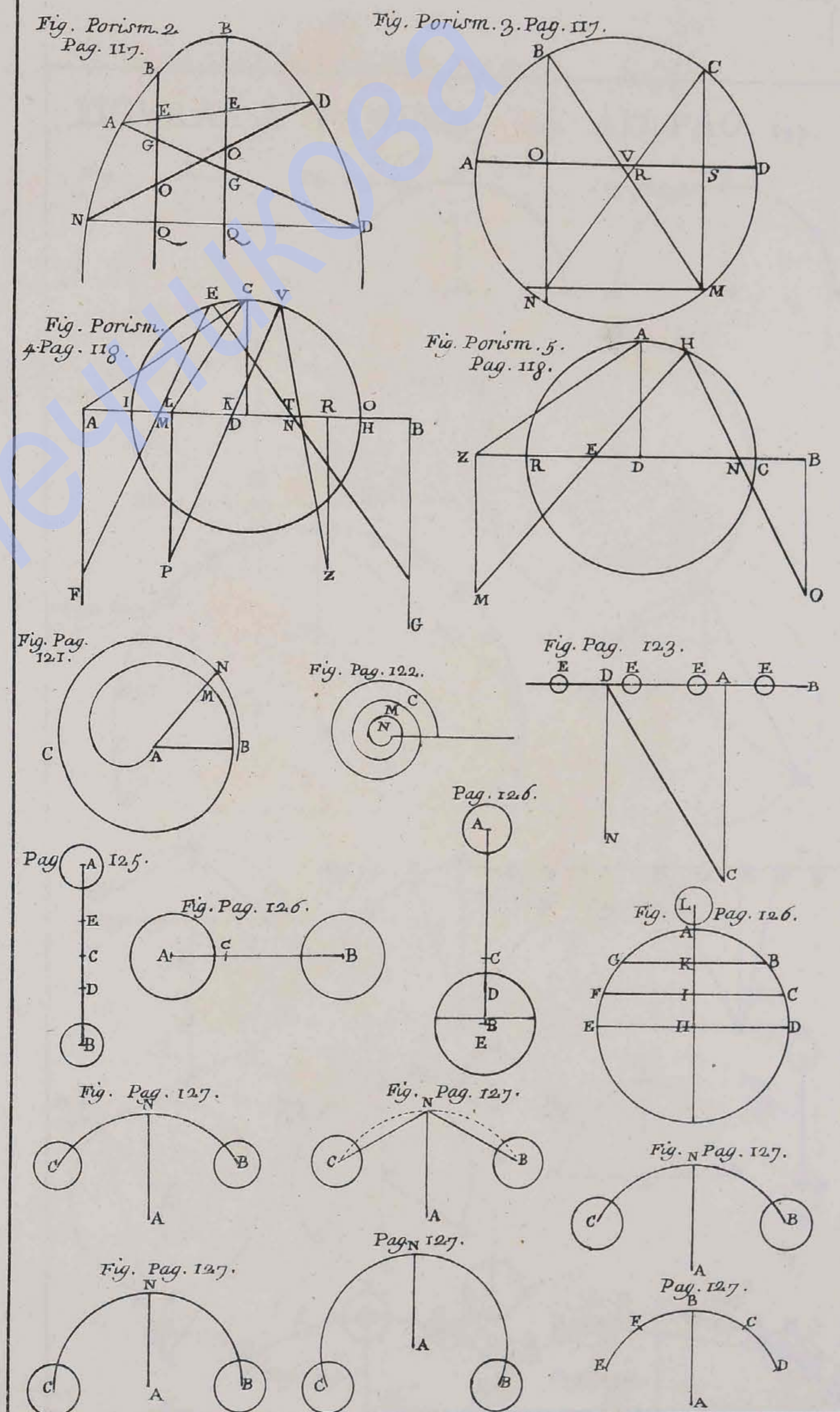
Dum ſatagit, mentemque futuræ accingere pugnæ
Sponte parat? Cœlo intereà demiſſus ab alto
Aliger, ut varios animi componeret æſtus,
Improviſus adeſt, ceciditque repente fragorum
Turba minax, auctæque ſuperno robore vires
Deſpectant longè pœnas, nondumque paratæ
Incubuere Cruci: nam cur, ſupreme, moraris
Rector, ait, cur me per tanta pericula vectum
Siſtis, inexpletoque obices opponis amori?
Dixerat, humaniſque iterum ſuccumbere curis
Viſa caro, triſtes agitant præcordia motus,
Necdum ſecuro greſſu veſtigia ponit.
Hæc inter dubiæ mentis certamina totam
Noctem orat, ſocios altus ſopor urget inertes,
Quos decuit vigiles oranti impendere curas.
Heu pavidæ mentes, ſi nec cœleſtia tangunt,
Nec veræ virtutis honos, hoc munere ſaltem
Defungi jurata fides, juſſumque magiſtri
Debuit una ſequi; ſed jam ſtrepit undique murmur,
Et ſegni tenebras abrumpunt lumine tædæ;
Quò ſe cumque feret, jam vis inimica propinquat,
Fictaque adorantis ſpecies, verique dolores
Non procul. Infauſti tandem ſub pondere ligni
Deficit, affixuſque cruci, jam verbera paſſus,
Jam ſpinas, laceros ſpargens tormenta per artus,
Nempe urgebat amor, noſtræque cupido ſalutis,
Humanam egreſſus ſortem, mortique tremendus
Dum fieret morti propior, fremituſque, minaſque,
Et conjuratæ ſpernens convicia turbæ,
Degeneri vitam populo pacemque precatur,
Nec, quas ipſe tulit pœnas, tortoribus optat.
Et jam finis erat, violataque pectora puri
Muricis undantes ſpargebant undique rivos.
Nec tamen imbelli ſubiit fata ultima mente;
Quin magis aſſurgens, divinaque lumina, Cœlo
Sic propior, vocemque ſonoram ad ſydera tollens,
Summe Deus, quid me moribundum deſeris, & jam
Semianimem, populique tuoque furore fatigas?
Sat tibi, ſat mundo dedimus, finitaque dudum
Singula præſcriptas habuere oracula metas.
Sic fatur moriens, elataque lumina rursùm
Figit humi, nec jam Cœlum ſpectare facultas
Ulla datur, cecidere animi, marcentiaque ora
Æthereo vocem extremam fudere parenti:
Hanc tibi, ſumme parens, animam commendo, nec ultra
Proſiliit, vitamque ſimul cum voce reliquit.
Haud ſecùs extremo videas ſpiramine lychnum
Ingentem niſu valido producere lucem,
Et ſursùm elatas, iterum ſubſidere flammas,
Donec anhelanti ſimilem circumfluus humor
Deſerit, & denſæ ſubeunt fuliginis undæ.

Debilis intereà viſa eſt ſcintilla per umbras
Semianimes atris miſcere vaporibus ignes,
Deficiunt tandem & vano conamine ſursùm
Evecti, æternis noctis conduntur in umbris.
Nec tamen æternæ claudent tua lumina noctes,
Nate Deo, veram referet lux tertia lucem,
Et majora dabit renovato lumina mundo.
Quò me, quò, Balzace, rapis? juvat ire per altum
Exemplo quocùnque tuo me muſa vocarit,
Exiguo ſine te vix ſuffectura labori;
Scilicet optati venient tanto Auſpice verſus,
Et quo Pierij frueris ſuper ardua montis
Editus, hoc olim forſan potietur honore
Balzaco proles non inficianda parenti.

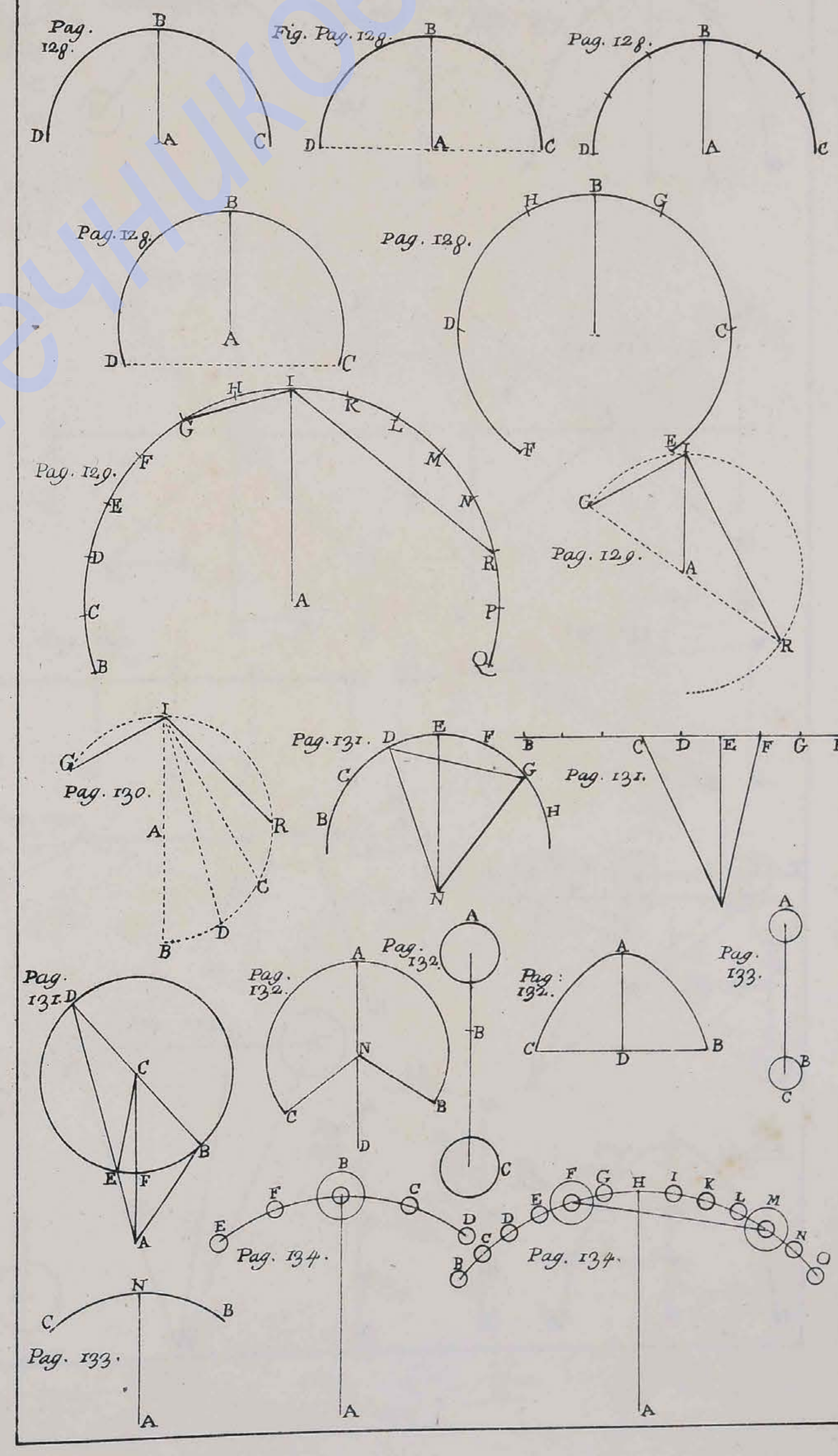
FIGVRÆ À PAGINA 104. AD Pag. 117.
PRÆTER FIG. QVÆ DEEST Pag. 91.



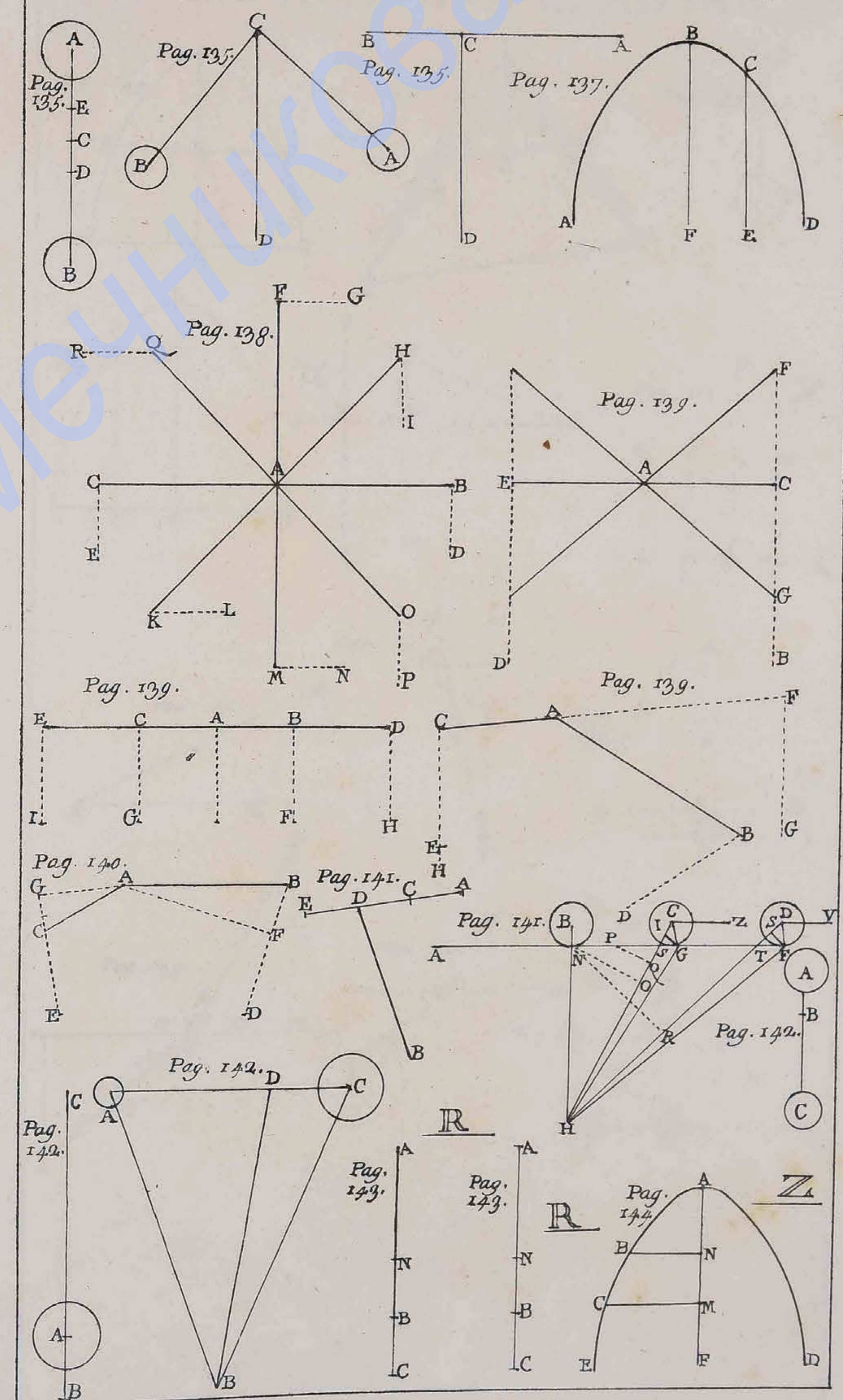
FIGVRÆ À PAGINA 117. AD Pag. 127.



FIGVRÆ À PAGINA 127. AD PAG. 134.



FIGVRÆ À PAGINA 134. AD PAG. 144.



FIGVRÆ À PAGINA 144. AD PAG. 167.